1. Notação Científica

Resumo

A notação científica é uma forma de escrever números usando potências de 10.

Na notação científica os numeros são escritos da seguinte forma:

$N * 10^n$

Onde N é um numero real maior que 1 e menor que 10. e n é um numero inteiro.

1.1. Conversão

Números maiores que 1

6590000000000000

1. 13 zeros e 659
2. 659 é maior que 1? sim. é menor que 10? não.
3. Ande com a virgula para a esquerda até que 659 seja menor que 10.

   $659 = 659 * 10^0$

   $659 = 65,9 * 10^1$

   $659 = 6,59 * 10^2$
4. Some o numero de casas andadas com o numero de zeros.

   $6,59 * 10^{2+13}$

$6590000000000000 = 6,59 * 10^{15}$

Números menores que 1

$0,00039$

1. 4 zeros e 39
2. 39 é maior que 1? sim. é menor que 10? não.
3. Ande com a virgula para a esquerda até 39 seja menor que 10.

   $39 = 39 * 10^0$

   $39 = 3.9 * 10^1$
4. Somar o expoente de 39 aos 4 zeros.

   Advertência

   Como o numero é menor que zero, o expoente é negativo.

   $0,00039 = 3.9 * 10^{-(1+4)}$

$0,00039 = 3,9 * 10^{-5}$

2. Algarismos significativos e técnicas de arredondamento

2.1. Algarismos significativos

Resumo

- São todos os algarismos relevantes para determinar a precisão de um número.
- O último algarismo relevante é chamado de "duvidoso".
- Zeros à esquerda do primeiro digito diferente de zero não são significativos.
- Zeros à direita do ultimo digito diferente de zero não são significativos.

Exemplo

0,000012301200000

12,6 cm

2.2. Tecnicas de arredondamento

Resumo

- É a retirada de casas decimais consideradas menos relevantes de um numero real.
- Representada pelo simbolo $\approx$. Exemplo: $32.81 \approx 32.8$.

Definições

Para facilitar a compreensão, iremos definir uns termos:

1. Algarismo de interesse: O numero que ocupa a casa decimal a ser mantida
2. Algarismo posterior: O numero logo após o algarismo de interesse

Para arredondar um numero deve se determinar qual é o algarismo de interesse e seguir as seguinte regras:

Posterior menor que 5

O algarismo de interesse permanece inalterado.

Exemplo

$2,314$
Interesse: 3 (dezenas)
Posterior: 1 (centena)
$1 < 5$? sim.
Resposta: $2,3 \approx 2,314$

Posterior maior que 5

Acrecenta-se uma unidade ao algarismo de interesse.

Exemplo

$35,182$
Interesse: 1 (dezenas)
Posterior: 8 (centena)
$8 > 5$? sim.
Resposta: $35,2 \approx 35,182$

Posterior igual à 5

Nesse caso, é necessário analizar os algarismos subsequentes.

Posterior é seguido por numero diferente de zero

Acrecenta-se uma unidade ao algarismo de interesse.

Exemplo

$6,25003$
Interesse: 2 (dezena)
Posterior: 5 (centena)
$6,3 \approx 6,25003$

Posterior é o ultimo algarismo ou seguido exclusivamente de zeros

1. Se o algarismo de interesse for par, permanece inalterado.
2. Se o algarismo de interesse for impar, acrecenta-se uma unidade.

Exemplo

1. $1,365$
   Interesse: 6 (centena)
   Posterior: 5 (milhar)
   6 é par ou impar? par.
   $1,36 \approx 1,365$
2. $0,17500000$
   Interesse: 7 (centena)
   Posterior: 5 (milhar)
   7 é par ou impar? impar.
   $0,18 \approx 0,175$

3. Ordem de grandeza

Resumo

- É a análise dos numeros que estão em potências de 10.
- Algumas ordens de grandeza possuem prefixos e simbolos específicos.

3.1. Prefixos comuns

Prefixos	Notação Científica	Símbolo
Tera	10^{12}	T
Giga	10^{9}	G
Mega	10^{6}	M
Kilo	10^{12}	k
Deci	10^{-1}	d
Centi	10^{-2}	c
Milli	10^{-3}	d
Micro	10^{-6}	μ
Nano	10^{-9}	n
Pico	10^{-12}	p

3.2. Comparação

Para comparar diferentes grandezas deve-se converter o numero para notação científica e seguir as seguintes regras:

Ordem de grandeza igual

Compare os numeros antes da grandeza.

Exemplo

$3,14 * 10^3$ e $8,12 * 10^3$
Comparar $3,14$ e $8,12$
$8,12 > 3,14$ logo:
$8,12 * 10^3 > 3,14 * 10^3$

Ordem de grandeza distinta

Compare as grandezas.

Exemplo

$9,22 * 10^{-140}$ e $0,2 * 10^{10}$
Comparar -140 e 10
$10 > (-140)$ logo:
$0,2 * 10^{10} > 9,22 * 10^{-140}$

4. Unidades de Medida

4.1. Unidades Fundamentais

Resumo

A unidade de medida é uma convenção usada para representar dimensões como por exemplo, o metro é uma unidade para medir um comprimento.

Grandeza	Nome	Símbolo
Comprimento	Metro	m
Corrente Elétrica	Ampère	A
Intensidade Luminosa	Candela	cd
Massa	Quilogama	kg
Quantidade de substância	Mol	mol
Temperatura	Kelvin	K
Tempo	Segundo	s

4.2. Unidades Derivadas

Resumo

Unidade composta é aquela formada por combinação (divisão e/ou multiplicação) de duas ou mais unidades, ou pela multiplicação de uma mesma unidade, formando, assim, uma nova unidade.

Exemplo

Grandeza	Relação	Símbolo
Velocidade	$\frac{m}{s}$	
Aceleração	$\frac{m}{s^2}$	a
Força	$\text{kg} * a$	N
Densidade	$\frac{\text{kg}}{m^3}$	

5. Erro de medição

Competência	SAEB
EM13MAT313	D15

Resumo

- É a diferença entre o valor indicado pelo instrumento e o valor de referência.
- Representado pelo símbolo $\pm$. **Exemplo:** $123.45\text{cm} \pm 2\text{mm}$

6. Geometria

Resumo

É o estudo das formas presentes na natureza e das propriedades que essas formas possuem.
A Geometria é uma das três grandes áreas da Matemática.

