

Общероссийский математический портал

И. А. Козлитин, А. С. Омелянов, Метод построения гладкой аппроксимации законов сопротивления, *Матем. моделирование*, 2016, том 28, номер 10, 23–32

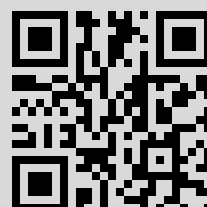
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.188.41.71

4 мая 2019 г., 10:16:05



МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАКОНОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ

© 2016 г. *И.А. Козлитин, А.С. Омелянов*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
Национальный исследовательский университет МИЭТ, Москва
ioannkozlitin@gmail.com

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00161.

Предложена методика гладкой аппроксимации зависимости силы лобового сопротивления от скорости движения тела (закона сопротивления). С ее помощью построена аппроксимация для закона сопротивления 1943 года и законов, применяемых на Западе. С помощью апостериорной оценки точности по методу Ричардсона определен оптимальный шаг сетки при решении задачи внешней баллистики с использованием гладких аппроксимаций законов сопротивления.

Ключевые слова: баллистика, сопротивление воздуха, аппроксимация, апостериорная оценка погрешности, численные методы, метод Рунге–Кутты.

A METHOD FOR SMOOTH APPROXIMATION OF DRAG FUNCTIONS

I.A. Kozlitin, A.S. Omelyanov

Keldysh Institute for Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow
National Research University of Electronic Technology, Moscow

A method for smooth approximation of drag functions was proposed. Approximations of russian 1943 drag function and G1, G2, G5, G6, G7, G8, G1 drag functions were constructed. The optimal grid step was determined by the Rihardson method of posterior error estimation to solve exterior ballistic task using smooth approximations of drag functions.

Key words: ballistics, wind resistance, approximation, posterior error estimation, numerical techniques, Runge–Kutta method.

Задача расчета траектории движения тела в атмосфере с учетом сопротивления воздуха решается путем численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающей его полет. При наличии точных данных о векторе начальной скорости тела, свойствах атмосферы и зависимости величины силы сопротивления воздуха от скорости движения тела траектория может быть рассчитана с точностью, достаточной для практики.

Во многих случаях требуется решать большое количество таких задач в единицу времени, что обуславливает жесткие требования к эффективности алгоритмов расчета траекторий тел. Поскольку основное время в процессе расчета тратится на решение системы ОДУ, то естественным путем увеличения эффективности алгоритмов является использование метода решения ОДУ более высокого порядка точности. Использование

методов высокого порядка точности, в свою очередь, приводит к ужесточению требований к гладкости правой части системы ОДУ.

Основная проблема, которая возникает на этом пути увеличения эффективности расчета, – отсутствие в литературе аппроксимаций зависимости силы лобового сопротивления от скорости требуемой гладкости. Нередко аппроксимация вообще не приводится, а имеется только таблица на довольно редкой сетке. Поскольку сила лобового сопротивления входит в правую часть решаемой ОДУ, то недостаточная гладкость ее зависимости от скорости ухудшает гладкость правой части, не позволяя использовать методы высокого порядка точности.

Задача данной работы – построение высокоточной бесконечно гладкой аппроксимации зависимости силы лобового сопротивления от скорости, снимающей ограничение на гладкость правой части системы ОДУ, решаемой при расчете траекторий движения тел в атмосфере.

Баллистическая задача. Движение центра масс тела в плоскости бросания с учётом сопротивления воздуха описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} du/dx = -F(v)/mv; \\ d\gamma/dx = -g/u^2; \quad dy/dx = \gamma; \\ dt/dx = 1/u; \quad v = u\sqrt{1+\gamma^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где x, y – горизонтальная и вертикальная координаты тела соответственно; t – время; m – масса тела; v – скорость движения тела; u – горизонтальная компонента скорости; γ – тангенс угла между вектором скорости и плоскостью горизонта; $F(v)$ – модуль силы лобового сопротивления воздуха; g – ускорение свободного падения.

Модуль силы лобового сопротивления в зависимости от скорости движения тела вычисляется по формуле

$$F(v) = iS \cdot (\rho v^2 / 2) c_x(v/a), \quad (2)$$

где S – площадь миделева сечения тела; i – коэффициент формы; c_x – функция закона сопротивления воздуха; a – скорость звука; ρ – плотность атмосферы. Заметим, что скорость звука в среде a является функцией температуры, а плотность ρ зависит от температуры и давления среды. Влажность воздуха также влияет на величину скорости звука и плотность среды.

