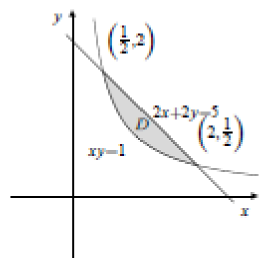
جواب تمرینات سری پنجم

سوال اول: انتگرال‌های دوگانه زیر را با استفاده از انتگرال‌های مکرر محاسبه کنید.

الف) انتگرال $\iint_D lnx dA$ که D ناحیه کراندار محصور بین خط $2x+2y=5$ و هذلولی $xy=1$ در ربع اول است.



$$y=\frac{1}{x}\to 2x+\frac{2}{x}=5\to 2x^2-5x+2=0\to x=\frac{1}{2},2$$

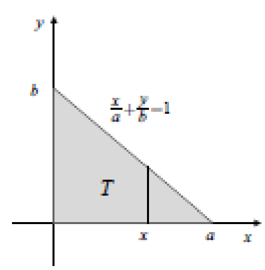
$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} lnx dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dy=\int_{\frac{1}{2}}^{2} lnx(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x})dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2} lnx(\frac{5}{2}-x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{lnx}{x}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2} lnx(\frac{5}{2}-x)dx-\frac{(lnx)^2}{2}|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$\begin{cases} u=lnx & \to \quad du=\frac{1}{x} \\ dv=\frac{5}{2}-x & \to \quad v=\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$I=lnx\left(\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{x}{2}\right)dx-\frac{(lnx)^2}{2}|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{33}{8}ln2-\frac{45}{16}$$

ب) انتگرال $\iint_D (x-3y)dA$ که در آن T مثلث با راس‌های $(0,b)$ ، $(a,0)$ و $(0,0)$ است.



$$I=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}(x-3y)\,dy=\int_0^a\left(xy-\frac{3y^2}{2}\right)_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx$$

$$=\int_0^a(bx\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{3}{2}b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2)dx=\frac{a^2b}{6}-\frac{ab^2}{2}$$

سوال دوم: فرض کنید R ناحیه بین $y-x=-1$ ، $y-x=1$ ، $x+y=0$ و $x+y=2$ باشد، مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه زیر:

$$\int\int_R (x-y)e^{x^2-y^2}dA$$

تغیر متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}\xRightarrow{\text{با توجه به ناحیه}}\begin{cases}-1\le u\le 1\\ 0\le v\le 2\end{cases},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$I=\int_{-1}^1\int_0^2 ue^{uv}\left(\frac{1}{2}\right)dvdu=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{uv})_0^2du=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(e^{2u}-1)du=\frac{1}{4}(e^2-e^{-2})-1$$

سوال سوم: اگر D ناحیه کراندار واقع در ربع اول و بین خط $y=x$ و سهمی $y=x^2$ باشد، تعیین کنید انتگرال زیر همگراست یا واگرا.

$$\int\int_D\frac{dA}{xy}$$

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x}\int_{x^2}^x\frac{dy}{y}=\int_0^1\frac{1}{x}(lnx-\ln(x^2))dx=-\int_0^1\frac{1}{x}(\ln(x^2)-x)dx=-\int_0^1\frac{lnx}{x}dx$$

حال با تغییر متغیر $x=e^{-t}$ داریم $dx=-e^{-t}dt$ که با جای‌گذاری به دست می‌آید:

$$I=-\int_\infty^0\frac{-t}{e^{-t}}(-e^{-t})dt=\int_0^\infty tdt$$

که انتگرال فوق واگراست.

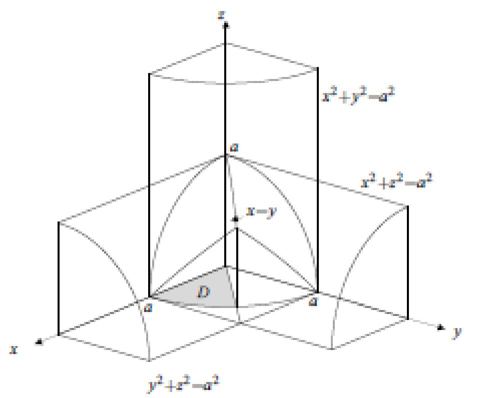
سوال چهارم: تعداد زیادی نقطه مانند (x, y) را به تصادف در مثلث T که دارای راس‌های $(1, 1)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 0)$ است، انتخاب کرده‌ایم. مقدار متوسط تقریبی $x^2 + y^2$ به ازای این نقاط کدام است.

$$\text{Approximation } Average = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int\int_T (x^2 + y^2) dA = 2 \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy$$

$$= 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)_0^x dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3}$$

توضیح تکمیلی: در محاسبه فوق کسر $\frac{1}{2}$ بیانگر مساحت مثلث T است.

سوال پنجم: حجم ناحیه‌ای را که درون $y^2 + z^2 = a^2$ ، $x^2 + z^2 = a^2$ و $x^2 + y^2 = a^2$ قرار گرفته است، بیابید.