Perímetro de figuras planas

Figura	Fórmula
Triângulo	Soma dos lados
Retângulo	$2\frac{b}{h}$
Quadrado	$4l$
Losango	$4l$
Trapésio	Soma dos lados
Círculo	$2\pi * r$

Legenda

Simbolo	Significado
b	Base
h	Altura
l	Lado
π	$\approx 3,14$
r	Raio

Área de figuras planas

Figura	Fórmula
Triângulo	$\frac{b*h}{2}$
Retângulo	$b*h$
Quadrado	l^2
Losango	$\frac{D*d}{2}$
Trapésio	$\frac{(B+b)*h}{2}$
Círculo	$\pi*(r^2)$

Legenda

Simbolo	Significado
B	Base Maior
b	Base/Base menor
h	Altura
l	Lado
D	Diagonal Maior
d	Diagonal Menor
π	$\approx 3,14$
r	Raio

7. Trigonometria

7.1. Triangulo retângulo

Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}\text{Hipotenusa}^2 &= \text{Oposto}^2 + \text{Adjacente}^2\\ A^2 &= B^2 + C^2\end{aligned}$$

7.2. Funções trigonométricas

Resumo

Relacionam o valor do ângulo em graus ou radianos com o valor da razão trigonométrica

No Triangulo retângulo

Seno

$$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Coseno

$$\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Tangente

$$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

Angulos notáveis

Angulo	Seno	Cosseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

8. Função

Competência	SAEB
EM13MAT401	D17,D18
EM13MAT404	D19,D20
EM13MAT501	D21,D23
EM13MAT502	D25

Resumo

Uma função é uma relação matemática estabelecida entre duas variáveis

Exemplo

1. Função $y = (x * 3) + 3$

x	$f(x)$
1	6
2	9
3	12
4	15

8.1. Crescimento e Decrescimento

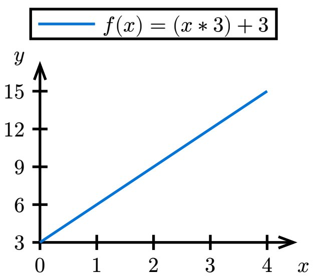
Informação

- A função é crescente se y aumenta toda vez que x é aumentado.
- A função é decrescente se y diminui toda vez que x é aumentado.

Exemplo de função crescente

Função $y = (x * 3) + 3$

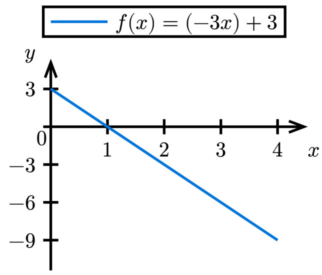
x	$f(x)$
1	6
2	9
3	12
4	15



Exemplo de função decrescente

Função $y = (-3x) + 3$

x	$f(x)$
1	0
2	-3
3	-6
4	-9



8.2. Função de primeiro grau

Resumo

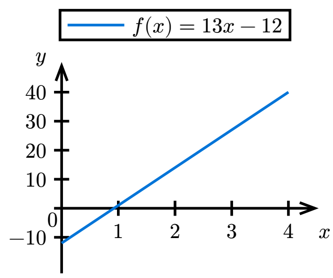
Uma função do 1º grau é expressa da seguinte forma:
$y = ax + b$ ou $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais ($\mathbb{R}$) e $a \neq 0$

Também é chamada de função afim.

Exemplo

$y = 13x - 12$

Gráfico de $y = 13x - 12$



Passo-a-passo

Pergunta

Determine a raiz da função
$y = -2x + 10$

Para determinar a raiz da função de primeiro grau, devemos considerar o valor de x quando $y = 0$.

1. Separamos as incógnitas dos numeros conhecidos.
$$y = -2x + 10$$
$$2x = 10$$
2. Resolvemos a equação.
$$2x = 10$$
$$x = 5 \quad (\div 2)$$
3. Verificamos se a solução é correta ($y = 0$)
$$y = -2x + 10$$
$$y = (-2 * 5) + 10 \quad (x \mapsto 10)$$
$$y = -10 + 10$$
$$y = 0$$

Conclusão

A raiz da função $y = -2x + 10$ é 5.

8.3. Função de segundo grau

Resumo

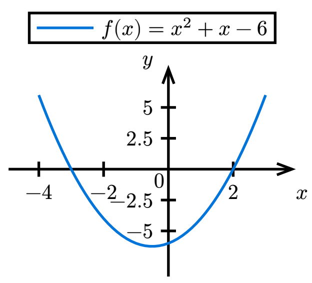
Uma função de segundo grau é expressa da seguinte forma:
$y = ax^2 + bx + c$ ou
$f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$.

Também chamada de função quadratica.
Sempre é uma parábola.
Têm até duas raizes, uma positiva (x') e outra negativa (x''), podendo não ter solução nos numeros reais.

Exemplo

$y = x^2 + x - 6$

Gráfico de $y = x^2 + x - 6$



Fórmula de Bhaskara

Informação

Para usar a fórmula de Bhaskara, a equação de segundo grau deve estar na forma reduzida.

Forma reduzida das equações de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}a$

8.3.1. Concavidade

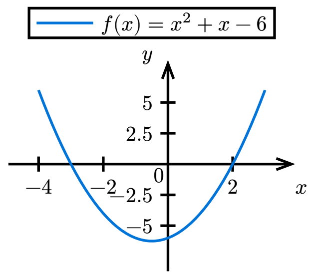
Resumo

A concavidade da parábola é determinada pelo coeficiente a da equação.

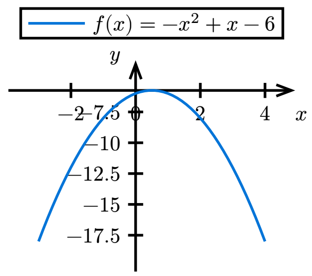
Memorizar

- Se $a > 0$ a concavidade da parabola é voltada para cima.
- Se $a < 0$ a concavidade da parabola é voltada para baixo.

Função com concavidade para cima)



Função com concavidade para baixo



8.3.2. Ponto Maximo e Mínimo

Resumo

O ponto maximo ou minimo de uma função quadratica é o vertice da parábola.

- Uma função com concavidade para cima possui ponto minimo.
- Uma função com concavidade para baixo possui ponto maximo.

Memorizar

- $a < 0$ é maximo.
- $a > 0$ é minimo.

Calculo do vértice de uma parabola

Como o vertice é um ponto em duas dimensões, precisamos calcular cada componente.

$\text{Componente X} \hookleftarrow X_v = \frac{b}{2a}$

$\text{Componente Y} \hookleftarrow Y_v = \frac{\Delta}{4a}$

O vértice da parabola então é: (X_v, Y_v)

Passo-a-passo

Pergunta

Calcule o vértice da função $y = x^2 + 2x - 1$.

Como $a = 1, b = 2, c = -1$, temos que $a > 0$, logo a parabola tem concavidade voltada para cima e o vértice dela é o ponto minimo.

1. Calcule o Componente X.
   $X_v = \frac{b}{2a}$
   $X_v = \frac{2}{2*1}$
   $X_v = 1$
2. Calcule o Componente Y.
   $Y_v = \frac{\Delta}{4a}$
   $\Delta = -b^2 - 4ac$
   $\Delta = -2^2 - 4 * 1 * -1$
   $\Delta = -4 - (4 * -1)$
   $\Delta = \cancel{-4} + \cancel{4}$
   $\Delta = 0$
   $Y_v = \frac{0}{4} * 1$
   $Y_v = 0$

Conclusão

O vértice da função $y = x^2 + 2x - 1$ é $(1, 0)$.

8.3.3. Raizes

Resumo

A raiz de uma função são os valores de x que fazem $f(x) = 0$.
Uma função de segundo grau possui até 2 raizes.

Passo-a-passo

Pergunta

Usando a função do exemplo. Obtenha as raizes de $y = x^2 + x - 6$

A resolução de uma equação do segundo grau depende do valor do delta (Δ).

Memorizar

Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raizes reais e distintas.
Se $\Delta = 0$, a equação possui raizes iguais.
Se $\Delta < 0$, a equação não possui raizes reais.

