

## מבני נתונים - תרגיל 1

תאריך פרסום: 10.03.2019

תאריך הגשה: 24.03.2019, 23:59

מרצה ומתרגל אחראים: מיכאל אלקין, שחר שנפ

הנחיות:

- הגשת העבודה הינה בזוגות.
- העבודה חייבת להיות מוקלדת.
- יש להגיש קובץ בפורמט pdf למערכת ההגשה.
- אין צורך לפרט דברים שנלמדו כיתה. עם זאת, יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- $\log()$  מתייחס ללוגריתם בבסיס 2.
- יש לתת הוכחות פורמליות עבור חסמים אסימפטוטיים, בדומה לדוגמאות שהועברו בכיתה.
- שאלות לגבי העבודה יש לשאול בפורום באתר הקורס או בשעות קבלה של המרצה/המתרגל האחראיים על העבודה.

### שאלה 1

סדרו את הפונקציות הבאות לפי סדר אסימפטוטי  $O(\dots)$  מן ה"קטנה" ל"גדולה".  
אם שתי פונקציות בסידור מקיימות  $f_i = \Theta(f_k)$  אז ציינו זאת. תנו הוכחה פורמלית לתשובותיכם.

$$f_1(n) = 2019, \quad f_2(n) = 2^{\log_{\sqrt{2}} n}, \quad f_3(n) = 2^{\sqrt{n}}, \quad f_4(n) = \frac{1}{n^2}, \quad f_5(n) = 4^n,$$

$$f_6(n) = 2^{3^n}, \quad f_7(n) = n^n, \quad f_8(n) = 3^{2^n}, \quad f_9(n) = \log\left(n^{\frac{2}{3}}\right), \quad f_{10}(n) = \log_3(3^n n^2),$$

$$f_{11}(n) = \log(n^{100}), \quad f_{12}(n) = n^2 + n \cdot \ln(n^{10}) + n + 10$$

### שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

- א. קיימת פונקציה  $f(n)$  כך ש-  $f(n-k) \neq \Theta(f(n))$  כאשר  $k \geq 1$  הוא קבוע חיובי.
- ב. קיימת פונקציה  $f(n)$  כך ש-  $(f(n))^2 = O(f(n))$  וגם  $f(n) = \Omega(\log(\log(n)))$ .
- ג. יהיו  $f(n), g(n)$  פונקציות כך ש  $f(n), g(n) \geq 1$  לכל  $n$ . אזי  $f(n) + g(n) = O(f(n) \cdot g(n))$ .
- ד. לכל  $f(n), g(n)$  מתקיים ש  $f(g(n)) = O((f(n))^{g(n)})$ .

**שאלה 3**

מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים עבור  $T(n)$  בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי  $T(n)$  קבועה עבור  $n$  קבוע. מצאו חסמים הדוקים ככל שתוכלו ונמקו את תשובותיכם.

א.  $T(n) = T\left(n^{\frac{2}{3}}\right) + 17$

ב.  $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^4 \log \log(n)$

ג.  $0 < c < 1, T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1$

ד.  $T(n) = T\left(\frac{2n}{5}\right) + 3T\left(\frac{n}{5}\right) + n$

ה.  $T(n) = \frac{3}{2}T(n-1) + 1$

**שאלה 4**

מהי סיבוכיות זמן ריצה של קטעי הקוד הבאים (במונחים של  $\Theta$ )? נסחו את תשובותיכם באופן מפורש (דהיינו ללא שימוש בסכומים, מכפלות או סימן עצרת). הסבירו ונמקו את דרך ההגעה לפתרון.

a) **function** BubbleSort( $A[1..n]$ )

```

for i ← 1 to n - 1
    for j ← n downto i + 1
        if  $A[j-1] > A[j]$ 
            temp ←  $A[j-1]$ 
             $A[j-1] \leftarrow A[j]$ 
             $A[j] \leftarrow$  temp

```

b) **function** exp(base, power)

```

if (power = 0)
    return 1
else if (power = 1)
    return base
else
    return base · exp(base, power-1)

```

c) **function** exp2(base, power)

```

if (power = 0)
    return 1
else if (power = 1)
    return base
else if (mod(power, 2) = 0)
    tmp ← exp2(base, power/2)
    return tmp · tmp
else
    return base · exp2(base, power-1)

```

**שאלה 5**

א. הציעו אלגוריתם המקבל שני פרמטרים: מערך ממוין  $A$  וערך  $x$ , ומחזיר אינדקס של  $x$  במערך. אם  $x$  לא נמצא במערך  $A$  יש להחזיר -1.

זמן ריצה הדרוש הינו  $O(\log d)$ , כאשר  $d$  הוא מספר האיברים מופיעים לפני איבר  $x$  במערך המבוקש במידה ו- $x$  (היה) קיים במערך  $A$  (ראו דוגמה בסוף השאלה).  
רמז: חשבו על החיפוש בצעדים הולכים ומשתנים בקצב מעריכי, לאו דווקא מאמצע המערך.

ב. נתונים ארבע מערכים  $C, B, A$  ו- $D$  של מספרים שלמים חיוביים, כאשר כל מערך ממוין בפני עצמו ואין תלות בין הערכים במערכים שונים. נגדיר חציון של המערך הממוין להיות האיבר האמצעי של המערך. במידה והמערך מכיל מספר זוגי של איברים, אז נגדיר חציון להיות איבר שנמצא במקום ה- $\frac{n}{2}$ , כאשר  $n$  הוא מספר האיברים במערך.

הציעו אלגוריתם עם זמן ריצה לניארי למציאת החציון של המערך המאוחד הממוין שבנוי מהאיברים של ארבעת המערכים (ראו דוגמה בסוף השאלה) בנוסף על אלגוריתם להשתמש ב- $O(1)$  זיכרון נוסף.

שימו לב: המערך המאוחד אינו נתון! השאלה היא: אילו היה נתון מערך ממוין שבנוי מכל האיברים של מערכים  $C, B, A$  ו- $D$  יחד, איזה איבר היה החציון של המערך הזה?

**בכל סעיף נמקו בקצרה למה האלגוריתם שהצעתם מחזיר תשובה נכונה, ונתחו זמני הריצה.**

לדוגמא: יהיו נתונים ארבע מערכים  $C, B, A$  ו- $D$  כדלקמן:

index	1	2	3	4	5
A:	1	5	10	15	20

index	1	2	3	4	5
B:	2	3	4	6	7

index	1	2	3	4	5
B:	25	30	35	40	45

index	1	2	3	4	5
B:	8	9	90	100	145

**find (B, 7)**

על האלגוריתם להחזיר אינדקס 5, שכן  $B[5] = 7$ .  
 לפני 7 מופיעים במערך B איברים : 4, 3, 2, ו-6. לפי דרישת זמן ריצה של האלגוריתם, צריך למצוא את 7 במערך B בזמן ריצה לכל היותר  $O(\log 4)$ .

**find (B, 20)**

על האלגוריתם להחזיר אינדקס -1, שכן 20 אינו מופיע במערך B.  
 אילו 20 היה מופיע במערך B, לפני היו נמצאים שבעה איברים : 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. לפי דרישת זמן ריצה, יש להחזיר תשובה בזמן  $O(\log 7)$ .

**median ()**

אילו היה לנו מערך מאוחד ממוין המורכב מאיברים של A, B, C ו-D, היו בו 20 איברים :

index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
AUB:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	35	40	45	90	100	145

10 הינו החציון של המערך המאוחד. לכן, האלגוריתם צריך להחזיר תשובה "10".