OTUS

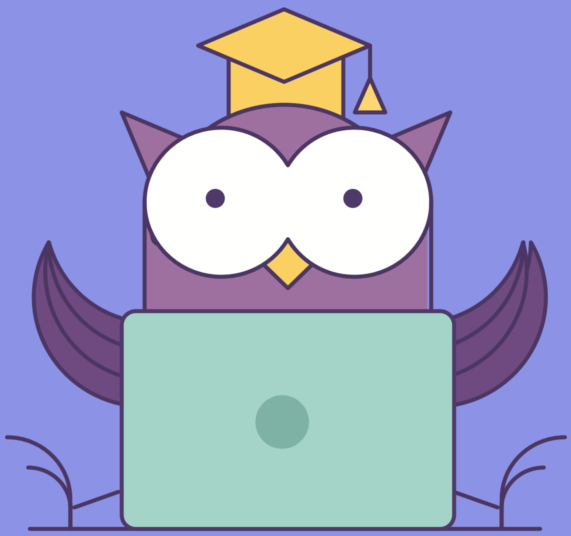
ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Матрицы

Ключевые определения.
Матричные уравнения.
Линейные пространства.

Лоскутов Антон Алексеевич

Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте + если все хорошо

Знакомство

- Закончил механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова
- Учился в Техносфере от Mail.Ru Group
- Являюсь ментором в Техносфере
- Работаю программистом-исследователем в Mail.Ru Group
- Веду лекции открытого курса ODS

Правила вебинара

OTUS

Активно участвуем

Задаем вопросы в чат

slack

Off-topic обсуждаем в Slack

Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

Линейная зависимость

OTUS

Определение. Множество векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ называется линейно независимым, если единственная линейная комбинация равная нулю - тривиальна. Или что тоже самое, выполняется:

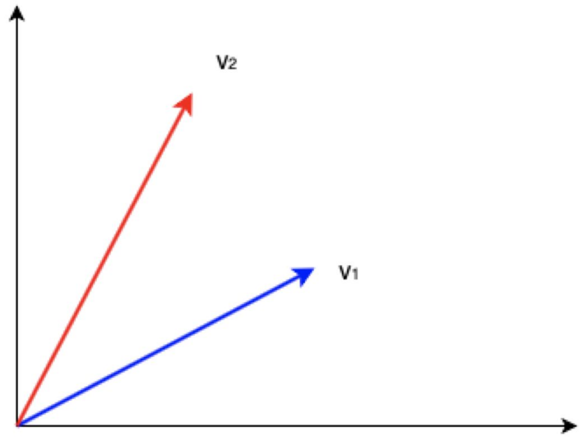
$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Определение. Если существует линейная комбинация векторов равная нулю, такая что $a_i \neq 0$, то такое множество векторов называется линейно зависимым.

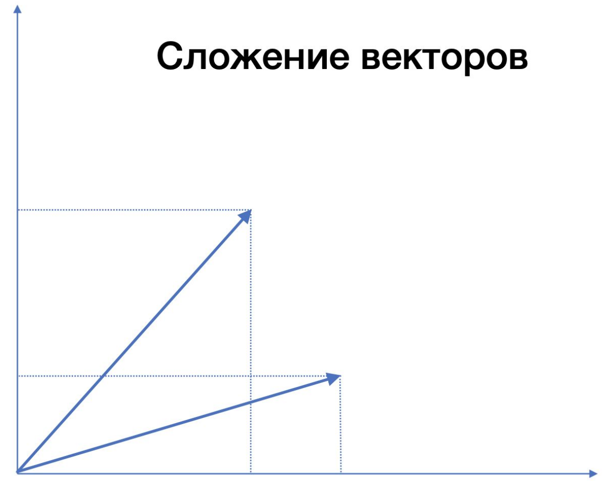
Примеры:

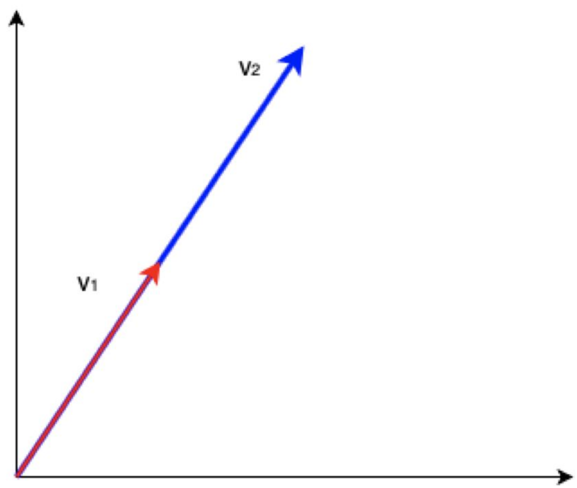
- $\{(1,2),(2;4)\}$
- $\{(1,0),(0;1)\}$
- $\{(1,0),(0;1),(2,2)\}$

