Оптимизация

Где же максимум?

Лукьянченко Петр Павлович

Знакомство

>10 лет преподавания в НИУ-ВШЭ

>3 лет – Quantitative Research (UFG, UBS)

>6 лет – Data Science (Retail, Госсектор)

Учился в London School of Economics, University College London
Специализация: Численные методы решения уравнений. Функциональные языки программирования

Функция одной переменной

Определение Локального экстремума

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$. Если x_0 — точка локального экстремума $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Классификация Локального экстремума

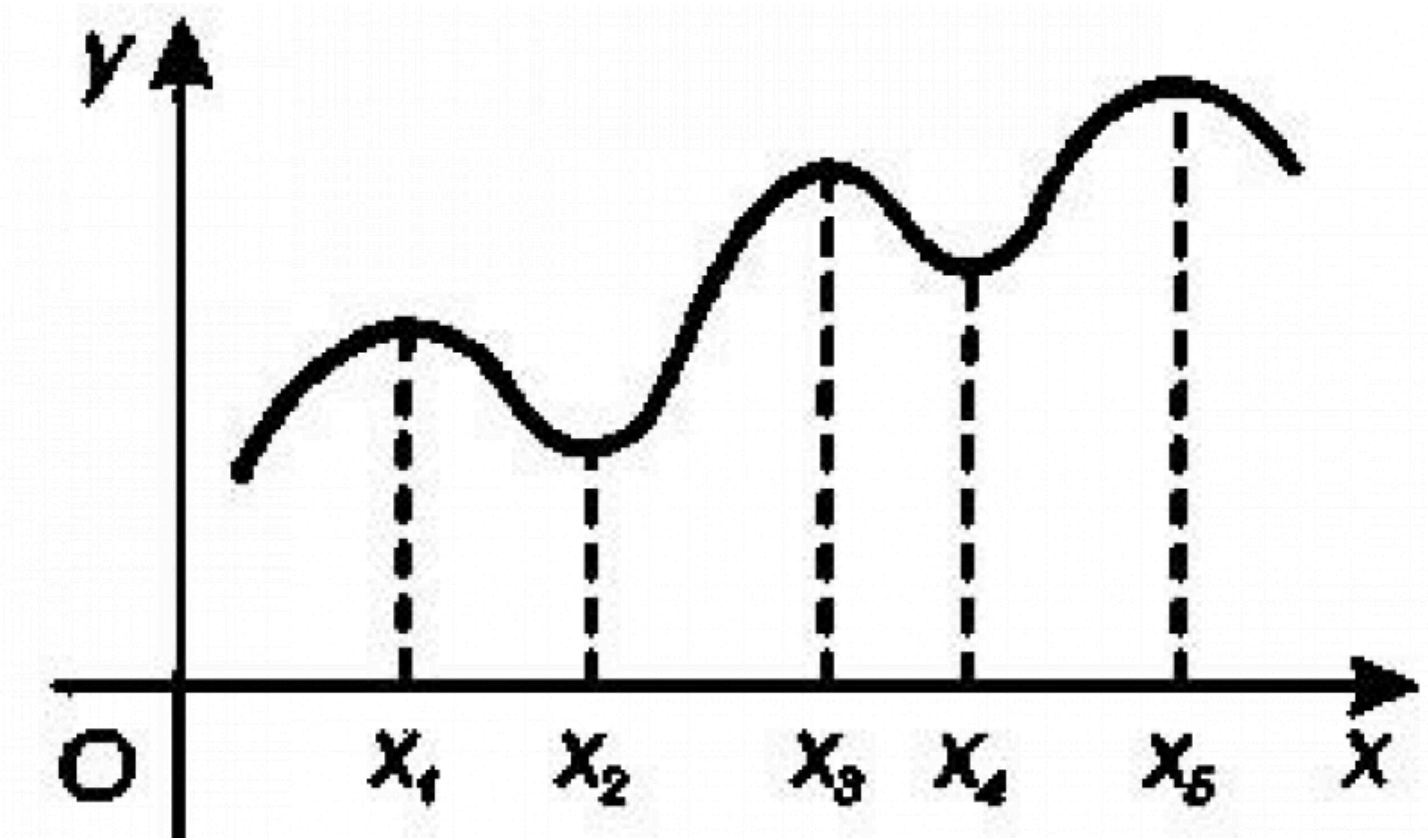
Если вторая производная в точке экстремума положительная, то это точка локального минимума.