ناحیه مربوط به یک هشتم اول را در نظر بگیرید که نسبت به صفحه $x = y$ متقارن است و تصویر این ناحیه در یک طرف صفحه مطابق قسمت D است و با استفاده از مختصات قطبی $0 \leq r \leq a$ و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است و $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ است، لذا با در نظر گرفتن ضریب r ناشی از تغییر مختصات دکارتی به مختصات قطبی و با جایگزینی $x = a cos\theta$ و همچنین وجود در کل شانزده ناحیه با حجم مساوی که اجتماع آن‌ها، ناحیه مورد نظر را تولید می‌کند، حجم ناحیه مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta}\, dr$$

تغییر متغیر $u = a^2 - r^2 \cos^2 \theta$ را در نظر بگیرید که متعاقبا $du = -2r \cos^2 \theta$ ، لذا داریم:

$$V = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \int_{a^2 \sin^2 \theta}^{a^2} \sqrt{u} du = \frac{16a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{16a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta - \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{16a^3}{3}\left(tg\theta - \frac{1}{cos\theta} - cos\theta\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = 16\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a^3$$

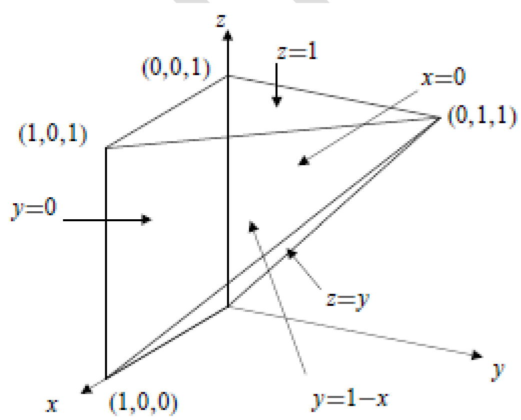
سوال ششم: انتگرال‌های زیر را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید.

$$\boldsymbol{\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_y^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)}dz}$$

$$I = \iiint_R \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)}dV = \int_0^1 (\frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)}(\int_0^z (\int_0^{1-y} dx)\, dy))dz$$

$$= \int_0^1 (\frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)}(\int_0^z (1-y)\, dy))dz = \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)}\left(z - \frac{z^2}{2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi z)\, dz = \frac{-1}{2\pi}\cos(\pi z)_0^1 = \frac{-1}{2\pi}(-1-1) = \frac{1}{\pi}$$



$$\boldsymbol{\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)\, dydx}$$

$$I = \iint_R \sin(y^3)\, dA = \int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sin(y^3)\, dx\right)dy = \int_0^1 y^2\sin(y^3)\, dy$$

$$= \frac{-1}{3}\cos(y^3))_0^1 = -\frac{1}{3}(\cos(1)-1)$$

سوال هفتم: انتگرال سه‌گانه مفروض را بر ناحیه مشخص شده محاسبه کنید.

الف) $\iiint yz^2\, e^{-xyz} dV$ بر مکعب $0 \le x, y, z \le 1$

$$I = \int_0^1 z\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 yze^{-xyz}dx\right)dy\right)dz$$

$$= \int_0^1 z\left(\int_0^1 (1 - e^{-yz})dy\right)dz = \int_0^1 z\left((y + \frac{1}{z}e^{-yz})_0^1\right)dz$$

$$= \int_0^1 z\left(1 + \frac{1}{z}e^{-z} - \frac{1}{z}\right)dz = \int_0^1 (z + e^{-z} - 1)dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

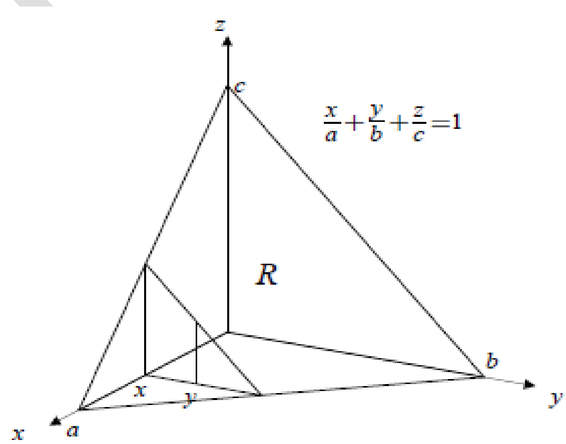
ب) $\iiint x\, dV$ بر چهاروجهی محصور بین صفحات مختصات و صفحه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$I = \int_0^a x\left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz\right)dy\right)dx = \int_0^a x\left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\right)dy\right)dx$$

$$= c\int_0^a x\left(\left(\left(1-\frac{x}{a}\right)y - \frac{y^2}{2b}\right)_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right)dx$$

$$= c\int_0^a x\left(\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right) - \frac{\left(b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)^2}{2b}\right)dx = \frac{bc}{2}\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

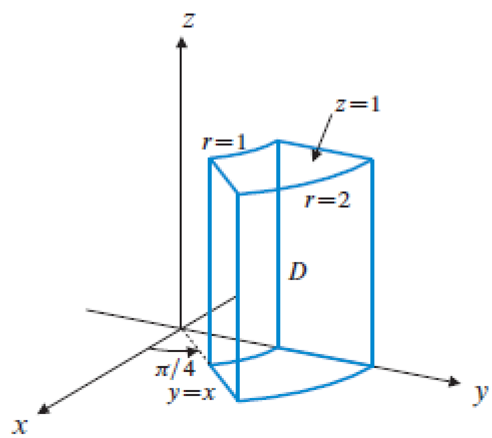
$$= \frac{bc}{2}\int_0^a x(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2})dx = \frac{bc}{2}\int_0^a (x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2})dx = \frac{bc}{2}(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2})_0^a = \frac{a^2bc}{24}$$



سوال هشتم: مطلوب است محاسبه $\int\int\int (x^2+y^2)\, dV$ بر ناحیه‌ای که در یک هشتم اول و بین دو استوانه $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0\,, z=1\,, x=0\,, x=y$ است.

