# OTUS

ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

# Теория множеств

Впереди Математический анализ и
Теория вероятности

Александр Никитин

# Меня хорошо слышно && видно?

Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте + если все хорошо

# Правила вебинара

OTUS

🙌 Активно участвуем

Задаем вопросы в чат

Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

# План занятия

- Основные определения теории множеств
- Операции над множествами
- Парадоксы теории множеств

# Определение

Георг Кантор

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

# Определение

Георг Кантор

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

*Множеством* называется произвольный набор (совокупность, класс, семейство) каких-либо объектов. Объекты, входящие во множество, называются его *элементами*. Если объект $x$ является элементом множества $A$, то говорят, что $x$ *принадлежит* $A$, и пишут $x \in A$.

# Пример множества

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\{Apple, Pear, Orange\}$$

# Примеры основных множеств

N - множество всех натуральных чисел;

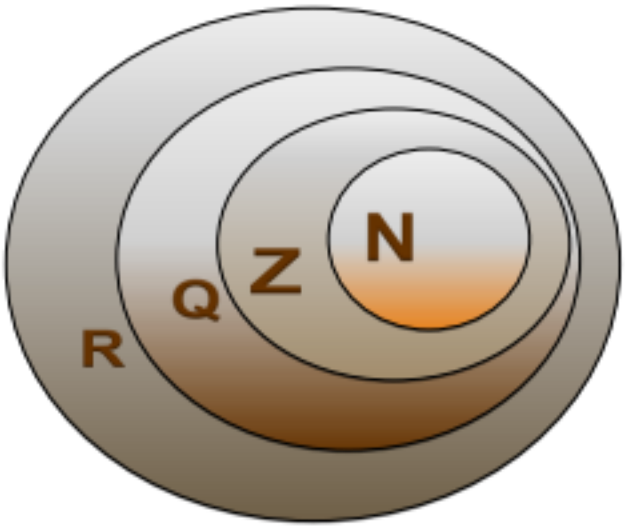
Z - множество всех целых чисел;

Q - множество всех рациональных чисел;

R - множество всех действительных чисел;

C - множество всех комплексных чисел;

$Z_0$ - множество всех неотрицательных целых чисел.



# Определение

Множество A называется **бесконечным**, если каково бы ни было натуральное число N, найдется подмножество A, содержащее ровно N элементов.

OTUS

## Как записывать множество ?

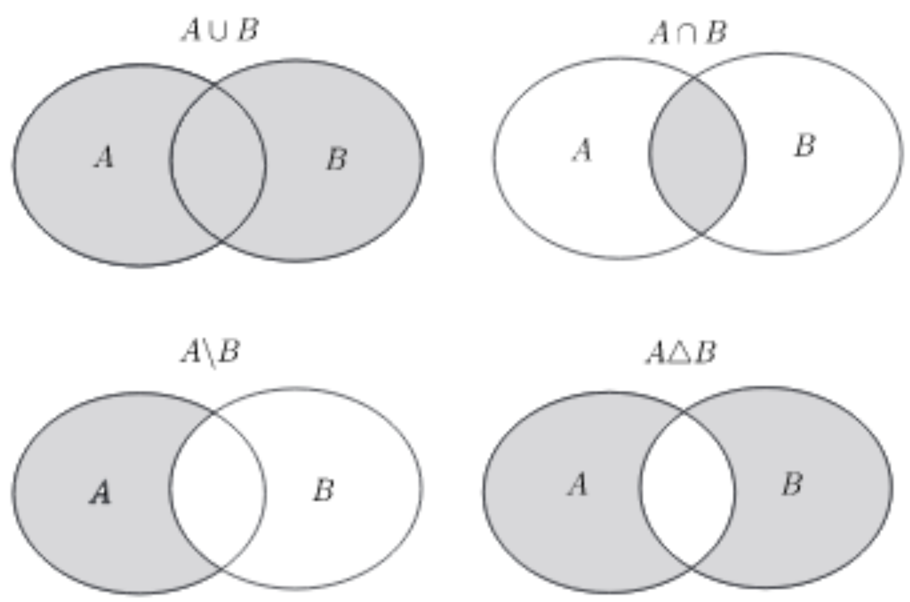
## Ответ: 3 способа

$$\{x \mid x - \textit{положительное число меньше } 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\{x \mid x = 2y,\ y \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x - \textit{четное число}\}$$

