Université Mohammed V-Rabat **Année 2021-2022**
Faculté des Sciences

Travaux Dirigés de Mécanique Analytique

Série n°2-SMP5

Exercice 1 :

Par rapport au repère orthonormé direct fixe et galiléen R_0 (O ; $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) où O$\vec{z}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement d'un cône homogène (S) autour de son sommet fixe O. Le solide (S) est de masse m , de centre d'inertie G et d'axe de symétrie de révolution O$\vec{z}$. On pose $\vec{OG} = a\ \vec{z}$ ($a > 0$) et on note A, A et C les moments principaux d'inertie de (S) en O . On introduit les repères orthonormés directs intermédiaires :

R_1 (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}_0$) et R_2 (O ; $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$) et on note :

$$\psi = (O\vec{x}_0 , O\vec{u}) \quad , \quad \theta = (O\vec{z}_0 , O\vec{z}) \quad \text{et} \quad \varphi$$

les angles de précession, de nutation et de rotation propre de (S) mesurés autour de O.
A tout instant, on suppose :

- qu'une force connue , donnée par $\vec{F} = X\ \vec{u} + Y\,\vec{w} + Z\ \vec{z}$, est appliquée sur (S) en G
- et qu'un couple $\vec{C}$ impose à (S) une précession : $\psi = \omega\, t + \psi_0$ (ω et ψ_0 constantes).

Toutes les liaisons seront prises principales

- Donner, **dans la base associée au repère R_2**, les composantes des vecteurs rotation instantanée $\vec{\Omega}$ (S/R_0) de (S) par rapport à R_0 et vitesse $\vec{V}$ (G / R_0) de G par rapport à R_0 compatibles avec les liaisons principales.
- Calculer l'énergie cinétique compatible T (S / R_0) de (S) par rapport à R_0.
- Donner l'énergie potentielle de pesanteur $U_p(S / R_0)$ de (S) par rapport à R_0.
- Calculer les puissances virtuelles de la réaction $\vec{R}_0$, du couple $\vec{C}$ et de la force $\vec{F}$.
- Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (S) par rapport à R_0.

Exercice 2 :

Dans le plan vertical fixe (O ; $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$) du repère orthonormé direct et galiléen R (O ; $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) où O$\vec{y}_0$ est la verticale ascendante, on considère dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement du système (Σ) constitué :

- d'un cerceau (C) homogène de centre O, de masse M, de rayon R et d'axe O$\vec{z}_0$
- et d'une tige (AB) rectiligne, homogène, de masse m , de longueur 2 L et de centre d'inertie G

A tout instant, le cerceau (C) tourne sans frottement autour de son axe O$\vec{z}_0$ avec une vitesse angulaire constante ω ($\Theta = \omega\, t + \Theta_0$ où Θ_0 est une constante). On appelle $\vec{C}$ le moment du couple moteur qui impose cette rotation. La tige (AB) peut tourner sans frottement autour de son extrémité A fixée sur la circonférence de (C).

La liaison $\theta = \omega\, t + \theta_0$ sera prise complémentaire, toutes les autres liaisons de l'énoncé seront prises principales. On introduit les repères orthonormés directs :

$Rc\ (O ; \vec{a}, \vec{b}, \vec{z}_0)$ lié à (C) et $R_{AB}\ (A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ lié à (AB) et on pose :

$$\theta = (O\vec{x}_0, O\vec{a}) \quad , \quad \psi = (A\vec{x}_0, A\vec{u})$$

- Donner, <u>dans la base associée à R_0</u> , les composantes des vecteurs vitesse réelle $\vec{V}(G/R_0)$ et vitesse virtuelle $\vec{V}^*(G)$ de G compatibles avec les liaisons principales.
- Calculer l'énergie cinétique compatible $T(\Sigma / R_0)$ de (Σ) par rapport à R_0.
- Donner l'énergie potentielle de pesanteur $U_{pesant}(\Sigma / R_0)$ de (Σ) par rapport à R_0.
- Calculer la puissance virtuelle P^* du couple moteur agissant sur le cerceau.
- Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (Σ) par rapport à R_0.
- Donner l'expression du moment $\vec{C}$ du couple agissant sur le cerceau.

Exercice 3 :

Par rapport au repère orthonormé direct fixe et galiléen $R_0\ (O ; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{z}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement d'une sphère homogène (S) de centre G, de masse m, de rayon R et de moment central principal d'inertie A.
La sphère (S) roule et glisse sans frottement sur le plan horizontal fixe $(O ; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ avec lequel elle est en contact ponctuel permanent en I.
On introduit les repères orthonormés directs intermédiaires suivants :
$R_1\ (G ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$, $R_2\ (G ; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ et $R\ (G ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à (S) , on pose

$$\vec{OG} = x\ \vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + R\,\vec{z}_0$$

et on note $\psi = (G\vec{x}_0, G\vec{u})$, $\theta = (G\vec{z}_0, G\vec{z})$ et φ
ψ , θ et φ étant la précession, la nutation et la rotation propre de (S) mesurées autour de G.
On suppose, qu'à tout instant, un couple moteur $\vec{C}$ impose à (S) la liaison: $\psi = \omega\, t + \psi_0$ où ω et ψ_0 sont des constantes).

Toutes les liaisons seront prises principales

1-Donner, <u>**dans la base associée au repère R_2**</u>, les composantes du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}\ (S/R_0)$ de (S) par rapport à R_0 .

2- Donner, <u>**dans la base associée à R_0**</u> , les composantes des vecteurs vitesses réelle $\vec{V}(I \in S/R_0)$ et virtuelle $\vec{V}^*(I \in S)$ compatibles avec les liaisons principales.
3- Calculer l'énergie cinétique compatible $T(S / R_0)$ de (S) par rapport à R_0.
4- Donner l'énergie potentielle de pesanteur $U_p(S / R_0)$ de (S) par rapport à R_0 et la puissance virtuelle P^* des efforts de liaison.
5- Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (S) par rapport à R_0
6- Ecrire, après avoir justifié son existence, l'intégrale première de Painlevé pour (S) par rapport à R_0.
7- Par application du théorème de l'énergie cinétique à (S) par rapport à R_0, donner l'expression du couple $\vec{C}$.