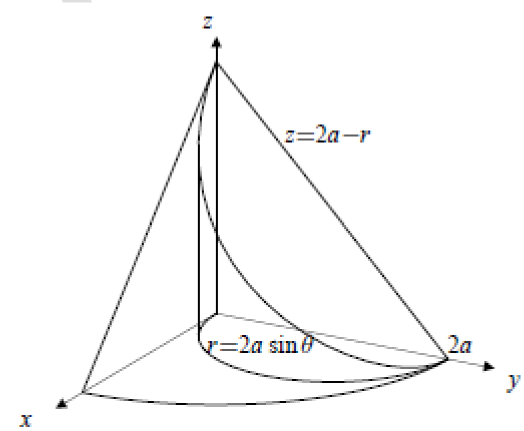
$$I=\int_0^1 z\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2 r^3dr\right)d\theta\right)dz$$

$$=\left(\int_0^1 zdz\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right)\left(\int_1^2 r^3dr\right)=(1)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{15\pi}{16}$$



سوال نهم: حجم ناحیه‌های مشخص شده را بیابید.

الف) بالای صفحه xoy و درون مخروط $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ و درون استوانه $x^2+y^2=2ay$.



$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2asin\theta}(2a-r)rdrd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{2asin\theta}(2a-r)rdr)d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2ar^2 - \frac{r^3}{3}\right)_0^{2asin\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8a^3 \sin^2\theta - \frac{8a^3 \sin^3\theta}{3})d\theta$$

$$= 16a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\theta(1-\cos^2\theta)}{3} d\theta\right)$$

$$= 16a^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{cos\theta}{3} - \frac{\cos^3\theta}{9}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 16a^3(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{9})$$

ب) درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ و بالای سهمیوار $z = x^2 + y^2$.

$$(x^2 + y^2)^2 = 6 - x^2 - y^2 \to (x^2 + y^2)^2 + x^2 + y^2 - 6 = 0$$

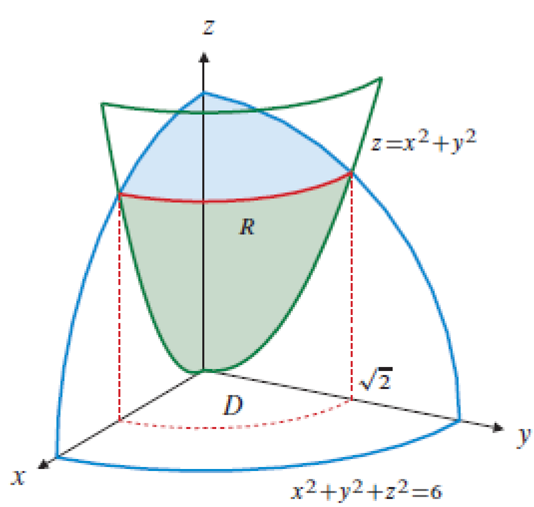
حال از تغییر مختصات استوانه‌ای $x = rcos\theta$ ، $y = rsin\theta$ و $z = z$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$r^4 + r^2 - 6 = 0 \to (r^2 + 3)(r^2 - 2) = 0 \to r^2 = 2 \to r = \sqrt{2}$$

$$V = \iiint_R dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} rdzdrd\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}} r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} dz\right)dr\right) = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{6-r^2} - r^2\right)dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{-1}{3}(6-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{4}\right)_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(6\sqrt{6} - 11)$$



ج) درون بیضیوار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و بالای صفحه $z=b-y$.

تغییر متغیر $x=au$ ، $y=bv$ و $z=cw$ را در نظر بگیرید.

لذا ناحیه مورد نظر درون کره به فرم $u^2+v^2+w^2=1$ و بالای صفحه $bv+cw=b$ است. فاصله صفحه از مبدا برابر $D=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$ است، لذا داریم:

$$V=\pi\int_D^1(1-w^2)dw=\pi\left(w-\frac{w^3}{3}\right)_D^1=\pi(\frac{2}{3}-D+\frac{D^3}{3})$$

توضیح تکمیلی: از ریاضی یک به خاطر دارید که حجم حاصل از دوران یک منحنی حول محور y برابر $\int y^2dx$ است که در جواب، حجم حاصل از دوران حول محور فاصله از مبدا به کار برده شده است که انتگرال‌گیری با فاصله نامیده می‌شود.

د) حجم محصور به رویه $z=\frac{1}{x^2+y^2}$ و منتهی به صفحات $z=3$ و $z=1$.

$$V=\iiint_D dV=\int_0^{2\pi}\int_1^3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{z}}}rdrdzd\theta=2\pi\int_1^3(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{z}}}rdr)dz$$

$$=2\pi\int_1^3(\frac{1}{2z}-\frac{1}{6})dz=\pi(ln3-\frac{2}{3})$$

ه) حجم محصور به صفحه $z=cos\alpha$ و مخروط $x^2+y^2=z^2tg^2\alpha$.

