

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Чтобы доказать тождество, обратимся к теме единичной окружности.

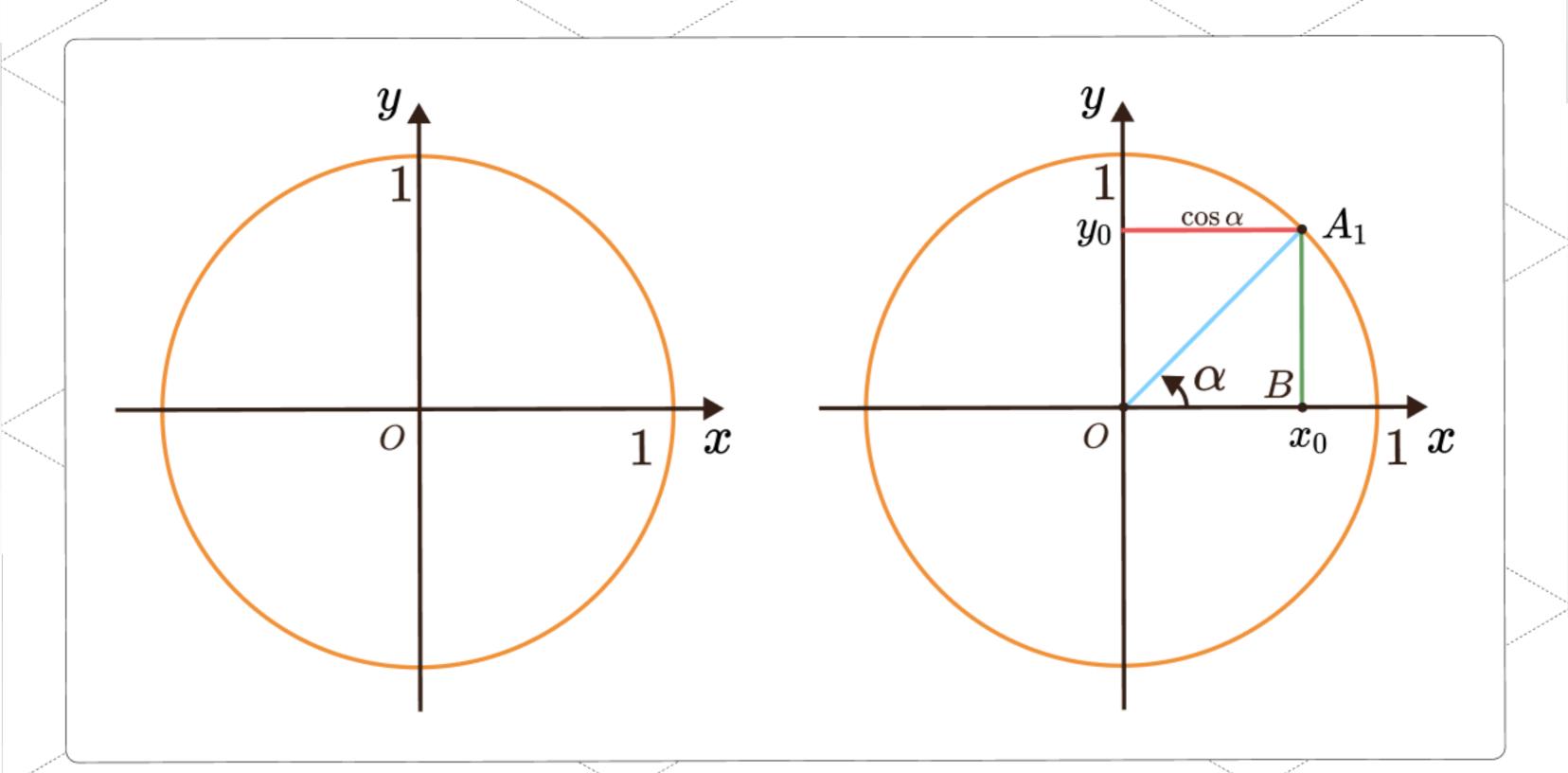
Единичная окружность — это окружность с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат. Радиус единичной окружности равен единице.

Мы знаем координаты точки A(1;0). Произвольный угол lpha, тогда $\coslpha=x_0=OB$. Если развернуть точку A на угол lpha, то точка A становится на место точки A_1 .

Мы знаем, что:

Синус угла — есть отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла — есть отношение прилежащего катета к гипотенузе.





Это значит, что точка A_1 получает координаты $\cos \alpha, \sin \alpha$. Опустим перпендикулярную прямую A_1B на x_0 из точки A_1 . Образовался прямоугольный треугольник OA_1B .

