**Лабораторная работа №6**

**Метод прогонки решения СЛАУ. Применение метода прогонки для решения дифференциальных уравнений.**

1) Напишите подпрограмму, реализующую метод прогонки. Убедитесь в его работоспособности, получив решение X для произвольной трехдиагональной системы AX=f, и сравнив его с решением, полученным при выполнении операции обратного матричного деления: X=A\f.

function A = tdmd(e, x, type)

n = length(x);

h = (x(n) - x(1)) / (n - 1);

if type == 'l'

c = ones(n,1) \* (-1)\*(2\*e - h);

b = ones(n-1,1) \* e;

a = ones(n-1,1) \* (e - h);

A = diag(c) + diag(b, 1) + diag(a, -1);

if h <= e

disp('Прогонка устойчива');

else

disp('Прогонка неустойчива');

end

end

if type == 'r'

c = ones(n,1) \* (-1)\*(2\*e + h);

b = ones(n-1,1) \* (e + h);

a = ones(n-1,1) \* e;

A = diag(c) + diag(b, 1) + diag(a, -1);

disp('Прогонка устойчива');

end

if type == 'c'

c = ones(n,1) \* (-1)\*4\*e;

b = ones(n-1,1) \* (2\*e + h);

a = ones(n-1,1) \* (2\*e - h);

A = diag(c) + diag(b, 1) + diag(a, -1);

if h <= 2\*e

disp('Прогонка устойчива');

else

disp('Прогонка неустойчива');

end

end

A(1,1) = 1; A(n,n) = 1;

A(1,2) = 0; A(n,n-1) = 0;

function y = thomas(A, F)

n = size(A, 2);

alpha(1) = -A(1,2);

beta(1) = F(1);

for i = 2:n - 1

c = -A(i,i); b = A(i,i+1); a = A(i,i-1);

alpha(i) = b / (c - a\*alpha(i-1));

beta(i) = (a\*beta(i-1) - F(i)) / (c - a\*alpha(i-1));

end

y(n) = (F(n) - A(n,n-1)\*beta(n-1)) / (1 + A(n,n-1)\*alpha(n-1));

for i = n - 1:-1:1

y(i) = alpha(i)\*y(i+1) + beta(i);

end

y = y';

>> A = tdmd(0.3, [0:0.1:1], 'l')

Прогонка устойчива

A =

1.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0.2 -0.5 0.3 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0.2 -0.5 0.3 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0.2 -0.5 0.3 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0.2 -0.5 0.3 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0.2 -0.5 0.3 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0.2 -0.5 0.3 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0.2 -0.5 0.3 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0.2 -0.5 0.3 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0.2 -0.5 0.3

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1.0

>> F = randi(9, 11, 1)

F =

8

9

2

9

6

1

3

5

9

9

2

>> y = thomas(A,F)

y =

8.0000

-127.7833

-188.3056

-221.9870

-214.4414

-189.4109

-169.3906

-146.0437

-113.8125

-62.3250

2.0000

>> A\F

ans =

8.0000

-127.7833

-188.3056

-221.9870

-214.4414

-189.4109

-169.3906

-146.0437

-113.8125

-62.3250

2.0000

2) Записав найденные прогоночные коэффициенты и решив систему, найдите решение дифференциального уравнения. Постройте графики численного и аналитического решений.

e = 0.5;

n = 10;

h = 1 / (n - 1);

x = [0:h:1];

F = zeros(n, 1);

F(n) = 1

for i = 1:3

if i == 1

type = 'l';

elseif i == 2

type = 'r';

elseif i == 3

type = 'c';

end

A = tdmd(e, x, type)

y = thomas(A, F)

figure;

hold on; grid on;

xlabel('X'); ylabel('Y');

plot(x, y, 'r', x, y, 'r.');

yAns = @(x)(1/(1 - exp(-1/e))) \* (1 - exp(-x/e));

xn = [0:h/10:1];

plot(xn, yAns(xn), 'b');