روش اول: تغییر مختصات استوانه‌ای $x=rcos\theta$ ، $y=rsin\theta$ و $z=z$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{tg^2\alpha}}\le z\le cos\alpha\rightarrow\frac{r}{tg\alpha}\le z\le cos\alpha$$

$$x^2+y^2=\cos^2\alpha\, tg^2\alpha\rightarrow x^2+y^2=\sin^2\alpha$$

$$\rightarrow 0\le\theta\le 2\pi\ ,0\le r\le sin\alpha$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{sin\alpha}\int_{\frac{r}{tg\alpha}}^{cos\alpha}rdzdrd\theta=2\pi\int_0^{sin\alpha}r\left(\int_{\frac{r}{tg\alpha}}^{cos\alpha}dz\right)dr$$

$$=2\pi\int_0^{sin\alpha}r\left(cos\alpha-\frac{r}{tg\alpha}\right)dr=2\pi\left(\frac{\sin^2\alpha\, cos\alpha}{2}-\frac{\sin^3\alpha}{3tg\alpha}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sin^2\alpha\, cos\alpha}{2} - \frac{\sin^2\alpha\, cos\alpha}{3}\right) = \frac{\pi\sin^2\alpha\, cos\alpha}{3}$$

روش دوم: تغییر مختصات کروی $x = \rho sin\varphi cos\theta$ ، $y = \rho sin\varphi sin\theta$ و $z = \rho cos\varphi$ را در نظر بگیرید:

$$x^2 + y^2 = z^2 tg^2\alpha \to \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\cos^2\varphi\, tg^2\alpha \to tg^2\varphi = tg^2\alpha \to 0 \le \varphi \le \alpha$$

$$z = cos\alpha \to \rho cos\varphi = cos\alpha \to 0 \le \rho \le \frac{cos\alpha}{cos\varphi} \qquad , \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{\frac{cos\alpha}{cos\varphi}} \rho^2 sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \cdots = \frac{\pi\sin^2\alpha\, cos\alpha}{3}$$

جواب تمرینات سری ششم

سوال اول: انتگرال خمیده – خطی میدان برداری زیر را در امتداد مسیر چندضلعی $(\mathbf{0,0,0})$ به $(\mathbf{1,0,0})$ به $(\mathbf{1,1,0})$ به $(\mathbf{1,1,1})$ محاسبه کنید.

$$F(x,y,z)=(x-z)i+(y-z)j-(x+y)k$$

$$F(x,y,z)=\nabla\left(\frac{x^2+y^2}{2}-(x+y)z\right)$$

مسیر چندضلعی داده شده از $(0,0,0)$ به $(1,1,1)$ است، لذا داریم:

$$\int_C F.dr=\left(\frac{x^2+y^2}{2}-(x+y)z\right)_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}=1-2=-1$$

سوال دوم: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر در جهت پادساعتگرد حول $\boldsymbol{4x^2+y^2=4}$:

$$\boldsymbol{I=\int_C(e^x siny+3y)dx+(e^x cosy+2x-2y)dy}$$

در نظر بگیرید:

$$\varphi(x,y)=e^x siny+2xy-y^2\rightarrow F=\nabla\varphi+yi$$

$$I=\oint_C\nabla\varphi.dr+\oint_C ydx$$

با پارامتری سازی ناحیه C داریم $x=cost$ و $y=2sint$ که $0\le t\le 2\pi$ ، لذا داریم:

$$I=0+\oint_C ydx=-2\int_0^{2\pi}\sin^2 t=-2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt=-2\pi$$

سوال سوم: کار انجام شده به وسیله میدان برداری زیر را در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم داده شده بیابید.

$$\boldsymbol{F=(y^2cosx+z^3)i+(2ysinx-4)j+(3xz^2+2)k}$$

$$\boldsymbol{x=\sin^{-1}t\ ,y=1-2t\,,z=3t-1\quad(0\le t\le 1)}$$

$$F=\nabla(y^2sinx+xz^3-4y+2z)$$

مسیر حرکت خم داده شده از نقطه $(0,1,-1)$ به $(\frac{\pi}{2},-1,2)$ است، لذا داریم:

$$W=\int_C F.dr=(y^2sinx+xz^3-4y+2z)_{(0,1,-1)}^{(\frac{\pi}{2},-1,2)}=15+4\pi$$

سوال چهارم: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_S z^2 ds$ بر نیمکره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$r(\varphi,\theta)=(asin\varphi cos\theta, asin\varphi sin\theta, acos\varphi)$$

$$\rightarrow ds=a^2 sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$\iint_S z^2 ds=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\varphi\, a^2 sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$=a^4\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\right)=a^4(2\pi)\left(\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi a^4}{3}$$

سوال پنجم: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_S y ds$ که در آن S آن قسمت از مخروط $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ است که در زیر صفحه $z=1+y$ قرار دارد.