Форма тела учитывается с помощью функции закона сопротивления c_x , которая различается для тел разной формы. Поскольку точно определить c_x – сложная задача, то вместо точной c_x используется некоторая эталонная функция закона сопротивления, а для согласования с опытными данными вводится подгоночный параметр – коэффициент формы i .

Цель нашей работы – аппроксимация зависимости силы сопротивления от скорости $F(v)$, однако на практике удобнее аппроксимировать функцию закона сопротивления c_x .

Система уравнений (1) описывает движение тела в плоскости бросания без учёта

его вращения, поэтому не учитывает эффекта деривации. Для учёта эффектов, связанных с вращением, необходимо вместо двумерной задачи решать трёхмерную.

Для расчёта траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту, систему дифференциальных уравнений (1) дополним начальными условиями (начало координат помещено в точку бросания):

$$\begin{cases} u(0) = v \cos \theta; \\ \gamma(0) = \operatorname{tg} \theta; \\ y(0) = 0; \\ t(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где v – начальная скорость, а θ – угол бросания. Вместе (1) и (3) представляют собой многомерную задачу Коши, решение которой даёт траекторию движения центра масс тела.

С точки зрения практики наиболее важной является задача построения таблиц метания, т.е. зависимости угла бросания θ от дальности метания l . В результате вместо задачи (1), (3) имеем краевую задачу на отрезке от 0 до l со следующими условиями на левой и правой границах (угол места цели равен 0):

$$\begin{cases} u(0) = v \cos \theta; \\ \gamma(0) = \operatorname{tg} \theta; \\ y(0) = 0; \\ y(l) = 0; \\ t(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Одним из методов решения краевых задач является метод стрельбы [2]. Его суть заключается в том, что вместо исходной краевой задачи решается серия задач Коши с различными начальными условиями, которые подбираются таким образом, чтобы обеспечить выполнение граничных условий на правой границе.

Метод стрельбы может быть с успехом применён к задаче (1), (4). Действительно, при фиксированной начальной скорости v и дальности l вертикальная координата $y(l)$ является функцией только угла бросания θ :

$$y(l) = f(\theta). \quad (5)$$

Тогда задача (1), (4) сводится к решению следующего уравнения:

$$f(\theta) = 0. \quad (6)$$

Задача (1), (3) может быть решена различными методами. При компьютерных вычислениях обычно применяют метод Рунге–Кутты. В данной работе для решения задачи (1), (3) применялась схема Кутты 4-го порядка точности. Представляется интересным в целях ускорения работы программы использовать схемы с более высоким порядком точности, например, схему Хаммуда 6-го порядка точности [3].

Основные источники погрешности баллистического расчёта. В теории построения математических моделей принято выделять следующие источники погрешности [4]:

- ошибки, вызванные отклонением математической модели от физической реальности (ошибки модели);
- ошибки исходных данных;
- ошибки используемого численного метода;
- ошибки округления.

Ошибки первого типа вызваны неучётом части реальных факторов либо их упрощённым описанием. К этому типу ошибок относится, например, несоответствие используемой зависимости величины силы лобового сопротивления от скорости $F(v)$ форме летящего тела.

Ошибки исходных данных – это неточно заданные параметры атмосферы, неточно указанные начальная скорость полёта и начальная скорость вращения тела и др.

Ошибки численного метода в данном случае – это прежде всего погрешность методов численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Ошибки округления присутствуют в любом расчёте, хотя в случае баллистического расчёта они не играют заметной роли в общей погрешности. Объясняется это тем, что баллистическая задача, скорее, «мягкая», чем «жесткая».

Ошибки модели и исходных данных полностью устранить невозможно. Иная ситуация с ошибками метода. Полностью избавиться от них также нельзя, однако их можно уменьшить практически до любого заранее указанного уровня, превышающего уровень ошибок округления, которые, в свою очередь, можно уменьшить, увеличивая разрядность вычислений (однако это приводит к значительному увеличению времени расчёта).

Существуют два основных способа оценки погрешности методов интегрирования дифференциальных уравнений [2]: оценка локальной погрешности на каждом шаге и апостериорная оценка погрешности методом глобального сгущения сетки.