Если вторая производная в точке экстремума отрицательная, то это точка локального максимума.

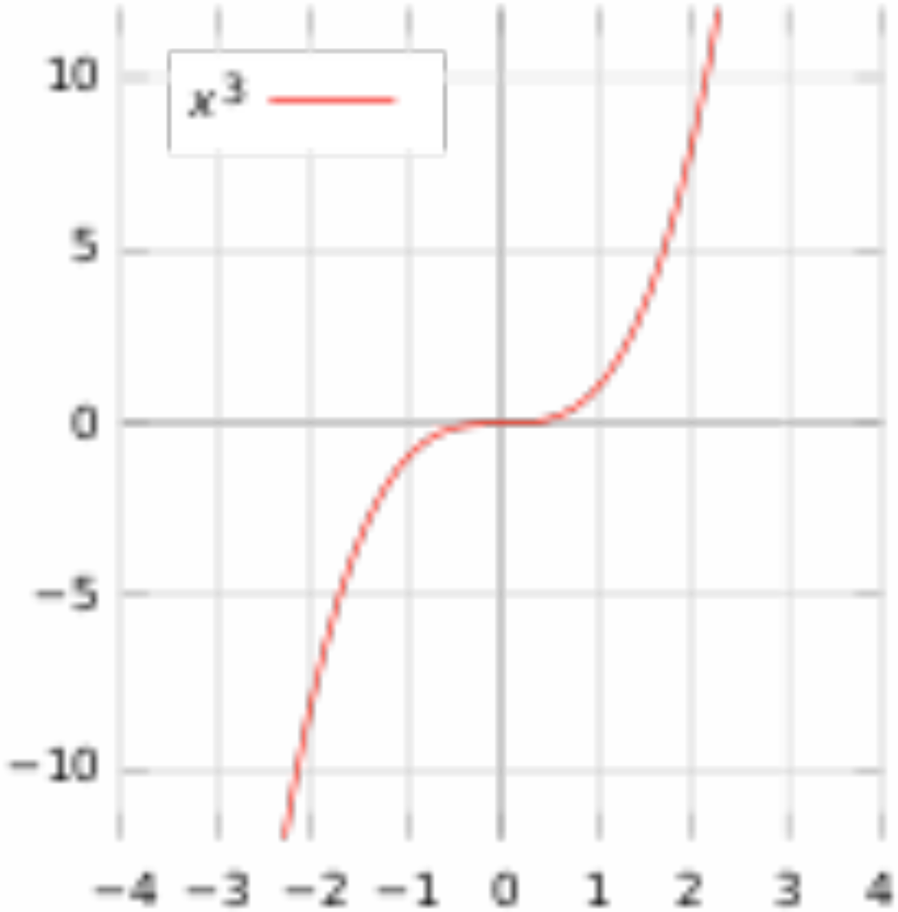
Если вторая производная равна нулю, тогда **?**