# Операции с множествами

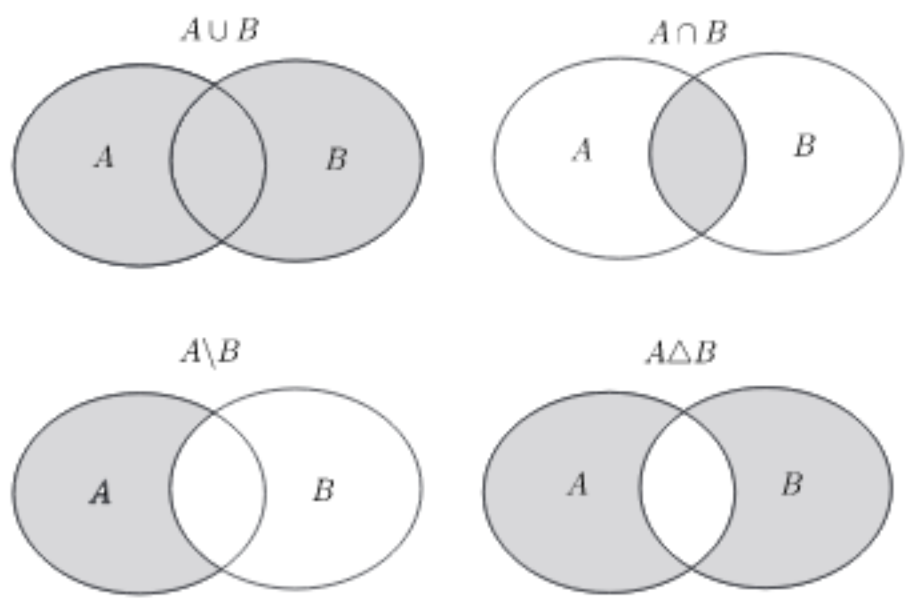
- *Объединением* $A$ и $B$ называется множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.
- *Пересечением* $A$ и $B$ называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.
- *Разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.
- *Симметрической разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество $A \triangle B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B, \text{ или } x \in B \text{ и } x \notin A\}$.
- *Дополнением* множества $A$ называется множество $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$.



