

**Отчётное ДЗ (ЛР) №1.****Спектральный анализ сигналов с помощью ДПФ**

Даны две оконные функции:

$$w_1(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$w_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. Привести аналитические выражения для спектров двух сигналов

$$f_{1,2}(t) = w_{1,2} \left( t - \frac{T}{2} \right) \cos(2\pi\nu_0 t).$$

Спектры оконных функций  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  и сигнала  $\cos(2\pi\nu_0 t)$  имеют следующий вид

$$S_{w_1} = \mathcal{F} \left\{ w_1 \left( t - \frac{T}{2} \right) \right\} = e^{-\pi i T \nu} \frac{\sin(\pi T \nu)}{\pi \nu}$$

$$S_{w_2} = \mathcal{F} \left\{ w_2 \left( t - \frac{T}{2} \right) \right\} =$$

$$= \frac{e^{-\pi i \nu T}}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\pi T \nu)}{\nu} + \frac{T}{2} \left( \frac{\sin \pi(T \nu - 1)}{T \nu - 1} + \frac{\sin \pi(T \nu + 1)}{T \nu + 1} \right) \right],$$

а спектр сигнала  $\cos(2\pi\nu_0 t)$  равен

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi\nu_0 t)\} = \frac{\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)}{2}.$$

Тогда спектры сигналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  будут иметь следующий вид:

$$S_{f_1} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} =$$

$$= \frac{e^{-\pi i \nu T}}{2\pi} \left( \frac{\sin(\pi T(\nu - \nu_0))}{\nu - \nu_0} e^{\pi i \nu_0 T} + \frac{\sin(\pi T(\nu + \nu_0))}{\nu + \nu_0} e^{-\pi i \nu_0 T} \right)$$

$$S_{f_2} = \mathcal{F}\{f_2(t)\} =$$

$$= \frac{e^{-\pi i \nu T}}{2} (S_{w_2}(\nu - \nu_0) e^{\pi i \nu_0 T} + S_{w_2}(\nu + \nu_0) e^{-\pi i \nu_0 T}) =$$

$$= \frac{e^{-\pi i \nu T}}{4\pi} \left( \left[ \frac{\sin(\pi T(\nu - \nu_0))}{\nu - \nu_0} + \frac{T}{2} \left( \frac{\sin \pi(T(\nu - \nu_0) - 1)}{T(\nu - \nu_0) - 1} + \frac{\sin \pi(T(\nu - \nu_0) + 1)}{T(\nu - \nu_0) + 1} \right) \right] e^{\pi i \nu_0 T} \right. \\ \left. + \left[ \frac{\sin(\pi T(\nu + \nu_0))}{\nu + \nu_0} + \frac{T}{2} \left( \frac{\sin \pi(T(\nu + \nu_0) - 1)}{T(\nu + \nu_0) - 1} + \frac{\sin \pi(T(\nu + \nu_0) + 1)}{T(\nu + \nu_0) + 1} \right) \right] e^{-\pi i \nu_0 T} \right)$$

2. Построить (используя MATLAB) амплитудные спектры сигналов из пункта 1, где для номера варианта (номер по списку группы)  $\nu = 1, \dots, 15$ :

а)  $\nu_0 = \nu + 1 = 9$

График амплитудного спектра сигнала  $f_1(t)$ :