1. Extraia o valor de a, b e c
   $y = x^2 + x - 6$

   $y = 1x^2 + 1x - 6$

   $a = 1, b = 1, c = -6$
2. Calcule o valor do Δ
   $\Delta = b^2 - 4ac$

   $\Delta = 1^2 - 4 * 1 * (-6)$

   $\Delta = 1 - 4 * (-6)$

   $\Delta = 1 - (-24)$

   $\Delta = 25$

Continuação

3. Resolva x' e x''
   $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $x' = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} * 1$

   $x' = \frac{-1+5}{2}$

   $x' = \frac{4}{2}$

   $x' = 2$

   $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $x'' = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} * 1$

   $x'' = \frac{-1-5}{2}$

   $x'' = -3$

Conclusão

As raizes da função $y = x^2 + x - 6$ são 2 e -3.

8.4. Função definida por partes

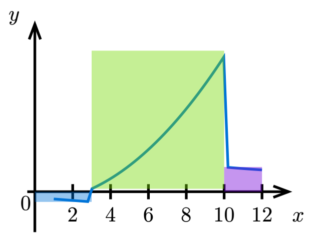
Resumo

Funções que podem ser expressas por diferentes sentenças algébricas para respectivos intervalos numéricos

Exemplo

$$f(x) := \begin{cases} -x-4 \text{ se } x<3 \\ x^2-7 \text{ se } 3\geq x\geq 10 \\ \frac{120}{x}+5 \text{ se } x>10 \end{cases}$$

Gráfico de $f(x)$



Passo-a-passo

Pergunta

Usando a função $f(x)$ dos exemplos.
Resolva $f(4)$.

1. Verifique qual condição é valida para o valor dado
   $\cancel{4 < 3}$ ou $3 \geq 4 \geq 10$ ou $\cancel{4 > 10}$
2. Aplique a função equivalente
   $f(x) = X^2 - 7$

   $f(4) = 4^2 - 7$

   $f(4) = 16 - 7$

   $f(4) = 9$

Conclusão

$f(4) = 9$

8.5. Transformação do grafico da função

Resumo

Ao aplicar algumas operações numa função o seu gráfico será transformado.

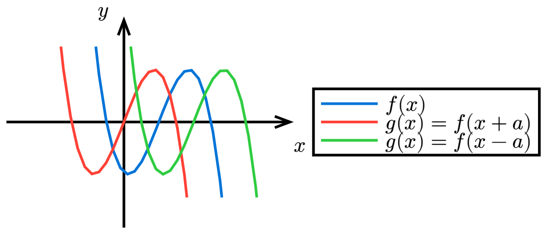
Informação

Nessa parte temos a convenção de que a função original $f(x)$ terá cor azul, e a função obtida pela transformação $g(x)$ terá cor vermelha.
A função $f(x)$ será sempre a mesma.

8.5.1. Translação horizontal (Eixo x)

Exemplo

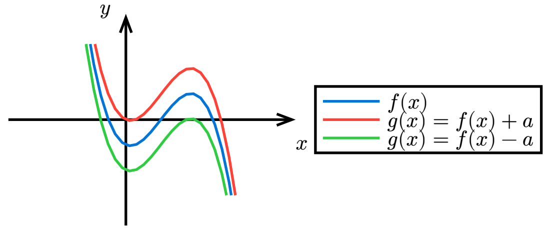
Translação de a na direção do eixo x, para a esquerda se $a > 0$ e para a direita se $a < 0$.



8.5.2. Translação Vertial (Eixo y)

Exemplo

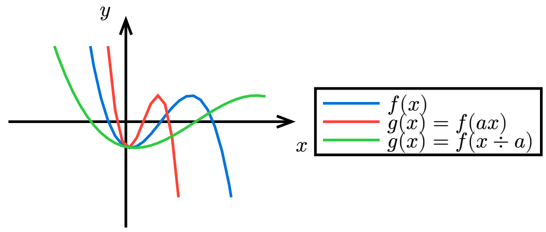
Translação de a na direção do eixo y, para a cima se $a > 0$ e para a baixo se $a < 0$.



8.5.3. Expansão (Eixo x)

Exemplo

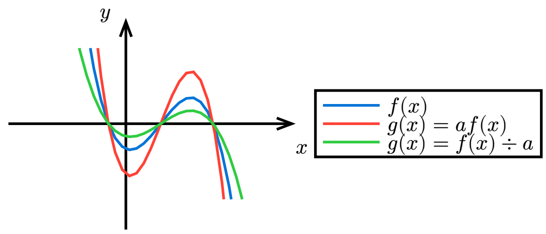
Expansão ou contração segundo o fator $\frac{1}{a}$ na direção do eixo x.



8.5.4. Expansão (Eixo y)

Exemplo

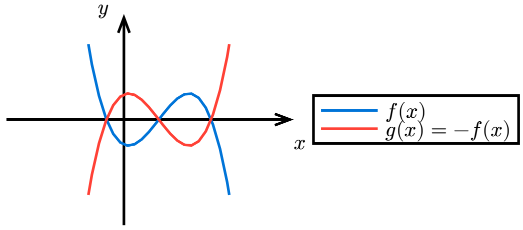
Expansão ou contração segundo o fator a na direção do eixo y.



8.5.5. Reflexão (Eixo x)

Exemplo

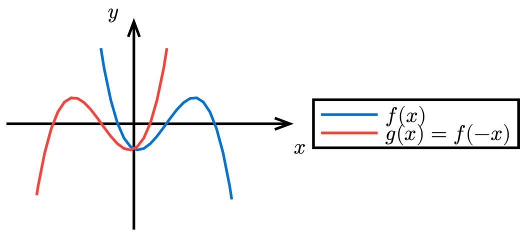
Reflexão em relação ao eixo x.



8.5.6. Reflexão (Eixo y)

Exemplo

Reflexão em relação ao eixo y.



9. Progressão Aritmética

Resumo

É uma sequencia numérica onde a diferença entre cada número e seu antecessor resulta sempre em um mesmo valor.
Esse valor é denominado "razão".

Exemplo

$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \cdots\}$

Informação

Vamos observar o que acontece quando subtraimos qualquer termo por seu antecessor

Passo-a-passo

$$\begin{aligned} 18 - 16 &= 2 \\ 16 - 14 &= 2 \\ 14 - 12 &= 2 \\ \vdots \quad & \vdots \\ 4 - 2 \quad &= 2 \end{aligned}$$

Conclusão

A razão da PA
$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \cdots\}$
é 2.

Termo geral de uma PA

Observe que um termo subtraído de seu antecessor sempre resulta na razão.
Em uma PA, conseguimos escrever n igualdades que seguem esse padrão, o que nos deixa criar um sistema de equações.

Somando as n equações lado a lado, teremos:

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= r \\
a_3 - a_2 &= r \\
a_4 - a_5 &= r \\
\vdots \quad &\ \vdots \\
a_n - a_{n-1} &= r \\
a_n - a_1 &= (n-1) * r \\
a_n &= a_1 + (n-1) * r
\end{aligned}$$

Através desta formula ($a_n = a_1 + (n-1) * r$) conseguimos identificar qualquer termo de uma progressão aritmética.

Passo-a-passo

Pergunta

Encontre o quinto termo da progressão exemplo.

Sabemos que a progressão começa com 2. Logo $a_1 = 2$.
Queremos achar o quinto termo, então $n = 5$.
A razão da PA é 2, $r = 2$.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1) * r \\
a_5 &= 2 + (5-1) * 2 \\
a_5 &= 2 + (4) * 2 \\
a_5 &= 10
\end{aligned}$$

Conclusão

O quinto termo (a_5) da PA $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \cdots\}$ é 10.