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy$$

$$\iint_S y ds=\sqrt{3}\bar{y}\iint_E dxdy=(\sqrt{3})(1)(\pi\sqrt{2})=\sqrt{6}\pi$$

توضیح تکمیلی: برای یافتن $\bar{y}$ و $\iint_E dxdy$ ابتدا تصویر S را در صفحه xoy به دست می‌آوریم، داریم:

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}=1+y\rightarrow 2(x^2+y^2)=(1+y)^2\rightarrow\cdots\rightarrow x^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

لذا شکل حاصل، یک بیضی به مرکز $(0,1)$ و قطرهای 2 و $2\sqrt{2}$ است. مساحت این بیضی برابر حاصل ضرب عدد پی در نصف طول قطرهای آن است، بنابراین:

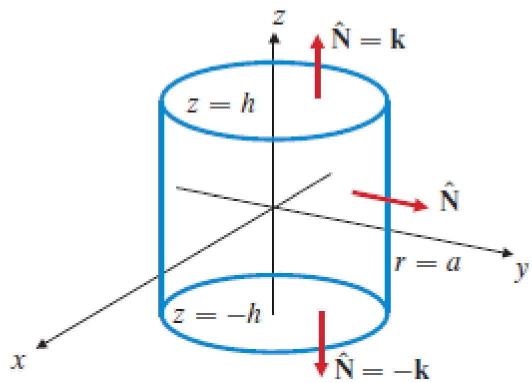
$$\iint_E dxdy=\pi\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)=\pi\sqrt{2}$$

از طرفی در این بیضی حداکثر مقدار y برابر $1+\sqrt{2}$ و حداقل مقدار آن $1-\sqrt{2}$ است و $\bar{y}$ برابر میانگین حداقل و حداکثر مقدار آن است، بنابراین داریم:

$$\bar{y}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)=1$$

سوال ششم: شار کل $F=xi+yj+zk$ را در خروج از رویه استوانه صلب زیر محاسبه کنید.

$$x^2+y^2\le a^2\,,-h\le z\le h$$



روش اول:

$$\iint_{\varphi_1} F.Nds = \iint_{\varphi_1} (xi+yj+zk).(k)ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} hrdrd\theta = \pi a^2 h$$

$$\iint_{\varphi_2} F.Nds = \iint_{\varphi_2} (xi+yj+zk).(-k)ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} (-h)(-1)rdrd\theta = \pi a^2 h$$

$$\iint_{\varphi_3} F.Nds = \iint_{\varphi_3} (xi+yj+zk).(cos\theta i, sin\theta j, 0)ds$$

$$= \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} (acos\theta i + asin\theta j + zk).(cos\theta i + sin\theta j)ad\theta dz = 4\pi a^2 h$$

$$\to \oiint_R F.Nds = \iint_{\varphi_1} F.Nds + \iint_{\varphi_2} F.Nds + \iint_{\varphi_3} F.Nds = 6\pi a^2 h$$

روش دوم: با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_R F.Nds = \iiint_v div(F)dV = 3\iiint_v dV = 3\left(\pi a^2(2h)\right) = 6\pi a^2 h$$

سوال هفتم: شار $\boldsymbol{F = yzi - xzj + (x^2+y^2)k}$ را در عبور به بالا از رویه زیر بیابید.

$$r = e^u cosvi + e^u sinvj + uk \qquad 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$$

$$\hat{N}dS = \frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}dudv = (-e^u cosvi - e^u sinvj + e^{2u}k)dudv$$

$$F = ue^u sinvi - ue^u cosvj + e^{2u}k$$

$$\iint_S F.\hat{N}dS = \int_0^{\pi}\int_0^1 (ue^u sinvi - ue^u cosvj + e^{2u}k).(-e^u cosvi - e^u sinvj + e^{2u}k)dudv$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 (e^{4u})dudv = \frac{\pi(e^4-1)}{4}$$

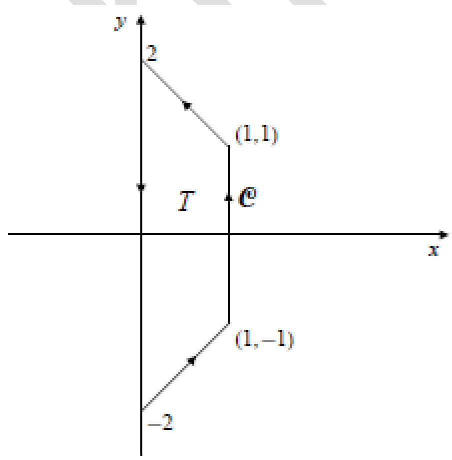
سوال هشتم: انتگرال زیر را که C مرز پادساعتگرد ذوزنقه دارای رئوس $(0,2)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(0,-2)$ است، محاسبه کنید.

$$\oint_C (\boldsymbol{xsin(y^2) - y^2})\boldsymbol{dx} + (\boldsymbol{x^2ycos(y^2) + 3x})\boldsymbol{dy}$$

$$I = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2ycos(y^2) + 3x) - \frac{\partial}{\partial y}(xsin(y^2) - y^2)\right)dA$$

$$= \iint_R (2xycos(y^2) + 3 - 2xycos(y^2) + 2y)dA = \iint_R (3 + 2y)dA$$

$$= 3\iint_R dA + 2\bar{y}\iint_R dA = (3)(3) + 0 = 9$$



توضیح تکمیلی: همان طور که در شکل فوق نیز مشخص است، داریم:

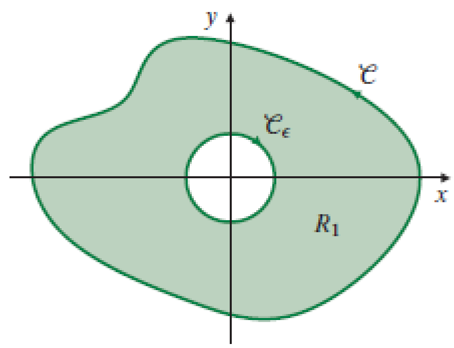
$$\bar{y} = \frac{1}{2}(y_{min} + y_{max}) = \frac{1}{2}(-2+2) = 0$$

