Optimizasyon

Hesaplamalı Matematik I - Özgür Martin

Motivasyon: Doğrusal Bağlanım

$$y_i \approx \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i}_{\hat{y}_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$ i. kalıntı (ith residual)

Kalıntı Kareler Toplamı (Residual Sum of Squares)

$$\mathrm{KKT} = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$

(Amaç: Bu toplamı minimize eden $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini bulalım)

En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi (Least Squares Method)

$$\min_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1} \text{KKT} = \min_{\beta_0,\beta_1} (y_1-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_1)^2+(y_2-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_2)^2+\ldots+(y_n-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_n)^2$$

Minimize edilmek istenen fonksiyon basit (doğrusal) olduğundan analitik bir çözüm bulabildik:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Burada $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

Peki fonksiyon karmaşık olsaydı? Yaklaşık çözüm?

Kısıtsız Optimizasyon (Tek Değişkenli)

Problem:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

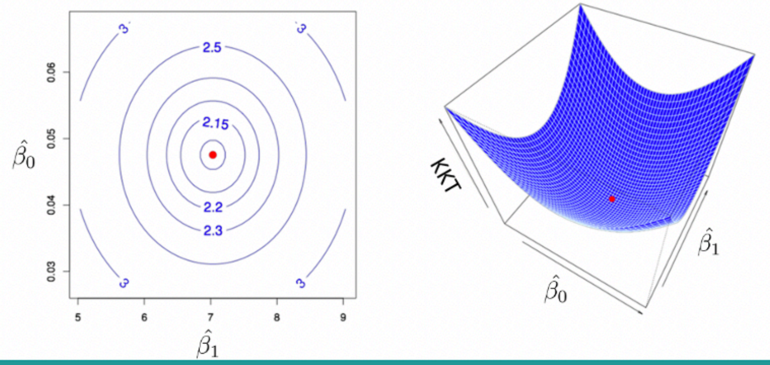
Hatırlatma:

En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi (Least Squares Method)

$$\min_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1} \ \mathrm{KKT} = (y_1-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_1)^2+(y_2-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_2)^2+\ldots+(y_n-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_n)^2$$

Çözüm:

Dışbükey Fonksiyon



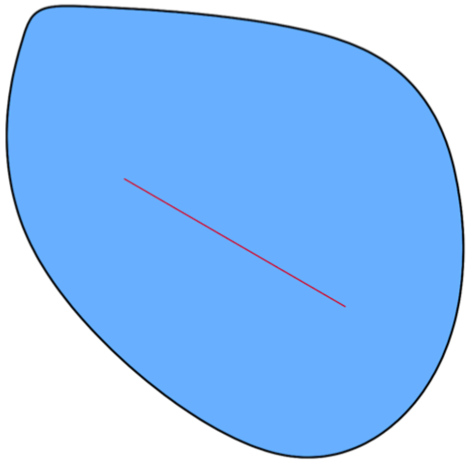
Tanımlar

Tanım

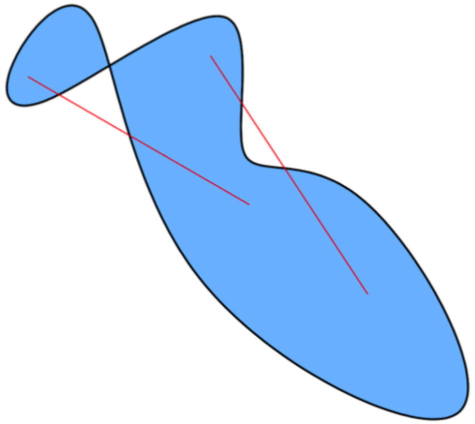
$S \in \mathbb{R}^n$ kümesinin dışbükey (convex) olması için S kümesinden herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının tamamının S kümesinde olması gerekir. Matematiksel olarak gösterirsek, her $x, y \in S$ çifti ve tüm $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in S$$

olmalıdır.



Dışbükey küme



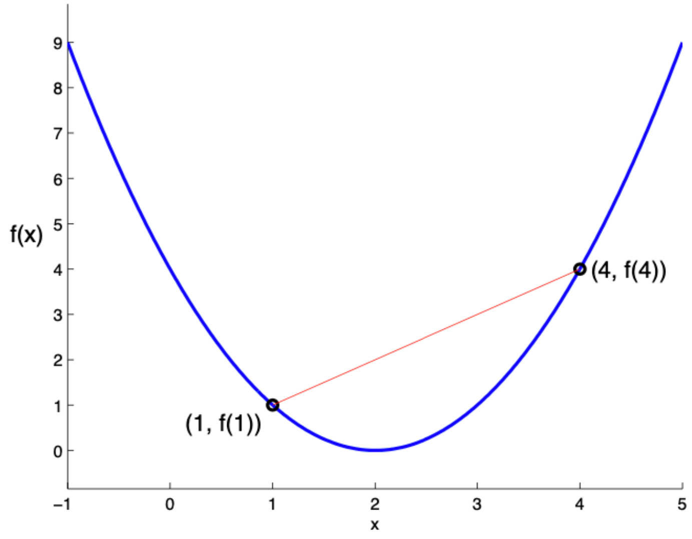
Dışbükey olmayan küme

Tanım

$f(\cdot)$ ile gösterilen bir fonksiyonun dışbükey olması için tanım kümesinin dışbükey olması ve bu kümeden seçilen herhangi x, y çifti için $f(\cdot)$ grafiğinin $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında kalması gerekir. Matematiksel olarak ifade edersek, her x, y ve tüm $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.



- Bir $f(\cdot)$ fonksiyonunun içbükey (concave) olması, $-f(\cdot)$ fonksiyonunun dışbükey olduğunu gösterir.
- Dışbükey bir fonksiyon ile yazılan kısıtsız problemlerde lokal minimum noktası, global minimum noktası olur.
- Kabaca söylemek gerekirse, pek çok durumda dışbükey fonksiyonlar ile çalışıldığında minimum noktasını belirlemek için kullanılan gerek şartlar aynı zamanda yeter şartlar olurlar.
- Dışbükey fonksiyonlar, lokal olarak daha karmaşık ve dışbükey olmayan fonksiyonların yaklaşık gösteriminde kullanılırlar.

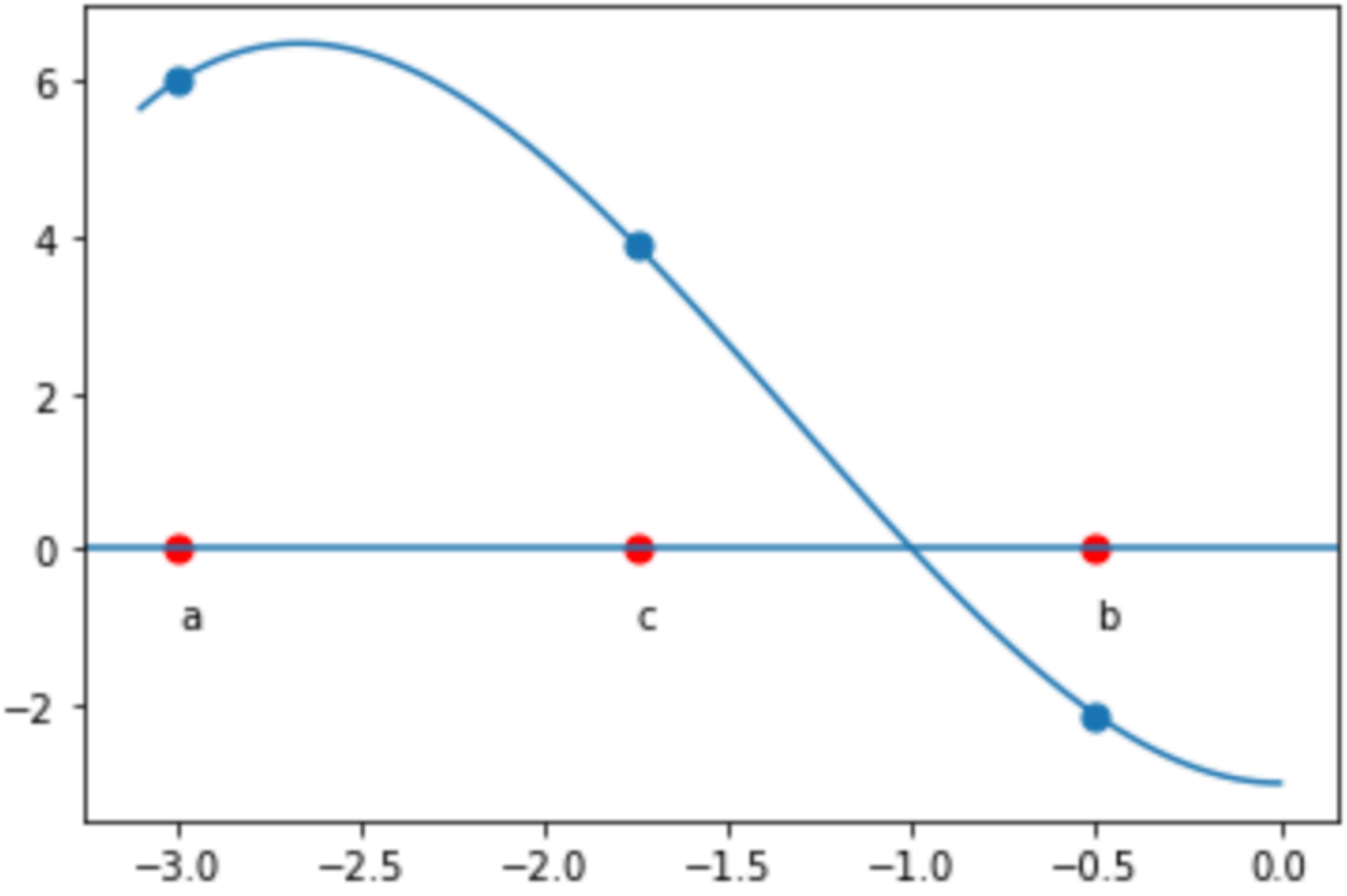
İkiye Bölme Yöntemi

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(\mathrm{L}) < 0$ ve $f(U) > 0$ olmak üzere, $[L, U]$ kümesi üzerinde f fonksiyonunun bir kökünü arıyoruz.