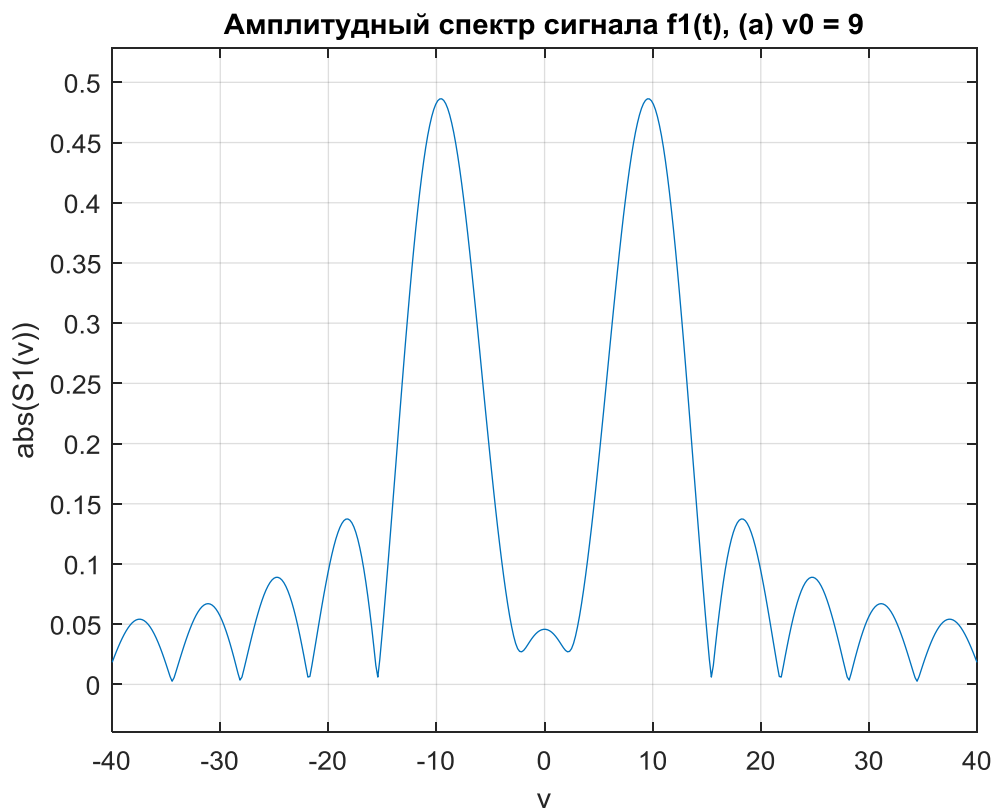
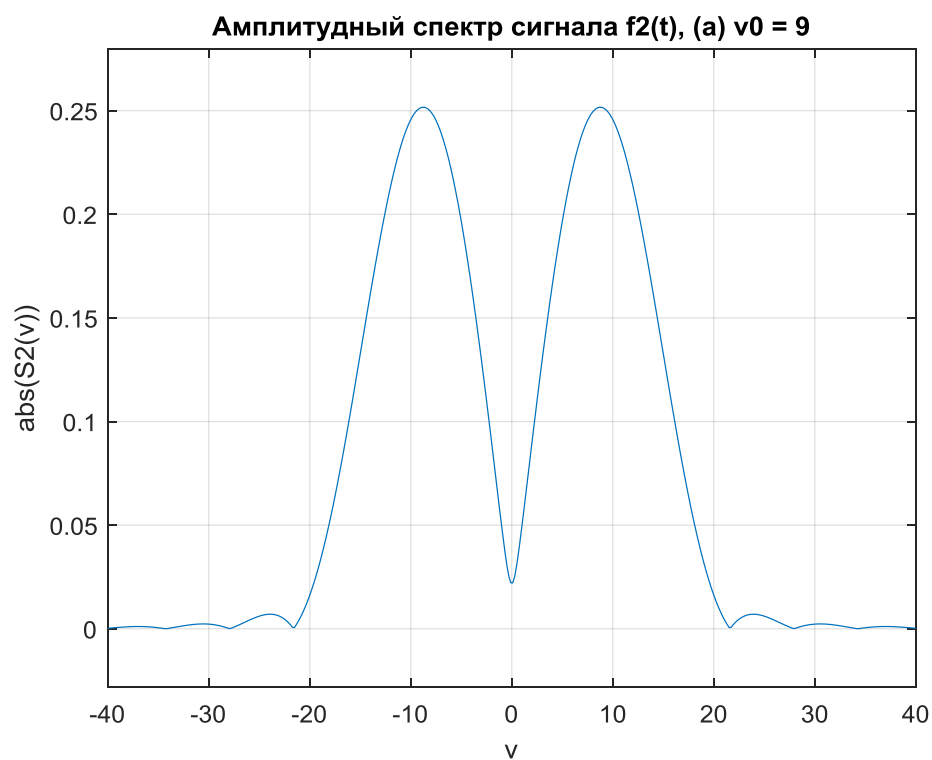


График амплитудного спектра сигнала  $f_2(t)$ :



б)  $\nu_0 = 17.5 - \nu = 9.5$

График амплитудного спектра сигнала  $f_1(t)$ :

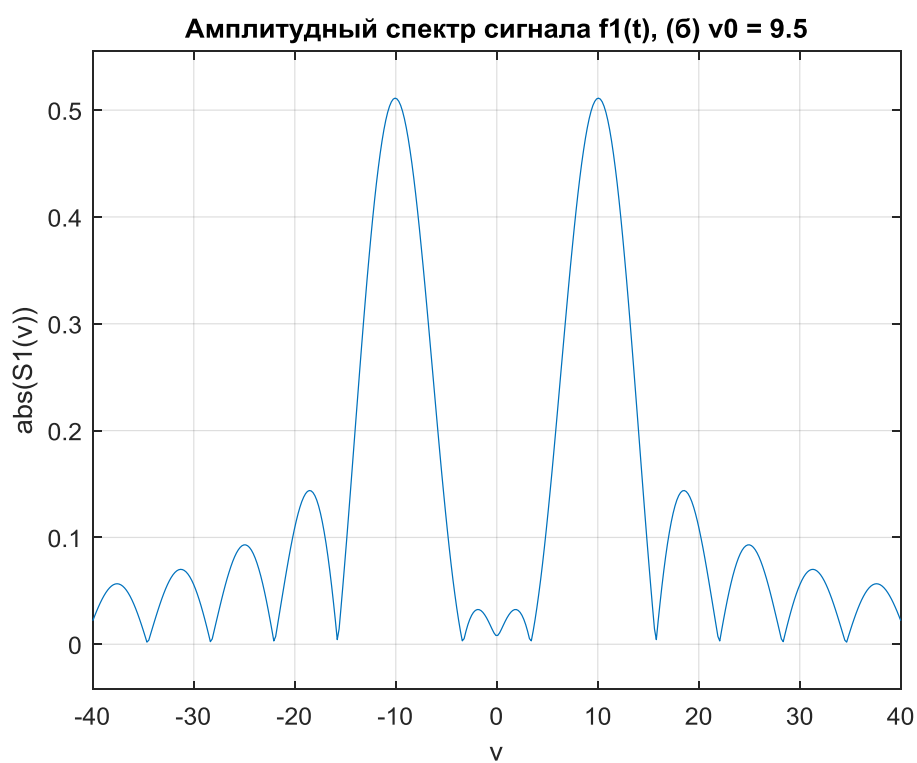
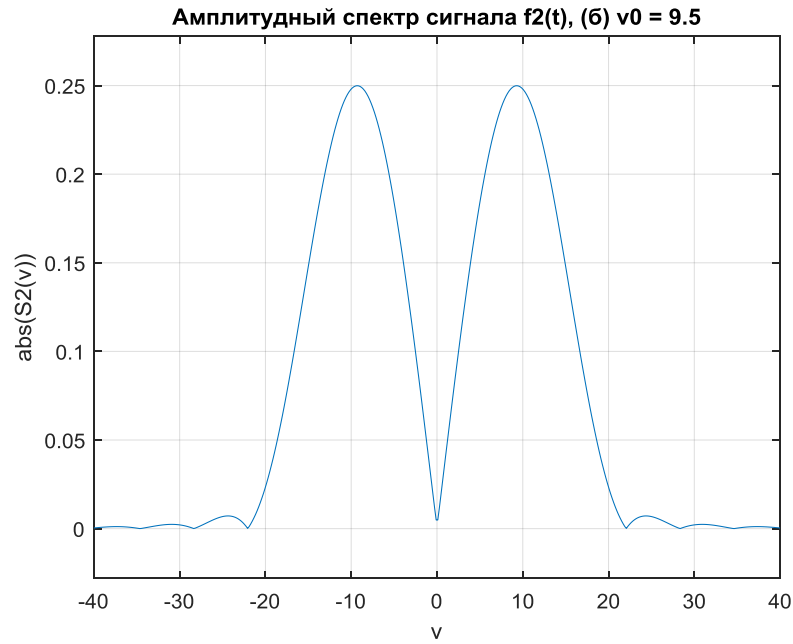