سوال نهم: فرض کنید C خم ساده بسته به طور مثبت جهت دهی شده ای در صفحه xoy باشد که ناحیه‌ای مانند R را احاطه کرده است و از مبدا نمی‌گذرد. نشان دهید:

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{اگر مبدا بیرون } R \text{ باشد} \\ 2\pi & \text{اگر مبدا درون } R \text{ باشد} \end{cases}$$

برای $(x,y) \neq (0,0)$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 0$$



اگر مبدا در R نباشد، طبق قضیه گرین داریم:

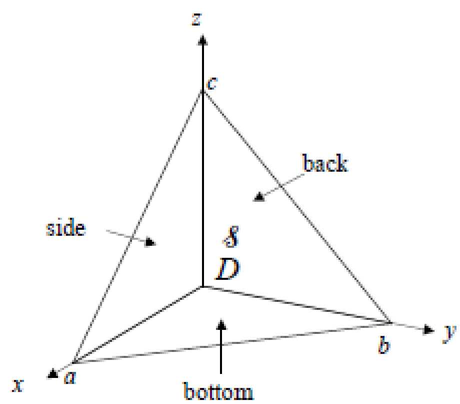
$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = 0$$

اگر مبدا در R باشد، از طرفی می‌دانیم مبدا در C نیست پس مبدا یک نقطه درونی در R است لذا $\varepsilon > 0$ موجود است که C_ε یک گوی به شعاع ε به مرکز مبدا و درون R به صورت پادساعتگرد است، با پارامتری سازی $x = \varepsilon cost$ و $y = \varepsilon sint$ داریم:

$$\oint_{C_\varepsilon} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = -\int_0^{2\pi} \frac{(-\varepsilon sint)(-\varepsilon sint) + (\varepsilon cost)(\varepsilon cost)}{\varepsilon^2 \cos^2 t + \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} + \oint_{C_\varepsilon} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 0 \to \oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi$$

سوال دهم: فرض کنید $\boldsymbol{\varphi(x,y,z)=xy+z^2}$ ، شار $\boldsymbol{\nabla\varphi}$ در عبور به بالا از رویه به مسطح مثلثی $\boldsymbol{S}$ را که دارای رئوس $\boldsymbol{(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)}$ است، بیابید.



$$I=\iint_S \nabla\varphi.\widehat{N}dS$$

$$\iint_S \nabla\varphi.\widehat{N}dS=\iiint_D \nabla,\nabla\varphi dV-\iint_{bottom}\nabla\varphi.\widehat{N}dS-\iint_{side}\nabla\varphi.\widehat{N}dS-\iint_{back}\nabla\varphi.\widehat{N}dS$$

$$\varphi=xy+z^2\rightarrow\nabla\varphi=yi+xj+2zk\rightarrow\nabla.\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=2$$

$$\rightarrow\iiint_D \nabla.\nabla\varphi dV=2\times\frac{abc}{6}=\frac{abc}{3}$$

$$\iint_{bottom}\nabla\varphi.\widehat{N}dS=\iint_{bottom}(y,x,0).(0,0,-1)dS=0$$

$$\iint_{side}\nabla\varphi.\widehat{N}dS=\iint_{side}(0,x,2z).(0,-1,0)dS=-\iint_{side}xdxdz$$

$$=\left(-\frac{ac}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^2c}{6}$$

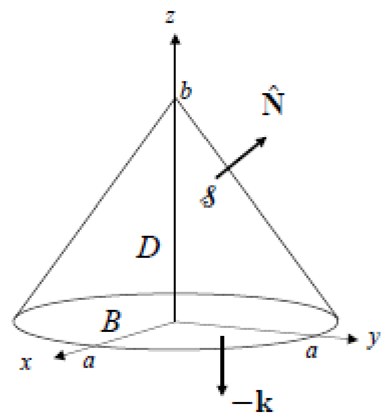
$$\iint_{back}\nabla\varphi.\widehat{N}dS=\iint_{back}(y,0,2z).(-1,0,0)dS=-\iint_{back}ydydz$$

$$=\left(-\frac{bc}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right)=-\frac{b^2c}{6}$$

$$\rightarrow\iint_S \nabla\varphi.\widehat{N}dS=\frac{abc}{3}-0+\frac{a^2c}{6}+\frac{b^2c}{6}=\frac{abc}{3}+\frac{c}{6}(a^2+b^2)$$

سوال یازدهم: قاعده قلمرویی مخروطی با راس $(0,0,b)$ و محوری در امتداد محور z ، قرصی به شعاع a در صفحه xoy است. شار تابع زیر را در عبور به بالا از قسمت مخروطی قلمرو مفروض بیابید.

$$\boldsymbol{F = (x+y^2)i + (3x^2y + y^3 - x^3)j + (z+1)k}$$



$$div(F) = 1 + 3x^2 + 3y^2 + 1 = 2 + 3(x^2+y^2)$$

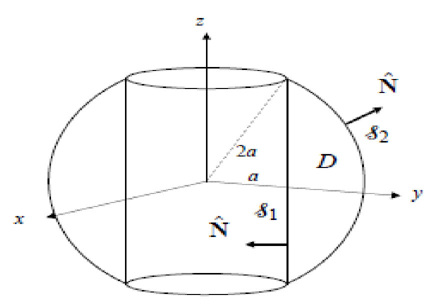
$$\iiint_D div(F)dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\left(\int_0^{b\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)\right)} (2+3r^2)dz\right) dr = \frac{2\pi a^2 b}{3} + \frac{3\pi a^4 b}{10}$$

$$\iint_B \mathrm{F}.\widehat{N}dS = \iint_B (x+y^2, 3x^2y+y^3-x^3, 1).(0,0,-1)dS = -\iint_B dxdy = -\pi a^2$$

$$\iint_S \mathrm{F}.\widehat{N}dS = \iiint_D div(F)dV - \iint_B \mathrm{F}.\widehat{N}dS = \frac{2\pi a^2 b}{3} + \frac{3\pi a^4 b}{10} + \pi a^2$$