Пусть $|A_1B| = |y|; \ |OB| = |x|.$

Гипотенуза OA_1 имеет значение, равное радиусу единичной окружности.

$$|OA_1| = 1.$$

Применяя полученное выражение, записываем равенство по теореме Пифагора, поскольку получившийся угол — прямой:

$$|A_1B|^2 + |OB|^2 = |OA_1|^2.$$

Записываем в виде: $|y|^2+|x|^2=|1|^2$. Это значит, что $y^2+x^2=1$.

$$\sin lpha = y,$$

$$\cos \alpha = x$$
.

Получаем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Пример.

Вычислите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0.8$. В ответ запишите то значение синуса, которое соответствует острому углу.

Решение:

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2\alpha+0,64=1,$$

$$\sin^2 \alpha = 0,36.$$

Острому углу соответствует:

$$\sin \alpha = 0, 6.$$

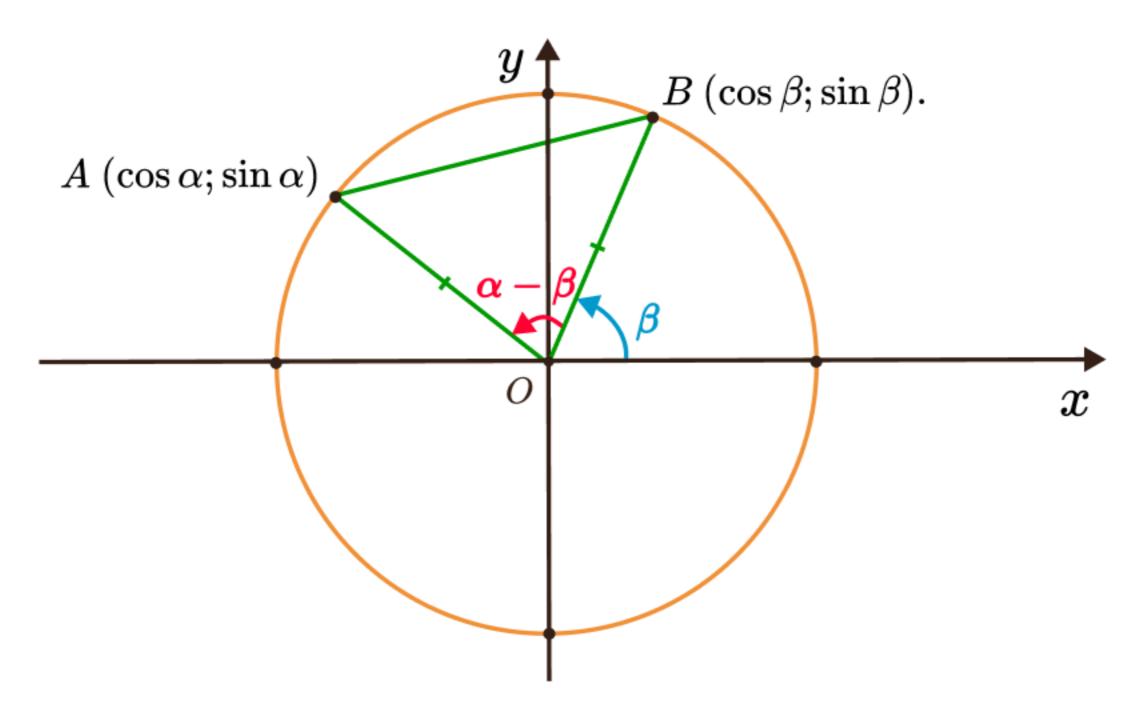
Ответ: 0,6.



Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(lpha\pmeta)=\sinlpha\cdot\coseta\pm\coslpha\cdot\sineta, \ \cos(lpha\pmeta)=\coslpha\cdot\coseta\mp\sinlpha\cdot\sineta, \ ag(lpha\pmeta)=rac{\mathrm{tg}lpha\pm\mathrm{tg}eta}{1\mp\mathrm{tg}lpha\cdot\mathrm{tg}eta}, \ ag{ctg}(lpha\pmeta)=rac{\mathrm{ctg}lpha\pm\mathrm{tg}eta}{\mathrm{ctg}lpha\pm\mathrm{tg}eta}.$$

Начнем с доказательства формулы косинуса разности. Для доказательства нам потребуется единичная окружность, на которой рассмотрим углы α и β . Присвоим этим углам точки A и B. Отсюда координаты точек будут: $A\left(\cos\alpha;\sin\alpha\right),\ B\left(\cos\beta;\sin\beta\right).$



Рассмотрим треугольник $AOB,\;$ в котором $\angle AOB = \alpha - \beta.\;$ Далее обратимся к теореме косинусов:

$$AB^2=AO^2+BO^2-2\cdot AO\cdot BO\cdot \cosarphi,\ \ arphi=lpha-eta.$$
 $AB^2=1+1-2\cdot \cosarphi=2-2\cosarphi,\ (AO=BO=R=1).$