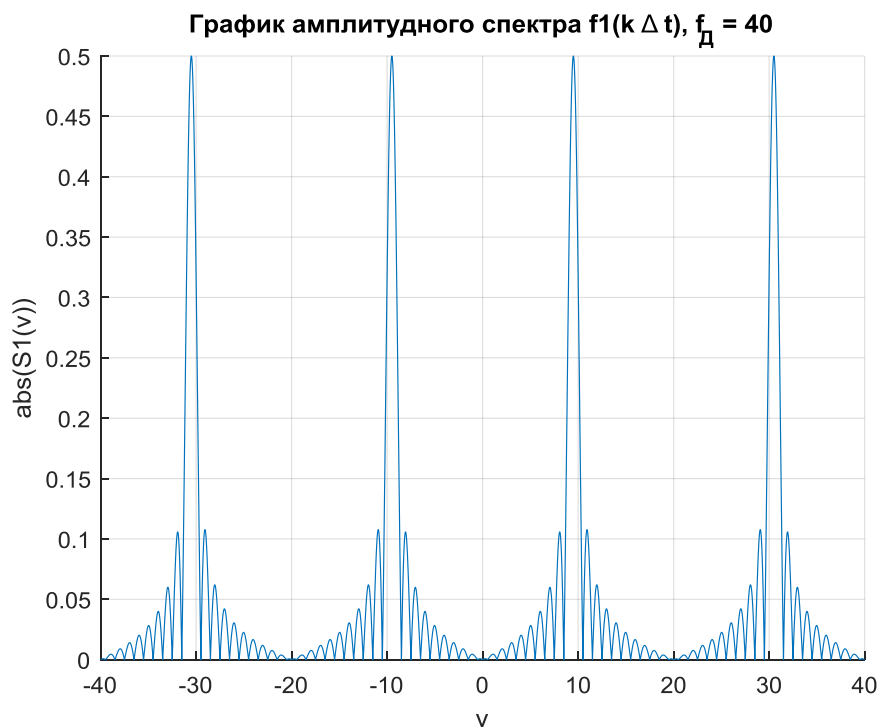
График амплитудного спектра сигнала  $f_2(t)$ :

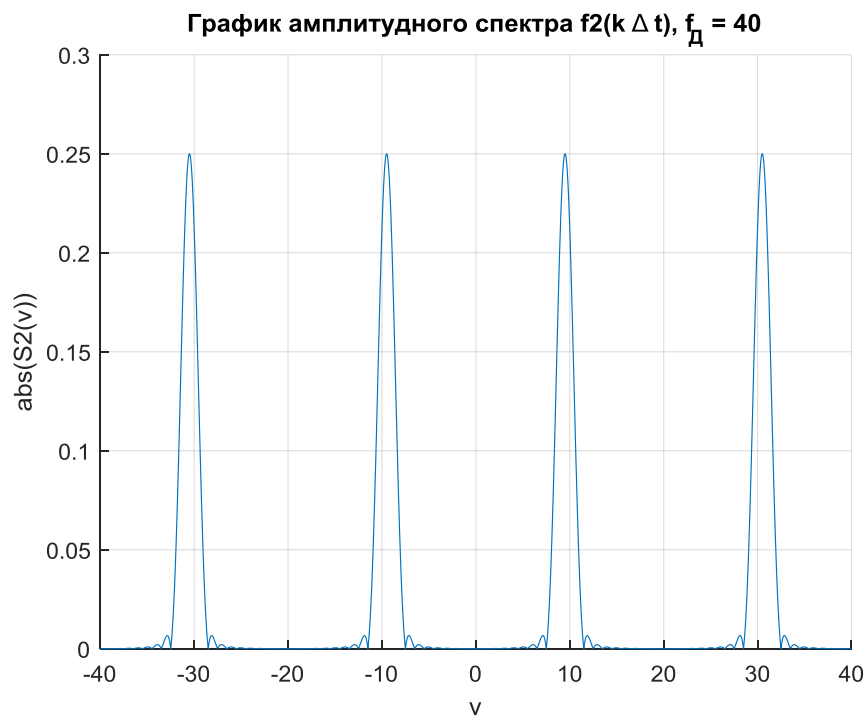


Можно заметить, что при использовании окна Хэннинга эффект утечки спектра проявляется слабее, чем при использовании прямоугольного окна.