Первый метод применяется при построении адаптивных сеток. В качестве примера можно привести метод Дормана–Принса [5]. У него есть параметр *tolerance* (допуск), который используется для выбора шага сетки, обеспечивающего локальную погрешность, меньшую, чем заданная величина допуска. Никакой гарантии того, что общая погрешность расчёта будет хотя бы одного порядка с этим допуском, нет.

Второй метод даёт асимптотически точную оценку погрешности, хотя требует при этом проведения серии расчётов на сгущающихся сетках, что значительно увеличивает время расчёта. Вместе с тем, имея серию расчётов на сгущающихся сетках, можно увеличить эффективный порядок метода с помощью методов Рундсона и Эйткена [4].

Заметим, что оба метода выводятся из предположения о гладкости правой части. Чем выше порядок метода, тем больше непрерывных производных должна иметь правая часть в задаче Коши. Основной функцией, которая может нарушить гладкость правой части (а в случае двумерного расчёта – единственной), является зависимость силы лобового сопротивления от скорости. Таким образом, естественно возникает задача построения гладкой (в идеале – бесконечно гладкой) аппроксимации функции лобового сопротивления от скорости.

Методы построения гладкой аппроксимации. Согласно теореме Вейерштрасса [4], любая непрерывная на отрезке функция может быть аппроксимирована полиномом с любой наперёд заданной точностью. На практике аппроксимация многочленами далеко

не всегда даёт удовлетворительный результат. Во-первых, аппроксимация полиномами не позволяет обеспечить требуемую асимптотику в нуле и на бесконечности. Во-вторых, с ростом степени полинома довольно быстро ухудшается обусловленность матрицы линейной системы, решение которой требуется для построения аппроксимации. В результате коэффициенты полинома вычисляются с большими ошибками и желаемого улучшения точности аппроксимации не удаётся добиться.

Когда аппроксимация многочленами не даёт хорошего результата, зачастую применяют дробно-рациональную аппроксимацию, что позволяет обеспечить требуемую асимптотику, а это во многих случаях имеет большое значение.

Функция закона сопротивления (далее закон сопротивления) практически постоянна при скоростях, существенно меньших скорости звука в среде, имеет максимум в районе скорости звука, а затем постепенно уменьшается. Асимптотика при больших скоростях различна для тел разной формы. Так, закон сопротивления 1943 г. при больших скоростях вновь выходит на константу [6].

Законы сопротивления обычно строятся опытным путём на основе обработки результатов тысяч экспериментов [1]. Метание тел с помощью пороховых зарядов позволяет достигать скоростей до 2000 м/с, что соответствует числу Маха $M=5.9$. Это значит, что после $6M$ доверять этим данным уже нельзя. Во многих случаях таблицы приводятся до скорости $5M$. Таким образом, аппроксимацию следует строить в диапазоне от 0 до $6M$, при этом с практической точки зрения наиболее важен диапазон от 0 до $4M$.

По смыслу закон сопротивления не должен зависеть от знака скорости, поэтому вместо скорости в качестве независимой переменной лучше взять её квадрат. Причём полином знаменателя не должен иметь корней в положительной области, поскольку наличие особенности при некотором значении скорости лишено физического смысла.

Аппроксимация дробно-рациональной функцией методом наименьших квадратов приводит к задаче оптимизации. Решить её можно только при наличии хорошего начального приближения, в качестве которого предлагается использовать дробно-рациональную интерполяцию аппроксимируемой функции.

Пусть необходимо построить интерполяцию функции $f(x)$ на сетке ξ_i дробно-рациональной функцией $A(x)/B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – некоторые полиномы. Тогда задача интерполяции сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\{A(\xi_i) / B(\xi_i) = f(\xi_i), \quad (7)$$

где ξ_i – узлы интерполяции.

В случае когда $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены, система (7) будет линейной относительно коэффициентов полиномов a_j и b_k

$$\left\{ \sum_j a_j \xi_i^j - \sum_k b_k f(\xi_i) \xi_i^k = 0. \quad (8) \right.$$

Для устранения неопределённости решения необходимо фиксировать один из коэффициентов. Возьмем, например, $a_{N-1}=1$, где N – степень полинома числителя. Число узлов интерполяции следует брать на единицу большим суммарной степени числителя и знаменателя.