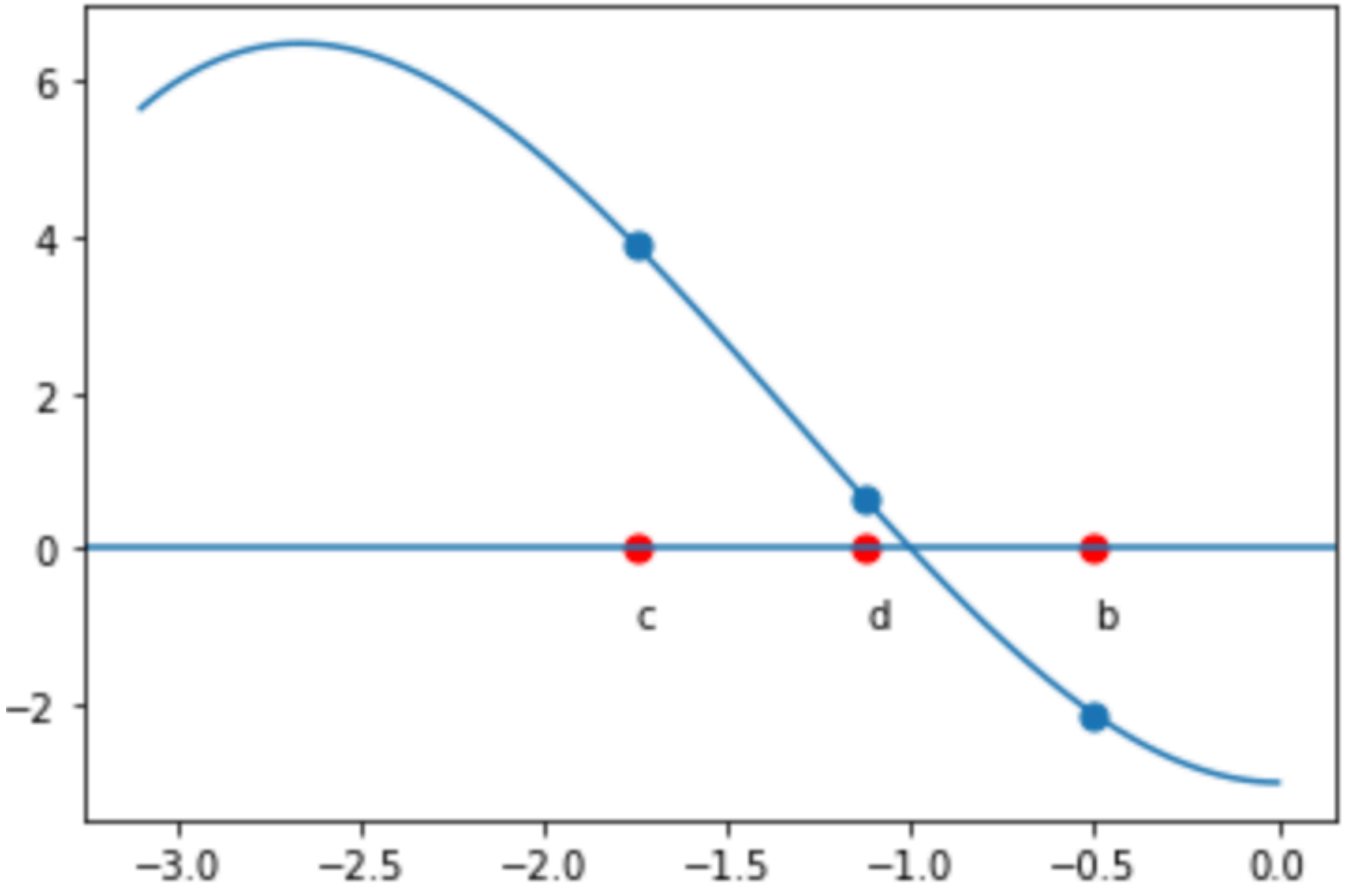
İkiye Bölme Yöntemi

1. Orta noltayı bul: M= $\dfrac{\boldsymbol{L+U}}{\boldsymbol{2}}$.
2. $f(M)$ değerini hesapla.
3. Bulduğumuz değere göre:
   - $f(M) < 0$ ise $L = M$
   - $f(M) > 0$ ise $U = M$
   - $f(M) = 0$ ise $L = M$ ve $U = M$
4. $[L, U]$ yeterince küçük olana kadar devam et.

