Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique

Série n$^\circ$ 1

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

1. Décrire la suite des opérations sur les lignes pour mettre en place la méthode du pivot sur A.
2. Réaliser la décomposition LU de la matrice de A.
3. En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = {}^t(0, 2, -1, 5)$.
4. Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2 x = b$.

Exercice 2. On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

1. Vérifier que l'algorithme de Gauss ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.
2. Trouver une matrice de permutation P telle que la matrice PA soit factorisable.
3. Calculer la factorisation LU de la matrice PA.
4. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en remplaçant PA par LU et en utilisant les algorithmes descente et de remontée.

Exercice 3. On considère les deux systèmes linéaires suivants :

$$A_1 x = b_1, \quad \text{où} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A_2 x = b_2, \quad \text{où} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A_1.
2. Résoudre le système linéaire $A_1 x = b_1$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.
3. Vérifier que l'algorithme de factorisation LU sans permutation pour la matrice A_2 ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.

4. Trouver une matrice P de permutation de façon à ce que la matrice PA_2 soit factorisable, puis calculer la factorisation LU de PA_2.
5. Résoudre le système linéaire $A_2x = b_2$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.
6. Calculer le déterminant de la matrice A_2 en utilisant sa factorisation LU (Sugg. on sait que $det(A_2) = det(LU) = det(L) \times det(U)$).

Exercice 4. On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 10 & 26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 35 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
2. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation de Cholesky.

Exercice 5. On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \kappa & 0 \\ \kappa & \gamma & \beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

et $\gamma, \kappa, \beta \in \mathbb{R}$ sont trois paramètres réels.

1. Sans construire les matrices d'itération, donner des conditions suffisantes sur les paramètres γ, κ et β telles que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes.
2. Ecrire la matrice d'itération B_J de la méthode de Jacobi et donner les conditions nécessaires sur γ, κ, β pour que la méthode soit convergente.

Exercice 6. On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. On veut résoudre le système par la méthode de Gauss-Seidel. Ecrire la matrice d'itération B_{GS} de cette méthode.
2. Que peut-on dire de la convergence de la méthode de Gauss-Seidel ?
3. En partant du vecteur initial $x^{(0)} = {}^t(1, 1)$, calculer les deux premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel

Exercice 7. Soit le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

à l'aide des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel à partir de $x^{(0)} = {}^t(0, 0, 0)$ (faire les 5 premières itérations seulement). Que remarque-t-on ?