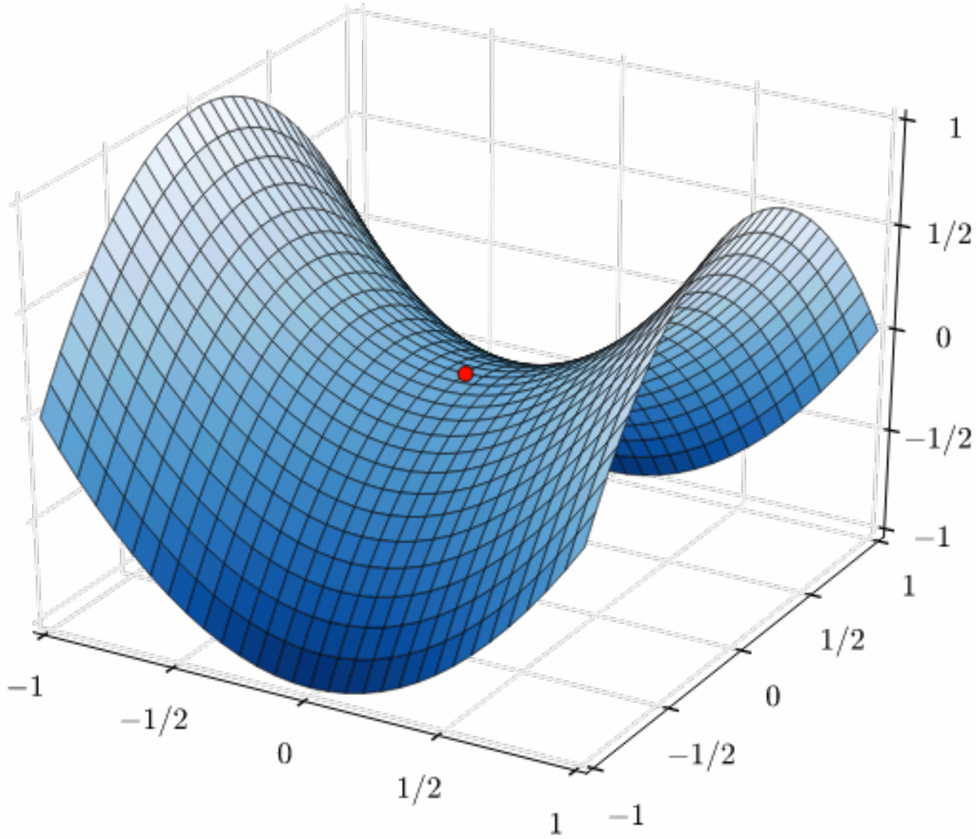
Иллюстрация

OTUS



Иллюстрация





Примеры

Вычислить максимум/минимум данных функций: $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$$

$$f(x) = (x+1)^2 e^{2x}$$

Вычислить максимум/минимум функции $f(x) = (x-1)(x+3)^2$,

на интервале $[-4, 1]$

Метод перебора

Отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

точками деления $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, где $n \geq \dfrac{b-a}{\varepsilon}$.

Вычисляются значения функции $f(x)$ в этих точках, путем сравнения определяется точка x_m, для которой выполняется условие

$$f(x_m) = \min_{i=0,1,2,\ldots n} f(x_i).$$

N.B. Метод перебора (расширенный)

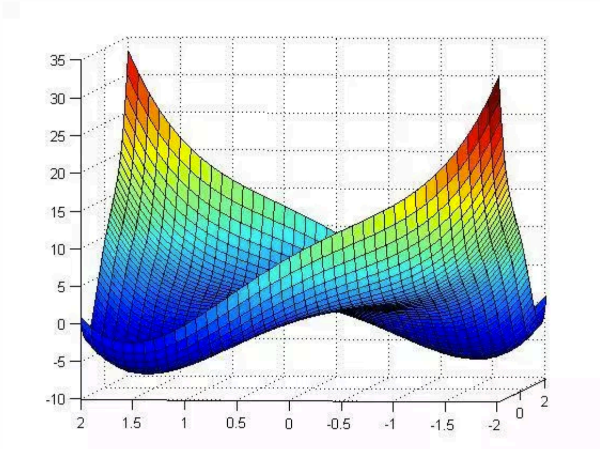
Домашнее задание:

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x, \ [a, b] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ \varepsilon = 0.03$$

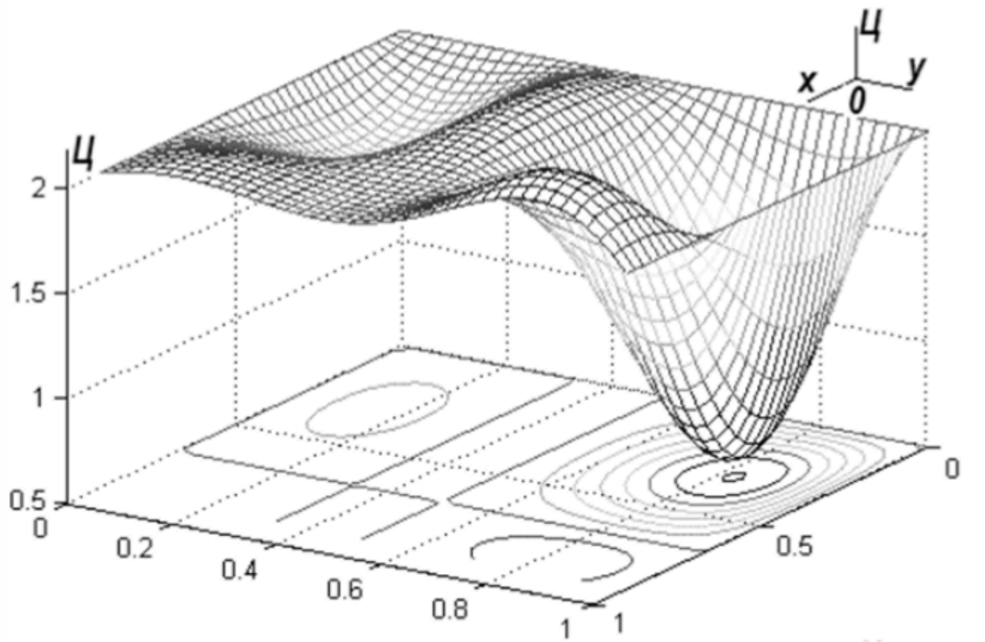
Оптимизация функции нескольких переменных