سوال دوازدهم: فرض کنید D ناحیه $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ و $x^2+y^2 \ge a^2$ باشد. S ، سطح ناحیه D ، از یک قسمت استوانه‌ای به نام S_1 و یک قسمت کروی به نام S_2 تشکیل شده است. شار تابع زیر را در خروج از ناحیه D و عبور از الف) کل رویه S ب) رویه S_1 ج) رویه S_2 محاسبه کنید.

$$\boldsymbol{F = (x+yz)i + (y-xz)j + (z - e^x siny)k}$$



$$div(F) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\oiint_S F.\hat{N}dS = \iiint_D div(F)dV = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2a} r\left(\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} 2dz\right)dr$$

$$= 12\pi \int_0^{2a} r\sqrt{4a^2-r^2}dr$$

تغییر متغیر $u = 4a^2 - r^2$ و متعاقبا $du = -2rdr$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\oiint_S F.\hat{N}dS = 6\pi \int_0^{3a^2} \sqrt{u}du = 12\sqrt{3}\pi a^3$$

$$\iint_{S_1} F.\hat{N}dS = \iint_{S_1} (x + yz, y - xz, z - e^x siny).\left(\frac{-x}{a}, \frac{-y}{a}, 0\right) ad\theta dz$$

$$= \iint_{S_1} (-x^2 - xyz - y^2 + xyz)d\theta dz = -a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} dz = -4\sqrt{3}\pi a^3$$

$$\iint_{S_2} F.\hat{N}dS = \oiint_S F.\hat{N}dS - \iint_{S_1} F.\hat{N}dS = 12\sqrt{3}\pi a^3 + 4\sqrt{3}\pi a^3 = 16\sqrt{3}\pi a^3$$

توضیح تکمیلی: در محاسبه $\iint_{S_1} F.\hat{N}dS$ علت به کارگیری ضرایب منفی در بردار عمود یکه $\left(\frac{-x}{a}, \frac{-y}{a}, 0\right)$ این است که در شکل فوق به دلیل نوع قرارگیری ناحیه بردار عمود در جهت قرینه بردار عمود بر سطح استوانه است.

سوال سیزدهم: مطلوب است $\iint_S curl(F).NdS$ که در آن S رویه $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$ که در آن $z \geq 0$ ، N قائم یکه رو به بیرون بر S و $F = (xz - y^3cosz)i + x^3e^zj + xyze^{x^2+y^2+z^2}k$ است.

$$N = (0,0,1)\ , \qquad curl(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$curl(F).N = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3e^z) - \frac{\partial}{\partial y}(xz - y^3cosz) = 3x^2e^z - 3y^2cosz$$

$$\iint_S curl(F).NdS = \iint_S (3x^2 + 3y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 3r^3dr = 24\pi$$

سوال چهاردهم: فرض کنید C خم $(x-1)^2+4y^2=16$ و $2x+y+z=3$ باشد که از دید نقطه‌ای بر نیمه مثبت محور z پادساعتگرد، جهت‌دهی شده است. برای تابع زیر $\oint_C Fdr$ را محاسبه کنید.

$$F=(z^2+y^2+\sin(x^2))i+(2xy+z)j+(xz+2yz)k$$

$$curl(F)=(2z-1,z,0)\quad,\quad \widehat{N}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$$

$$\oint_C Fdr=\iint_S curl(F).\widehat{N}dS=\frac{1}{\sqrt{6}}\iint_S (2z-1,z,0).(2,1,1)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\iint_S (5z-2)dS=\frac{5\bar{z}-2}{\sqrt{6}}\iint_S dS=\frac{5(1)-2}{\sqrt{6}}\left(8\sqrt{6}\pi\right)=24\pi$$

توضیح تکمیلی: خم $(x-1)^2+4y^2=16$ به صورت معادل به فرم $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ است که یک بیضی به مرکز $(1,0)$ و قطرهای 8 و 4 است. لذا مساحت آن برابر $\pi(4)(2)=8\pi$ است و مساحت حاصل از تصویر اشتراک دو خم داده شده در صفحه xoy برابر حاصل ضرب مساحت بیضی در اندازه بردار نرمال صفحه است لذا داریم:

$$\iint_S dS=(8\pi)\left(\sqrt{6}\right)=8\sqrt{6}\pi$$

از طرفی برای محاسبه $\bar{z}$ داریم:

$$z_{min}=3-2x_{max}-y_{max}=3-2(5)-2=-9$$
$$z_{max}=3-2x_{min}-y_{min}=3-2(-3)-(-2)=11$$
$$\rightarrow \bar{z}=\frac{1}{2}(z_{min}+z_{max})=1$$

