Лабораторная работа №2. Быстрое преобразование Фурье. Дискретная свертка

Цель работы

Изучить алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) и его некоторые приложения.

Теоретические сведения

Дискретным преобразованием Фурье (*ДПФ*) или *дискретным спектром* числового вектора $\mathbf{X} = (x_0, x_1,\dots, x_{N-1})$ называется вектор $\mathbf{Y} = (y_0, y_1,\dots, y_{N-1})$, компоненты которого определяются формулой

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N}kj}, \; k = 0,\dots, N-1. \tag{1}$$

Вектор $\mathbf{X} = (x_0, x_1,\dots, x_{N-1})$ можно восстановить по дискретному спектру при помощи *обратного ДПФ* (*ОДПФ*):

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{N}kj}, \; j = 0,\dots, N-1. \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{X} = (x_0, x_1,\dots, x_{N-1})$ обычно представляет собой N последовательных отсчетов $x_j = x(j\Delta t)$ аналогового сигнала $x(t)$, тогда можно считать, что последовательность $\mathbf{Y} = (y_0, y_1,\dots, y_{N-1})$ с некоторой точностью представляет последовательные отсчеты $y_k = y(k\Delta\nu)$ в частотной области. Таким образом, ДПФ является аппроксимацией непрерывного преобразования Фурье.

При нахождении ДПФ непосредственно по формуле для вычисления каждого из N коэффициентов y_k требуется около N комплексных сложений с умножениями, следовательно, для реализации ДПФ требуется около N^2 комплексных сложений с умножениями, т.е. алгоритм вычисления имеет сложность $O(N^2)$. Алгоритмы *быстрого преобразования Фурье* (*БПФ*) позволяют снизить объём необходимых вычислений до $O(N \log N)$, см. [1].

Дискретной сверткой последовательностей $x(n)$ и $y(n)$ называется последовательность $u(n)$, обозначаемая $u(n) = x(n) * y(n)$, элементы которой находятся по формуле:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, y(n-k). \tag{3}$$

При этом имеет место равенство

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)=\sum_{k=0}^{n}x(k)y(n-k)=\sum_{k=0}^{n}y(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(k)x(n-k),$$

так как считаем, что при $n<0$ $x(n)=y(n)=0$.

Вычисление свертки с помощью БПФ

Пусть M – длина последовательности $x(n)$, т.е. $x(n)=0$ при $n\geq M$, а L – длина последовательности $y(n)$: $y(n)=0,\ n\geq L$. Дискретная свертка этих последовательностей $y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)y(n-m)=\sum_{m=0}^{n}x(m)y(n-m)$ будет иметь длину $M+L-1$, так как для $n\geq M+L-1$ приведенная формула свертки дает $u(n)=0$, а для $n=M+L-2$ в общем случае $y(M+L-2)=x(M-1)y(L-1)\neq 0$.

Использование БПФ для вычисления свертки основано на том, что ДПФ свертки последовательностей есть покомпонентное произведение ДПФ соответствующих последовательностей. Рассмотрим процедуру нахождения свертки с помощью БПФ.

Добавлением нулевых отсчетов сформируем векторы одинаковой размерности $2N\geq\max(2L,2M)$ (обычно $N=2^n$):

$$X=\left(\underbrace{x(0),x(1),\ldots,\ x(M-1),\ 0,\ 0,\ldots,\ 0}_{2N}\right),\quad Y=\left(\underbrace{y(0),y(1),\ldots,\ y(L-1),\ 0,\ 0,\ldots,\ 0}_{2N}\right)$$

Затем над этими векторами выполним следующие действия:

1. БПФ: $X\to\hat{X}$ и $Y\to\hat{Y}$.
2. Покомпонентное перемножение полученных дискретных спектров: $\hat{U}=\sqrt{2N}\,(\hat{x}_0\hat{y}_0,\ \ldots,\ \hat{x}_{2N-1}\hat{y}_{2N-1})$.
3. Обратное БПФ: $\hat{U}\to U$.

В полученном векторе размерности $2N$ первые $M+L-1$ компонент представляют собой свертку $u(n)$ последовательностей $x(n)$ и $y(n)$, а остальные компоненты – нулевые:

$$U=\left(\underbrace{u(0),u(1),\ldots,\ u(L-1)}_{L},\underbrace{u(L),\ldots,\ u(L+M-2)}_{M-1},\ 0,\ 0,\ldots,\ 0\right).$$

Использование описанной процедуры в вычислительном плане может быть более эффективно, чем непосредственная реализация формулы свертки (3).

Задание

1. Реализовать на C или C++ алгоритмы непосредственного вычисления ДПФ и ОДПФ по формулам (1) и (2) для комплексного входного сигнала с двойной

точностью (double). Входные данные загружать из текстового файла (разделитель – пробел), сгенерированного, например, в MATLAB.

1. Реализовать на C или C++ алгоритмы прямого и обратного БПФ для комплексного входного сигнала длиной 2^n, n – любое натуральное число:
   а) с прореживанием по времени и двоично-инверсными перестановками (вариант 1);
   б) с прореживанием по времени без двоично-инверсных перестановок (вариант 2);
   в) с прореживанием по частоте и двоично-инверсными перестановками (вариант 3);
   г) с прореживанием по частоте без двоично-инверсных перестановок (вариант 4);
3. Убедиться в корректности работы алгоритмов:
   а) проверить выполнение равенства $\mathbf{X} = \text{ОДПФ}(\text{ДПФ}(\mathbf{X}))$, а также равенства $\mathbf{X} = \text{ОБПФ}(\text{БПФ}(\mathbf{X}))$;
   б) сравнить результаты ДПФ(**X**) и БПФ(**X**);
   в) сравнить результаты работы реализованного алгоритма, например, с результатами процедуры fft, встроенной в MATLAB.
4. Проанализировать зависимость времени выполнения БПФ и непосредственного вычисления ДПФ от длины $N = 2^n$ преобразования. Отобразить результаты в виде графика зависимости времени T выполнения преобразования от размерности: T=T(n).
5. Реализовать на C или C++ процедуру прямого вычисления свертки двух последовательностей по формуле (3). Входные данные загружать из текстового файла (разделитель – пробел), сгенерированного, например, в MATLAB.
6. Реализовать процедуру нахождения дискретной свертки, основанную на БПФ. При вычислении БПФ использовать результаты п. 2 задания.
7. Убедится в корректности работы процедуры из п. 5 и п. 6 задания, сравнив полученные результаты с результатами работы встроенной функций MATLAB conv.
8. Сравнить производительность алгоритмов вычисления свертки по определению (3) и с помощью БПФ в двух случаях: когда размер одной из последовательностей фиксирован, и когда меняются длины обеих последовательностей.

Контрольные вопросы

1. Дать определение ДПФ и ОДПФ.
2. Перечислить основные свойства ДПФ.
3. Что такое факторизация матрицы ДПФ?
4. Как выглядит матрица $\mathbf{W}_3$ для 8-точечного преобразования?
5. Как можно было бы дополнительно ускорить вашу реализацию БПФ?
6. Что такое дискретная свертка последовательностей?
7. Доказать, что ДПФ свертки последовательностей есть покомпонентное произведение ДПФ этих последовательностей.

Литература

1. Умняшкин С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов: учебное пособие. М.: Техносфера, 2018. – 528 с.