Soma de termos de uma PA finita

Se quisermos identificar a soma de uma PA finita, podemos observar que em qualquer PA finita, a soma do primeiro e ultimo termo é igual a soma do segundo mais o penúltimo termo.

$S_n = a_1 + a_2 ... + +a_{n-1} + a_n$

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ...$

Se agruparmos os numeros em pares e todos os pares tem o mesmo valor, o valor da soma da PA então será o produto dessa soma pela quantidade de elementos da PA, dividido por dois, pois estamos somando esses numeros "dois a dois".

Ficamos assim com a seginte fórmula:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$

Passo-a-passo

Pergunta

Encontre a soma da seguinte PA finita:

$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

O primeiro elemento é 2. $a_1 = 2$

O último elemento é 16. $a_n = 16$

A PA possui 8 elementos. $n = 8$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$

$S_n = \frac{(2+16) * 8}{2}$

$S_n = \frac{18 * 8}{2}$

$S_n = \frac{144}{2}$

$S_n = 72$

Conclusão

A Soma da PA finita $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ é 72.

10. Progressão Geométrica

Resumo

É uma sequencia numérica onde o quociente entre cada número e seu antecessor resulta sempre em um mesmo valor.

Em outras palavras, o número multiplicado pela razão, resulta no próximo número.

Exemplo

$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \cdots\}$

Informação

Vamos observar o que acontece quando dividimos qualquer termo por seu antecessor

Passo-a-passo

$$\begin{aligned}\frac{256}{128} &= 2\\ \frac{128}{64} &= 2\\ \frac{64}{32} &= 2\\ \vdots \quad & \vdots\\ \frac{4}{2} &= 2\end{aligned}$$

Conclusão

A razão da PG $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \cdots\}$ é 2.

Termo geral da PG

Assim como na PA, existe uma formula capaz de encontrar qualquer termo de uma PG, sabendo o primeiro numero da PG (a_1), a posição do numero que queremos obter (n) e a razão (r).

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

Passo-a-passo

Pergunta

Obtenha o nono valor da PG exemplo.

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 * r^{n-1}\\ a_9 &= 2 * 2^{9-1}\\ a_9 &= 2 * 2^8\\ a_9 &= 2 * 256\\ a_9 &= 512\end{aligned}$$

Conclusão

O nono valor da PG $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \cdots\}$ é 512.

Soma dos termos da PG

Assim como na PA, existe uma formula capaz de calcular a soma de uma PG finita, sabendo o primeiro numero da PG (a_1), a quantidade de elementos (n) e a razão (r).

$S_n = \frac{a_1 * (r^n - 1)}{r - 1}$

Passo-a-passo

Pergunta

Obtenha a soma dos dez primeiros valores da PG exemplo.

$S_n = \frac{a_1 * (r^n - 1)}{r - 1}$

$S_n = \frac{2 * (2^{10} - 1)}{2 - 1}$

$S_n = \frac{2 * (1024 - 1)}{2 - 1}$

$S_n = \frac{2 * 1023}{\cancel{1}}$

$S_n = 2046$

Conclusão

A Soma dos dez primeiros elementos da PG é 2046.

11. Logarítmo

Resumo

O Logarítmo é a operação inversa da exponenciação e é utilizada para calculos de equações exponenciais que não possuem soluções imediatas.
Ou seja: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Nomenclatura

$\log_a b = x$

$a \rightarrow \text{base}$

$b \rightarrow \text{logaritmando}$

$x \rightarrow \text{logaritmo}$

Advertência

Um logarítmo só pode existir:

- Quando sua base for diferente de zero e diferente de um
- Seu logaritmando for maior que zero

Ou seja:

$\begin{cases} a > 0 \ e \ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

Exemplo

$\log_6 36 = 2, \text{pois } 6^2 = 36$

$\log_2 16 = 4, \text{pois } 2^4 = 16$

$\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1, \text{pois } \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

Logaritmo decimal

Um logaritmo é considerado decimal quando a base dele é igual a 10.

Memorizar

É convencionado que quando um logaritmo é decimal não é necessário escrever a base.

$\log_{10} b \Leftrightarrow \log b$

Logaritmo natural

Um logaritmo é considerado natural quando a base dele é igual a e.

Memorizar

Representamos um logaritmo natural por $\ln$.

$\log_e b \Leftrightarrow \ln b$

11.1. Propriedades

Multiplicação de fatores

O Logaritmo é igual à soma dos logaritmos desses fatores.
$\log_a(n * m) = \log_a n + \log_a m$

Divisão de fatores

O logaritmo é igual a subtração dos logaritmos desses fatores.
$\log_a\left(\frac{n}{m}\right) = \log_a n - \log_a m$

Exponenciação de fatores

O logaritmo é igual a multiplicação do logaritmo pelo expoente da potência.
$\log_a(b^n) = n * \log_a b$

Radiciação de fatores

O logarítmo é igual a multiplicação do logaritmo pelo inverso do indice da raiz.
$\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right) = \frac{1}{n} * \log_a b$

Base elevada a uma potência

O logarítmo é igual a multiplicação do logaritmo pelo inverso do expoente da base.
$\log_a^n b = \frac{1}{n} * \log_a b$

11.2. Mudança de base

Resumo

Em um logaritmo natural ($\ln$) a base é e. Podemos mudar de base para a base decimal.

Passo-a-passo

Sabemos que $\ln a = \log_e a$.
$\log_e a = \log_{10} \frac{a}{\log_{10}} e$.
Como $\log_{10} e \approx 0,43$, temos:

$$\begin{aligned}\log_e a &= \frac{\log_{10} a}{0{,}43} \\ &= \frac{1}{0{,}43} * \log a \\ &= 2,3 * \log a\end{aligned}$$

Conclusão

Podemos trocar um logaritmo natural para base decimal se usarmos a seguinte fórmula:

Memorizar

$\ln a = 2,3 * \log a$

12. Função logarítmica

Resumo

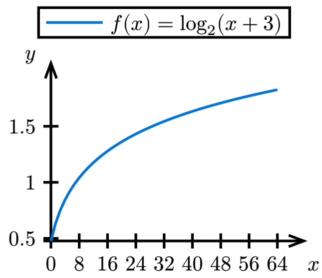
Uma funçao logarítmica é expressa da seguinte forma:
$f(x) = \log_a x$.

Sendo a real e $a \neq 1$.

Exemplo

$f(x) = \log_2(x + 3)$

Gráfico de $f(x)$



Crescimento e decrescimento

O crescimento de uma função logaritmica é dependende em sua base.

Memorizar

- Quando a base for maior que 1, a função é crescente.
- Quando a base for maior que 0 e menor que 1, a função é decrescente.

13. Função exponencial

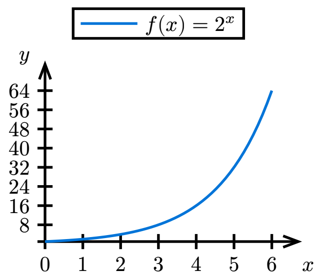
Resumo

Uma funçao exponencial é expressa da seguinte forma:
$f(x) = a^x$.
Onde a é um numero real positivo e $a \neq 1$.

Exemplo

$f(x) = 2^x$

Gráfico de $f(x)$



Crescimento e decrescimento

O crescimento de uma função exponencial é dependende em sua base.

Memorizar

- Quando a base for maior que 1, a função é crescente.
- Quando a base for maior que 0 e menor que 1, a função é decrescente.