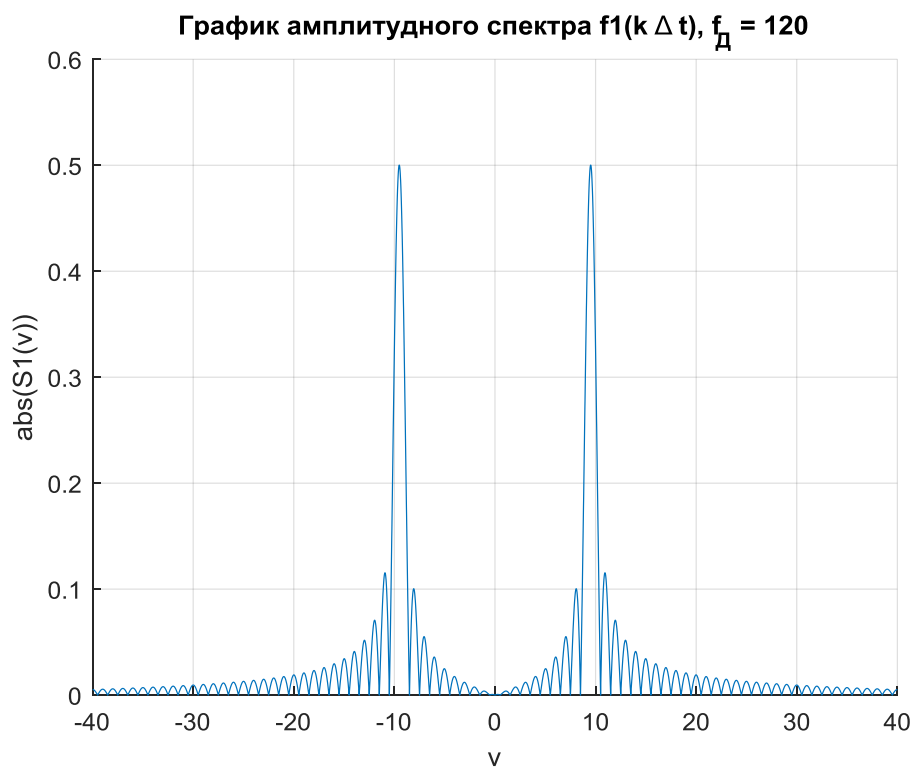
3. Для двух дискретных сигналов  $\{f_{1,2}(k\Delta t)\}_k$  при  $v_0 = (17.5 - v)$  построить графики амплитудных спектров  $|\tilde{S}_{1,2}(v)| = |\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{1,2}(k\Delta t) e^{-2\pi i v k \Delta t} \Delta t|$ , выбрав частоту дискретизации:

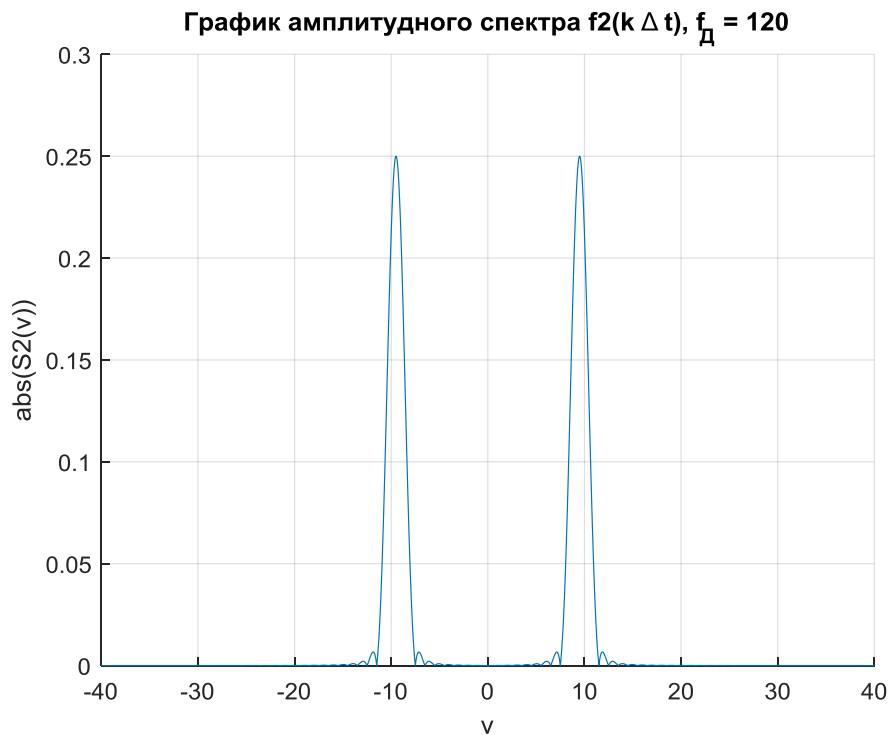
a)  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 40$





