

Курсовая работа на тему: «Математическая модель фильтра Винера»

ВЫПОЛНИЛ:

СТУДЕНТ ГРУППЫ ПМ-41

АЛИМАГАДОВ КУРБАН АЛИМАГАДОВИЧ

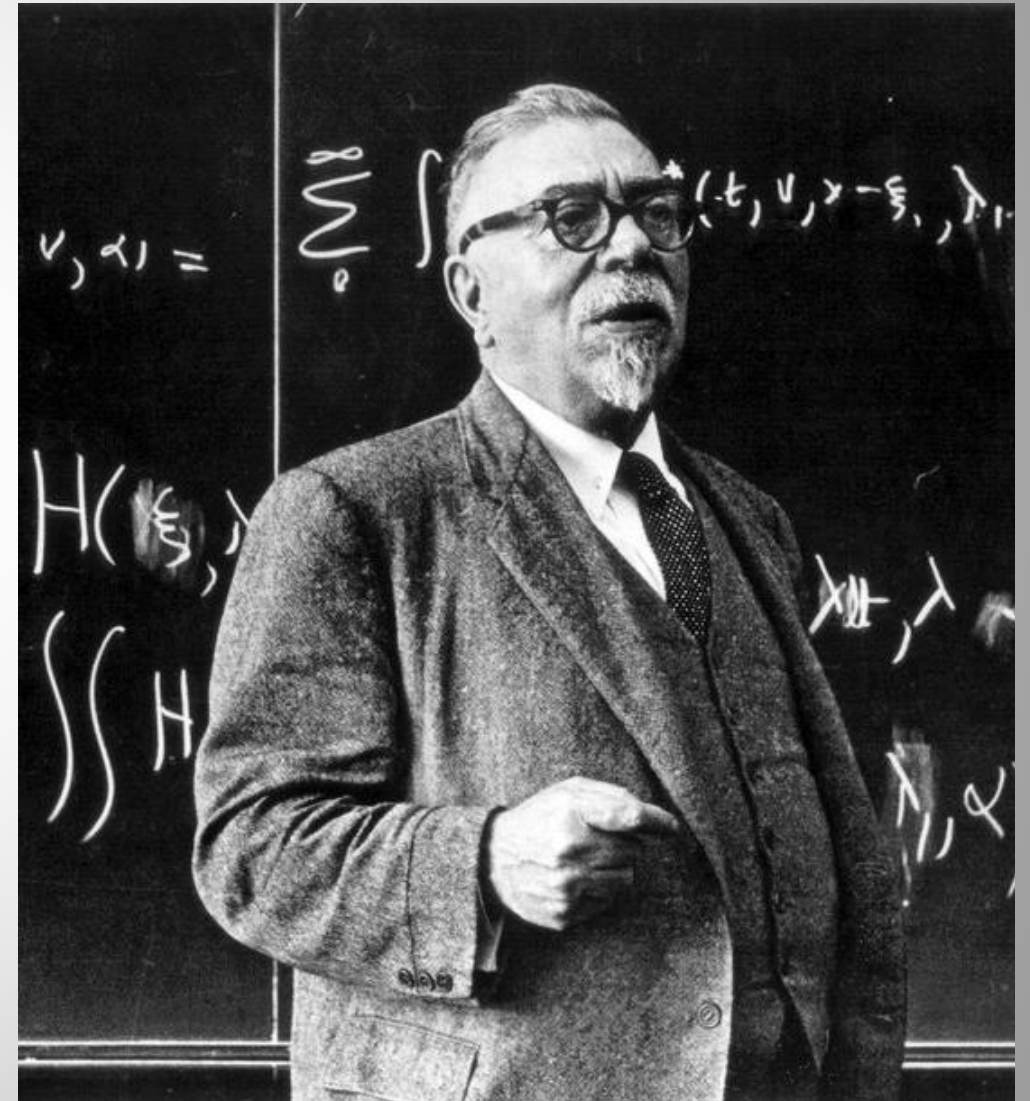
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:

ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ВМ-1, К.Ф.-М.Н.