سوال پانزدهم: $F=(y,-z,x)$ و S قسمتی از رویه $z=4-x^2-y^2$ که داخل استوانه $x^2+y^2=1$ است. درستی قضیه استوکس را نشان دهید. (یعنی نشان دهید دو طرف قضیه استوکس برای این F و مرز S مقدار یکسانی دارد)

در واقع قصد داریم نشان دهیم:

$$\oint_C F.dr=\iint_S curl(F).\widehat{N}dS$$

ابتدا سمت چپ را محاسبه می‌کنیم، با پارامتری سازی داریم:

$$x=cost\,,y=sint\,,z=4\ \rightarrow r(t)=(cost,sint,3)$$

$$\oint_C F.dr = \int_0^{2\pi} F\big(r(t)\big).r'(t)dt = \int_0^{2\pi} (sint, -3, cost).(-sint, cost, 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - 3cost)dt = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-cos2t}{2} + 3cost\right)dt = -\pi$$

حال سمت راست را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$g = x^2 + y^2 + z - 4$$

$$ds = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dxdy = \frac{|(2x, 2y, 1)|}{|1|}dxdy = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}dxdy$$

$$\widehat{N} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}(2x, 2y, 1)$$

$$curl(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

$$\iint_S curl(F).\widehat{N}dS = \iint_S (1,-1,-1).(2x,2y,1)dxdy = \iint_S (2x - 2y - 1)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2cos\theta - 2sin\theta - 1)rdr\,d\theta = \frac{1}{2}(-2\pi) = -\pi$$

سوال شانزدهم: فرض کنید ناحیه D قسمتی از سطح کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع a باشد و مساحت D را A بنامید. همچنین فرض کنید k حجم مخروطی باشد که از نقاط روی پاره‌خط‌های واصل بین مرکز کره و نقاط ناحیه D تشکیل شده است. از قضیه دیورژانس کمک گرفته و با کمک میدان برداری $F = (x, y, z)$ نشان دهید $k = \frac{1}{3}aA$.

ناحیه حاصل، یک فضای محصور بین مخروط $z^2 = b(x^2+y^2)$ (b یک عدد ثابت) و کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است. لذا انتگرال روی خطوط واصل برابر انتگرال روی ناحیه سطح مخروط و روی ناحیه سطح کره است و داریم:

$$\iint_{on\ lines} F.Nds = \iint_{cone} F.N_1ds + \iint_D F.N_2ds$$

$$\iint_{on\ lines} F.Nds = \iiint_v div(F)dV = 3\iiint_v dV = 3k$$

$$\iint_{cone} F.N_1 ds = \iint_{cone} (x,y,z).\frac{(2bx,2by,-2z)}{\sqrt{4bx^2+4by^2+4z^2}} ds$$

$$= \iint_{cone} \frac{2bx^2+2by^2-2z^2}{\sqrt{4bx^2+4by^2+4z^2}} ds = \iint_{cone} \frac{2(b(x^2+y^2)-z^2)}{\sqrt{4bx^2+4by^2+4z^2}} ds = 0$$

$$\iint_{D} F.N_1 ds = \iint_{cone} (x,y,z).\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} ds$$

$$= \iint_{cone} \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{2a} ds = \iint_{cone} \frac{2a^2}{2a} ds = a\iint_{cone} ds = aA$$

$$\rightarrow 3k = 0 + aA \rightarrow k = \frac{1}{3} aA$$

ضمیمه (شامل برخی تعاریف و قضایای مهم)

$$\int_C^{\cdot} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = (\boldsymbol{\varphi})_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} \quad : \quad \nabla\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{F}$$

که در آن s بیانگر نقطه شروع و e مبین نقطه پایانی خم است.

کار انجام شده توسط یک میدان برداری هنگام حرکت دادن ذره‌ای روی خم، معادل انتگرال خمیده – خطی آن میدان روی خم مفروض است.

با فرض $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3})$ داریم:

قضیه گرین:

$$\oint_C^{\cdot} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \iint_D^{\cdot} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F_2}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{F_1}}{\partial \boldsymbol{y}}\right) \boldsymbol{dxdy}$$

قضیه استوکس:

$$\oint_C^{\cdot} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \iint_S^{\cdot} \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{F}).\widehat{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{ds}$$

قضیه دیورژانس:

$$\oiint_S^{\cdot} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{ds} = \iiint_W^{\cdot} \boldsymbol{div}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{dv}$$

تعاریف:

$$\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{F_1} & \boldsymbol{F_2} & \boldsymbol{F_3} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial \boldsymbol{F_1}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F_2}}{\partial \boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{F_3}}{\partial \boldsymbol{z}}$$

میدان برداری F را پایستار گویند هرگاه $\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}$ و اگر میدان برداری F پایستار باشد و C یک خم بسته باشد، آگاه $\oint_C^{\cdot} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{0}$ است.

$$\iint_S^{\cdot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{ds} = \iint_D^{\cdot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))|\boldsymbol{r_u} \times \boldsymbol{r_v}|\boldsymbol{dudv}$$

که S تصویر رویه $r(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ است و D ناحیه حاصل در مختصات u و v است و به طور کلی داریم:

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = |r_u \times r_v|dudv$$

شار کل برابر با مجموع شارهای عبوری از ناحیه‌های با شار یکسان است:

$$\oiint_R F.Nds = \sum_i \iint_{\varphi_i} F.Nds$$

موفق و سربلند باشید

محمد نصیر یاراحمدی