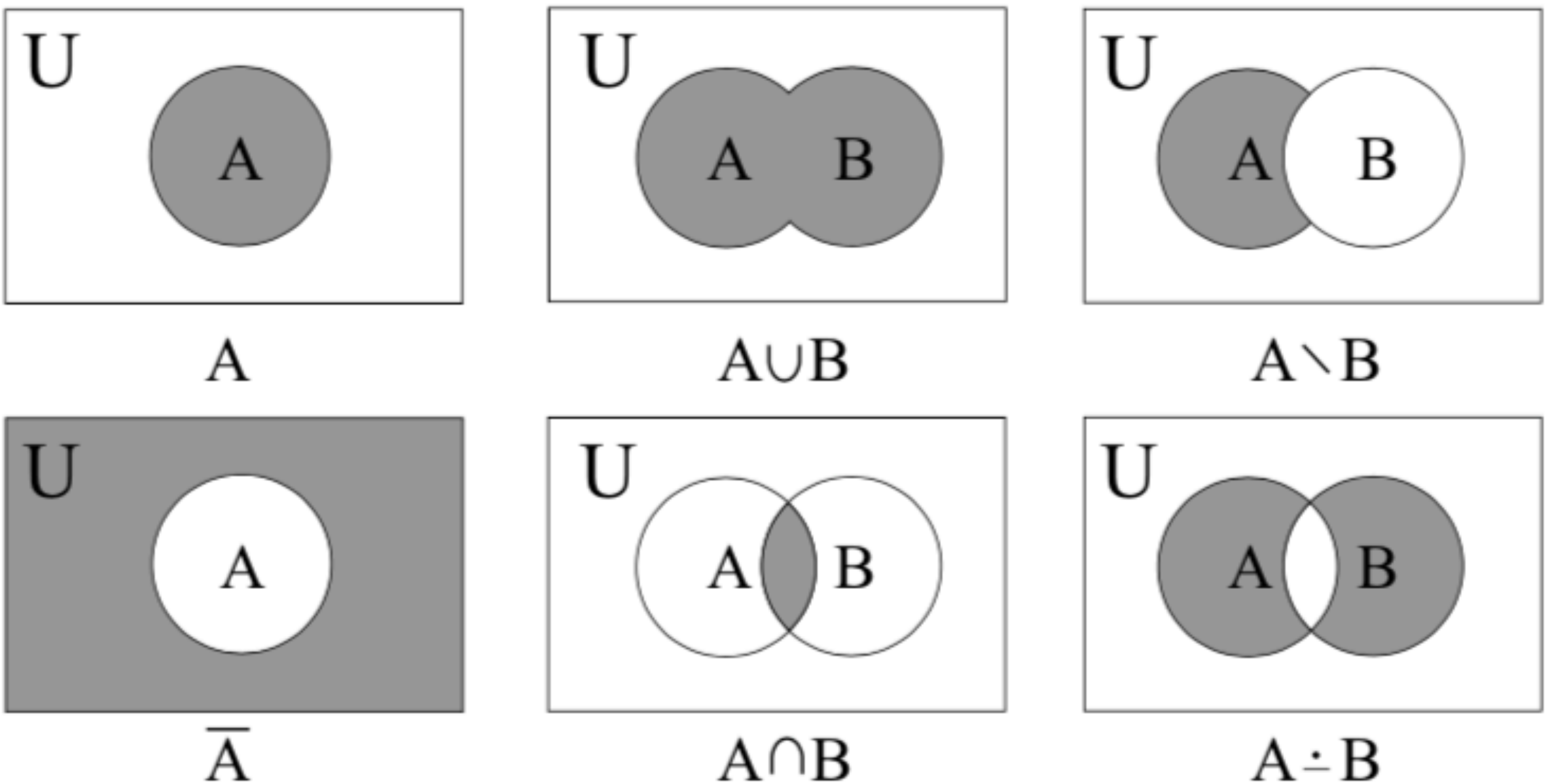
# Операции с множествами

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \Delta B \equiv \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\},$$

где $\vee$ — логическое «или» (неисключающее!), $\wedge$ — логическое «и», $\neg$ — логическое «не».



# Операции с множествами



## Примеры

$$\mathbf{A} = \{1,2,3,4,6\},\ \ \mathbf{B} = \{2,4,6\},\ \ \mathbf{C} = \{1,5,6\}$$

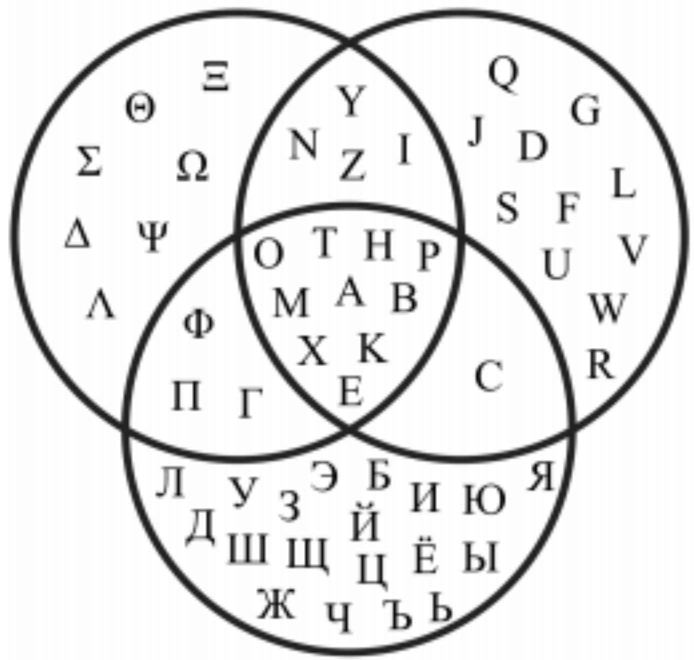
$$(A \cap B) \cup C$$

# Упражнение

Докажите равенство

$$(A - B) - C = (A - C) - (B - C);$$

# Алфавиты


Ξ Θ Σ Ω Δ Ψ Λ
Y N Z I
Q G J D L S F V U W R
O T H P M A B X K E
Φ Π Γ
C
Л У Э Б З И Ю Я Д Й Ш Щ Ц Ё Ы Ж Ч Ъ Ь

# Мощность множества

**Мощность множества – это количество элементов в этом множестве.**

# Подмножество

Множество $A$ является *подмножеством* множества $B$, если любой элемент множества $A$ также принадлежит множеству $B$. Обозначение: $A \subset B$. Множества $A$ и $B$ равны, если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$. Обозначение: $A = B$.

