Теория к семинару №12

Для решения гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(a,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \mu_3(x), \\ u_t(x,0) = \mu_4(x) \end{cases} \tag{1}$$

в области $(x,t) \in [0;a] \times [0;T]$ можно использовать «схему с весами» для гиперболического уравнения

$$\frac{1}{\tau^2}\left(\hat{u} - 2u + \breve{u}\right) = \Lambda\left(\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\breve{u}\right) + f, \tag{2}$$

где Λ - оператор пространственного дифференцирования (с учетом умножения на c^2).

Выражение (2) можно преобразовать так:

$$(E - \sigma\Lambda^*)(\hat{u} - 2u + \breve{u}) = \Lambda^* u, \tag{3}$$

где $\Lambda^* = \tau^2\Lambda$. Теперь нетрудно выразить решение на текущем слое через два предыдущих слоя

$$\hat{u} = (E - \sigma\Lambda^*)^{-1}\Lambda^* u + 2u - \breve{u}. \tag{4}$$

Для вычисления решения на первом слое надо использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &\simeq u(x,0) + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} = \\ &= u(x,0) + \tau\mu_4 + \frac{\tau^2}{2}\left(c^2 u_{xx} + f\right) \simeq u(x,0) + \tau\mu_4 + \frac{1}{2}\left(\Lambda^*\mu_3 + \tau^2 f\right). \end{aligned} \tag{5}$$

В случае независящих от времени граничных условий Дирихле удобнее всего обеспечить их выполнение, занулив первую и последнюю строку в матрице оператора Λ^*. Именно так это делалось ранее при решении уравнения теплопроводности с аналогичными граничными условиями.

Для контроля правильности счета следует провести несколько расчетов со сгущением сетки (сгущать сетку необходимо как по пространству, так и по времени) и вычислить эффективный порядок метода. Поскольку теоретическая оценка погрешности метода $O(\tau^2 + h^2)$, то при **одновременном сгущении сетки по пространству и времени в одно и то же число раз** должен получиться второй порядок.

Сгущать сетку удобнее всего каждый раз вдвое, а погрешность рассчитывать по общим узлам двух соседних вложенных сеток. Наиболее удобная норма в нашем случае – чебышевская, или норма C. Формула расчета эффективного порядка по трем сеткам выглядит так:

$$p = -\log_2 \frac{\left\| U_{4N} - U_{2N} \right\|_C}{\left\| U_{2N} - U_N \right\|_C}. \tag{6}$$

Разности вычисляются по общим узлам двух сеток.

Задание к семинару №12

1. Решить задачу (1) при $f = 0,\ c = 3,\ \mu_1 = \mu_2 = 0,\ \mu_3(x) = \sin(x),\ \mu_4 = 0$ в области $[0;6\pi]\times[0;10]$. Взять $\tau = 0.01$ и $h = 6\pi/100$. Отобразить решение на каждом временном слое.
2. В условии 1 задания взять $\mu_3(x) = \sin(x(1 + 0.1e^{-(x-10)^2}))$, подобрать согласованные граничные условия. Все остальное оставить как в 1 задании. Повторить расчет.
3. В условии 2 задания провести расчет на сгущающихся сетках и доказать второй порядок метода. Задачу решать в области $[0;6\pi]\times[0;1]$, для первой сетки взять $\tau = 1/16$ и $h = 6\pi/16$. Провести расчеты на 7 сетках. Решение на каждом слое не отображать. Построить график эффективного порядка от номера самой грубой сетки.