б)  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 120$

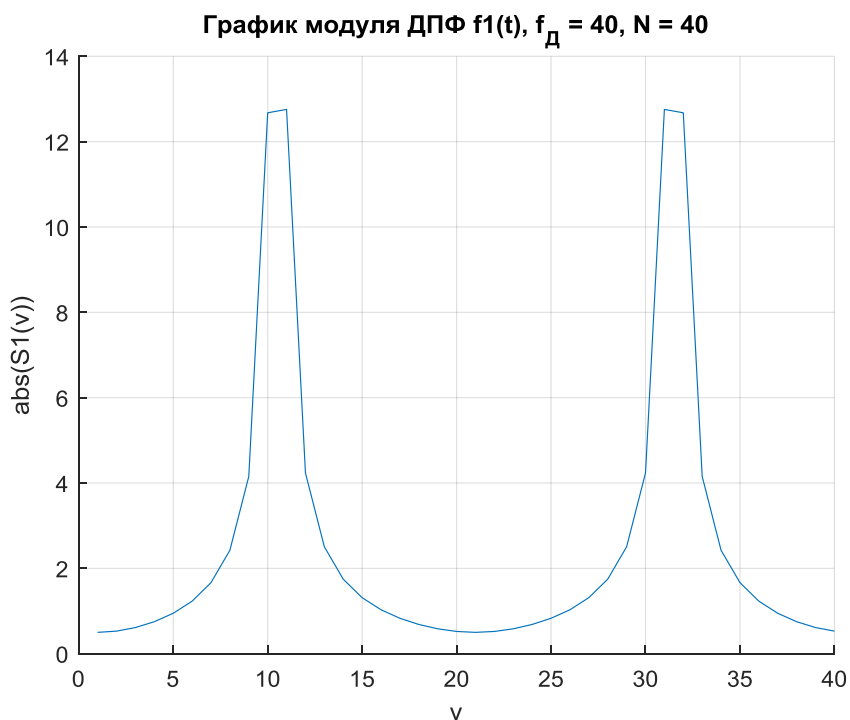




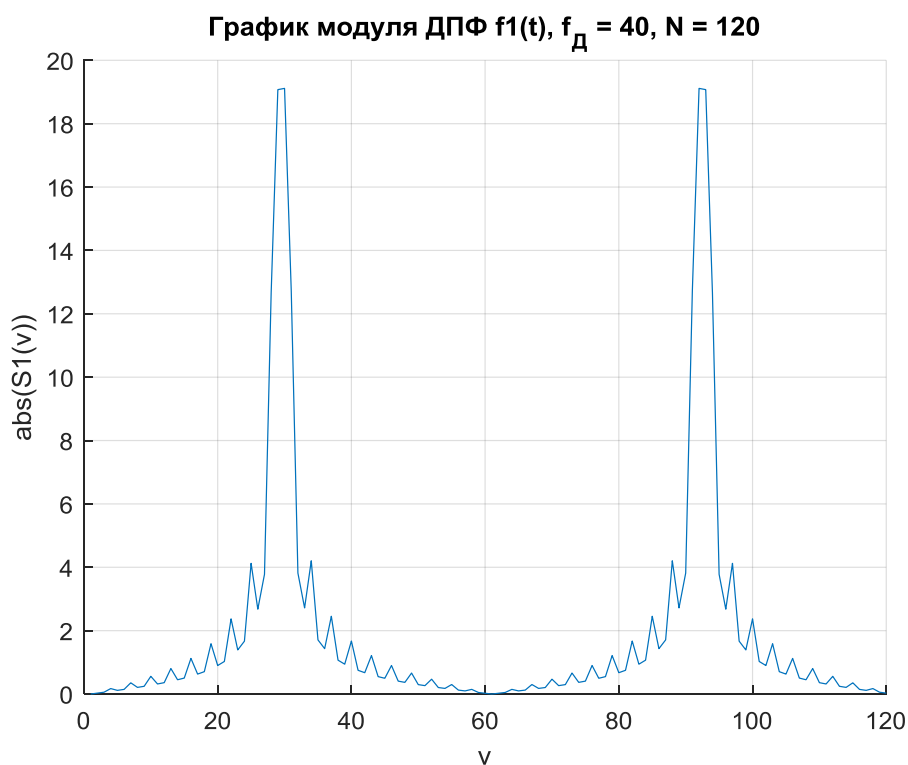
Спектры дискретных сигналов  $\{f_1(k\Delta t)\}_k$  и  $\{f_2(k\Delta t)\}_k$  являются суммами сдвинутых копий спектров исходных сигналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  соответственно. Таким образом, данные спектры являются периодическими функциями имеют период равный  $1/\Delta t$ . При увеличении частоты дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t}$ , мы увеличиваем период этих функций, и расстояние между пиками амплитудного спектра будет увеличиваться.

4. Выбирая размерность ДПФ  $N=40$  и  $N=120$ , а частоту  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 40$  дискретизации, вычислить ДПФ двух сигналов  $\{f_{1,2}(k\Delta t)\}_k$ . Пояснить, как связаны полученные векторы ДПФ и спектры, построенные в пункте 3.

Для ДПФ сигнала  $\{f_1(k\Delta t)\}_k$  размерности  $N = 40$  с частотой дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 40$  амплитудный спектр имеет вид:

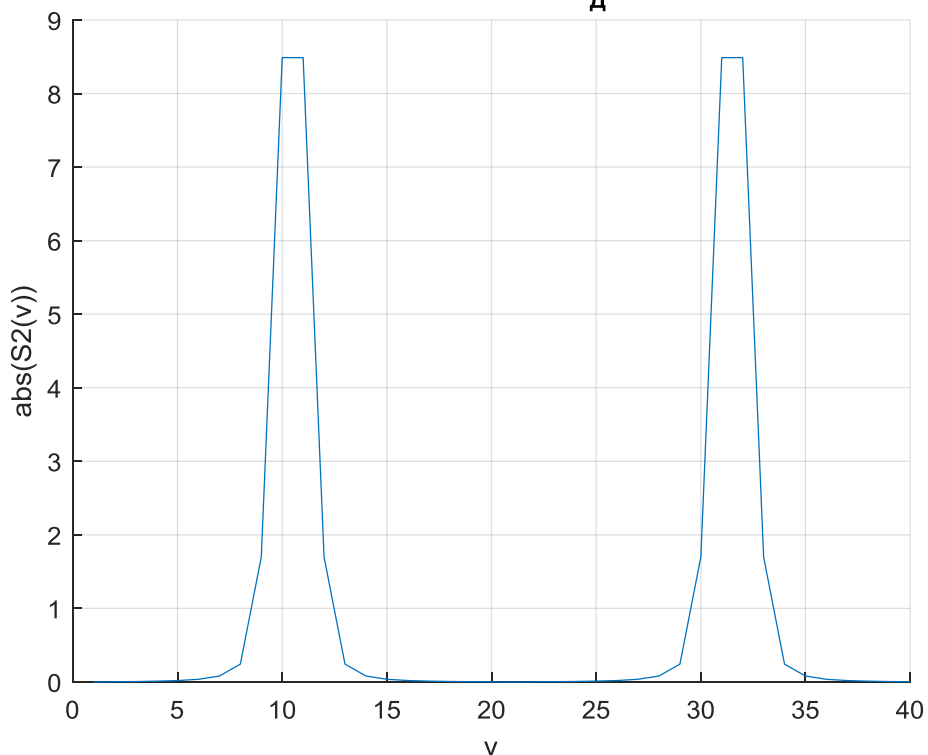


Для ДПФ сигнала  $\{f_1(k\Delta t)\}_k$  размерности  $N = 120$  с частотой дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 40$  амплитудный спектр имеет вид:



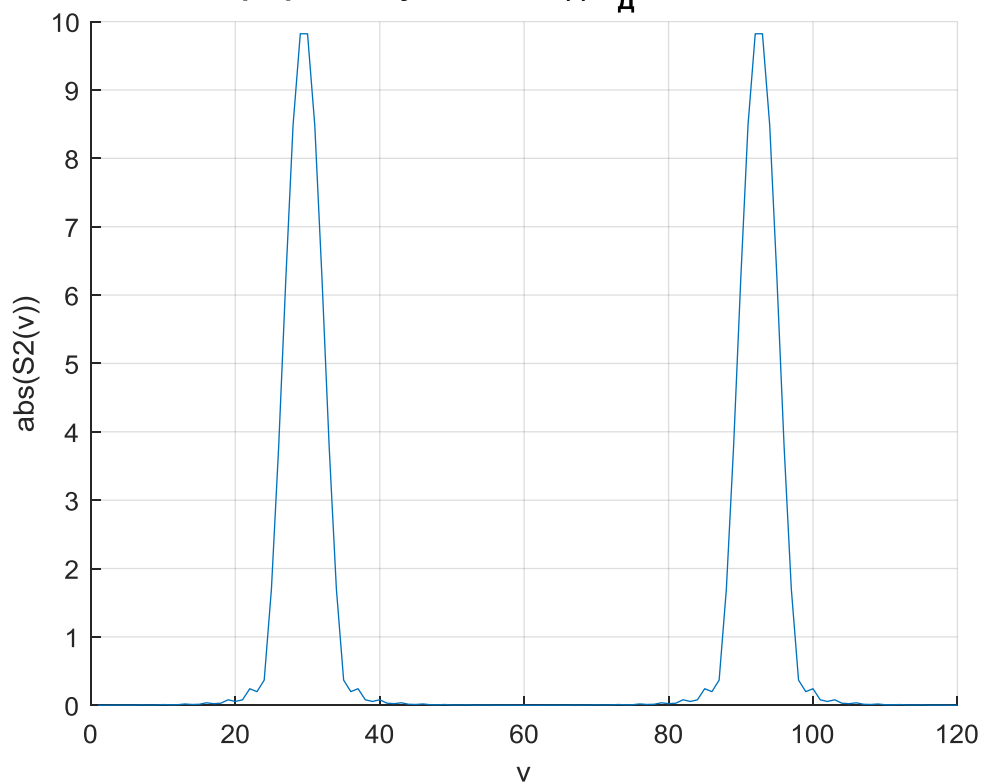
Для ДПФ сигнала  $\{f_2(k\Delta t)\}_k$  размерности  $N = 40$  с частотой дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 40$  амплитудный спектр имеет вид:

График модуля ДПФ  $f_2(t)$ ,  $f_D = 40$ ,  $N = 40$



Для ДПФ сигнала  $\{f_2(k\Delta t)\}_k$  размерности  $N = 120$  с частотой дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 40$  амплитудный спектр имеет вид:

График модуля ДПФ  $f_2(t)$ ,  $f_D = 40$ ,  $N = 120$





ДПФ определяет дискретный периодический спектр дискретного периодического сигнала и позволяет приближённо описать непрерывный периодический спектр конечного дискретного сигнала через его частотные отсчёты. При увеличении размерности ДПФ увеличивается точность аппроксимации непрерывного спектра дискретного сигнала. К примеру для дискретного сигнала  $\{f_1(k\Delta t)\}_k$  при увеличении размерности его ДПФ с 40 до 120, искажения спектра, вызванные утечкой, начинают проявляться на графике модуля ДПФ более отчётливо.

5. Выполнить упражнение со стр. 448.