. *Имеют место следующие свойства:*

*a) Рефлексивность* $\subset$*: для любого множества* $A$ *выполнено* $A \subset A$;

*b) Антисимметричность* $\subset$*: если* $A \subset B$ *и* $B \subset A$, *то* $A = B$;

*c) Транзитивность* $\subset$*: если* $A \subset B$ *и* $B \subset C$, *то* $A \subset C$;

*d) Рефлексивность* $=$*: для любого множества* $A$ *выполнено* $A = A$;

*e) Симметричность* $=$*: если* $A = B$, *то* $B = A$;

*f) Транзитивность* $=$*: если* $A = B$ *и* $B = C$, *то* $A = C$.

# Задачи

**Задание:** Даны два множества, определить являются ли они подмножествами, найти их объединение, пересечение, разность и дополнение:

C={0,3, 4, 5, 7, 9,11, 18, 47}

D={5, 7,47}

**Задание:** Даны два множества, определить являются ли они подмножествами, найти их объединение, пересечение, разность и дополнение:

C={3, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 21, 50}

D={8, 10,50}

**Задание:** Даны два множества, определить являются ли они подмножествами, найти их объединение, пересечение, разность и дополнение:

C={0, 8, 14, 18, 21, 22, 25, 30, 55}

D={0, 22,55}

## Каковая мощность множества ?

$$\{x \mid x^2 + 2x = 0\} =$$

$$|\{1, 2, 3, 4, 5\}| =$$

$$|\{1, 2, 3, 2\}| =$$

$$|\mathbb{N}| =$$

# Свойства операций

| |
|---|
| 1 Идемпотентность<br>$A \cup A = A$ $A \cap A = A$ |
| 2 Коммутативность<br>$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ |
| 3 Дистрибутивность<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 4 Ассоциативность<br>$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| 5 Свойство поглощения<br>$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$ |
| 6 Свойство нуля<br>$A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| 7 Свойство единицы<br>$A \cup U = U$ $A \cap U = A$ |
| 8 Закон де Моргана<br>$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| 9 Закон двойного отрицания (инволютивности) $\overline{\overline{A}} = A$ |
| 10 Свойство дополнения<br>$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ |

# Упражнение.

1. Дано множество {a, b, c} сколько существует подмножеств в этом множестве?
2. Для произвольного множества из n элементов, сколько существует подмножеств?

1

$$\{a,b,c\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \{\}, \\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \\ \{a,b,c\} \end{array}\right\}$$

2

Для произвольного множества мощности n, количество всех подмножеств $2^n$. Каждое подмножество можно закодировать последовательностью из 0 и 1 длины n, где 0 значит, что мы не берем элемент в множество, 1 значит, что берем.

# Декартово произведение

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_l\}$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_l), (a_2, b_1), ..., (a_k, b_l)\} =$$
$$= \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Пример: {0, 1, 2, 3} x {0, 1} = {(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)}

# Упражнение

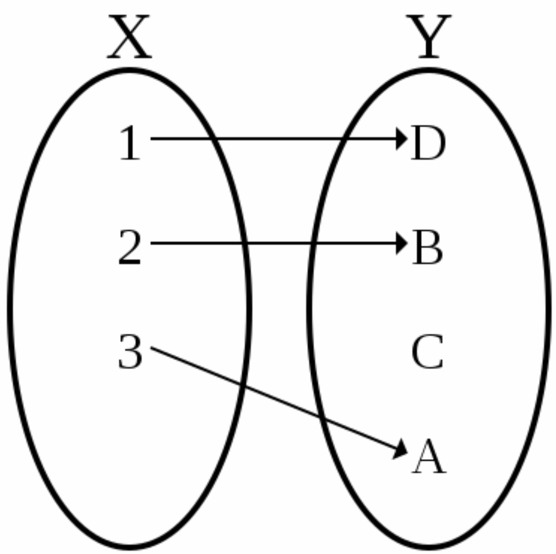
$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a,b,c,d,e}\},\ \ \mathbf{B} = \{\mathbf{f,c,d}\},\ \ \mathbf{C} = \{\mathbf{a,f,c}\}.$$

