Умскул

Тригонометрические формулы

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Чтобы доказать тождество, обратимся к теме единичной окружности.

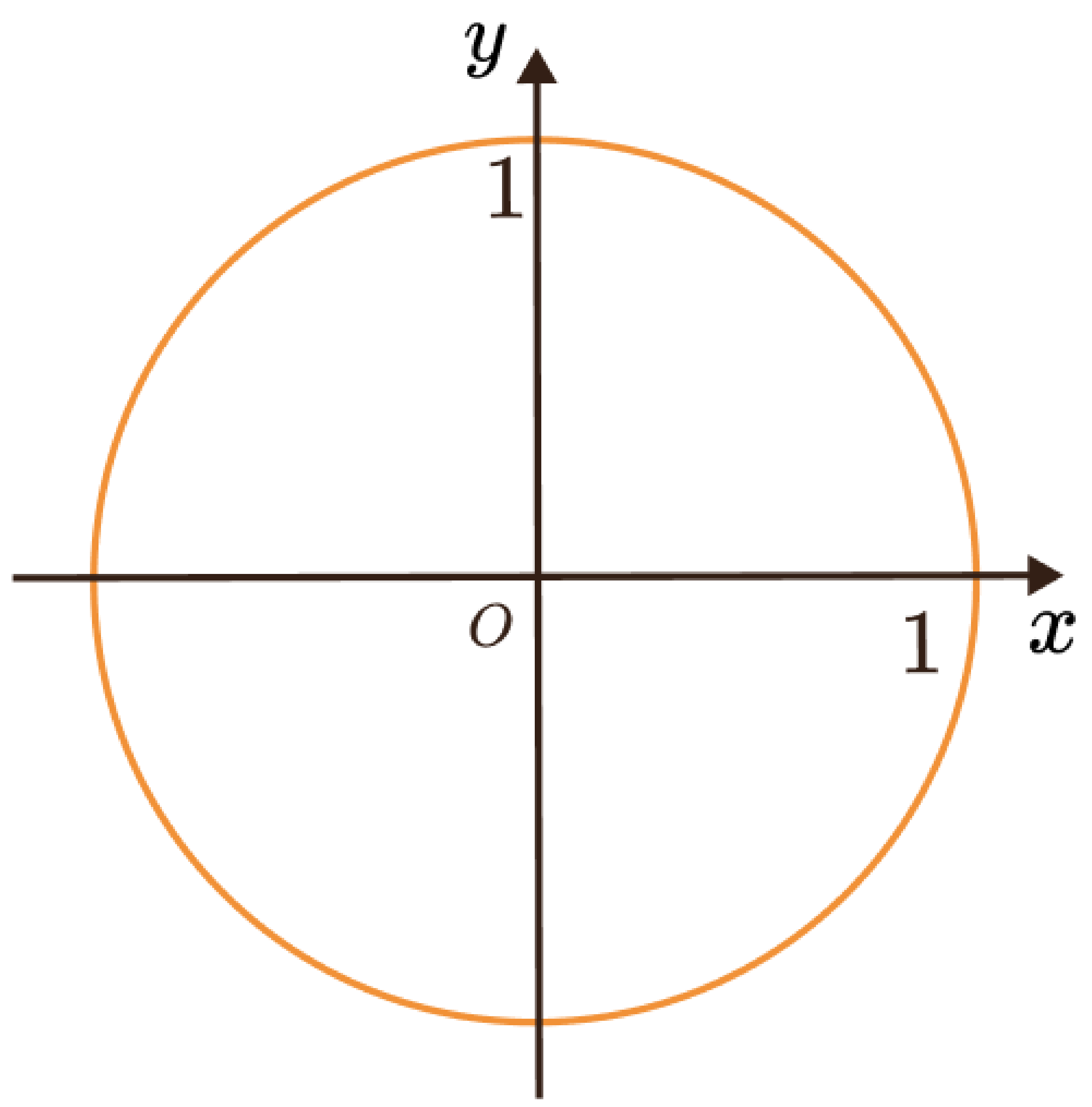
Единичная окружность — это окружность с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат. Радиус единичной окружности равен единице.