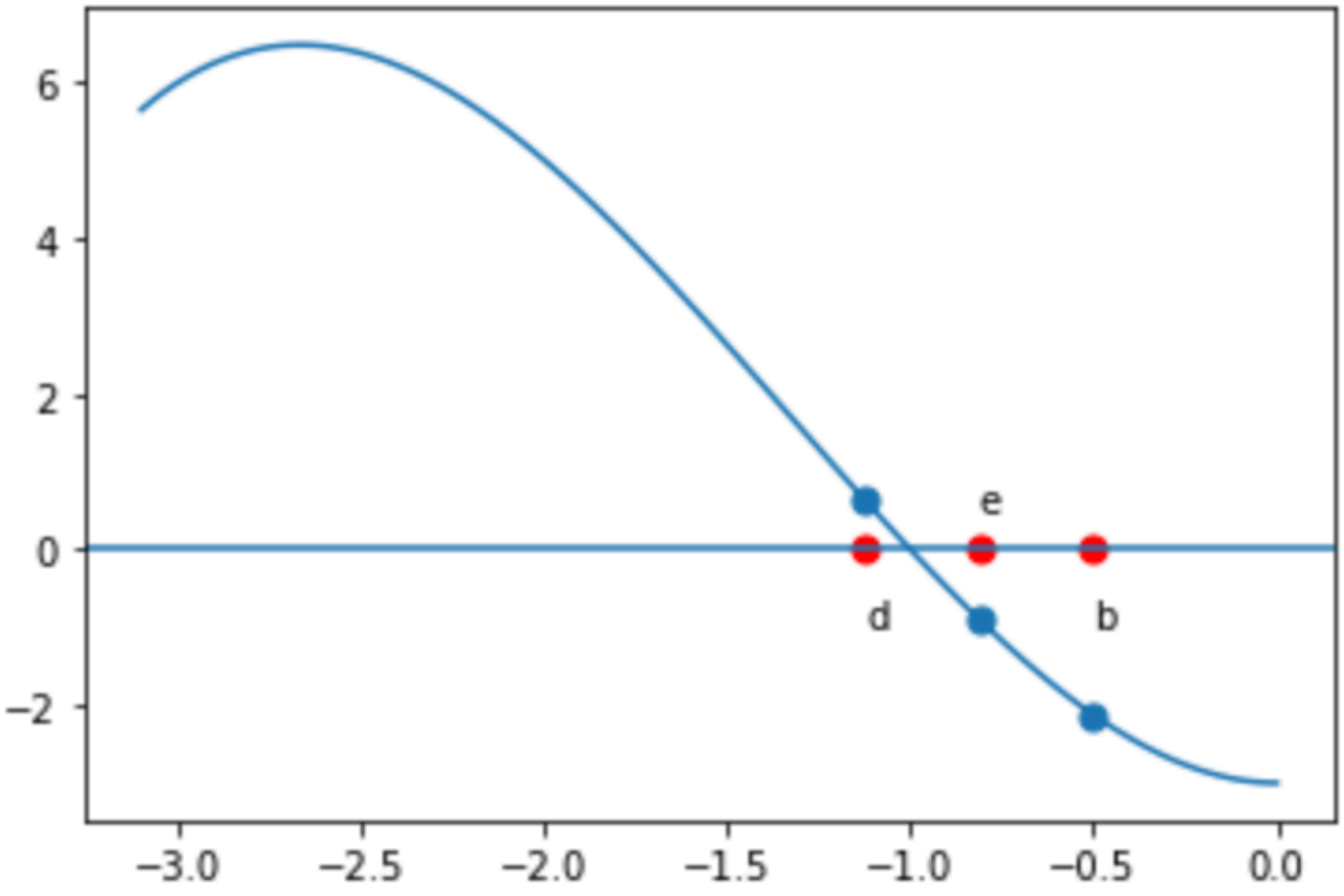
İkiye Bölme Yöntemi



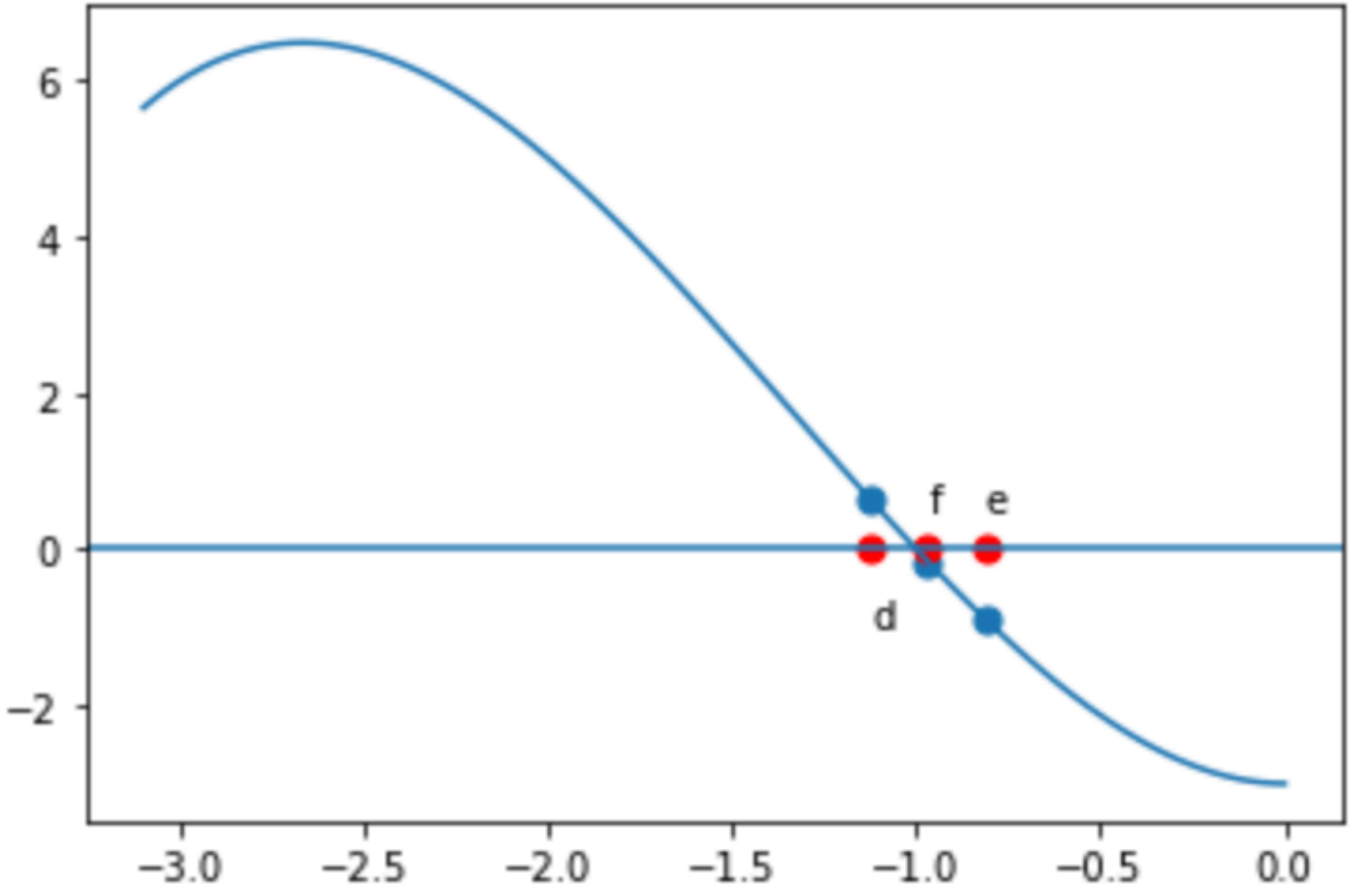
İkiye Bölme Yöntemi



İkiye Bölme Yöntemi



İkiye Bölme Yöntemi



İkiye Bölme Yöntemi ile Optimizasyon

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(\mathrm{L}) < 0$ ve $f'(U) > 0$ olmak üzere, $[L, U]$ kümesi üzerinde f fonksiyonunun en küçük değerini arıyoruz (fonksiyon dışbükey ise $f'(x) = 0$ olan x noktasını).

İkiye Bölme Yöntemi

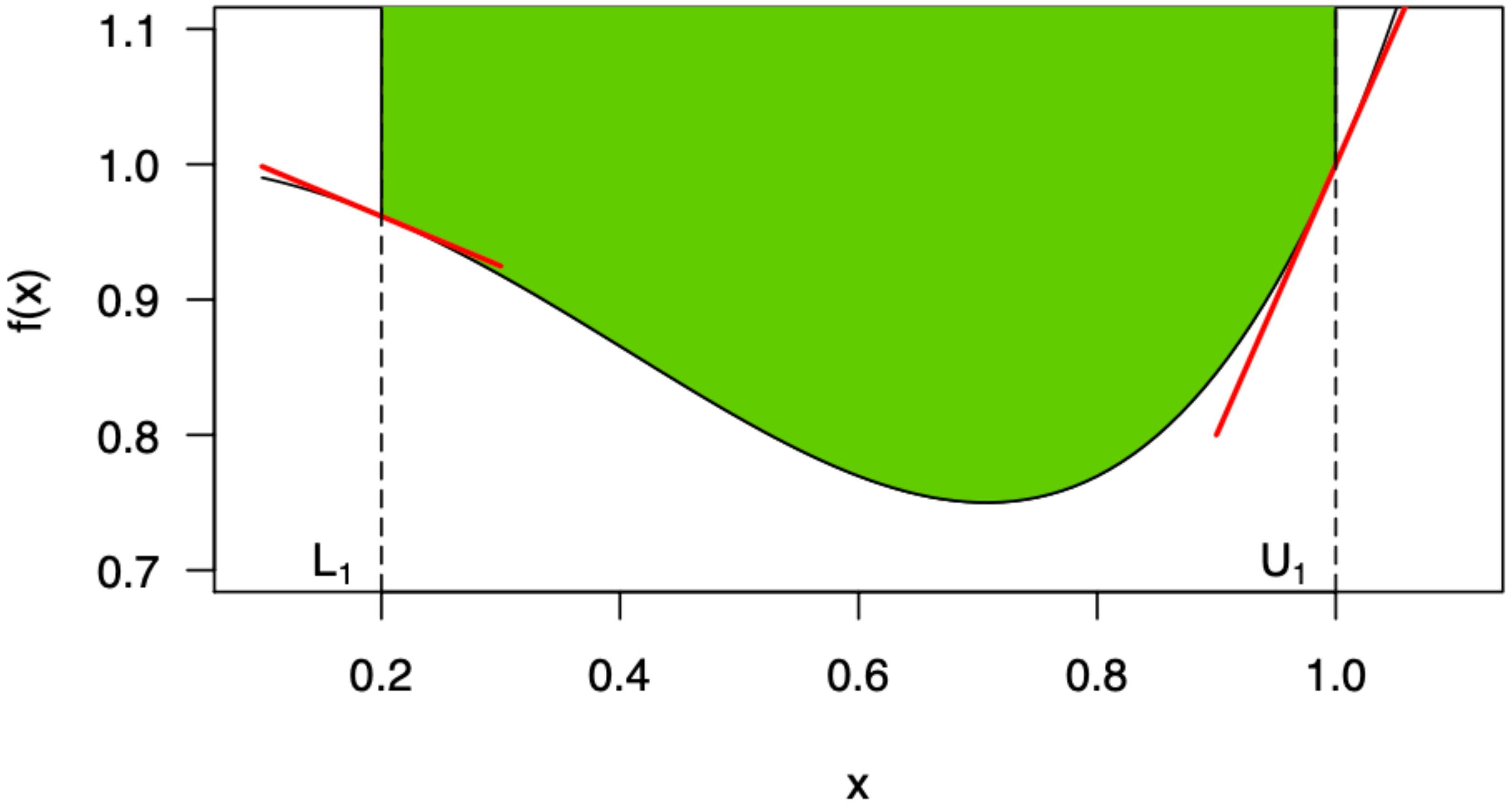
1. Orta noltayı bul: M= $\boldsymbol{\frac{L+U}{2}}$.
2. $f'(M)$ değerini hesapla.
3. Bulduğumuz değere göre:

   $f'(M) < 0$ ise $L = M$

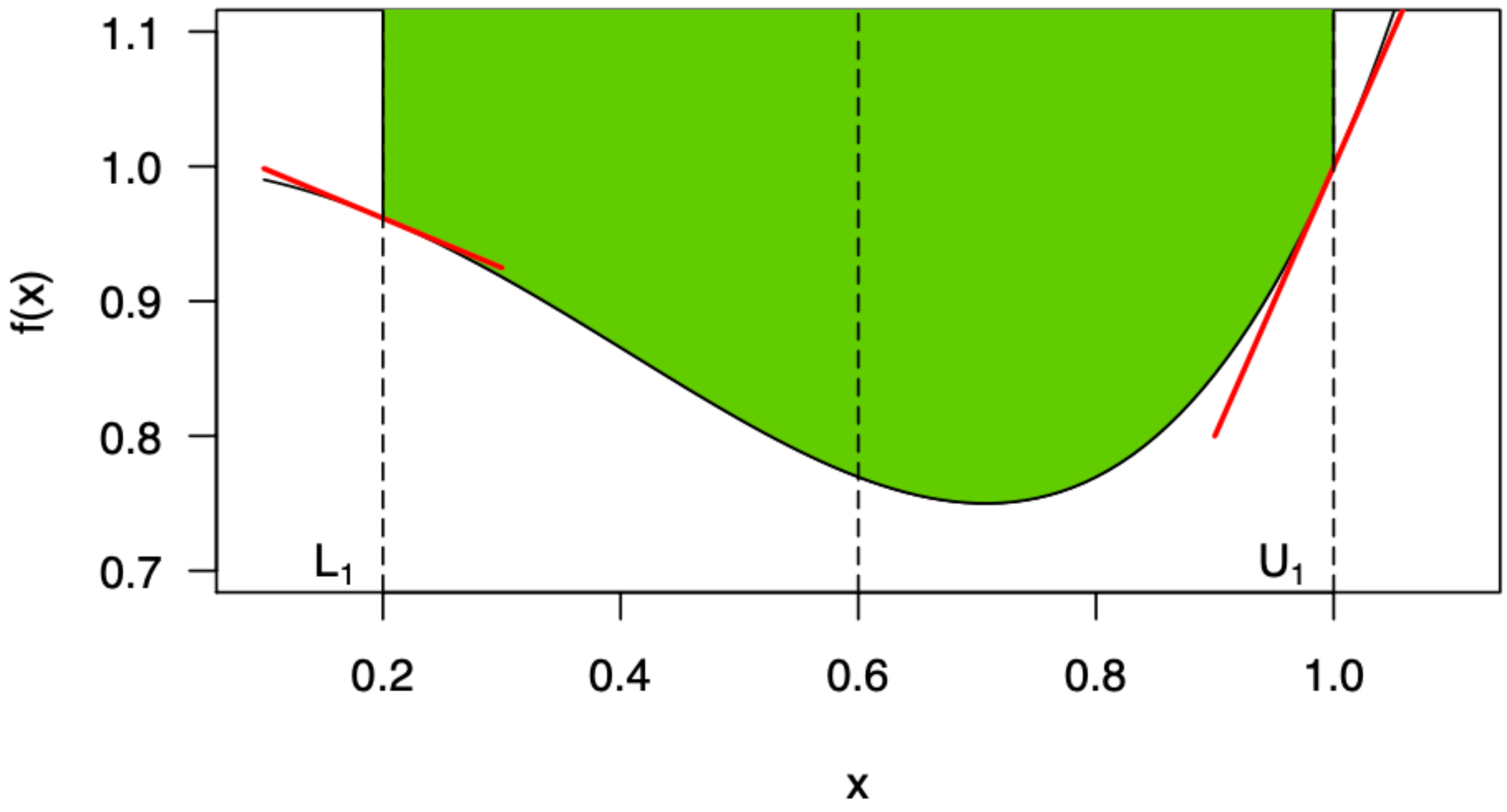
   $f'(M) > 0$ ise $U = M$

   $f'(M) = 0$ ise $L = M$ ve $U = M$
4. $[L, U]$ yeterince küçük olana kadar devam et.