$$(A \cap B) \times (A \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C$$

# Отображения множеств. Инъекция

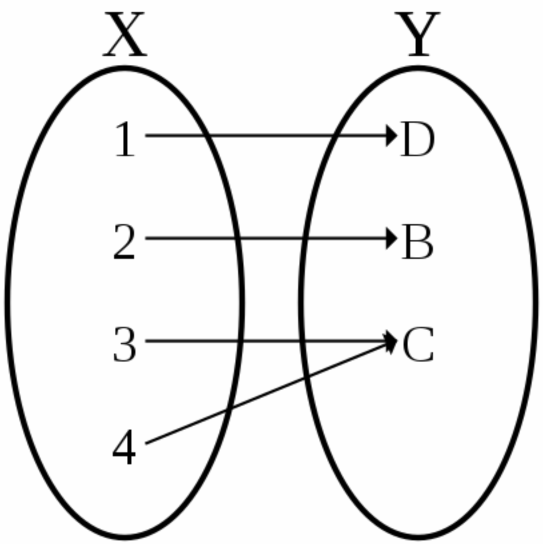
**Инъекция** – отображение f множества X в множество Y, при котором разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y, то есть если два образа при отображении совпадают, то совпадают и проообразы.



# Отображения множеств. Сюръекция

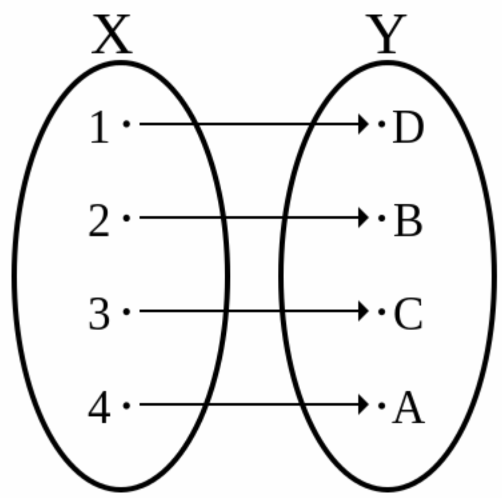
**Сюръекция** – отображение множества X на множество Y, при котором каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X.

То есть для любого элемента y из Y, существует такой элемент x из X, что y = f(x)