Классы Задач
1. Оптимизация функции без ограничений

2. Оптимизация функции с ограничениями
- ограничения типа «равенства»
- ограничения типа «неравенства»
- смешанный случай



3. И еще один ☺



Оптимизация функции без ограничений

OTUS

Определение Локального экстремума

Пусть функция $f(x): R^n \to R$ дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если x^* — точка безусловного локального экстремума $f(x)$, то $\nabla f(x^*) = 0$.

Классификация Локального экстремума

Пусть функция $f(x): R^n \to R$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если x^* — точка безусловного локального минимума функции $f(x)$, то матрица Гессе

$$H(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\ 2,\ \dots,\ n}$$

неотрицательно определенная.

Если x^* — точка безусловного локального максимума функции $f(x)$, то матрица Гессе $H(x^*)$ — неположительно определенная.

OTUS

Найдите критические точки и классифицируйте их:

пример 1. $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + 2y^2 + y$

пример 2. $z = x^2y^3(6 - x - y)$

Домашнее задание:

Найдите критические точки функции: $f(x, y) = x^x + y^y$

Оптимизация функции с ограничениями

Алгоритм:

1. Построить функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$
2. Найти критические точки функции Лагранжа
3. Классифицировать их с помощью матрицы Гессе (окаймленной)

матрица Гессе

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\[2.2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\[2.2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\[2.2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

без ограничений

окаймленная матрица Гессе

$$Hb = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & g_1^1 & \cdots & g_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_1^m & \cdots & g_n^m \\ g_1^1 & \cdots & g_1^m & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n^1 & \cdots & g_n^m & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

с ограничениями

Оптимизация функции с ограничениями (равенства)

Найдите экстремумы функции

$$f(x_1,\ x_2) = x_1 + 5x_2 \text{ при условии } x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 1$$

Найдите экстремумы функции

$$f(x_1,\ x_2) = x_1 x_2^{\ 2} \text{ при условии } x_1 + 2x_2 = 1$$

Оптимизация функции с ограничениями (неравенства)

Найдите экстремумы функции при ограничении типа неравенство

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2, \qquad x_1^2 + x_2^2 \le 25;$$

3-й класс задач Оптимизации

Найдите максимальное значение **Линейной** функции при **Линейных** ограничениях

$$f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Линейное программирование

OTUS

К задачам линейного программирования относятся задачи поиска экстремумов линейных функций при линейных ограничениях.

Общая постановка задачи

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{(l+1)1}x_1 + \ldots + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