ЛИСОВЕЦ ЮРИЙ ПАВЛОВИЧ

Историческая справка

- ▶ В 1942 г. во время Второй мировой войны перед американским математиком Н. Винером встала задача отделения полезного сигнала от шума при решении задач автоматизации систем противовоздушной обороны, использующих радиолокационную технику. Винер решил задачу, разработав фильтр, минимизирующий среднеквадратическую ошибку между выходным сигналом и полезной составляющей входного сигнала. Созданные на основе этой математической модели экспериментальные устройства не нашли применения в реальных системах ПВО, из-за малой производительности и недостаточной скорости работы.



Ряды Фурье и преобразование Фурье

Если функция $f(t)$ имеет период T и является кусочно-гладкой, то её ряд Фурье сходится к функции $f(t)$ в каждой точке её непрерывности и к значению $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ в точках разрыва, т. е.

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

При переходе к пределу $T \rightarrow \infty$ из ряда получим:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(v_k) e^{i2\pi v_k t} \Delta v = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \exp(2\pi i v t) dv,$$

где

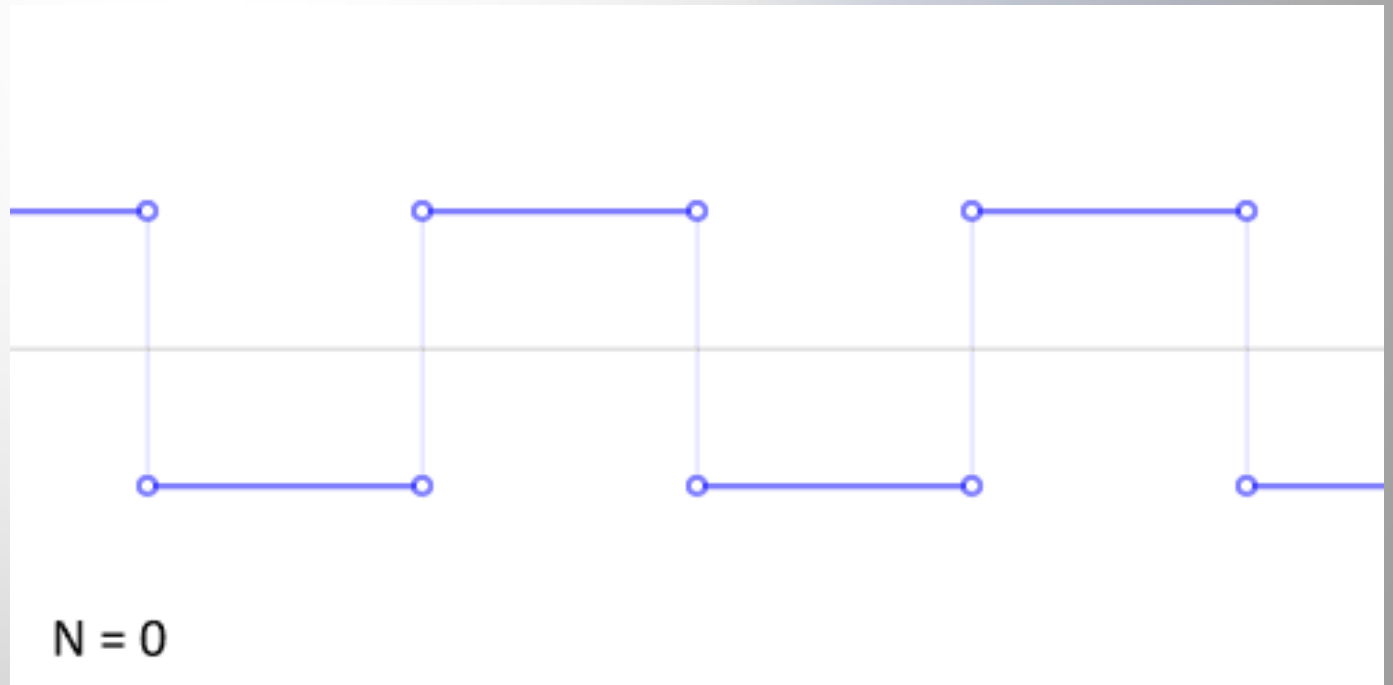
$$S(v_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} c_k T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi v_k u} du$$