Разные системы узлов ξ_i будут приводить к различным интерполяциям. Среди них нужно сразу отбросить те, которые имеют положительные корни у полинома знаменателя $B(x)$. Далее можно выбрать достаточно подробную равномерную сетку на отрезке от 0 до 5М и оценить любую интерполяцию по величине отклонения на этой сетке от интерполируемой функции по норме $L2$.

Предлагаем стохастический алгоритм поиска начального приближения.

1. Выбрать случайную систему узлов на отрезке, где требуется построить аппроксимацию.
2. Построить на нём дробно-рациональную интерполяцию.
3. Отбросить интерполяцию, если она имеет особенности на целевом отрезке и вернуться к п.1. В противном случае перейти к п.4.
4. На подробной равномерной сетке вычислить отклонение интерполяции от исходной функции по норме $L2$.
5. Сохранить в качестве текущего минимума вычисленное значение нормы и набор коэффициентов интерполяции, если оно меньше текущего минимума (на первой итерации просто сохранить результат расчёта первой итерации).
6. Если не достигнуто заранее заданное предельное число итераций, то вернуться к п.1. В противном случае закончить. Выдать набор коэффициентов для текущего минимума.

Для работы алгоритма аппроксимируемая функция должна быть вычисляемой во всех точках отрезка аппроксимации. Если изначально значение функции в некой точке неизвестно, его необходимо определить с помощью некоторой интерполяции, например, сплайн-интерполяции [4].

Далее вычисленный набор коэффициентов интерполяции используется в качестве первого приближения для любого стандартного алгоритма минимизации (например, Нелдера–Мида [7]). В качестве минимизируемой функции используется отклонение аппроксимации от искомой функции в норме $L2$ на выбранной нами подробной сетке.

Заметим, что предложенный алгоритм поиска начального приближения сам по себе уже даёт некоторую аппроксимацию исходной функции.

В нашей стране для расчёта таблиц метания тел применяется закон сопротивления 1943г. [6]. Как было отмечено выше, этот закон имеет константные асимптотики при малых и очень больших скоростях, поэтому в дробно-рациональной аппроксимации разумно взять одинаковыми степени числителя и знаменателя дроби. Наилучший результат удалось получить для 6-й степени обоих полиномов. Более высокая степень не даёт заметного преимущества в точности, а более низкая приводит к существенному ухудшению точности аппроксимации.

Наибольшая погрешность аппроксимации достигается при переходе от малых скоростей к транзвуковым. Закон сопротивления в этой области резко возрастает, что приводит к значительной ошибке аппроксимации. Для повышения точности аппроксимации предлагается добавить к рациональной дроби функцию

$$a / [1 + be^{-(x-c)}], \quad (9)$$

которая должна хорошо приближать резкий подъём закона сопротивления. Параметры функции (9) и дробно-рациональной функции необходимо подбирать совместно. В качестве начального приближения можно взять $a=0$, параметр b выбрать так, чтобы обеспе-

чить требуемую крутизну фронта, а параметр c – исходя из положения скачка. В результате на отрезке от 0 до 5М удалось получить относительную погрешность аппроксимации в норме L_2 , равную 0.25 %, при этом в норме C погрешность не превышает 1.11 %.

Подобным образом была построена аппроксимация для законов сопротивления $G1$, $G2$, $G5$, $G6$, $G7$, $G8$ и GI , используемых за рубежом [8]. Добавка функции (9) в этом случае не применялась. Величины ошибок аппроксимации приведены в табл.1.

Таблица 1. Относительная погрешность аппроксимации различных законов сопротивления.

Закон сопротивления	Погрешность в норме L_2 , %	Погрешность в норме C , %
1943 г.	0.25	1.11
$G1$	0.03	0.18
$G2$	0.43	1.55
$G5$	0.30	0.73
$G6$	0.20	0.64
$G7$	0.55	2.06
$G8$	0.11	0.41
GI	0.64	2.80

Результат для законов $G1$ – GI можно улучшить, если использовать при аппроксимации добавочный член (9).

Коэффициенты аппроксимаций [Исходные коды различных законов сопротивления на языке MATLAB] представлены ниже.