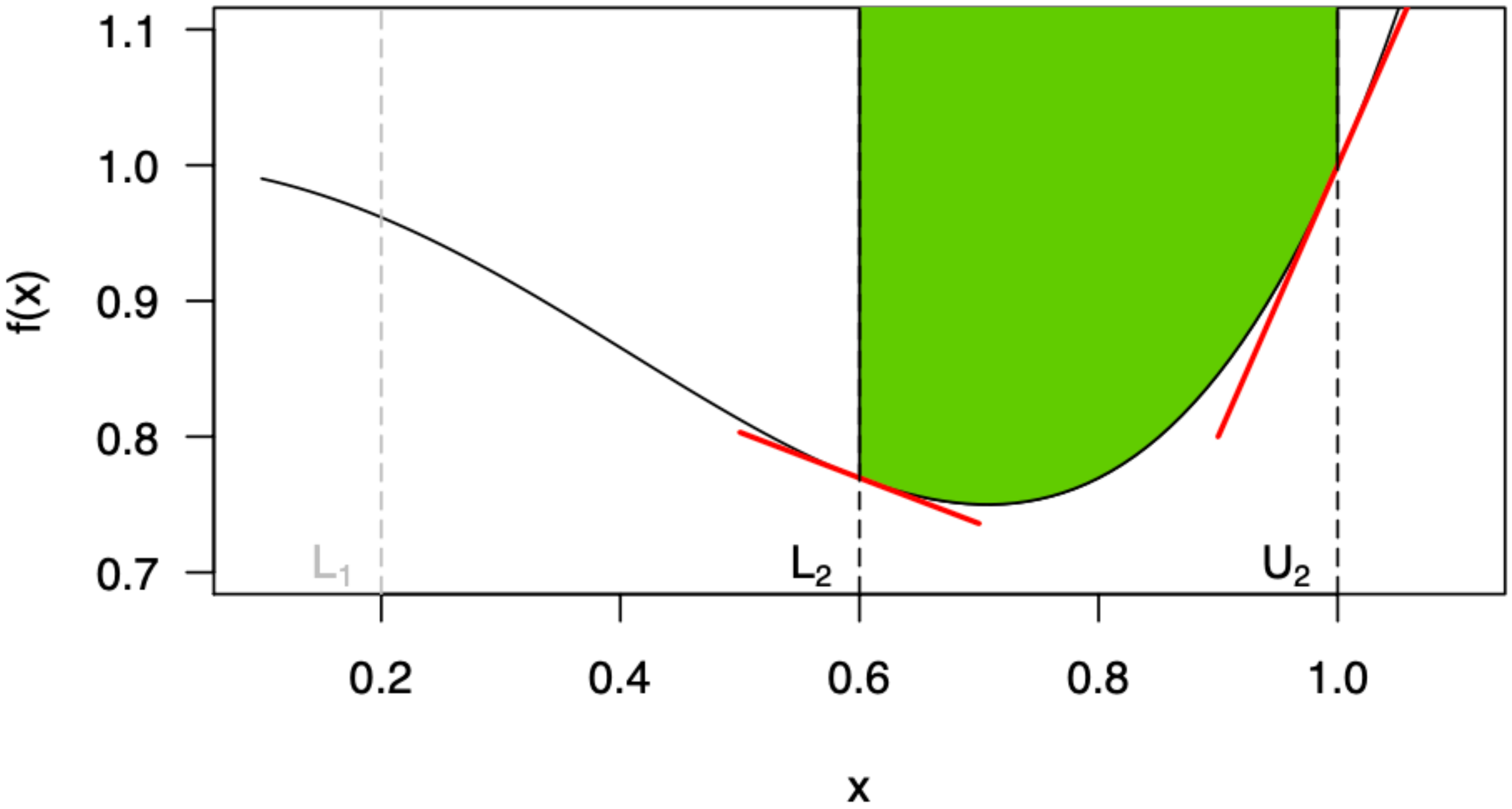
İkiye Bölme Yöntemi ile Optimizasyon



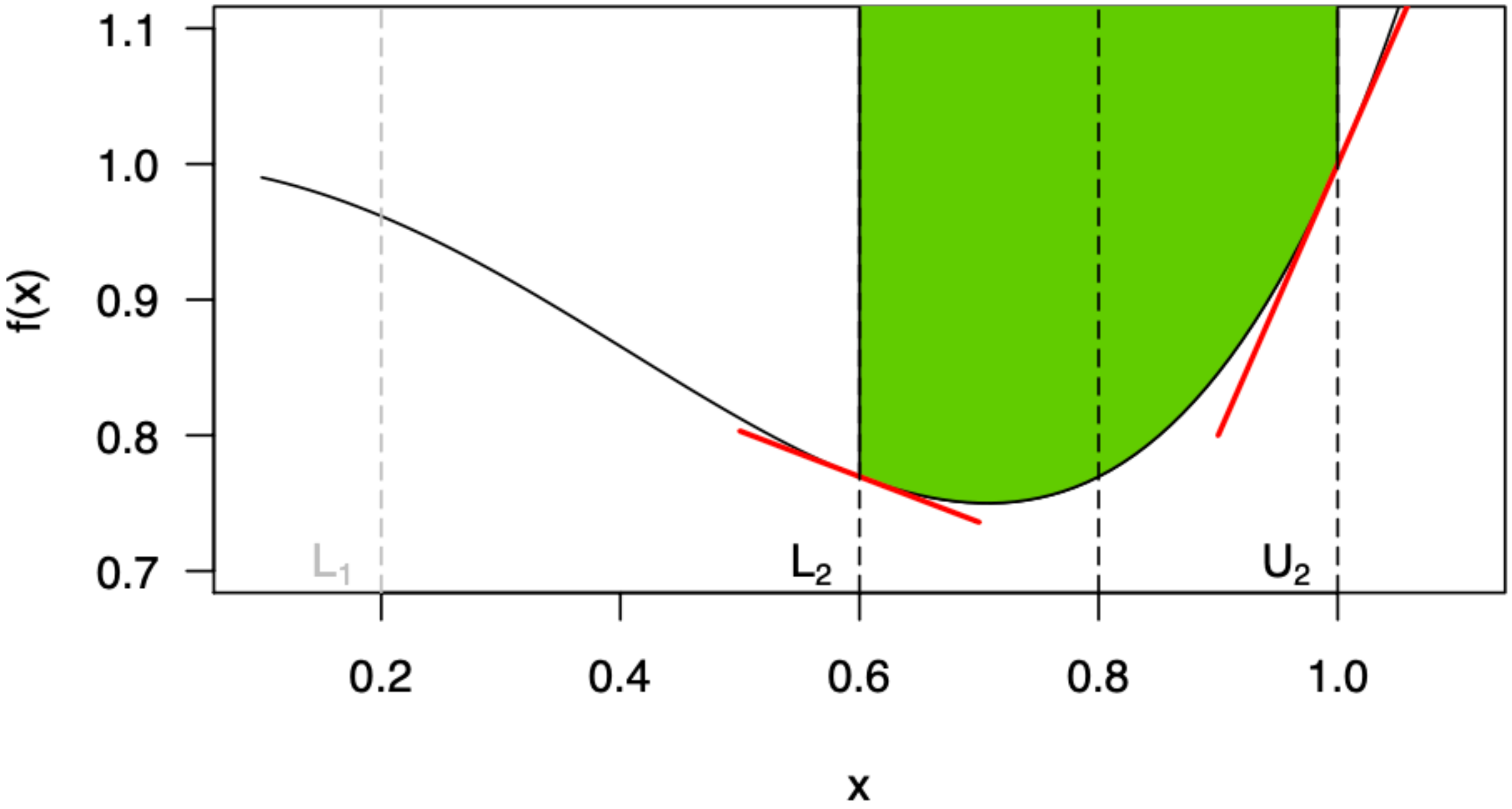
İkiye Bölme Yöntemi ile Optimizasyon



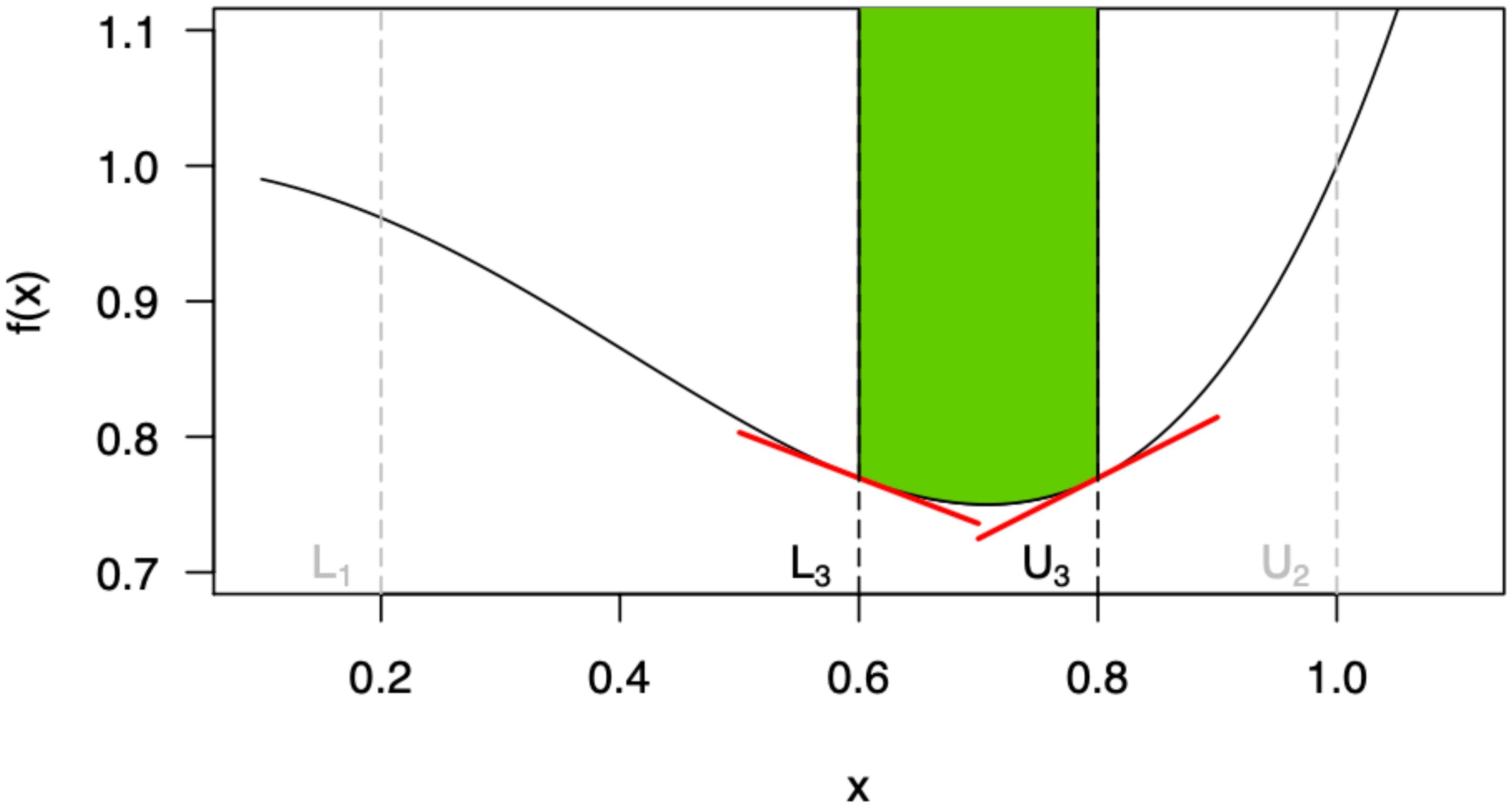
İkiye Bölme Yöntemi ile Optimizasyon



İkiye Bölme Yöntemi ile Optimizasyon



İkiye Bölme Yöntemi ile Optimizasyon



Gradyan İnişi Yöntemi

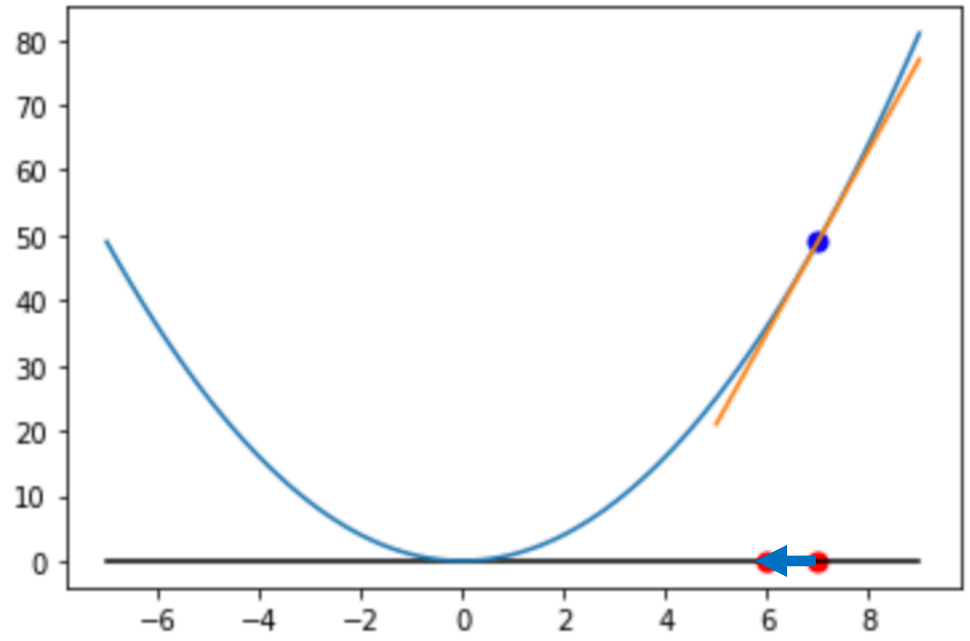
Dışbükey, sürekli olarak türevlenebilen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ olan x noktasını arıyoruz. Bu koşulu sağlayan x noktası hem local hem global minimum noktası olur.