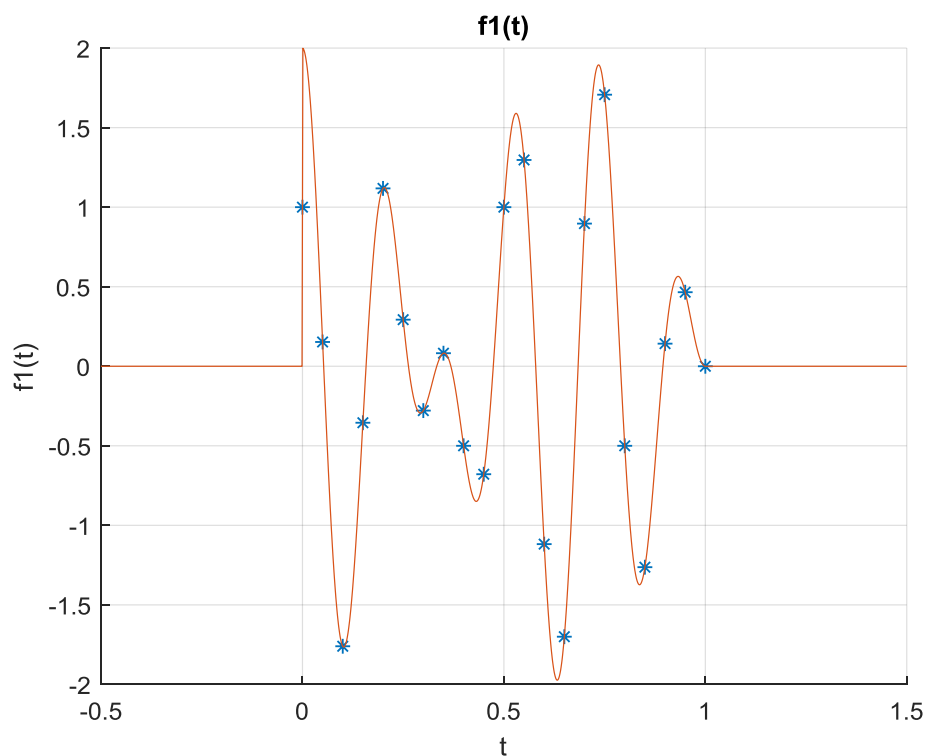
Рассмотрим сигнал  $f(t) = \cos(8\pi t) + \cos(11\pi t)$ , состоящий из двух гармонических колебаний с линейными частотами  $\mu_1 = 4$  и  $\mu_2 = 5.5$ . Сигнал наблюдается на интервале  $t \in [0; 1]$ . Используя какой-либо программный пакет, постройте амплитудный спектр функции  $\hat{f}(t) = w(t - 0.5)f(t)$ , где

$$\text{а) } w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 0.5 \\ 0, & |t| > 0.5 \end{cases}$$

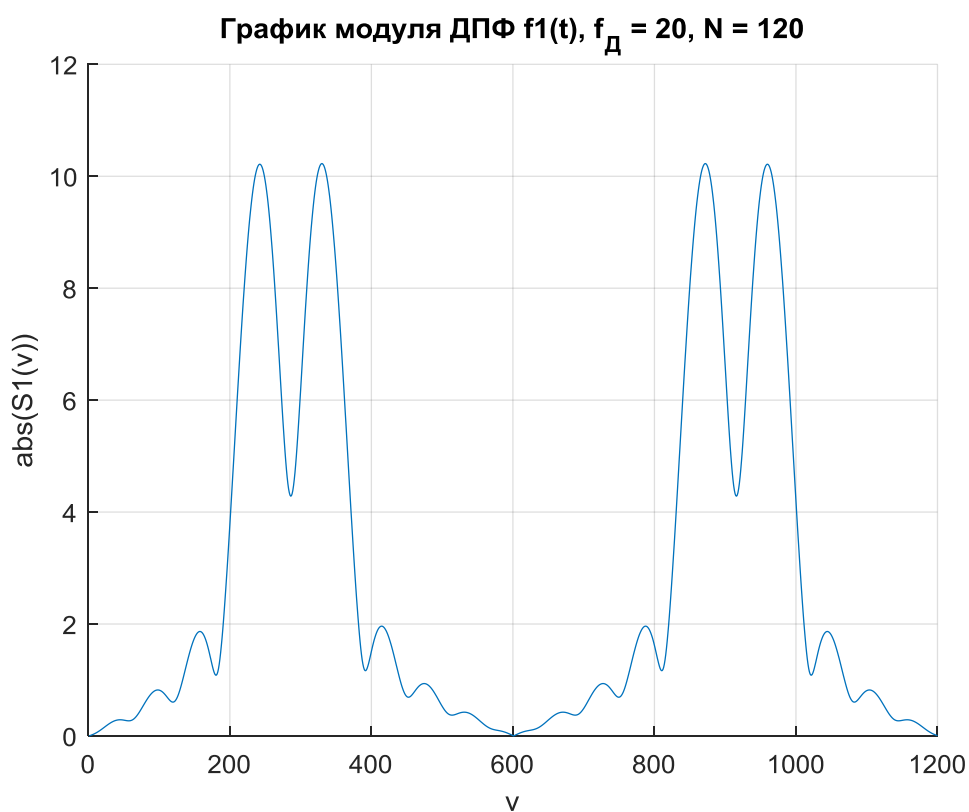
$$\text{б) } w(t) = \begin{cases} 0.5(1 + \cos 2\pi t), & |t| \leq 0.5 \\ 0, & |t| > 0.5 \end{cases}$$

Какой из амплитудных спектров точнее характеризует сигнал как сумму двух гармонических колебаний?

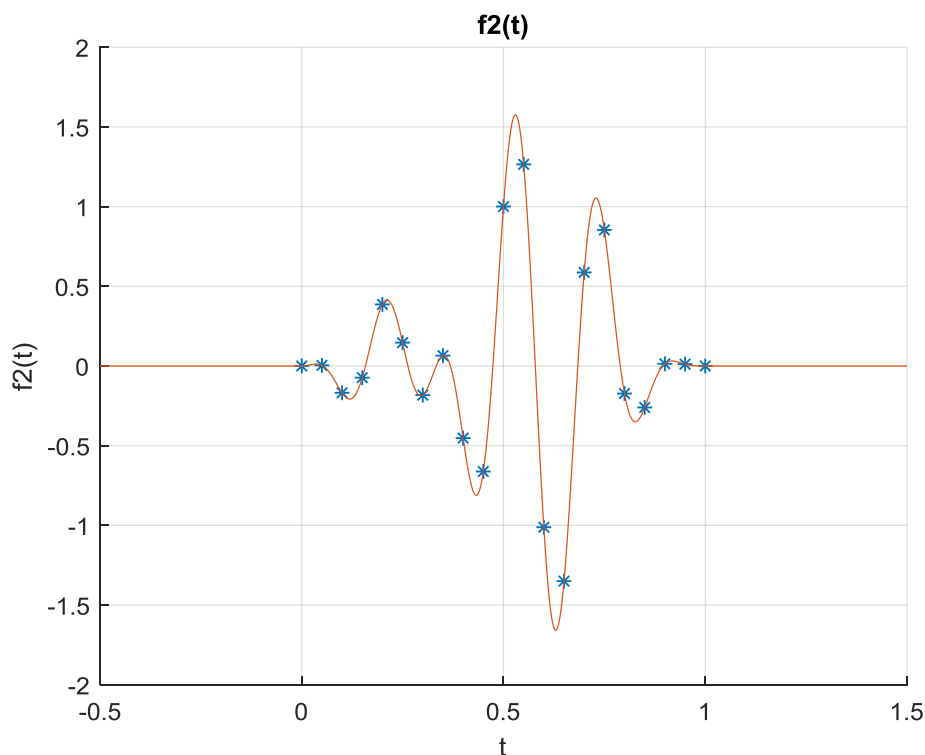
а) Изобразим сигнал  $\hat{f}(t)$  на графике, и отметим на нём отсчёты, которые мы выберем для формирования дискретного сигнала (частота дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 20$ ).