14. Juros Simples

Resumo

O juro simples é um tipo de juro onde o valor acrescentado ao decorrer do tempo é constante.

Fórmula

$J = C_i * T_j * t$

Onde:

- J é o juro
- C_i é o capital inicial
- T_j é a taxa de juro
- t é o tempo

Advertência

É importante que a taxa de juro e o tempo estejam na mesma unidade de tempo.
Por exemplo, se o tempo for medido em meses a taxa de juro deve ser mensal.
Talvez seja necessário converter anos para meses, meses para dias, etc.

Montante

O Montante é o valor do capital somado ao juro.

Memorizar

$M = C_i + J$

Passo-a-passo

Pergunta

Um capital de R\$ 600 foi investido em tesouro direto, com uma taxa de $12\%_{\text{a.a.}}$ para ser retirado após 5 anos. Calcule o juro e o montante ao final desse tempo.

Capital Inicial = 600
Período = 5 anos
Taxa = 12% ao ano
Precisa converter? não.

1. Converter a porcentagem para um numero decimal
   $12\% = \frac{12}{100} = 0,12$
2. Calcular o juro
   $$J = C_i * T_j * t$$
   $$C_i = 600$$
   $$T_j = 0,12$$
   $$t = 5$$
   $$J = 600 * 0,12 * 5$$
   $$J = 72 * 5$$
   $$J = 360$$
3. Calcular o montante
   $$M = C_i + J$$
   $$M = 600 + 360$$
   $$M = 960$$

Conclusão

O juro acumulado nesse periodo foi de R$ 360.
O montante foi de R$ 960.

15. Juros Compostos

Resumo

O juro simples é um tipo de juro onde há incidência de juros sobre juros.
Fazendo assim o valor adicionado não ser constante.

Fórmula

$M = C_i * (1 + T_j)^t$
Onde:

- M é o montante
- C_i é o capital inicial
- T_j é a taxa de juro
- t é o tempo

Para se obter o Juro, subtraia o montante pelo capital inicial.
$J = M - C_i$

Passo-a-passo

Pergunta

Um capital de $\text{R\$ }1400$ foi aplicado a juros compostos, com uma taxa de $7\%_{\text{a.a.}}$ para ser retirado após 24 meses.
Calcule o juro e o montante ao final desse tempo.

Capital Inicial = 1400
Período = 24 meses
Taxa = 12% ao ano
Precisa converter? sim.

1. Converter o periodo para a mesma unidade de tempo
   Sabemos que existem 12 meses em um ano. Logo:
   $t = \frac{24}{12}$
   $t = 2$
2. Converter a porcentagem para um numero decimal
   $7\% = \frac{7}{100} = 0,07$
3. Calcular o montante
   $M = C_i * (1 + T_j)^t$
   $M = 1400 * (1 + 0,07)^2$
   $M = 1400 * (1,07)^2$
   $M = 1400 * 1,1449$
   $M = 1602,86$
4. Calcular o juro
   $J = M - C_i$
   $J = 1602,86 - 1400$
   $J = 202,86$

Conclusão

O juro acumulado nesse periodo foi de R$ 202,86.
O montante foi de R$ 1602,86.

16. Probabilidade

16.1. Espaço Amostral

Resumo

- O espaço amostral é o conjunto de todos os possiveis resultados de um experimento.
- É denotado pela letra S.

Evento Equiprovável ou Aleatório

Um espaco amostral é chamado de "equiprovável" se todos os resultados possuirem a mesma chance de ocorrerem.

Exemplo

Experimento: Se joga um dado de 6 lados e se observa o numero da face superior.
O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

16.2. Evento

Resumo

- É um conjunto específico de resultados de um experimento
- Geralmente é representado por uma letra maiúscula

Exemplo

Experimento: Se joga um dado de 6 lados e se observa o numero da face superior.
Alguns eventos podem ser:

- A = Obter um número par
- B = Obter um número impar
- C = $\{1, 2\}$ (Obter 1 ou 2)
- D = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Obter os numeros de 1 à 6)
- E = $\{7\}$ (Obter o numero 7)

Informação

Note que os eventos A, B, C e D são subconjuntos do espaço amostral (O evento D é igual o espaco amostral).

Assim os eventos A, B e C são eventos possíveis e o evento D é um evento certo.
Já o evento E é um evento impossível.

16.3. Fórmula

Memorizar

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Onde:

$P(A) \mapsto \text{Probabilidade de A acontecer}$

$n(A) \mapsto \text{Número de elementos do conjunto A}$

$n(\Omega) \mapsto \text{Número de elementos do espaco amostral}$

Informação

- Frequentemente essa razão é expressa nas formas percentual e decimal.
- $0 \geq P(A) \geq 1$
- Se $P(A) = 0$ o evento tem 0% de chance de ocorrer.
- Se $P(A) = 1$ o evento tem 100% de chance de ocorrer.

17. Análise Combinatória

17.1. Princípio aditivo da Contagem

Resumo

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
Lê-se: "O numero dos elementos da união entre o conjuto A e B é igual à soma dos numeros dos elementos dos conjuntos A e B, se e somente se a interseção entre A e B for o conjunto nulo."

Símbolos

- $\cup$ - União
- $\cap$ - Intersessão
- $\emptyset$ - Conjunto Nulo
- $\Leftrightarrow$ - Se e somente se

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$

- $A \cup B$ = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B$ = $\{3\}$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Passo-a-passo

Pergunta

Suponha que tenha entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e você só tenha dinheiro para assistir apenas um desses programas. Quantos programas você pode fazer?

1. Defina os conjuntos
   $A = \{x \mid x \text{ é filme}\} = \{\text{F1}, \text{F2}, \text{F3}\}$
   $B = \{x \mid x \text{ é teatro}\} = \{\text{T1}, \text{T2}\}$
2. Aplique o princípio aditivo
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
   $n(A \cup B) = 3 + 2$
   $n(A \cup B) = 5$

Advertência

Note que $A \cap B = \emptyset$.

Conclusão

Eu posso fazer 5 programas.

17.2. Princípio Multiplicativo

Resumo

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes, e se para cada uma dessas m maneiras possiveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o numero de maneiras de ocorrer o evento A seguido de B é $m * n$.

Exemplo

Pergunta

Suponha que tenha entrado em cartaz 5 filmes e 4 peças de teatro e você só tenha dinheiro para assistir um filme e uma peça de teatro. Quantos programas você pode fazer?

1. Defina os conjuntos
   $A = \{\mathrm{F1}, \mathrm{F2}, ..., \mathrm{F5}\}$
   $B = \{\mathrm{T1}, \mathrm{T2}, \mathrm{T3}, \mathrm{T4}\}$
2. Aplique o prinicipio multiplicativo
   $n(A) * n(B)$
   $5 * 4$
   20

Conclusão

Eu posso fazer 20 programas.

17.3. Arranjo Simples

Resumo

- Conhecendo um conjunto com n elementos, chamamos de arranjo simples todos os agrupamentos formados sem repetições de elementos.
- No arranjo a posição dos elementos importa, $\{1, 2\} \neq \{2, 1\}$.

Exemplo

Dado o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$, podemos listar todos os arranjos simples possiveis com 2 elementos.

$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}\}$

Podemos afirmar que existem 12 arranjos possiveis de 4 elementos tomados de 2 em 2.