Gradyan İnişi Yöntemi

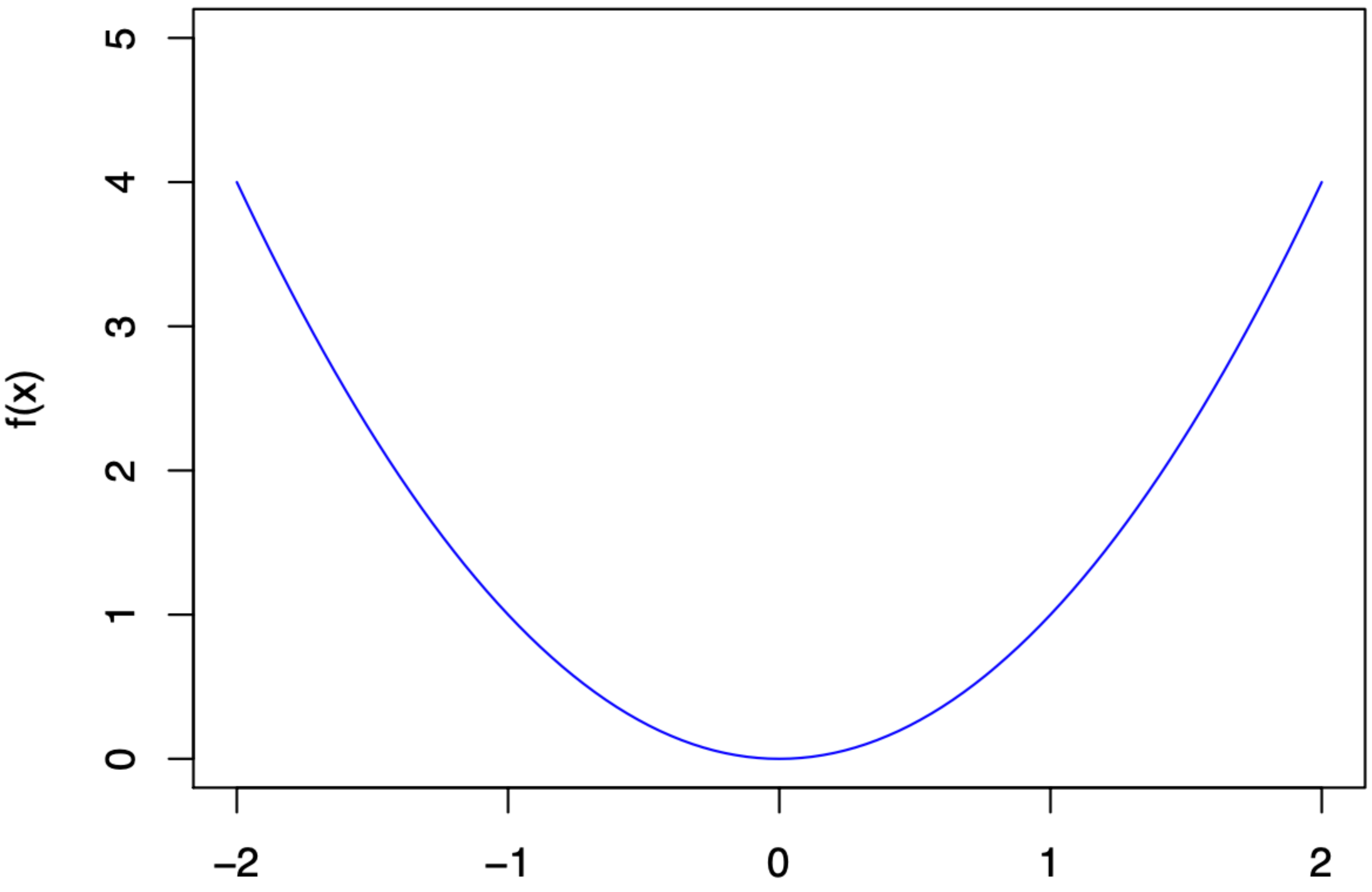
1. Herhangi bir x noktasından başla.
2. Bir ögrenme hızı c seç.
3. $f'(x)$ değerini hesapla.
4. Bulduğumuz değere göre:

$$f'(x) < 0 \text{ ise } x = x + c$$
$$f'(x) > 0 \text{ ise } x = x - c$$
$$f'(x) = 0 \text{ ise } x = x$$

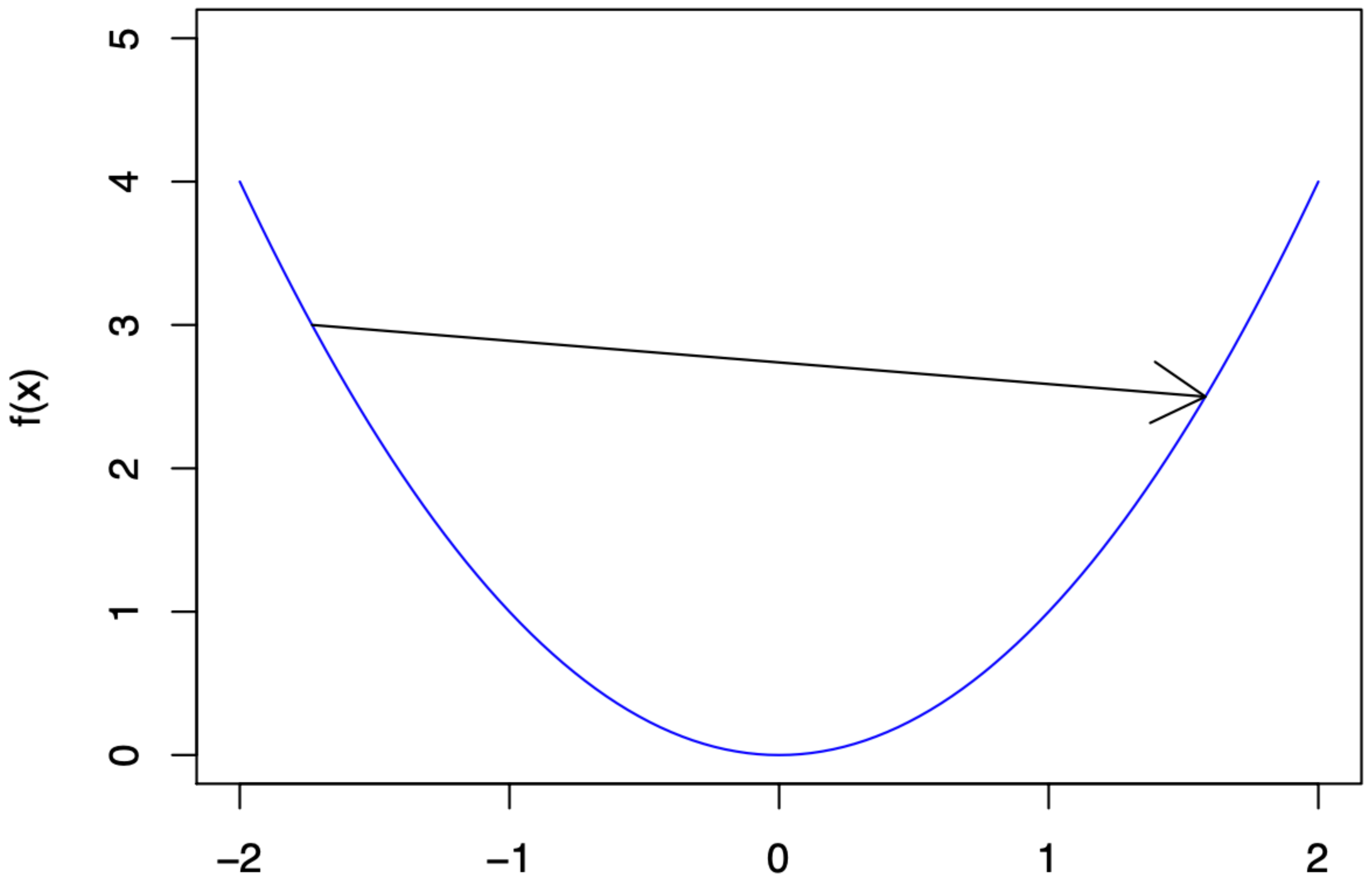
5. $f'(x)$ yeterince küçük olana kadar devam et.



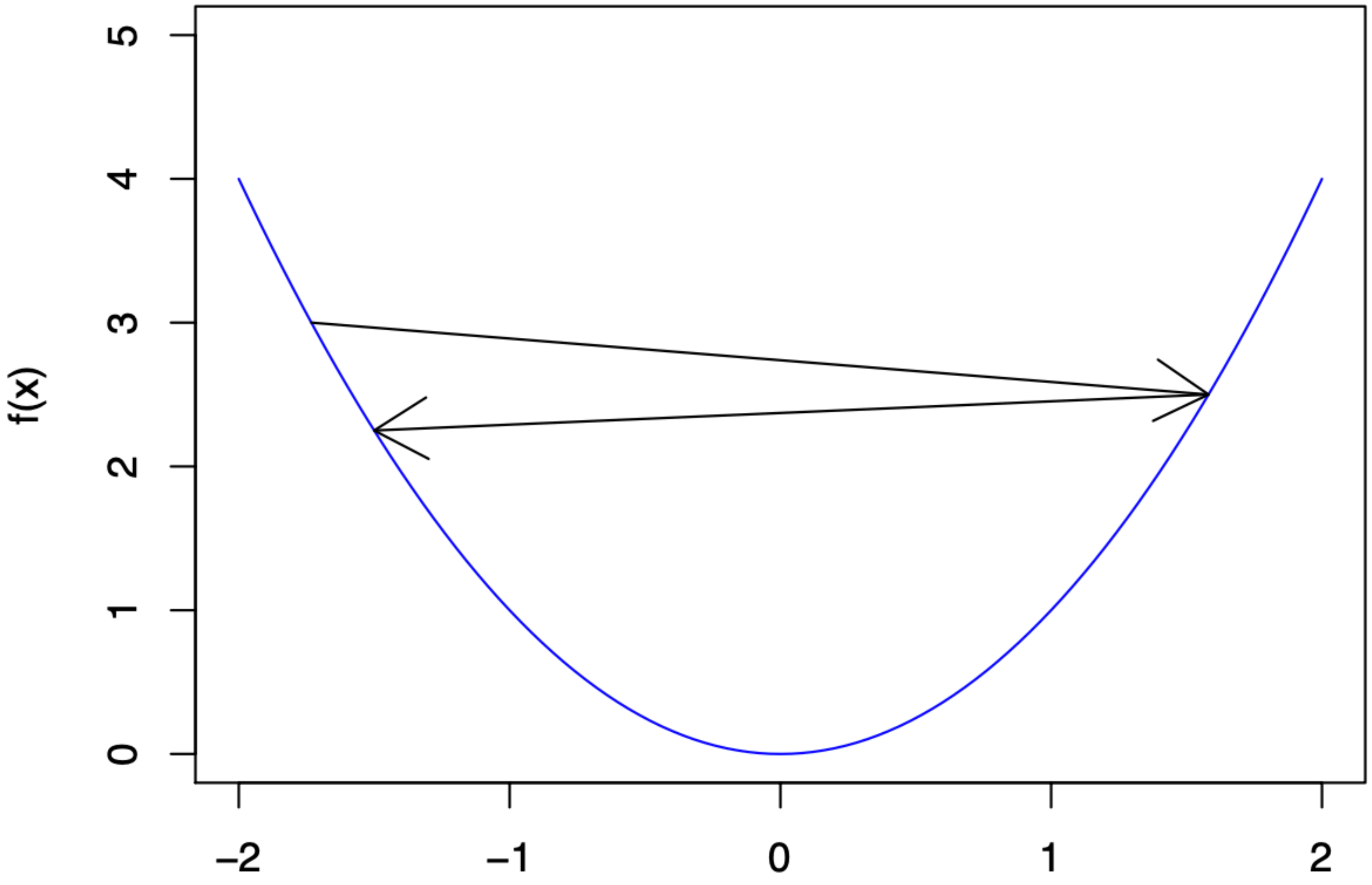
Öğrenme hızını doğru seçmezsek algoritma çalışmayabilir!