Теперь также найдём AB, но через формулу расстояния между двумя точками:

$$AB^2 = (\cos lpha - \cos eta)^2 + (\sin lpha - \sin eta)^2, \ AB^2 = \cos^2 lpha - 2\cos lpha \cdot \cos eta + \cos^2 eta + \sin^2 lpha - 2\sin lpha \sin eta + \sin^2 eta, \ AB^2 = 1 + 1 - 2 \cdot (\cos lpha \cdot \cos eta + \sin lpha \cdot \sin eta).$$

Объединяя формулы, выражающие сторону AB^2 , получим:

$$1 + 1 - 2 \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = 1 + 1 - 2\cos \varphi,$$
 $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$

Из формулы разности выведем формулу суммы аргументов:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos(90^\circ - (\alpha+\beta)) = \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\beta = \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos\alpha = \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Далее запишем формулы tg и ctg для суммы и разности сразу:

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{tg\alpha \mp tg\beta}{1 \pm tg\alpha \cdot tg\beta},$$
$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha} = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \pm 1}{ctg\beta \mp ctg\alpha}.$$

Пример.

Вычислите tg15°.

Решение:

$$ext{tg}15^{\circ} = ext{tg}(60^{\circ} - 45^{\circ}) = rac{ ext{tg}45^{\circ} - ext{tg}30^{\circ}}{1 + ext{tg}45^{\circ} \cdot ext{tg}30^{\circ}} = rac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $2 - \sqrt{3}$.

Страница 5

Формулы двойного угла

$$egin{aligned} \sin 2lpha &= 2\cdot \sinlpha\cdot\coslpha,\ \cos 2lpha &= \cos^2lpha - \sin^2lpha,\ & an 2 an^2lpha &= rac{2 an^2lpha}{1- an^2lpha},\ & an ctg2lpha &= rac{ angle tg^2-1}{2 angle tglpha}. \end{aligned}$$

Доказательство формул берет начало из формул сложения.

$$\sin 2lpha = \sin(lpha + lpha) = \sinlpha \cdot \coslpha + \coslpha \cdot \sinlpha = 2\cdot\sinlpha \cdot \coslpha, \ \cos 2lpha = \cos(lpha + lpha) = \coslpha \cdot \coslpha - \sinlpha \cdot \sinlpha = \cos^2lpha - \sin^2lpha, \ ext{tg} 2lpha = rac{\sin 2lpha}{\cos 2lpha} = rac{2\cdot\sinlpha \cdot \coslpha}{\cos^2lpha - \sin^2lpha} = rac{2 ext{tg}lpha}{1 - ext{tg}^2lpha}, \ ext{ctg} 2lpha = rac{\cos 2lpha}{\sin 2lpha} = rac{\cos^2lpha - \sin^2lpha}{2\cdot\sinlpha \cdot \coslpha} = rac{ ext{ctg}^2lpha - 1}{2 ext{ctg}lpha}.$$

Пример.

Найдите значение выражения $\frac{\sin 22^{\circ}\cos 22^{\circ}}{\sin 44^{\circ}}$

Решение:

$$\frac{\sin 22^{\circ}\cos 22^{\circ}}{\sin 44^{\circ}} = \frac{\sin 22^{\circ}\cos 22^{\circ}}{2\sin 22^{\circ}\cos 22^{\circ}} = 0, 5.$$

Ответ: 0,5.

Формулы понижения степени

$$\sin^2 lpha = rac{1-\cos 2lpha}{2}, \ \cos^2 lpha = rac{1+\cos 2lpha}{2}.$$

Формулы понижения степени следуют из формул двойного угла у косинуса и синуса:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$
 и $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.

Отсюда и выходят формулы понижения:

$$\sin^2 lpha = rac{1-\cos 2lpha}{2}$$
 in $\cos^2 lpha = rac{1+\cos 2lpha}{2}.$

Пример.

Найдите значение выражения $2\sin^2\left(rac{\pi}{4}
ight)$.

Решение:

$$2\sin^2\Bigl(rac{\pi}{4}\Bigr) = rac{2\cdot\Bigl(1-\cosrac{\pi}{2}\Bigr)}{2} = 1-\cosrac{\pi}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Полезные материалы для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ от онлайн-школы Умскул

Файл подготовлен командой онлайн-школы Умскул. Советуем распечатать или сохранить на компьютере, чтобы не потерять.

Если у тебя есть какие-то предложения или замечания по этому файлу, можешь написать на support@umschool.ru.

Для нас это важно.

Для тех, кто дошел до конца— хотим подарить бесплатный курс по любому предмету ЕГЭ или ОГЭ. Жми на кнопку и заполняй форму на сайте.

Получить курс

Как начать заниматься с нами?



Заполните заявку на сайте https://umschool.net/

vk.com/umsch

umschool.net

/umschool