Линейная зависимость

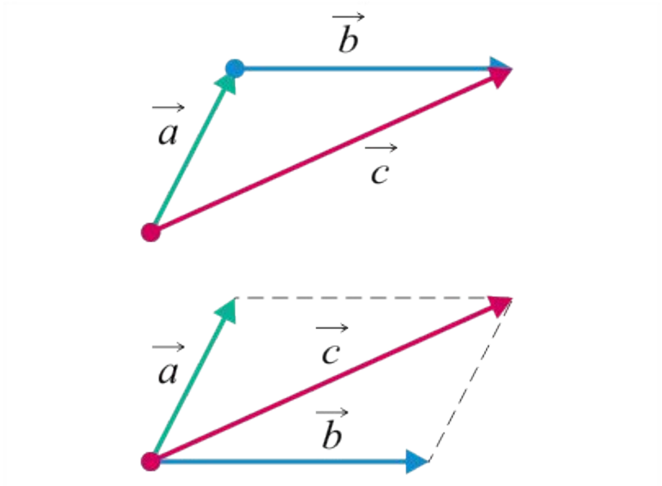


Линейно независимые вектора

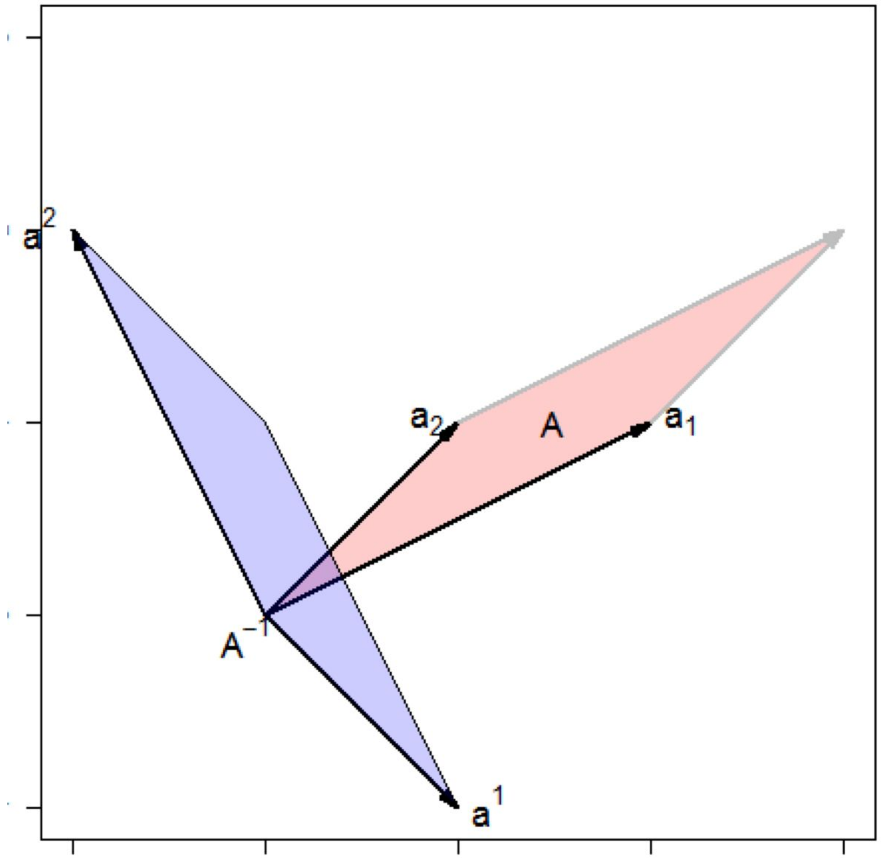




Линейно зависимые вектора



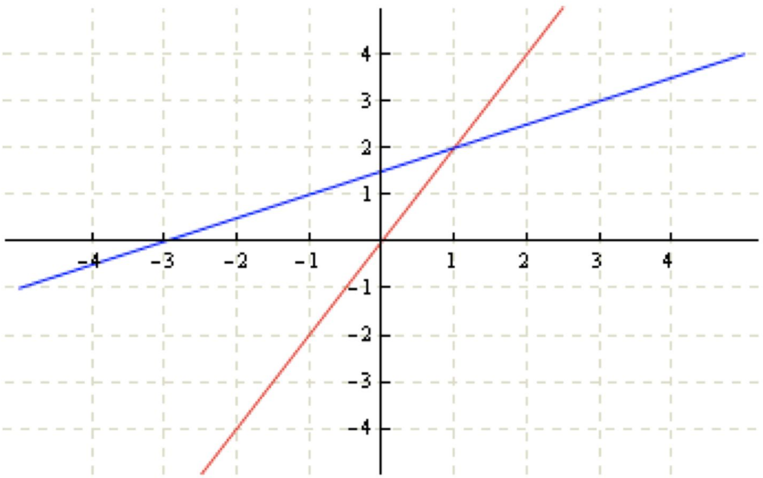
Определение (геометрический смысл). Определитель матрицы A есть площадь параллелограмма, образованного столбцами матрицы.



Системы линейных уравнений

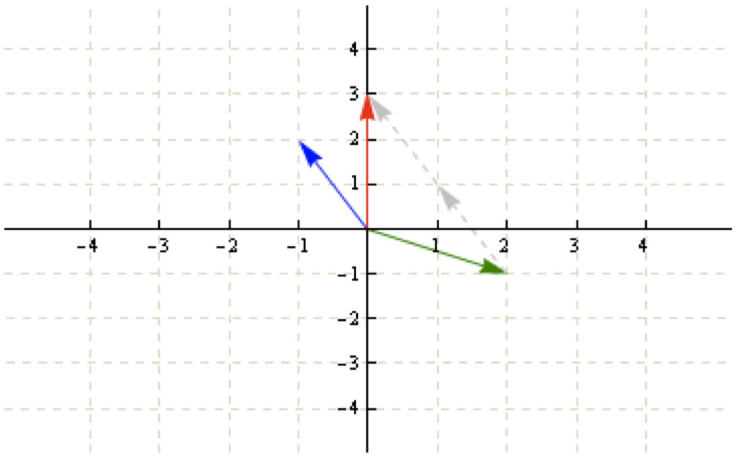
Картинка строк

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$



Картинка столбцов

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Матричный вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 4x + y \quad\; &= -2 \\ -2x + 2y + z &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ -1y - 2z &= -4 \\ 3y + 2z &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ -1y - 2z &= -4 \\ -4z &= -4 \end{aligned}$$

обратная подстановка:

$$x = -1 \longleftarrow 2x + 2 + 1 = 1 \longleftarrow y = 2 \longleftarrow -1y - 2 = -4 \longleftarrow z=1$$

ответ:(-1, 2, 1)

$$\begin{aligned} \boxed{2}x + y + z &= 1 \\ 4x + 2y + 2z &= -2 \\ -2x - y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2}x + y + z &= 1 \\ 0 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$R_2 = R_2 - 2 * R_1$$
$$R_3 = R_3 - (-1) * R_1$$

Число ведущих элементов: 1

ответ: все (x, y, z) такие что
$2x + y + z = 1$

Умножение вектора на скаляр

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2+1 \\ -4+2+0 \\ 2+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [2 * (-1) + 1 * 2 + 1 * 1] \\ [4 * (-1) + 1 * 2 + 0 * 1] \\ [(-2) * (-1) + 2 * 2 + 1 * 1] \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Матричные уравнения

Рассмотрим матричное уравнение

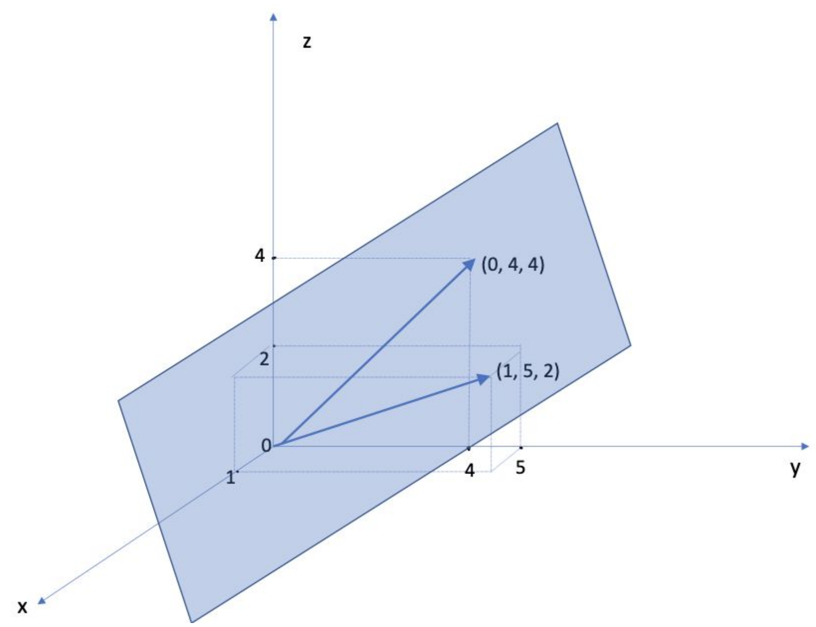
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad u\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