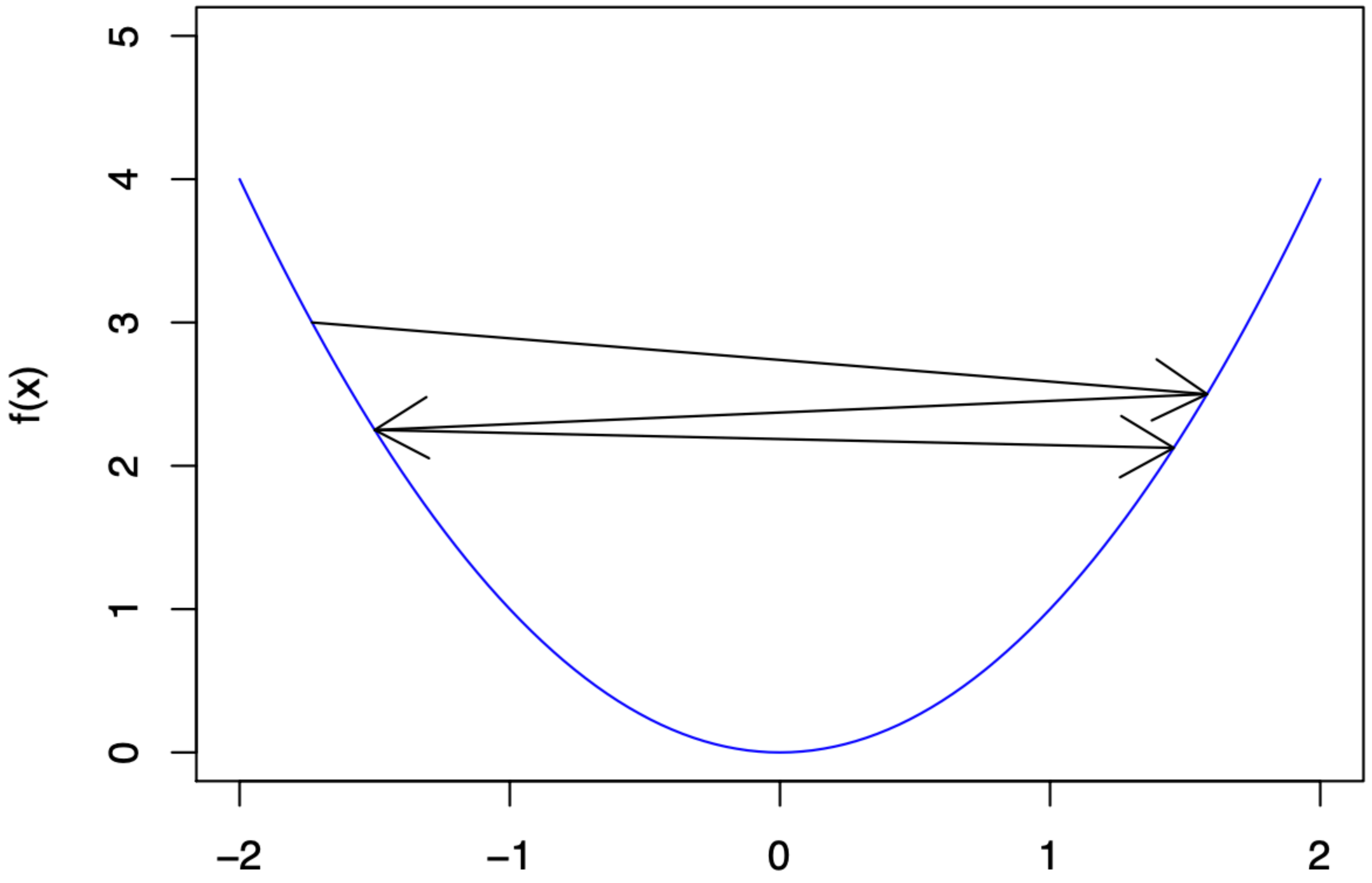
Öğrenme hızını doğru seçmezsek algoritma çalışmayabilir!



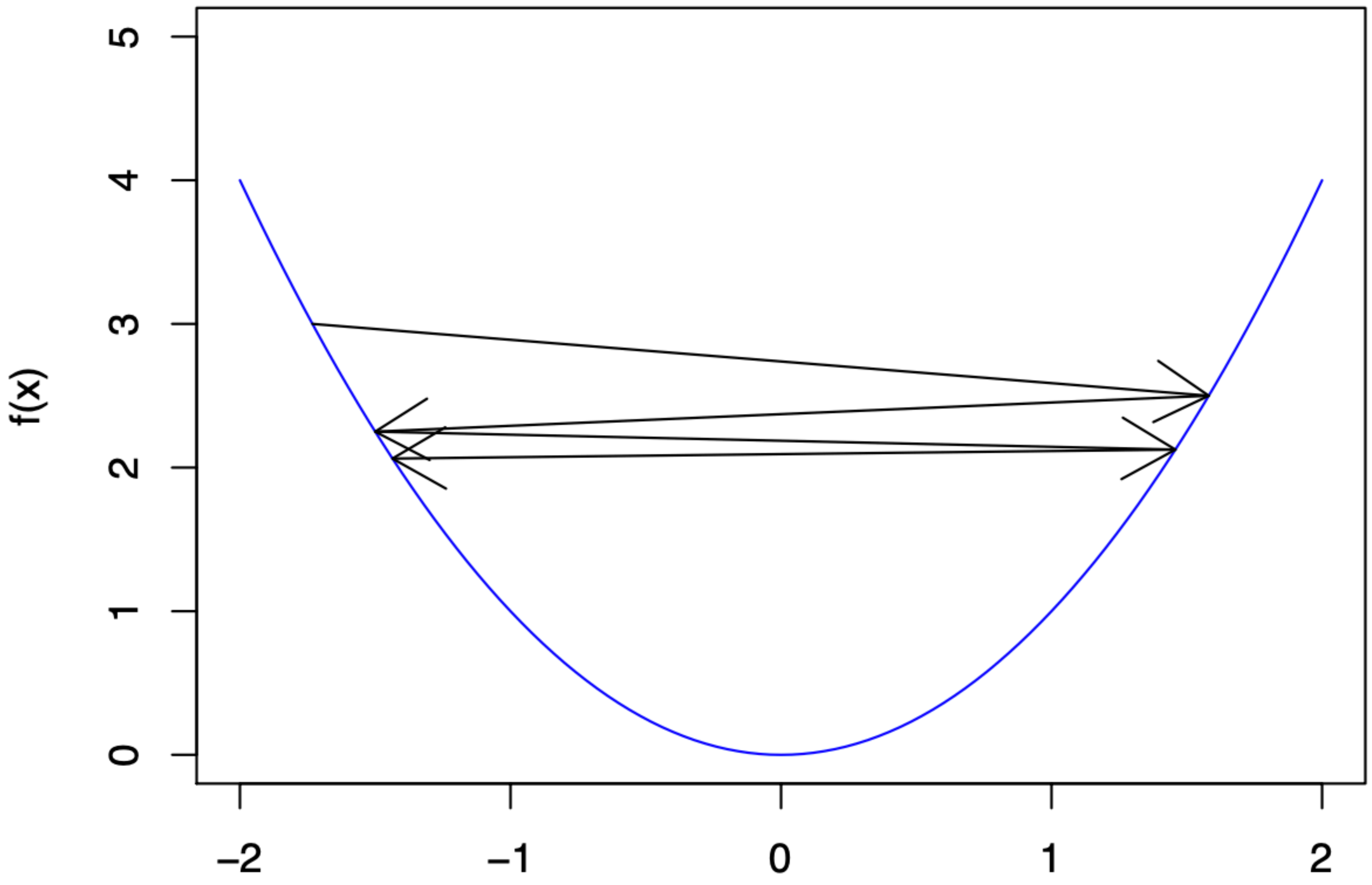
Öğrenme hızını doğru seçmezsek algoritma çalışmayabilir!