Fórmula

$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Onde:

$A_{n,k} \mapsto$ Arranjo de n elementos tomados de k em k

$n \mapsto$ Quantidades de elementos no conjunto

$k \mapsto$ Quantidades de elementos por argupamento

Passo-a-passo

Pergunta

Calcule a quantidade de arranjos que podemos formar com 8 elementos tomados de 3 em 3.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!}$$

$$A_{8,3} = \frac{8*7*6*\cancel{5!}}{\cancel{5!}}$$

$$A_{8,3} = 8*7*6$$

$$A_{8,3} = 336$$

Conclusão

Existem 336 possíveis arranjos formados com 8 elementos tomados de 3 em 3.

17.4. Combinação simples

Resumo

- Conhecendo um conjunto com n elementos, chamamos de combinação simples todos os subconjuntos formados com uma quantidade de elementos de um conjunto maior.
- No conjunto a posição dos elementos não importa, $\{1,2\} = \{2,1\}$.

Fórmula

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Onde:

$C_k^n \mapsto$ Combinação de n elementos tomados de k em k

$n \mapsto$ Quantidades de elementos no conjunto

$k \mapsto$ Quantidades de elementos por argupamento

Passo-a-passo

Pergunta

Calcule a quantidade de combinações que podemos formar com 10 elementos tomados de 4 em 4.

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!*(10-4)!}$$
$$C_{10}^4 = \frac{10*9*8*7*\cancel{6!}}{4!*\cancel{6!}}$$
$$C_{10}^4 = \frac{10*9*8*7}{4!}$$
$$C_{10}^4 = \frac{5040}{24}$$
$$C_{10}^4 = 210$$

Conclusão

Existem 210 possíveis combinações formados com 10 elementos tomados de 4 em 4.

18. Estatística

18.1. Medidas de Dispersão

Resumo

- São utilizadas para indicar o grau de variação entre um conjunto e sua média.
- Existem quatro medidas de dispersão:
  1. Amplitude
  2. Desvio
  3. Variância
  4. Desvio Padrão

18.1.1. Amplitude

Resumo

É a diferença entre o maior e o menor número do conjunto.

Exemplo

Considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A amplitude de S é igual à $6 - 1$, ou seja 5.

18.1.2. Desvio

Resumo

É a diferença entre cada valor pela média aritmética do conjunto.

Exemplo

Considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- A média aritmética de S é igual a soma de todos os valores dividida pelo numero de valores.

$$M_a = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$
$$M_a = \frac{21}{6}$$
$$M_a = 3,5$$

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 - 3,5 = -2,5 \\ d_1 &= 2 - 3,5 = -1,5 \\ d_2 &= 3 - 3,5 = -0,5 \\ &\vdots \\ d_5 &= 6 - 3,5 = 2,5 \end{aligned}$$

18.1.3. Variância

Resumo

- A Variância indica quão distante um numero está de um valor central.
- Quanto menor a variância, mais próximo os valores estão da média.

Cálculo da variância

É calculada pela média aritmética dos quadrados dos desvios.

Passo-a-passo

Pergunta

Considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Calcule a variância de S.

1. Calcule a média das amostras.
$M_a = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$

$M_a = \frac{21}{6}$

$M_a = 3,5$

2. Calcule os desvios dos elementos.
$d_0 = 1 - 3,5 = -2,5$

$d_1 = 2 - 3,5 = -1,5$

$d_2 = 3 - 3,5 = -0,5$

$d_3 = 4 - 3,5 = 0,5$

$d_4 = 5 - 3,5 = 1,5$

$d_5 = 6 - 3,5 = 2,5$

3. Elevar ao quadrado os desvios
$(-2,5)^2 = 6,25$

$(-1,5)^2 = 2,25$

$(-0,5)^2 = 0,25$

Continuação

Dica

$x^2 = -x^2$

Informação

- Como podemos observar, a variância nesse caso é simétrica.
- Isso permite que nós não precisemos calcular os quadrados do lado positivo pois o quadrado de um numero negativo é igual ao quadrado do numero positivo.
- Nós só precisamos lembrar que cada valor repete duas vezes.

4. Calcular a média aritmética do quadrado dos desvios
$V = \frac{6,25+6,25+2,25+2,25+0,25+0,25}{6}$

$V = \frac{2(6,25+2,25+0,25)}{6}$

$V = \frac{\cancel{2}(8.75)}{\cancel{6}} \hookleftarrow (\div 2)$

$V = \frac{8,75}{3}$

$V \approx 2,92$

Conclusão

A Variância de S é aproximadamente $2,92$.

18.1.4. Desvio Padrão

Resumo

- É a raiz quadrada da variância.
- Indicado pelo simbolo σ.

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, o desvio padrão corresponde a raiz quadrada de $2,92$.
$\sigma(S) = \sqrt{2.92}$

$\sigma(S) \approx 1.4$

18.2. Medidas de Centralidade

Resumo

- São valores retirados para representar, de algum modo, todo o conjunto.
- Existem quatro medidas de dispersão:
  1. Média arítmética
  2. Media aritmética ponderada
  3. Moda
  4. Mediana

18.2.1. Média aritmética

Resumo

É igual a soma de todos os valores dividida pelo numero de valores.

Exemplo

$M_a = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$

$M_a = \frac{21}{6}$

$M_a = 3,5$

18.2.2. Média aritmética ponderada

Resumo

É uma média aritmética onde os numeros involvidos possuem "pesos".

Fórmula

$M_p = \frac{(p_1 * x_1) + (p_2 * x_2) + \ldots + (p_n * x_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$
Onde:

- M_p é a média ponderada
- $p_1, \ldots, p_n$ são os pesos de cada valor
- $x_1, \ldots, x_n$ são os valores

Exemplo

Supomos que a primeira fase de um processo tenha peso 1, a segunda tenha peso 2 e o terceira tenha peso 3.

O calculo da média ponderada neste caso seria:
$M_p = \frac{(1 * \text{ 1ª Fase}) + (2 * \text{ 2ª Fase}) + (3 * \text{ 3ª Fase})}{1+2+3}$

Informação

Resumidamente, a média ponderada é uma média onde cada valor é multiplicado pelo seu peso, e dividido pela soma dos pesos.

18.2.3. Moda

Resumo

É o valor mais frequente de um conjunto.
Caso o conjunto não apresente uma moda, ele é chamado de “amodal”.
Caso apresente uma moda, ele é chamado de “unimodal”.
Caso apresente duas modas, é “bimodal”; etc.

Exemplo

Considere os seguinte conjuntos:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{1, 2, 1, 3, 1\}$
$C = \{1, 1, 2, 2, 3\}$

- O conjunto A é amodal, pois não existe um numero mais frequente que os outros.
- O conjunto B é unimodal, e sua moda é 1.
- O conjunto C é bimodal, e suas modas são $\{1, 2\}$.

18.2.4. Mediana

Resumo

- É o valor que indica exatamente o centro de um conjunto quando esse conjunto é ordenado.
- Um conjunto é ordenado quando todos os seus valores seguem uma ordem crescente ou decrescente.

Advertência

Se o numero de objetos do conjunto for par é calculado pela média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo

Considere o conjunto
$S = \{5, 2, 8, 4, 7, 8\}$.
Ao ordenar (crescente) S obtemos
$S' = \{2, 4, 5, 7, 8, 8\}$.