При каких значениях

$$(b_1, b_2, b_3)$$

есть решение уравнения?

Нужно чтобы вектор (b_1, b_2, b_3) **лежал в плоскости, образованной столбцами матрицы**



OTUS

Определение. Пространство называется линейным (или векторным) если выполняются следующие свойства:

1. Коммутативность сложения: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. Ассоциативность сложения: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
3. Нейтральный элемент: $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
4. Противоположный элемент: $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. Ассоциативность умножения на скаляр: $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
6. Унитарность: $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
7. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
8. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

Подпространства

Определение. Непустое множество векторов K из линейного пространства V называется линейным подпространством, если выполняются следующие свойства:

1. Для любого вектора $\mathbf{x}$ из K, вектор $\alpha\mathbf{x}$ также принадлежит K
2. Сумма любых векторов из K принадлежит K

Следствие. Линейное подпространство тоже является линейным пространством.

Примеры

- Вектора, в которых последняя координата равна 0: $\{\alpha, \beta, 0\}$
- Вектора, в которых последняя координата равна 1: $\{\alpha, \beta, 1\}$
- Такое множество векторов: $\{\{\alpha, 0, 0\}, \{0, \beta, 0\}\}$

Ранг, базис и размерность

Определение. Рангом матрицы называется число линейно независимых строк (или столбцов).

Определение. Векторное пространство, которое состоит из всевозможных линейных комбинаций векторов $\{v_1, v_2, v_3\}$ называется линейной оболочкой векторов $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Определение. Множество векторов V называются базисом, если:

1. Все вектора из V линейно независимы.
2. Линейная оболочка V порождает векторное пространство.

Определение. Размерностью пространства V называется число векторов в базисе V.

Лемма. Все базисы пространства V имеют одинаковую размерность.

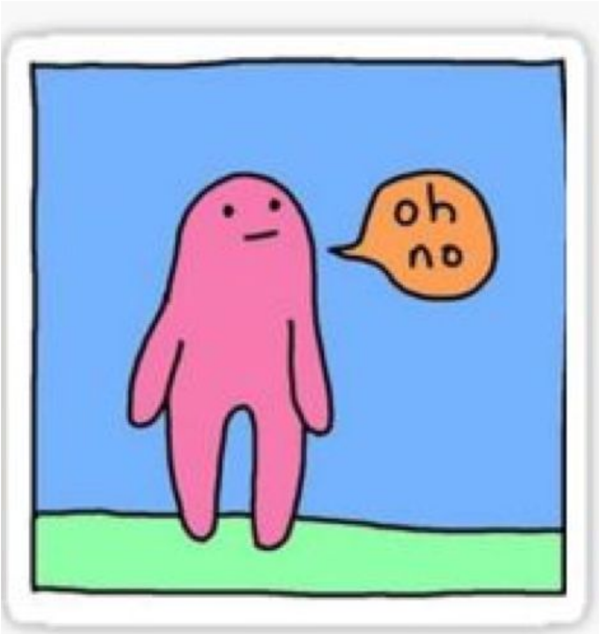
Следствие. Размерность пространства строк матрицы есть ранг этой матрицы. Аналогичное верно для столбцов.

Размерность в машинном обучении

Линейная зависимость признаком = лишняя информация

Проклятие размерности:

- Разреженность данных
- Потеря статистической значимости
- Потеря обобщающей способности
- Все совсем плохо, если число признаков больше числа примеров



Есть вопросы или замечания?

Напишите в чат свои вопросы и замечания!

Ставьте + если все понятно

Пройдите опрос

Помогите нам стать лучше!
https://otus.ru/polls/11962/

Антон Лоскутов

Slack: @LoskutovAnton

Спасибо за внимание!