Преобразование Фурье. Эффект Гиббса

Прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

При разложении в ряд Фурье разрывной функции можно наблюдать явление, известное как *эффект Гиббса*.



Постановка задачи

- ▶ Задача: получить фильтр минимизирующий среднеквадратическую ошибку между выходным сигналом и полезной составляющей входного сигнала.
- ▶ Программная реализация должна обеспечивать увеличение пикового отношения сигнал/шум – PSNR (“Peak Signal-to-Noise Ratio”), измеряется в дБ, и структурной схожести исходного и восстановленного изображений – SSIM (“Structural Similarity”), измеряется в процентах, после фильтрации.

Идеализация модели

- ▶ На вход фильтра поступают изображения, содержащий только гауссов шум и периодическую помеху.
- ▶ Гауссов шум появляется на изображениях в результате воздействия множества факторов (перепады напряжения, паразитные токи и др.). Причиной появления периодического шума являются электрические или электромеханические помехи во время получения изображения.
- ▶ Описывая модель, будем рассматривать только принцип работы фильтра, не учитывая факторы, принимаемые во внимание, при физической реализации электронного устройства.

Использование законов и свойств для математического описания модели

- ▶ Фильтрация в частотной области определяется как произведение функции-фильтра на преобразование Фурье исходного изображения. Пусть задан фильтр $H(u,v)$, его эквивалентное представление в пространственной области соответствует взятию обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}\{H(u,v)\}=h(x,y)$.
- ▶ $H(u,v)$ также называют частотной характеристикой фильтра (ЧХ), а $h(x,y)$ – импульсной характеристикой фильтра (ИХ).
- ▶ Рассмотрим модель искажения: $X(u,v)=Y(u,v)+V(u,v)$, где все дискретные сигналы являются стационарными случайными процессами, причём шумовая помеха $V(n)$ не коррелирована с полезным сигналом $Y(u,v)$ и $M[Y(u,v)] = M[V(u,v)] = 0$.

Использование законов и свойств для математического описания модели

- ▶ Для сигнала $X(u, v)$ фильтр Винера должен обеспечивать формирование наилучшей оценки $\hat{Y}(u, v)$ в смысле минимума мощности сигнала-ошибки $E(u, v) = \hat{Y}(u, v) - Y(u, v)$:

$$\sigma_E^2 = M \left\{ \left(Y(u, v) - \hat{Y}(u, v) \right)^2 \right\} \rightarrow \min.$$

Дисперсия σ_X^2 дискретного стационарного сигнала $X(u, v)$ связана с его спектром мощности следующим соотношением:

$$\sigma_X^2 = \int_0^1 \int_0^1 \hat{s}_X(u, v) du dv$$

Использование законов и свойств для математического описания модели

- ▶ Для имеющих нулевое математическое ожидание взаимно некоррелированных сигналов $Y(u,v)$ и $V(u,v)$ спектр мощности $\hat{s}_E(u,v)$ сигнала-ошибки $E(u,v) = \hat{Y}(u,v) - Y(u,v)$ можно представить в следующем виде:

$$\hat{s}_E(u,v) = |W(u,v)|^2 (\hat{s}_Y(u,v) + \hat{s}_V(u,v)) + (1 - W(u,v) - \overline{W(u,v)}) \hat{s}_Y(u,v)$$

- ▶ Так как $\sigma_E^2 = \int_0^1 \int_0^1 \hat{s}_E(u,v) du dv$, то:

- 1) Необходимо найти такую ЧХ $W(u,v)$, которая обеспечивает минимальное значение σ_E^2 .
- 2) Очевидно, что для обеспечения минимума значения кратного интеграла нужно выбирать ЧХ $W(u,v)$ в каждой точке (u,v) такой, чтобы подынтегральная функция принимала минимальное значение.