1. Закон 1943 года

function r=cx43(x)

pa=[0.0525 -0.9476 8.9342 -9.4610 0.3207 4.2980 -1.9382];

pb=[1.0000 -15.4071 178.6690 -580.8643 985.5873 -853.9492 296.9213];

pc=[0.0531 0.9449 90.5063 0.1639];

r = polyval(pa,x.^2)./polyval(pb,x.^2) + pc(1)./(1+exp(-(x-pc(2))*pc(3)))+pc(4);

end

2. Законы $G1$, $G2$, $G5$, $G6$, $G7$, $G8$, GI

Основная функция

function r=Gu(p,x)

l = length(p)/2;

a = p(1:l);

b = p(l+1:end);

r = polyval(a,x.^2)./polyval(b,x.^2);

Первый параметр p задаёт коэффициенты дробно-рациональной аппроксимации. Второй параметр x – аргумент закона сопротивления.

Например, если в переменной $pG1$ содержится набор коэффициентов для закона $G1$, то вызов будет выглядеть так: $Gu(pG1,x)$.

Вектор-строки коэффициентов для разных законов:

$pG1=[0.47961 \ -3.98603 \ 24.80541 \ -47.30847 \ 45.35460 \ -22.68581 \ 4.57359 \ 1.02345 \ 0.00391$
 $0.96073 \ -7.95116 \ 49.87310 \ -116.55732 \ 149.19468 \ -101.78711 \ 26.83075 \ 4.12643 \ 0.01488];$
 $pG2=[0.13728 \ 1.55677 \ -5.80835 \ -1.32876 \ 87.27110 \ -221.33324 \ 235.23751 \ -120.69354$
 $25.39295 \ 1.22595 \ -2.54186 \ 16.99869 \ -96.68856 \ 396.84054 \ -806.89612 \ 852.60539 \ -470.39123$
 $109.93465];$
 $pG5=[0.30096 \ 3.20028 \ -10.69345 \ 13.85284 \ -8.58915 \ 1.70648 \ 0.43300 \ 1.72236 \ 2.63268 \ -$
 $20.72337 \ 41.16802 \ -35.80891 \ 9.11836 \ 2.51540];$
 $pG6=[0.08949 \ 1.66691 \ -18.37150 \ 97.00518 \ -181.37914 \ 171.98619 \ -95.37410 \ 25.84679$
 $0.52090 \ 0.99770 \ -3.73828 \ -8.02363 \ 158.80623 \ -400.28089 \ 496.05826 \ -352.63771 \ 112.35047$
 $1.99897];$
 $pG7=[0.09455 \ 2.32647 \ 0.63789 \ -18.64651 \ 33.57821 \ -25.02529 \ 7.13532 \ 1.09147 \ 0.58809$
 $34.87929 \ -159.38328 \ 266.91963 \ -202.94686 \ 59.11779];$
 $pG8=[0.12917 \ 0.38697 \ 4.01233 \ -30.54850 \ 83.69925 \ -125.20108 \ 109.09786 \ -52.15553$
 $10.60527 \ 0.99377 \ -4.16702 \ 34.23446 \ -160.37789 \ 402.80752 \ -592.60193 \ 516.09186 \ -$
 $247.30320 \ 50.38574];$
 $pGI=[1.12802 \ 41.95668 \ -82.00452 \ 152.68626 \ -166.57615 \ 84.67932 \ 4.22564 \ 66.33693 \ -$
 $208.10092 \ 528.86021 \ -687.82287 \ 369.21889];$

Подбор наилучшей расчётной сетки. Применение гладкой аппроксимации закона сопротивления позволяет реализовать теоретический порядок метода решения системы дифференциальных уравнений (1). Так, при использовании наиболее популярной схемы Рунге–Кутты 4-го порядка будет иметь место уменьшение погрешности метода в 16 раз при сгущении сетки вдвое. Это позволяет даже на довольно редких сетках (от 8 до 64 интервалов) получать малую погрешность численного метода, которая существенно меньше ошибки самой математической модели.

В качестве примера рассмотрим расчёт траектории пули Б-32 калибра 12.7 мм с массой 48.3 г, выпущенной из пулемёта Никитина–Соколова–Волкова (НСВ) с начальной скоростью 820 м/с при нормальных условиях [9] (давление 750 мм рт.ст., температура 15 С, влажность 50%, ветер отсутствует) на дальность 2000 м при угле бросания 33.932 д.у. (1 деление угломера = 0.06). При таком угле обеспечивается попадание пули в цель. При расчётах будем использовать построенную нами ранее гладкую аппроксимацию закона 1943г. с коэффициентом формы $i = 1.0628755$.