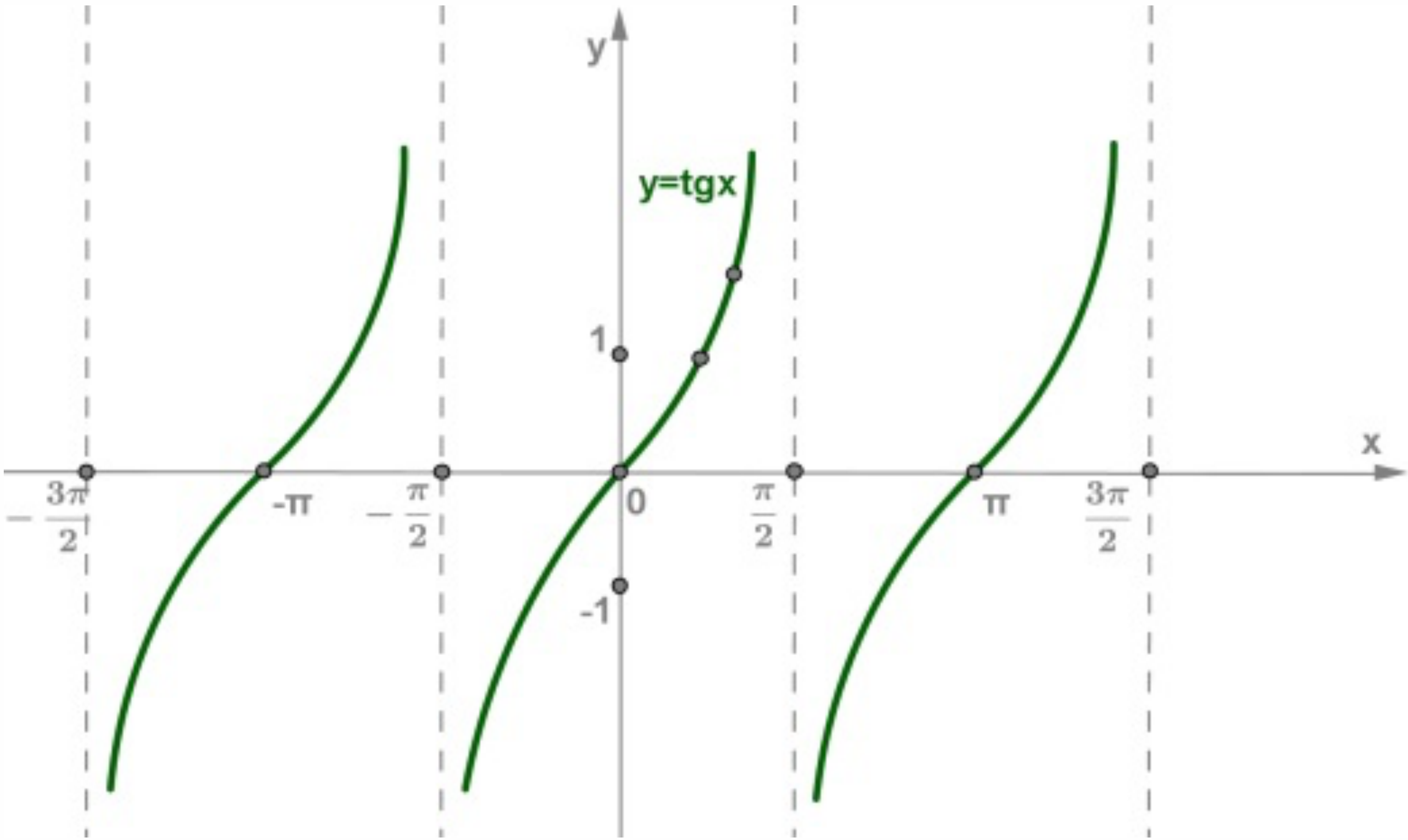
# Отображения множеств. Биекция

Биекция – отображение множества X в множество Y, такое, что каждому элементу из X сопоставляется один и только один элемент из множества Y, при этом определено обратное отображение, которое обладает теми же свойствами.



# Упражнение

Постройте взаимооднозначное соответствие (-1, 1) на всю числовую прямую (R).


y
x
y=tgx
1
-1
0
$-\frac{3\pi}{2}$
-π
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

# Открытое множество

**Множество называется открытым, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ее окрестность.**

**Упражнение.** Приведите пример открытого множества.

# Открытое множество, пример

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - a| < \varepsilon\}$$

# Закрытое множество

***Замкнутым называется множество, содержащее все свои предельные точки (т.е. такие, что любой интервал,
содержащий эту точку, пересекается со множеством еще хотя бы по одной точке)***

# Выпуклое множество

Множество $Q$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x, y$ из множества $Q$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ точка $\lambda x + (1 - \lambda)y$ также принадлежит множеству $Q$.

Другими словами, множество $Q$ называется выпуклым, если для каждой пары точек $x, y \in Q$, множество $Q$ также содержит весь *отрезок* $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Точка вида $\lambda x + (1 - \lambda)y$ для $\lambda \in [0, 1]$ называется *выпуклой комбинацией* точек $x, y$.

# Ограниченное множество

Множество X называется ***ограниченным сверху***, если существует действительное число a такое, что $x \le a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется ***верхней гранью*** множества X. Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется ***точной верхней гранью*** множества X и обозначается символом $\sup\{X\}$. Очевидно $\sup\{X\}=\max\{X\}$ тогда и только тогда когда $\sup\{X\} \in X$

# Понятие «множества» в теории вероятностей

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1. $\varnothing \in \mathcal{A},\ \Omega \in \mathcal{A},$
2. $A \cup B \in \mathcal{A},\ A, B \in \mathcal{A},$
3. $\Omega \setminus A \in \mathcal{A},\ A \in \mathcal{A}.$

# Парадоксы теории множеств

Пусть в некой деревне живёт брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их.

Бреет ли брадобрей сам себя?

$$\exists y \forall x (x \in y \iff P(x))$$

Возьмем в качестве P(x) x не содержит x, и так как аксиома выше верна для любого x, x=y

$$\forall x (x \in y \iff x \notin x)$$

$$y \in y \iff y \notin y.$$

# Дополнительные материалы

Н.Я. Виленкин, Рассказы о множествах, http://ilib.mccme.ru/pdf/rasomn.pdf

Н.К. Верещагин, А. Шень, Лекции по математической логике и теории алгоритмов, https://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1.pdf

И.В. Ященко, Парадоксы теории множеств, https://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.20.pdf