Использование законов и свойств для математического описания модели

- ▶ Частотная характеристика, обеспечивающая минимум $\hat{s}_E(u, v)$ в каждой точке (u, v) имеет вид:

$$W(u, v) = \frac{\hat{s}_Y(u, v)}{\hat{s}_Y(u, v) + \hat{s}_V(u, v)}.$$

Использование законов и свойств для математического описания модели

- Рассматриваемая реализация фильтра Винера проходит окном по изображению (это помогает более точно определить дисперсию шума на однородных участках), вырезая фрагменты картинки с весовой маской, чтобы избежать возникновения эффекта Гиббса на смежных границах соседних окон.

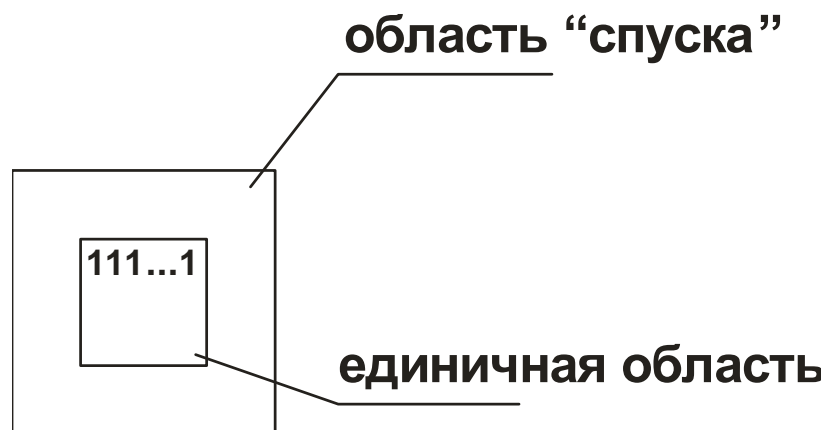
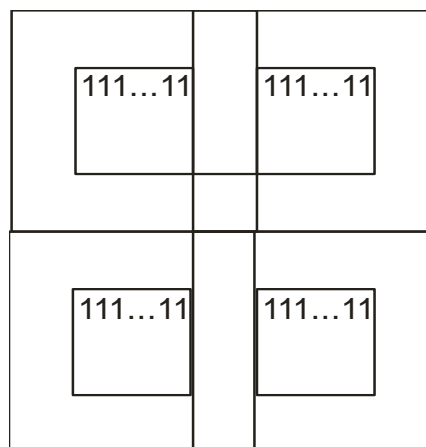
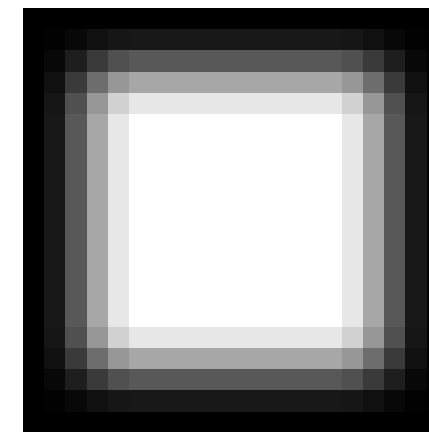


Схема маски



4 смежные маски



Изображение маски

Исследование математической модели:

12/
21

- ▶ Для тестирования фильтра применялись стандартные изображения, используемые для проверки эффективности фильтров и алгоритмов обработки изображений: Lena, Barbara, Goldhill.