Величину погрешности численного метода будем определять с помощью глобального сгущения сеток с оценкой погрешности по формуле Ричардсона [4].

Пусть имеются два расчёта – U_N и U_{2N} на исходной сетке и сетке с удвоенным числом интервалов соответственно, тогда погрешность расчёта на более подробной сетке определяется по следующей формуле:

$$r_{2N} = (U_{2N} - U_N) / (2^p - 1), \quad (10)$$

где p – порядок точности метода.

Если численный метод имеет порядок точности p , то его погрешность r_N зависит от числа интервалов сетки N :

$$r_N = c / N^p + o(N^{-p}), \quad (11)$$

где c – некоторая константа, а $o(N^{-p})$ – бесконечно малая величина более высокого порядка, чем N^{-p} при $N \rightarrow \infty$.

Из формул (11) и (12) следует, что на графике $\lg |U_{2N} - U_N|$ от $\lg N$ метод порядка p будет давать линию, близкую к прямой с тангенсом угла наклона $-p$. Таким способом можно определить реальный порядок точности метода для данной задачи [4].

Было проведено десять сгущений сетки (каждый раз число интервалов сетки увеличивалось вдвое), при этом начальная сетка имела четыре интервала. График $\lg |U_{2N} - U_N|$ от $\lg N$ представлен на рис.1. Угол наклона прямой линии позволяет оценить реальный порядок численного метода.

Видно, что погрешность метода со временем выходит на прямую с тангенсом угла наклона, равным -3.9134 . Это подтверждает, что для данной задачи метод действительно даёт 4-й порядок точности.

При дальнейшем сгущении сетки погрешность расчёта выходит на уровень ошибок округления, а кривая погрешности – на постоянный уровень.

Для метода 4-порядка, согласно формуле (11), асимптотически точная оценка погрешности имеет вид

$$r_{2N} = (U_{2N} - U_N) / 15. \quad (12)$$

На рис.2 представлена зависимость модуля погрешности (12) от числа интервалов N .

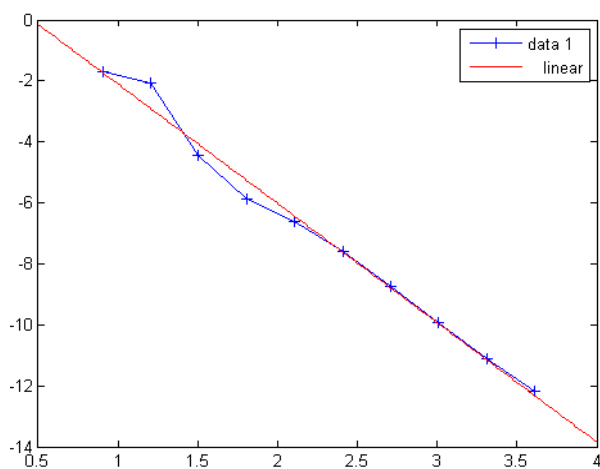


Рис.1. Определение реального порядка точности численного метода интегрирования системы дифференциальных уравнений для задачи расчёта баллистической траектории: ломаная линия – результат расчёта, прямая – линейная аппроксимация результатов расчёта.

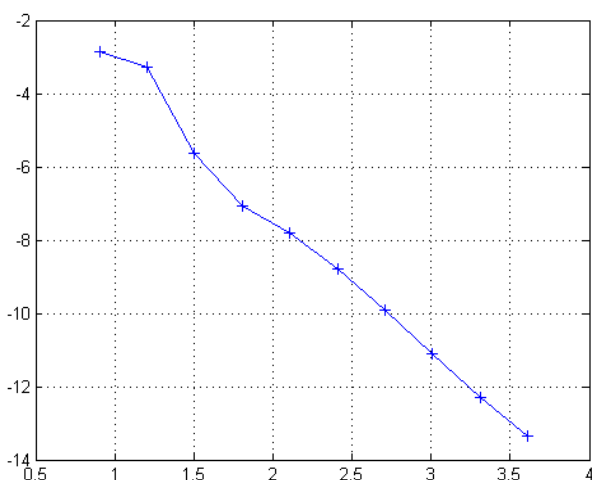


Рис.2. Зависимость погрешности баллистического расчёта от числа интервалов сетки в двойном логарифмическом масштабе.

