Задание к семинару №10

Решить двумерное однородное уравнение теплопроводности с граничными условиями Дирихле

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\
u(x, y, 0) = \mu(x, y), \\
u(0, y, t) = \mu(0, y),\ u(a, y, t) = \mu(a, y), \\
u(x, 0, t) = \mu(x, 0),\ u(x, b, t) = \mu(x, b),
\end{cases} \tag{1}
$$

в области $(x, y, t) \in [0; a] \times [0; b] \times [0; T]$.

Функция $\mu(x, y)$ задается следующим образом (x и y – вектора, содержащие координаты узлов прямоугольной сетки):

```
function z = mu(x,y)
z = zeros(length(y),length(x));
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        z(j,i) = -0.01*sin(x(i))+0.05*sin(y(j));
    end
end
```

Параметры области: $a = 6\pi$, $b = 4\pi$, $T = 10$. Выбрать равномерную сетку с $h_x = h_y = \dfrac{\pi}{30}$ и шагом по времени $\tau = 0.1$. Коэффициент теплопроводности $k = 0.2$. Отображать двумерное решение на каждом временном слое с помощью функции mesh.

Указания

Для решения использовать эволюционно-факторизованную схему

$$
\begin{cases}
\left(E - \dfrac{\tau}{2}\Lambda_x\right) v = \Lambda_x u + \Lambda_y u, \\
\left(E - \dfrac{\tau}{2}\Lambda_y\right) \Delta u = v, \\
\hat{u} = u + \tau \Delta u.
\end{cases} \tag{2}
$$

Здесь Λ_x и Λ_y - операторы пространственного дифференцирования. Проблем с промежуточным граничным условием здесь не возникает, так как u на границе не меняется со временем, а значит на границе $\hat{u} - u = 0$ и $v = 0$.

Операторы $P_x = E - \dfrac{\tau}{2}\Lambda_x$ и $P_y = E - \dfrac{\tau}{2}\Lambda_y$ могут быть записаны в матричной форме с помощью замены Λ_x и Λ_y на соответствующие матрицы пространственного дифференцирования L_x и L_y. При этом надо помнить, что

$$\begin{aligned} \Lambda_x u &= u L_x, \\ \Lambda_y u &= L_y u, \end{aligned} \tag{3}$$

т.е. матрицы пространственного дифференцирования L_x и L_y умножаются на матрицу значений в узлах сетки u с разных сторон. Аналогично при обращении операторов P_x и P_y надо использовать правое и левое матричное деление соответственно.

Не следует применять операторы пространственного дифференцирования Λ_x и Λ_y к крайним строкам и столбцам матрицы u, так как в таком случае в Δu в крайних строках и столбцах будут содержаться ненулевые значения, что приведет к нарушению граничных условий в расчете.