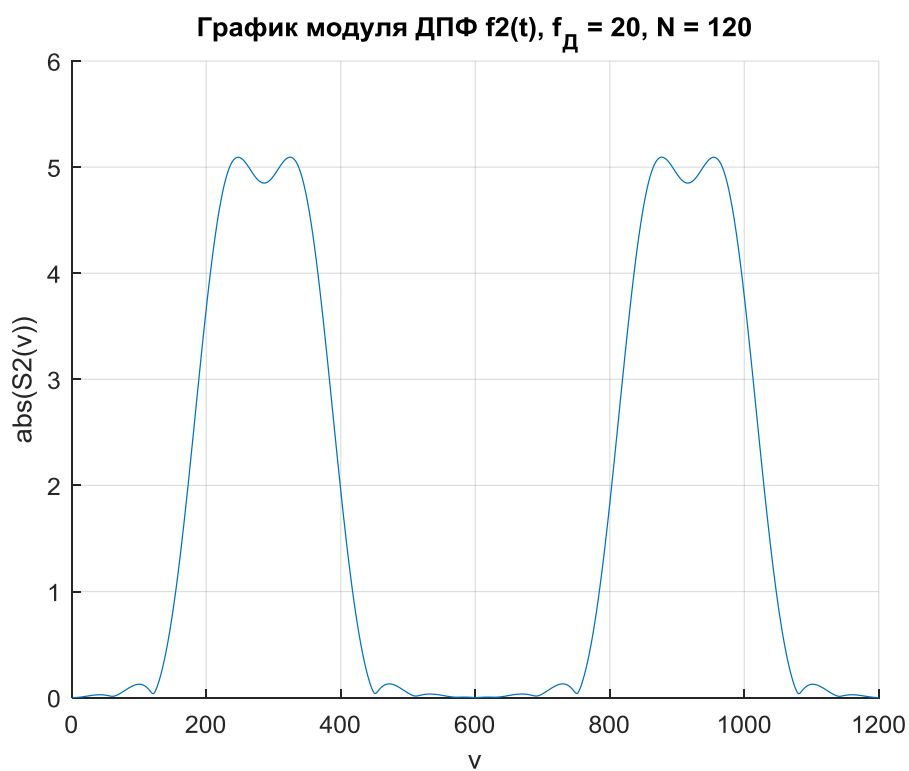
Вычислим ДПФ полученного дискретного сигнала и изобразим его амплитудный спектр (размерность преобразования  $N = 120$ ).



б) Изобразим сигнал  $\hat{f}(t)$  на графике, и отметим на нём отсчёты, которые мы выберем для формирования дискретного сигнала (частота дискретизации  $f_D = \frac{1}{\Delta t} = 20$ ).



Вычислим ДПФ полученного дискретного сигнала и изобразим его амплитудный спектр (размерность преобразования  $N = 120$ ).



По графикам видно, что в случае (а) (прямоугольное окно) амплитудный спектр сигнала  $\hat{f}(t)$ , лучше характеризует его как сумму двух гармонических колебаний, т. к. здесь более отчётливо заметны пики амплитуд, соответствующих гармоникам с разными частотами, чем в случае (б) (окно Хэннинга), однако во втором случае в меньшей степени проявляется эффект утечки спектра.

Код на языке MATLAB для заданий 2-5 в файле DZ1.m.

### **Выводы**

В данной работе были рассмотрены гармонические сигналы, для которых вычислялось оконное преобразование Фурье с прямоугольным окном и окном Хэннинга. В ходе работы удалось пронаблюдать на графиках амплитудных спектров сигналов эффект утечки спектра, причём при использовании прямоугольного окна он проявляется заметно сильнее, чем при использовании окна Хэннинга. Были проверены свойства непрерывного спектра дискретного сигнала и ДПФ. По полученным графикам можно видеть, что непрерывный спектр дискретного сигнала – это сумма сдвинутых копий спектра исходного аналогового сигнала с периодом  $\frac{1}{\Delta t}$ , а модуль ДПФ – дискретный аналог непрерывного спектра дискретного сигнала. При увеличении частоты дискретизации,  $f_D = \frac{1}{\Delta t}$  мы будем увеличивать период непрерывного спектра дискретного сигнала, а увеличивая размерность ДПФ (в этом случае отсчёты дискретного сигнала дополняются по краям нулевыми отсчётами), мы получим больше отсчётов в нём и более точную аппроксимацию непрерывного спектра дискретного сигнала. При выполнении задания 5 было установлено, что использование прямоугольного окна при вычислении ДПФ позволяет получить ДПФ, график модуля которого лучше характеризует исходный сигнал как сумму гармонических колебаний разных частот.