end

F =

0 0 0 0 1

Прогонка устойчива

A =

1.0000 0 0 0 0

0.2500 -0.7500 0.5000 0 0

0 0.2500 -0.7500 0.5000 0

0 0 0.2500 -0.7500 0.5000

0 0 0 0 1.0000

y =

0

0.5333

0.8000

0.9333

1.0000



F =

0 0 0 0 1

Прогонка устойчива

A =

1.0000 0 0 0 0

0.5000 -1.2500 0.7500 0 0

0 0.5000 -1.2500 0.7500 0

0 0 0.5000 -1.2500 0.7500

0 0 0 0 1.0000

y =

0

0.4154

0.6923

0.8769

1.0000



F =

0 0 0 0 1

Прогонка устойчива

A =

1.0000 0 0 0 0

0.7500 -2.0000 1.2500 0 0

0 0.7500 -2.0000 1.2500 0

0 0 0.7500 -2.0000 1.2500

0 0 0 0 1.0000

y =

0

0.4596

0.7353

0.9007

1.0000



Найдите норму разности между решениями (в качестве нормы используйте сеточный аналог нормы пространства C[a,b]). Составьте таблицу, содержащую норму разности между решениями для каждого узла (в качестве нормы используйте относительную погрешность, умноженную на 100%).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Исходное | 0.0000 | 0.4550 | 0.7310 | 0.8985 | 1.0000 |
| Левая | 0.0000 | 0.5333 | 0.8000 | 0.9333 | 1.0000 |
| Правая | 0.0000 | 0.4154 | 0.6923 | 0.8769 | 1.0000 |
| Центральная | 0.0000 | 0.4596 | 0.7353 | 0.9007 | 1.0000 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Левая | 0% | 17.2% | 9.43% | 3.87% | 0% |
| Правая | 0% | 8.7% | 5.29% | 2.4% | 0% |
| Центральная | 0% | 1.01% | 0.59% | 0.24% | 0% |

3) Добейтесь расхождения численного решения при использовании левой и центральной разностей.

При e = 0.5

n = 5

Левая разность

Прогонка устойчива

A =

1.0000 0 0 0 0

0.2500 -0.7500 0.5000 0 0

0 0.2500 -0.7500 0.5000 0

0 0 0.2500 -0.7500 0.5000

0 0 0 0 1.0000

y =

0

0.5333

0.8000

0.9333

1.0000



Правая разность

Прогонка устойчива

A =

1.0000 0 0 0 0

0.5000 -1.2500 0.7500 0 0

0 0.5000 -1.2500 0.7500 0

0 0 0.5000 -1.2500 0.7500

0 0 0 0 1.0000

y =

0

0.4154

0.6923

0.8769

1.0000



Центральная разность

Прогонка устойчива

A =

1.0000 0 0 0 0

0.7500 -2.0000 1.2500 0 0

0 0.7500 -2.0000 1.2500 0

0 0 0.7500 -2.0000 1.2500

0 0 0 0 1.0000

y =

0

0.4596

0.7353

0.9007

1.0000



Численно оцените порядок аппроксимации схемы – увеличение узлов сетки в два раза, должно приводить к уменьшению ошибки в 2 раза при использовании левой и правой разностей, и в 4 раза – при центральной.

При e = 0.5

n = 10

Левая разность

Прогонка устойчива

A = …

y =

0

0.2481

0.4410

0.5911

0.7078

0.7985

0.8692

0.9241

0.9668

1.0000 

Правая разность

Прогонка устойчива

A = …

y =

0

0.2176

0.3956

0.5412

0.6604

0.7579

0.8376

0.9029

0.9563

1.0000



Центральная разность

Прогонка устойчива

A = …

y =

0

0.2310

0.4158

0.5637

0.6819

0.7765

0.8522

0.9128

0.9612

1.0000



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | | 3 | | 4 | |
| n = 5 | n = 10 | n = 5 | n = 10 | n = 5 | n = 10 |
| Исходное | 0.4550 | | 0.7310 | | 0.8985 | |
| Левая | 0.5333 | 0.4785 | 0.8000 | 0.7532 | 0.9333 | 0.9104 |
| Правая | 0.4154 | 0.4320 | 0.6923 | 0.7091 | 0.8769 | 0.8866 |
| Центральная | 0.4596 | 0.4526 | 0.7353 | 0.7292 | 0.9007 | 0.8976 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ошибка | 2 | | 3 | | 4 | |
| n = 5 | n = 10 | n = 5 | n = 10 | n = 5 | n = 10 |
| Левая | 0.0783 | 0.0235 | 0.0690 | 0.0222 | 0.0348 | 0.0119 |
| Правая | 0.0396 | 0.0230 | 0.0387 | 0.0219 | 0.0216 | 0.0119 |
| Центральная | 0.0046 | 0.0024 | 0.0043 | 0.0018 | 0.0022 | 0.0009 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Коэффициенты | 2 | 3 | 4 |
| Левая | 3.33 | 3.10 | 2.92 |
| Правая | 1.72 | 1.76 | 1.81 |
| Центральная | 1.91 | 2.38 | 2.44 |