Como esse conjunto é par precisamos obter os dois valores centrais.
Que neste caso são $\{5, 7\}$.
$M_d = \frac{5+7}{2}$
$M_d = 6$

Conclusão

A mediana (M_d) de S é 6.

19. Algebra Linear

19.1. Matriz

Resumo

- É uma extrutura matématica disposta em tabela com operações matemáticas bem definidas.

Representação

- As matrizes são sempre representadas por uma letra maiuscula que são acompanhadas por índicies.
- O primeiro índice indica a quantidade de linhas.
- O segundo índice indica a quantidade de colunas.
- A_{m*n}
  Onde:
  - A é o nome da matriz
  - m é a quantidade de linhas
  - n é a quantidade de colunas

Exemplo

$$A_{1*3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_{3*1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{2*3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz Quadrada

Uma matriz é quadrada quando $m = n$. Em uma matriz quadrada temos dois elementos importantes:

Diagonal Principal

Formada por todos os elementos com indices iguais. Ou seja:
a_{ij} onde $i = j$.

Diagonal Secundária

Formada por todos os elementos com indices que quando somados é o numero que succede a ordem da matriz. Ou seja:
a_{ij} onde $i + j = n + 1$
Sendo n a ordem da matriz.

Identidade

Uma matriz é a matriz identidade quando todos os elementos da diagonal principal são iguais à 1 e o resto são iguais à 0.

Exemplo

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nula

Uma matriz é nula quando todos os seus elementos são iguais à 0.

Exemplo

$$O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonada

Uma matriz é escalonada quando:

- Todas as linhas contendo somente zeros estão no fundo da matriz.
- O elemento inicial, chamado de "pivô" (primeiro elemento que não é zero) de cada linha não-nula, está a direita do pivô da linha superior.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonada Reduzida

Uma matriz é escalonada reduzida quando:

- Ela é escalonada.
- O pivô de cada linha não-nula é igual à 1.
- Todas as entradas na coluna contendo um pivô igual à 1 são zeros.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19.1.1. Operações

Advertência

Tanto adição quanto subtração requerem que as matrizes tenham a mesma ordem.

Adição

- A adição de duas matrizes se dá somando cada elemento.
- Ou seja: $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m*n}$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Subtração

- A subtração de duas matrizes se dá subtraindo cada elemento.
- Ou seja: $A + B = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{m*n}$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um numero

- A multiplicação de uma matriz por um numero se dá multiplicando cada elemento pelo numero.
- Ou seja: $t * A = \left[t * a_{ij}\right]_{m*n}$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2 * A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

- A multiplicação de uma matriz por outra matriz não é tão trivial quanto a subtração ou adição.
- Para realizar a multiplicação, o numero de colunas da primeira matriz deve ser igual ao numero de linhas da segunda.
- A matriz produto possui uma ordem dada pela quantidade de linhas da primeira e colunas da segunda.
- Ou seja: $A_{m*n} * B_{n*r} = C_{m*r}$

Exemplo

1. Se multiplica cada linha da primeira matriz por uma coluna da segunda
2. O primeiro elemento de A é multiplicado ao primeiro elemento de B
3. O segundo elemento de A é multiplicado ao segundo elemento de B
4. E assim sucessivamente, até não terem mais elementos a serem multiplicados
5. Depois todos os multiplicandos são somados

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c_{1,1} = 0 * 1 + 2 * (-2) + 4 * 0$$

$$c_{1,2} = 0 * 3 + 2 * 2 + 4 * 4$$

$$c_{2,1} = 1 * 1 + 3 * (-2) + 5 * 0$$

$$c_{2,2} = 1 * 3 + 3 * 2 + 5 * 4$$

$$A * B = \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ -5 & 29 \end{pmatrix}$$

Inverso

- Duas matrizes são inversas, se e somente se, $a_{ij} = -b_{ij}$.
- Ou seja, todos os elementos devem ser numeros opostos.

Exemplo

$$A_{3*3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 7 & 14 & -8 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$-A_{3*3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -9 \\ -7 & -14 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Transposição

- Duas matrizes são transpostas, se e somente se, $a_{ij} = b(ji)$.
- Ou seja, basta tomar as linhas por colunas.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}_{2*3}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{3*2}$$

19.1.2. Determinante

Resumo

Matriz 2x2

- **A determinante de uma matriz de ordem 2 é calculado pela diferença entre os produtos dos das diagonais.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a * d - c * b$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1 * 3) - (2 * 5)$$

$$\det(A) = 3 - 10$$

$$\det(A) = -7$$

Matriz 3x3

- **A determinante de uma matriz de ordem 3 é calculado seguindo:**

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a \det\left(\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}\right)$$

$$-b \det\left(\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}\right)$$

$$+c \det\left(\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

Passo-a-passo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 * \det(A_x)$$

$$-(\cancel{1 *} \det(A_y))$$

$$+(-1) * \det(A_z)$$

$$\det(A_x) = (3 \cancel{* 1}) - ((-2) * 2)$$

$$= 3 - (-4)$$

$$= 7$$

$$\det(A_y) = (1 \cancel{* 1}) - (3 * 2)$$

$$= 1 - 6$$

$$= -5$$

$$\det(A_z) = (\cancel{1 *} - 2) - (3 * 3)$$

$$= (-2) - 9$$

$$= -11$$

Continuação

$$\det(A) = (2 * 7)$$

$$-(-5)$$

$$+(-1 * (-11))$$

$$= 14 - (-5) + 11$$

$$= 30$$

Conclusão

$$\det(A) = 30$$

19.2. Equações Lineares

Resumo

- São expressões algébricas com igualdade e o maior expoente das suas incógnitas é 1.
- Elas possuem uma só solução.

Exemplo

São exemplos de equações lineares:
$2x + y = 7 \mapsto 2$ incógnitas (x,y)

$a + 4 \quad = -3 \mapsto 1$ incógnita (a)

Definição

Uma equação linear pode ser descrita por:
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c$
Onde:

- c é uma constante
- $a_1, \ldots, a_n$ é um coeficiente
- $x_1, \ldots, x_n$ é uma incógnita

19.3. Sistemas Lineares

Resumo

São formados por duas ou mais equações lineares que possuem suas incógnitas relacionadas.

Exemplo

São exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

19.3.1. Sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

Resumo

São o tipo de sistema linear mais simples possível.

Solução

Esses sistemas podem ser resolvidos por vários métodos, como:

- Substituição
- Comparação
- Adição

Informação

Esses métodos não são tão eficientes para resolver sistemas mais complexos.

Convenções

- Nessa seção iremos adotar a convenção de chamar a primeira equação de A e a segunda de B.
- Todas as alterações feitas em uma equação serão demarcadas por traços ao lado do simbolo da equação, ex: A', B'', etc.
- A quantidade de traços denota o numero de modificações feitas nessa equação.

19.3.1.1. Método da Substituição

Resumo

Consiste em isolar uma das incógnitas e realizar a Substituição na outra equação.

Passo-a-passo

Pergunta

Considere o sistema linear:
$\begin{cases} x+2y & =5 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$

1. Isolar uma das incógnitas
   Na equação $A \leftarrow\!\dashv x + 2y = 5$, a incógnita x não possui coeficiente, o que faz com que isolar o x seja mais facil nessa equação.