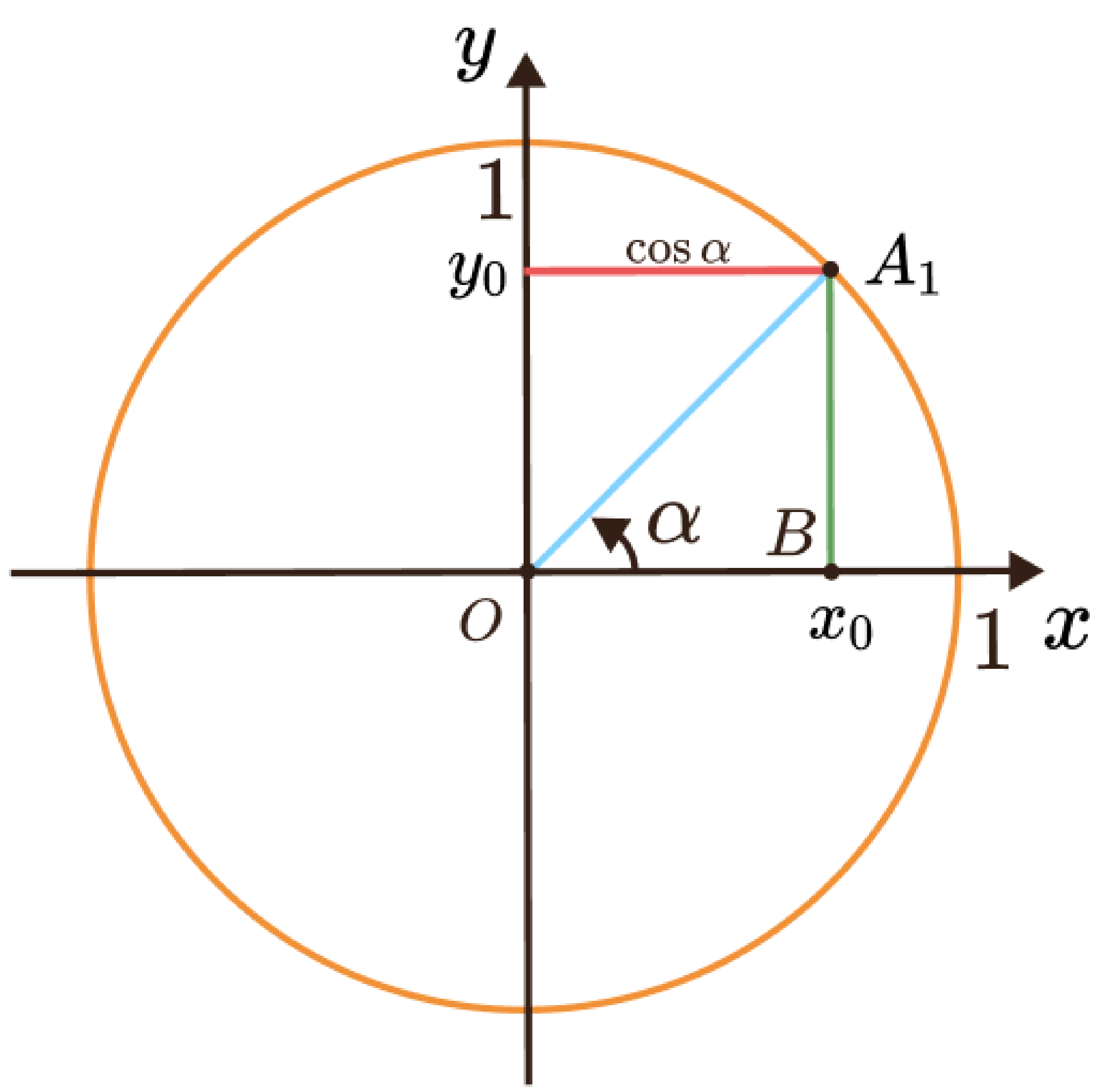
Мы знаем координаты точки $A(1;0)$. Произвольный угол α, тогда $\cos\alpha = x_0 = OB$. Если развернуть точку A на угол α, то точка A становится на место точки A_1.

