OTUS

ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Интегрирование

Дмитрий Музалевский
Преподаватель

План на сегодня

1. Интегрирование
2. Первообразная функция
3. Неопределенный интеграл
4. Определенный интеграл
5. Расчет площади плоских фигур

OTUS

Интегрирование

В дифференциальном исчислении решается задача нахождения производной или дифференциала данной функции. Пусть дана функция $F(x)$. Тогда по определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$. Обозначим $F'(x) = f(x)$.

В интегральном исчислении решается задача, обратная задаче нахождения производной: отыскание функции $F(x)$ по заданной её производной $f(x)$. Таким образом, для заданной функции $f(x)$ нужно найти такую функцию $F(x)$, чтобы $F'(x) = f(x)$.

Первообразная функция

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$ на некотором множестве *D*, если на этом множестве $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x) + C$, где *C* - произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$, так как

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

OTUS

Первообразная функция

Таким образом, ***если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она может иметь бесчисленное множество первообразных функций и все они отличаются одна от другой на постоянную величину.***

Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$. Процесс нахождения первообразной функции называется ***интегрированием***. Переменная x называется ***переменной интегрирования***, функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***.

Неопределенный интеграл

- Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$.
- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
- Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)dt = F(t) + C$. Такое свойство называется ***инвариантностью формулы интегрирования***.

Табличные интегралы

1	$\int dx = x + C$	7	$\int \cos x dx = \sin x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	8	$\int \frac{1}{\cos^2 x dx} = tgx + C$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	9	$\int \frac{1}{\sin^2 x dx} = - ctgx + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	10	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = arctgx + C$
6	$\int \sin x dx = - \cos x + C$		

Определенный интеграл

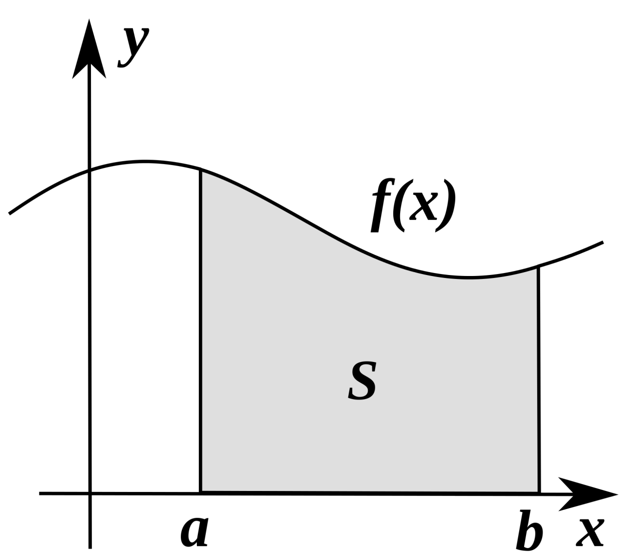
Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Выполним следующие действия.

- Разобьём отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$, которые называются частичными.

- В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольно выберем точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то он называется ***определённым интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$



Определенный интеграл

Числа *a* и *b* называются ***нижним и верхним пределами интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ - ***подынтегральным выражением***, *x* – ***переменной интегрирования***, $[a,b]$ - ***отрезком интегрирования***.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)\geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу осью *Ox*, сбоку – прямыми *x*=*a* и *x*=*b*, называется ***криволинейной трапецией***.

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит ***геометрический смысл определённого интеграла***.

Дмитрий Музалевский, преподаватель

OTUS

Спасибо
за внимание!