Методы решения

OTUS

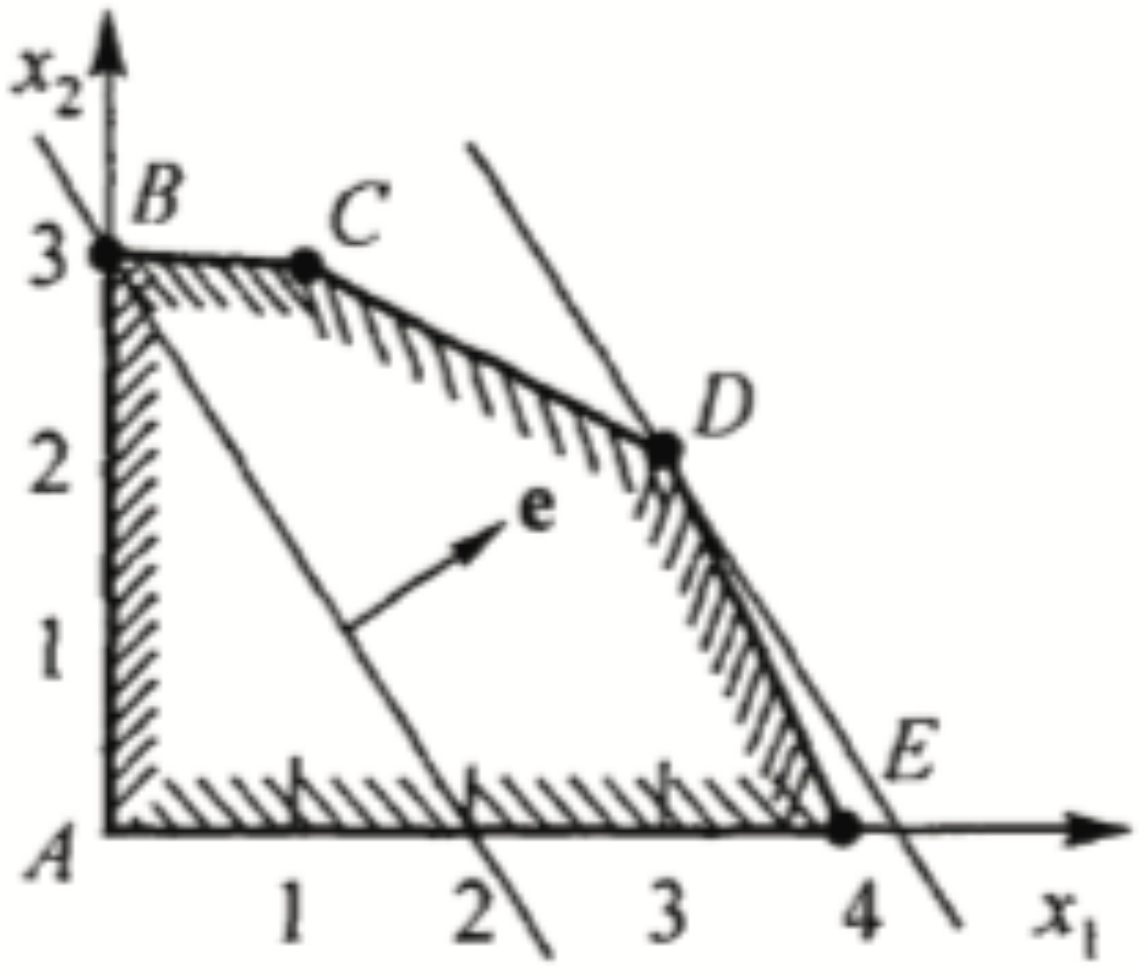
№	Случай	Метод решения
1	Случай с 2-мя переменными	Графические способ решения
2	Случай с 2 ограничениями	«Теорема двойственности + Графические способ решения»
3	Остальные	Симплекс-Метод

Пример: $$f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение примера. Случай с 2-мя переменными



Теорема двойственности

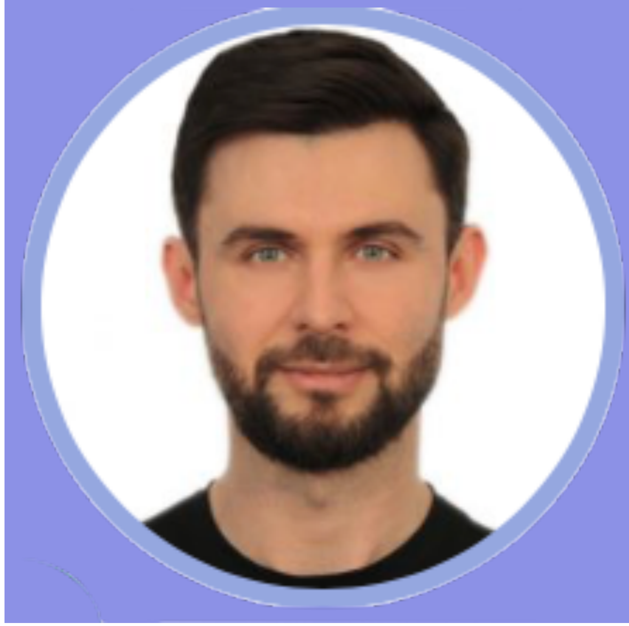
$$\min(-3x_1 + 8x_2 + x_3 + 6x_4)$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0;$$

Спасибо за внимание!



Лукьянченко Петр