   Reescrevemos a equação assim:
   $$\begin{aligned} A &\leftarrow\!\dashv x + 2y = 5 \\ A' \leftarrow\!\dashv x &= 5 - 2y \end{aligned}$$
2. Substituir A' em B
   Agora que temos uma equação com o x isolado, podemos substituir o valor de x na equação B.
   $$\begin{aligned} B \leftarrow\!\dashv 3x - 5y &= 4 \\ B' \leftarrow\!\dashv 3(5 - 2y) - 5y &= 4 \end{aligned}$$

Continuação

3. Resolver o y em B'

   Como B' tem apenas uma incógnita podemos resolver a equação normalmente.
   $$\begin{aligned} B' \leftarrow\!\dashv 3(5 - 2y) - 5y &= 4 \\ (15 - 6y) - 5y &= 4 \\ 15 - 11y &= 4 \\ -11y &= 4 - 15 \\ -11y &= -11 \\ y &= 1 \end{aligned}$$
4. Resolver x em A

   Como sabemos o valor de y podemos substituir o valor na equação A e resolver.
   $$\begin{aligned} A \leftarrow\!\dashv x + 2y &= 5 \\ x + 2(1) &= 5 \\ x + 2 &= 5 \\ x &= 5 - 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Conclusão

A solução do sistema linear é $\{3, 1\}$.

19.3.1.2. Método da Comparação

Resumo

Consiste em isolar uma das incógnitas nas duas equações e igualar esses valores.

Passo-a-passo

Pergunta

Considere o sistema linear:
$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=-4 \end{cases}$

1. **Isolar uma das incógnitas**
   Escolhemos isolar o x
   em ambas as equações.
   $A \hookleftarrow 2x + y = 2$
   $A' \hookleftarrow x \quad = \frac{2-y}{2}$
   $B \hookleftarrow x + 3y = -4$
   $B' \hookleftarrow x \quad = -4 - 3y$
2. **Igualar A' e B' já que $x = x$**
   $A' \hookleftarrow x = \frac{2-y}{2}$
   $B' \hookleftarrow x = -4 - 3y$
   $A' \quad = B'$
   $\frac{2-y}{2} = -4 - 3y$

Continuação

3. **Resolver y**
   $$\begin{aligned} \tfrac{2-y}{2} &= -4 - 3y \\ 2 - y &= 2(-4 - 3y) \\ 2 - y &= -8 - 6y \\ -y + 6y &= -8 - 2 \\ 5y &= -10 \\ y &= -2 \end{aligned}$$
4. **Resolver x em B**
   Escolhemos a equação B pois nela x não tem quociente.
   $B \hookleftarrow x + 3y = -4$
   $$\begin{aligned} x &= -4 - 3y \\ x &= -4 - 3(-2) \\ x &= -4 + 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Conclusão

A solução do sistema linear é $\{2, -2\}$

19.3.1.3. Método da Adição

Resumo

Consiste em multiplicar uma das equações para que a soma das equações elimine uma incógnita.

Passo-a-passo

Pergunta

Considere o sistema linear:
$\begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x + 2y \ = 13 \end{cases}$

1. Multiplicar uma das equações para que uma incógnita seja eliminada.
   Se multiplicarmos a equação B por 2, teremos $4y$ em B e $-4y$ em A.
   $\begin{cases} B \leftarrow x + 2y \ = 13 \\ B' \leftarrow 2x + 4y = 26(*2) \end{cases}$
2. Somar A com B'.
   $A \leftarrow 5x - 4y \ = -5$

   $B' \leftarrow 2x + 4y = 26$

   $A + B'$

   $5x \cancel{-4y} = -5$

   $\underline{2x \cancel{+4y} = 26}$

   $7x \quad = 21$

   $x \quad = 3$
3. Resolver y em B
   $B \leftarrow x + 2y = 13$

   $3 + 2y \quad = 13$

   $2y \quad = 13 - 3$

   $2y \quad = 10$

   $y \quad = 5$

Conclusão

A solução do sistema linear é $\{3, 5\}$

19.3.2. Sistema linear de três equações e três incógnitas

Resumo

Adotamos novos métodos de resolução quando o sistema possui três equações e três incógnitas.

Solução

- Os métodos para solução desse tipo de sistema involvem a representação matricial.
- Os mais utilizados são:
  1. Eliminação Gauss-Jordan

19.3.2.1. Representação matricial

Resumo

- Todo sistema de equação, incluindo o 2x2 pode ser representado por uma matriz.
- Existem duas representações possiveis:
  1. Matriz Completa
  2. Matriz Incompleta

Exemplo

O sistema:

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=d \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=e \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=f \end{cases}$$

Pode ser representado por:

Matriz Completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & d \\ b_1 & b_2 & b_3 & e \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \end{array}\right)$$

Onde d, e e f são chamados de termos independentes.

Matriz Incompleta

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Sistema linear exemplo

Em todos os passo-a-passo iremos usar o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+3y+2z=4 \\ 3x-2y+z=-5 \end{cases}$$

Esse sistema possui a seguinte representação matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

19.3.3. Eliminação de Gauss-Jordan

Resumo

É um metodo para resolver equações lineares utilizando operações aplicadas às linhas da matriz completa visando transformar essa matriz em uma escalonada reduzida.

19.3.3.1. Operações valídas

Informação

Seja A a matriz de exemplo:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Suas linhas são:

- L_1: $(2 \;\; 1 \;\; -1 \,|\, 3)$
- L_2: $(1 \;\; 3 \;\; 2 \,|\, 4)$
- L_3: $(3 \;\; -2 \;\; 1 \,|\, -5)$

Troca

Podemos trocar duas linhas entre sí.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow S(L_1, L_2)$$

Multiplicação

Podemos multiplicar uma linha por um número que não seja zero.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow L_1 * 3$$

Adição / Subtração

Podemos adicionar ou subtrair uma linha, ou seu multiplo, por outra linha

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow L_{1'} = L_1 - L_2$$

19.3.3.2. Algoritmo

Resumo

Para realizar a eliminação de Gauss-Jordan:

1. Troque as linhas para todas as linhas que tenham só zeros fiquem no fundo.
2. Troque as linhas para que a coluna com o maior número inicial fique no topo.
3. Multiplique a coluna do topo por algum número que faça o pivô se tornar 1.
4. Adicione ou Subtraia múltiplos da linha do topo nas outras linhas para que todas as outras entradas na coluna do pivô se tornem zero.
5. Repita os passos 2-4 na proxima coluna até que todos os pivôs se tornem 1.

Passo-a-passo

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow S(L_3, L_1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow L_1 * \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{19}{3} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow L_{2'} = L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \end{array}\right) \leftrightarrow L_{3'} = L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 7 & -5 & 19 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \end{array}\right) \leftrightarrow L_2 * 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 7 & -5 & 19 \\ 0 & 11 & 5 & 17 \end{array}\right) \leftrightarrow L_3 * 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 11 & 5 & 17 \end{array}\right) \leftrightarrow L_2 * \frac{1}{7}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & \frac{90}{7} & -\frac{90}{7} \end{array}\right) \leftrightarrow L_{3'} = L_3 - 11L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow L_3 * \frac{7}{90}$$

Redução para matriz identidade

Memorizar

A Matriz identidade nos dará os valores de cada incógnita.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow L_{2'} = L_2 + \frac{5}{7}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow L_{1'} = L_1 - \frac{1}{3}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow L_{1'} = L_1 + \frac{2}{3}L_2$$

Conclusão

A solução do sistema linear exemplo é $\{0, 2, -1\}$.

20. Glossário

Essa secção contém o glossário automáticamente gerado.