Lena.png



Barbara.png



Goldhill.png

Исследование математической модели:

13/
21

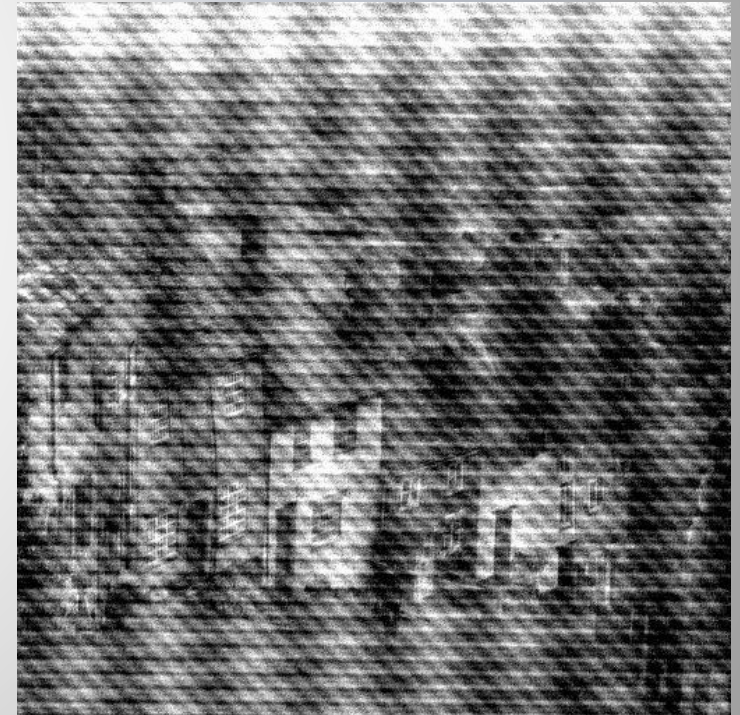
- Добавим шум на изображения:



Lena.png



Barbara.png



Goldhill.png

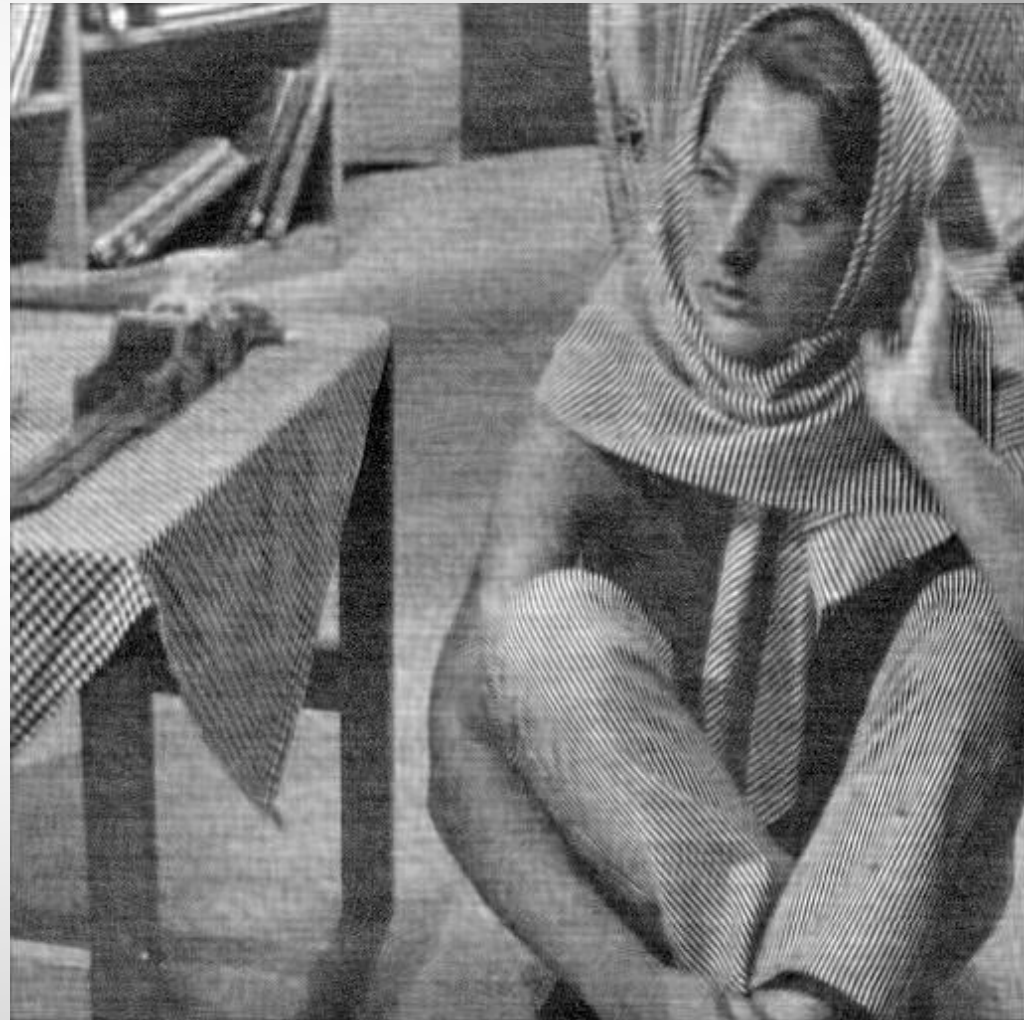
Исследование математической модели:

14/
21



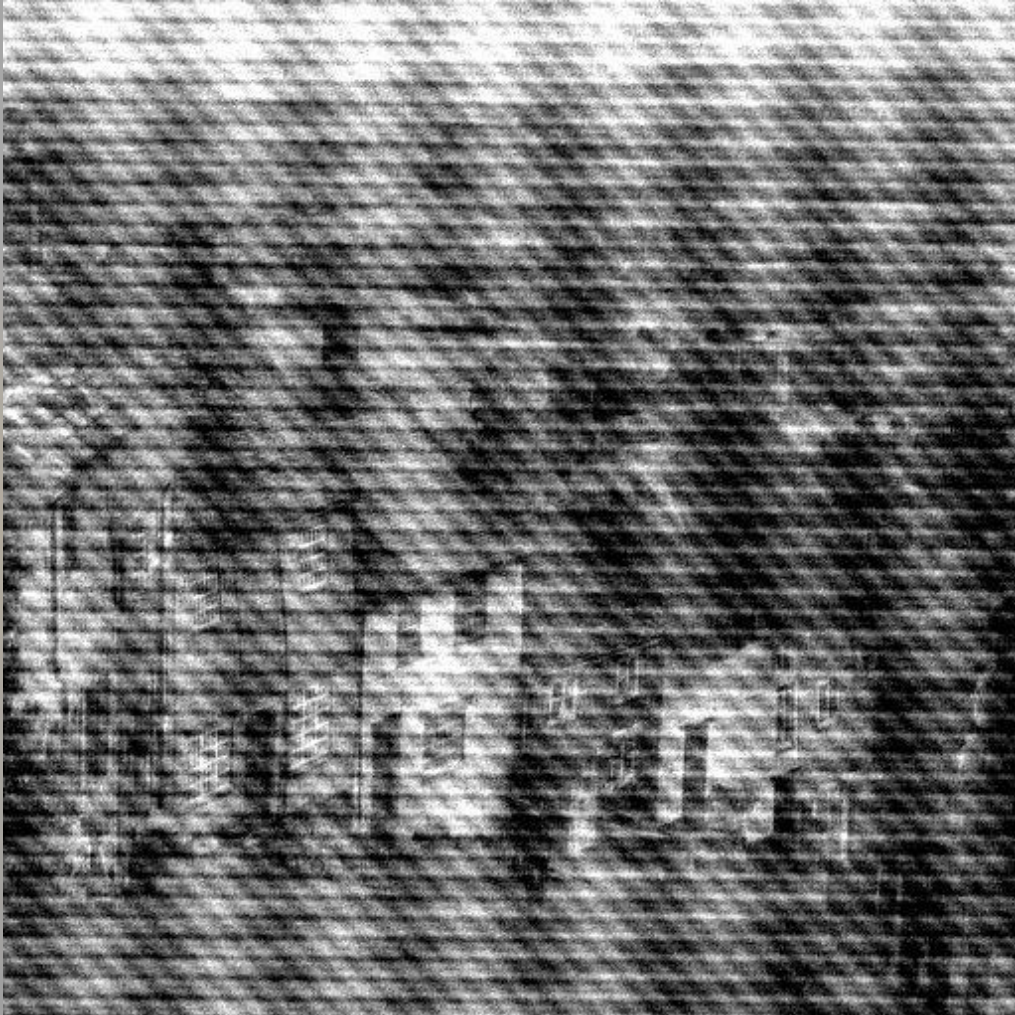
Исследование математической модели:

15/
21



Исследование математической модели:

16/
21



Исследование математической модели:

17/
21

Lena: PSNR_1 = 14.6, SSIM_1 = 0.15;
Barbara: PSNR_1 = 14.599, SSIM_1 = 0.244;
Goldhill: PSNR_1 = 14.618, SSIM_1 = 0.164.

Lena: PSNR_2 = 18.983, SSIM_2 = 0.411;
Barbara: PSNR_2 = 19.741, SSIM_2 = 0.54;
Goldhill: PSNR_2 = 18.118, SSIM_2 = 0.478.

Изображение	Lena	Barbara	Goldhill
Diff_PSNR, дБ	4,383	5,142	3,527
Diff_SSIM*100, %	26,1 (в 2,74 раз)	29,6 (в 2,21 раз)	31,4 (в 2,91 раз)

Исследование математической модели:

- ▶ Возможно увеличить эффективность фильтрации, в смысле увеличения значения PSNR и/или SSIM отфильтрованной картинки, если умножать оценку среднеквадратического отклонения шума на параметр k_s и подбирать оптимальное значение этого параметра индивидуально для каждого изображения.

Исследование математической модели:

19/
21

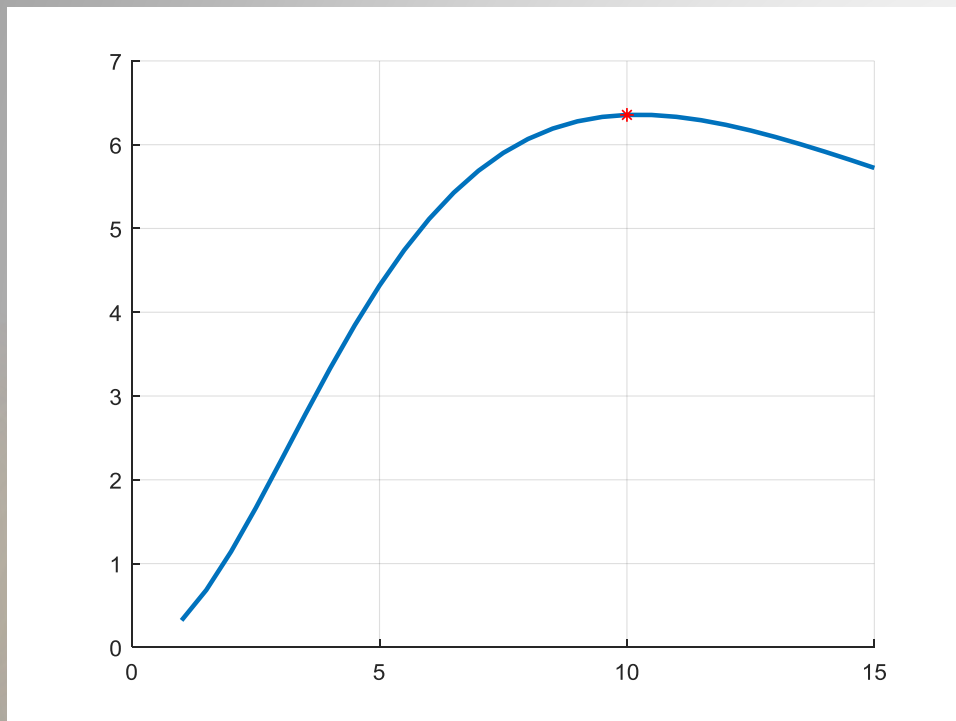


График $\text{Diff_PSNR}(k_s)$

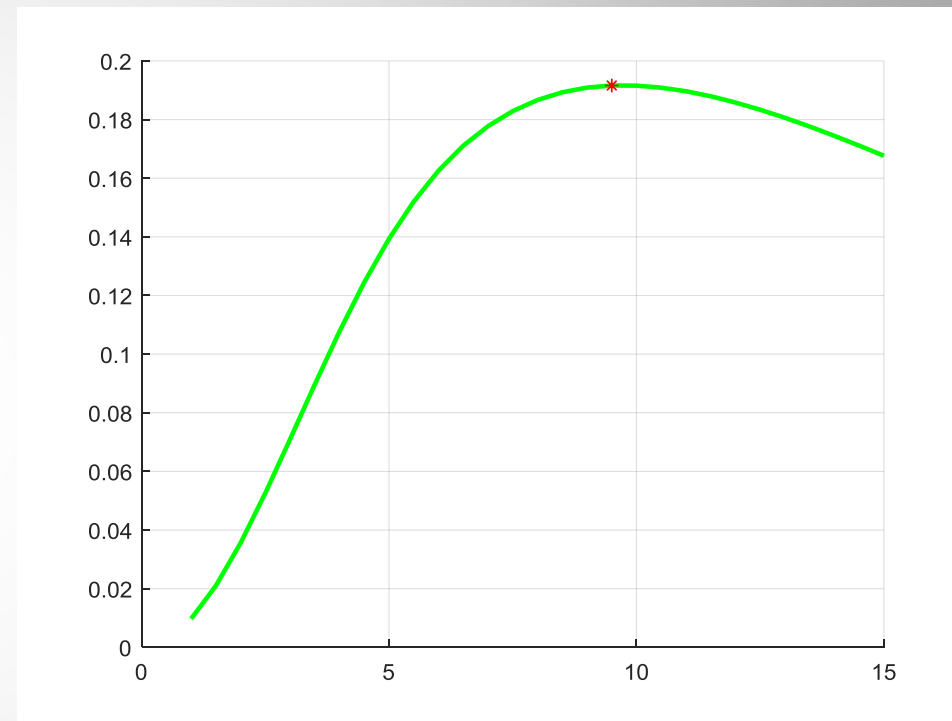


График $\text{Diff_SSIM}(k_s)$

- На графиках отмечены точки максимума функций для изображения Barbara.png ($k_s = 10$, $\text{Diff_PSNR} = 6.356$) и ($k_s = 9.5$, $\text{Diff_PSNR} = 0.1916$).

Выводы:

- ▶ Полученный фильтр продемонстрировал уменьшение мощности шумовой составляющей сигнала после фильтрации и увеличение структурной схожести отфильтрованного изображения с оригиналом, по сравнению с неотфильтрованным.
- ▶ Варьируя коэффициент k_s , на который умножается оценка среднеквадратического отклонения шума, являющаяся одним из параметров фильтра, можно найти его оптимальное значение, обеспечивающее наибольшее увеличение PSNR и/или SSIM после фильтрации.

Спасибо за внимание!