Из рис.2 видно, что для обеспечения точности в 10^{-3} м необходимо брать сетку в 16 интервалов. Сетка в 32 интервала даёт погрешность на уровне 10^{-5} м. Точность расчёта в этом случае существенно превосходит любые потребности практики.

Все законы сопротивления имеют максимальные производные в области околосвуковых скоростей. Это означает, что при околосвуковой скорости пули погрешность расчёта будет максимальна. Характерной особенностью рассмотренной выше тестовой задачи является то, что в ней пуля начинает движение со сверхзвуковой скоростью, пере-

ходит звуковой барьер и попадает в цель уже на дозвуковой скорости, то есть некоторое время пуля летит на околосзвуковой скорости, при которой погрешность расчета максимальна. Отметим также, что 2000м является предельной прицельной дальностью для пулемета НСВ-12.7. Это означает, что полученные оценки погрешности справедливы для весьма трудного случая, а при решении более простых задач погрешность будет еще меньше. Поэтому в большинстве случаев рекомендуется использовать сетку в 16 интервалов, а в наиболее трудных случаях – 32 интервала.

Таким образом, при использования гладкой аппроксимации закона сопротивления можно решать задачу внешней баллистики с гарантированной точностью на весьма редкой сетке, что обуславливает высокую производительность баллистического вычислителя и возможность его реализации на специализированных вычислительных устройствах.

Полученная оценка числа интервалов сетки также может быть полезна при расчете траектории полета тела с учетом его реальной аэродинамики на суперкомпьютерах. Аккуратный аэродинамический расчет силы сопротивления воздуха летящему телу весьма затратен по времени, поэтому очень важно сократить число точек на траектории, в которых он выполняется, до минимально необходимого количества, обеспечивающего требуемый уровень точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлов В.В. и др. Баллистика ствольных систем. Под ред. Л.Н. Лысенко и А.М. Липанова. – М.: Машиностроение, 2006, 461 с.;
Burlov V.V. i dr. Ballistika stvolnykh sistem. Pod red. L.N. Lysenko i A.M. Lipanova. – M.: Mashinostroyeniye, 2006, 461 s.
2. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Кн.2: Методы математической физики. – М.: Академия, 2013, 304 с.;
Kalitkin N.N., Koriakin P.V. Chislennyye metody. Kn.2: Metody matematicheskoi fiziki. – M.: Akademiya, 2013. 304 s.
3. Альшина Е.А., Закс Е.М., Калиткин Н.Н. Оптимальные схемы Рунге–Кутты с первого по шестой порядок точности // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 2008, т.48, № 3, с.418–429;
Alshina E.A., Zaks E.M., Kalitkin N.N. Optimal First- to Sixth-Order Accurate Runge–Kutta Schemes // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2008, t.48, №3, p.395-406.
4. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы. Кн.1: Численный анализ. – М.: Академия, 2013, 304 с.;
Kalitkin N.N., Alshina E.A. Chislennyye metody. Kn.1: Chislennyyi analiz. – M.: Akademiya, 2013, 304 s.
5. Dormand J.R., Prince P.J. A family of embedded Runge–Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics, 1980, v.6 (1), p.19–26.
6. Шапиро Я.М. Внешняя баллистика. – М.: Оборонгиз, 1946, 408 с.;
Shapiro I.A.M. Vneshniaia ballistika. – M.: Oborongiz, 1946, 408s.
7. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H. and Wright P.E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions, SIAM Journal of Optimization, 1998, v.9, №1, p.112-147.
8. <http://www.jbmballistics.com/ballistics/downloads/downloads.shtml>
9. Руководство по 12,7-мм пулемёту Утес (НСВ-12,7), военное издательство. – М.: 1986;
Rukovodstvo po 12,7-mm pulemetu Utes (NSV-12,7), voennoe izdatelstvo. – M.: 1986.
10. Ефремов А.К. Аппроксимация закона сопротивления воздуха 1943г. – М.: Наука и образование: Электронный научно-технический журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, вып. 10, с.269–284;
Efremov A.K. Approksimatsiya zakona soprotivleniya vozdukha 1943 g. – M.: Nauka i obrazovanie: Elektronny'nauchno-tekhnicheskii' zhurnal MGTU im. N.E. Bauman, 2013, vyp.10, s.269-284.

Поступила в редакцию 11.09.2015