Мы знаем, что:

Синус угла — есть отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла — есть отношение прилежащего катета к гипотенузе.





Это значит, что точка A_1 получает координаты $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Опустим перпендикулярную прямую A_1B на x_0 из точки A_1. Образовался прямоугольный треугольник OA_1B.
Пусть $|A_1B| = |y|$; $|OB| = |x|$.
Гипотенуза OA_1 имеет значение, равное радиусу единичной окружности. $|OA_1| = 1$.
Применяя полученное выражение, записываем равенство по теореме Пифагора, поскольку получившийся угол — прямой:

$$|A_1B|^2 + |OB|^2 = |OA_1|^2.$$

Записываем в виде: $|y|^2 + |x|^2 = |1|^2$. Это значит, что $y^2 + x^2 = 1$.

$$\sin\alpha = y,$$
$$\cos\alpha = x.$$

Получаем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Пример.

Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0,8$. В ответ запишите то значение синуса, которое соответствует острому углу.

Решение:

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2\alpha + 0,64 = 1,$$
$$\sin^2\alpha = 0,36.$$

Острому углу соответствует:

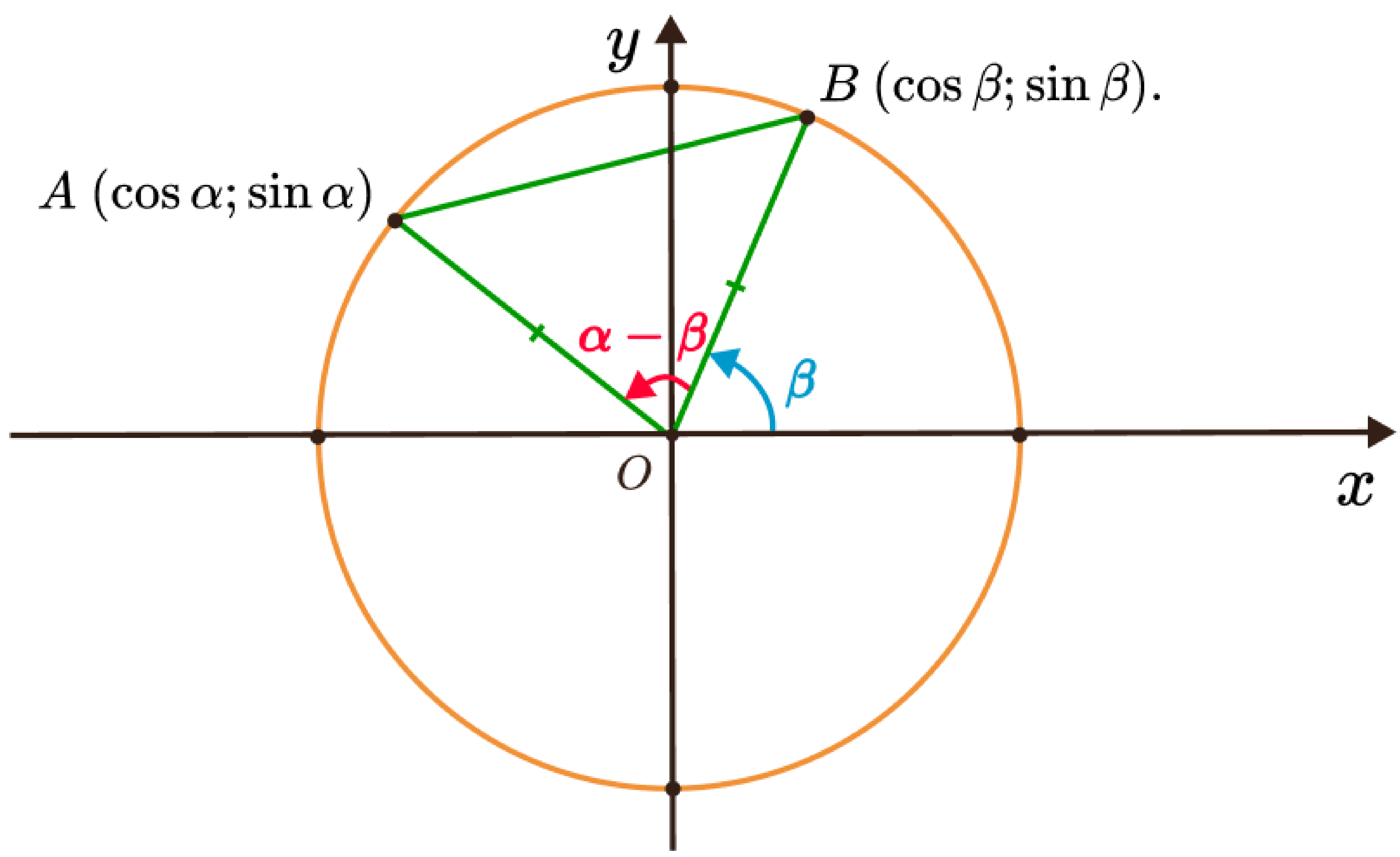
$$\sin\alpha = 0,6.$$

Ответ: $0{,}6$.

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta},$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta}.$$

Начнем с доказательства формулы косинуса разности. Для доказательства нам потребуется единичная окружность, на которой рассмотрим углы α и β. Присвоим этим углам точки A и B. Отсюда координаты точек будут: $A\,(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $B\,(\cos\beta; \sin\beta)$.



Рассмотрим треугольник AOB, в котором $\angle AOB = \alpha - \beta$. Далее обратимся к теореме косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\varphi, \quad \varphi = \alpha - \beta.$$
$$AB^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \cos\varphi = 2 - 2\cos\varphi, \; (AO = BO = R = 1).$$

Теперь также найдём AB, но через формулу расстояния между двумя точками:

$$AB^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2,$$
$$AB^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta,$$
$$AB^2 = 1 + 1 - 2\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta).$$

Объединяя формулы, выражающие сторону AB^2, получим:

$$1 + 1 - 2\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = 1 + 1 - 2\cos\varphi,$$
$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Из формулы разности выведем формулу суммы аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) + \sin\alpha\cdot\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(90^\circ - (\alpha+\beta)) = \cos(90^\circ-\alpha)\cdot\cos\beta + \sin(90^\circ-\alpha)\cdot\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cdot\cos\alpha =$$
$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

Далее запишем формулы tg и ctg для суммы и разности сразу:

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\mathrm{tg}\alpha \mp \mathrm{tg}\beta}{1 \pm \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta},$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)} = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta \pm 1}{\mathrm{ctg}\beta \mp \mathrm{ctg}\alpha}.$$

Пример.

Вычислите $\mathrm{tg}15^\circ$.

Решение:

$$\mathrm{tg}15^\circ = \mathrm{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\mathrm{tg}45^\circ - \mathrm{tg}30^\circ}{1 + \mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $2 - \sqrt{3}$.

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},$$
$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Доказательство формул берет начало из формул сложения.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},$$
$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Пример.

Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 22^\circ}{\sin 44^\circ}$.

Решение:

$$\frac{\sin 22^\circ \cos 22^\circ}{\sin 44^\circ} = \frac{\sin 22^\circ \cos 22^\circ}{2\sin 22^\circ \cos 22^\circ} = 0,5.$$

Ответ: $0{,}5$.

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

«Узнать о курсе подготовки к ЕГЭ для десятиклассников»

Формулы понижения степени следуют из формул двойного угла у косинуса и синуса:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{и} \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Отсюда и выходят формулы понижения:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример.

Найдите значение выражения $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)}{2} = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

Ответ: 1.