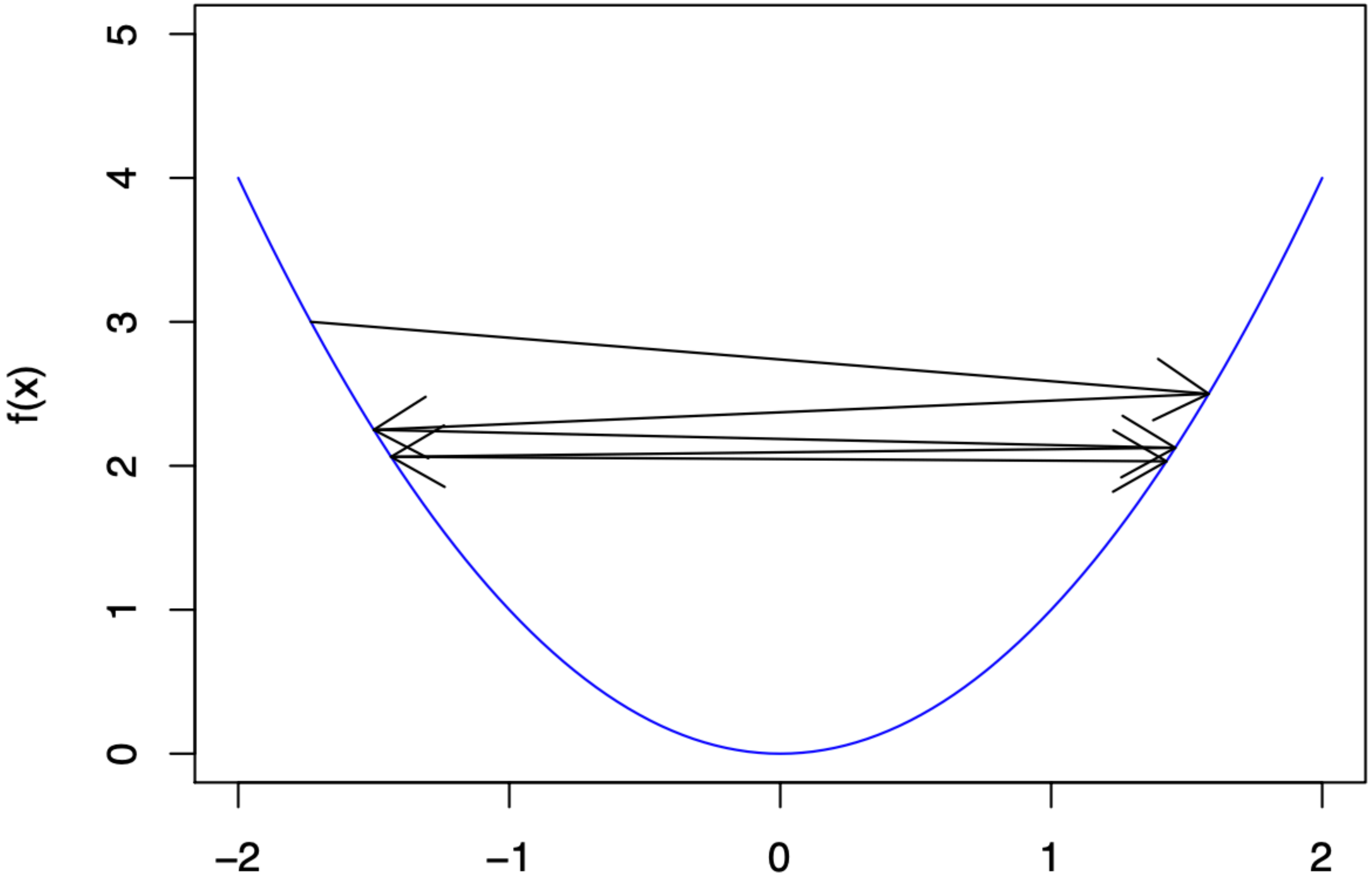
Öğrenme hızını doğru seçmezsek algoritma çalışmayabilir!



Öğrenme hızını doğru seçmezsek algoritma çalışmayabilir!



Öğrenme hızını doğru seçmezsek algoritma çalışmayabilir!



Gradyan İnişi Yöntemi

Değişken Öğrenme Hızı

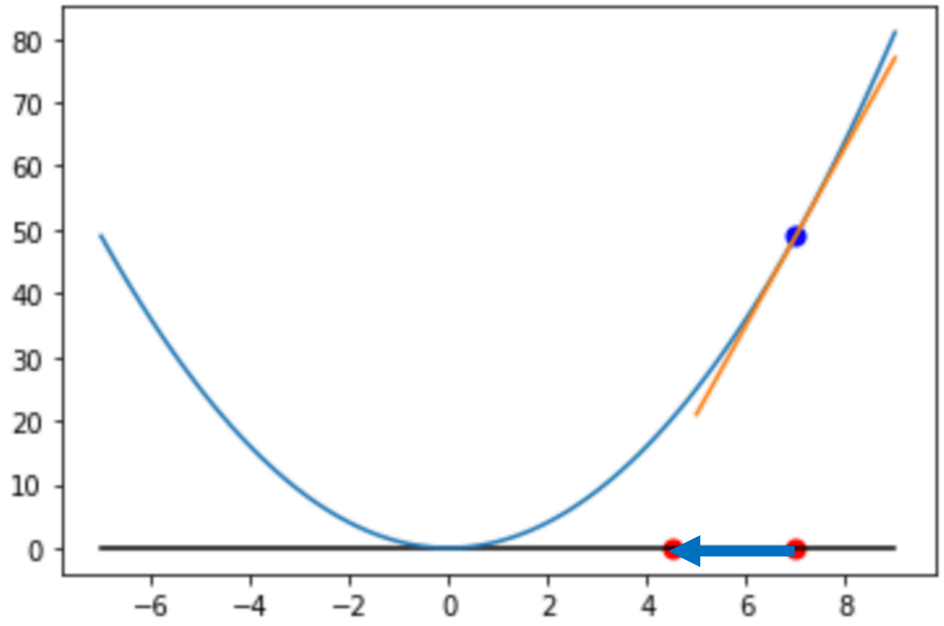
Dışbükey, sürekli olarak türevlenebilen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ olan x noktasını arıyoruz. Öğrenme hızı c'yi türevin mutlak değeri ile çarpıp kullanalım!

Gradyan İnişi Yöntemi (değişken öğrenme hızlı)

1. Herhangi bir x noktasından başla.
2. Bir ögrenme hızı c seç.
3. $f'(x)$ değerini hesapla.
4. Bulduğumuz değere göre:

$$f'(x) < 0 \text{ ise } x = x + c\,|f'(x)|$$
$$f'(x) > 0 \text{ ise } x = x - c\,|f'(x)|$$
$$f'(x) = 0 \text{ ise } x = x$$

5. $f'(x)$ yeterince küçük olana kadar devam et.



Gradyan İnişi Yöntemi

Değişken Öğrenme Hızı

Dışbükey, sürekli olarak türevlenebilen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ olan x noktasını arıyoruz. Öğrenme hızı c'yi türevin mutlak değeri ile çarpıp kullanalım!

Gradyan İnişi Yöntemi (değişken öğrenme hızlı)

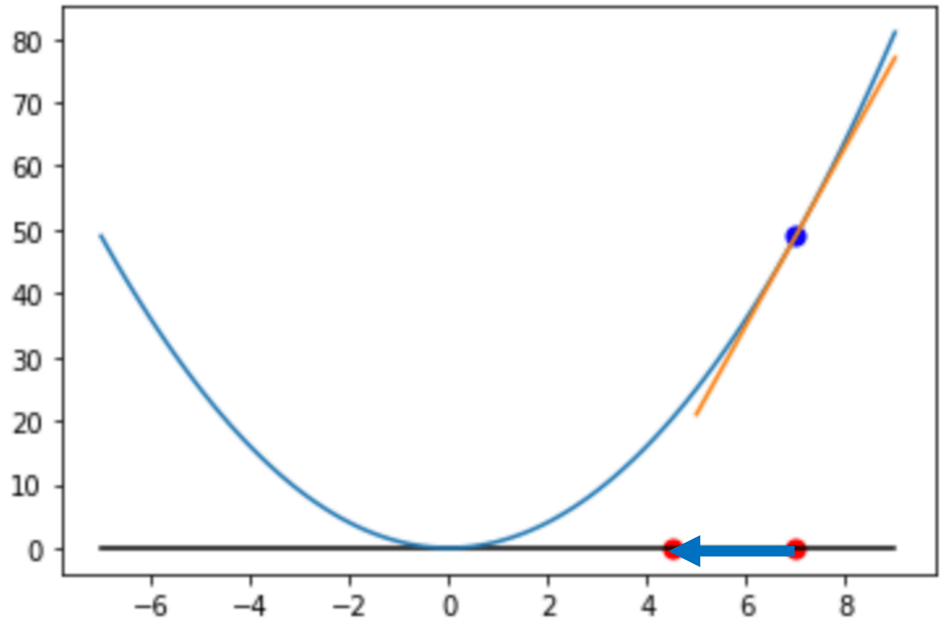
1. Herhangi bir x noktasından başla.
2. Bir ögrenme hızı c seç.
3. $f'(x)$ değerini hesapla.
4. Bulduğumuz değere göre:

   $f'(x) < 0$ ise $x = x - c\, f'(x)$

   $f'(x) > 0$ ise $x = x - c\, f'(x)$

   $f'(x) = 0$ ise $x = x$

5. $f'(x)$ yeterince küçük olana kadar devam et.



Gradyan İnişi Yöntemi
Değişken Öğrenme Hızı

Dışbükey, sürekli olarak türevlenebilen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ olan x noktasını arıyoruz. Öğrenme hızı c'yi türevin mutlak değeri ile çarpıp kullanalım!

Gradyan İnişi Yöntemi (değişken öğrenme hızlı)

1. Herhangi bir x noktasından başla.
2. Bir ögrenme hızı c seç.
3. $x = x - c\, f'(x)$
4. $|f'(x)|$ yeterince küçük olana kadar devam et.