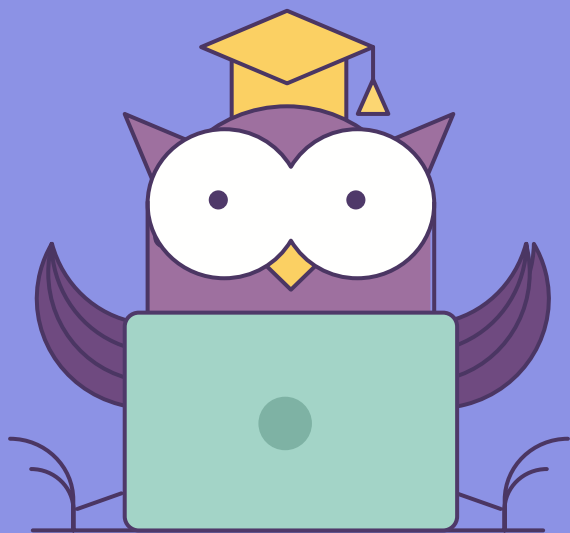




ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

# Меня хорошо слышно && видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте  если все хорошо

# ММП

Метод максимального правдоподобия.





- Заканчиваю механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова
- Учился в Техносфере от Mail.Ru Group
- Являюсь ментором в Техносфере
- Работаю программистом-исследователем в Mail.Ru Group
- Веду лекции открытого курса [mlcourse.ai](https://mlcourse.ai)



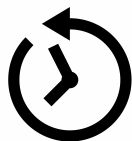
Активно участвуем



Задаем вопросы в чат



Off-topic обсуждаем в Slack



Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

**Будем пытаться оценивать неизвестные параметры с помощью математической статистики, но в общем задача остается такой же.**

**Задача.** Вы зашли в метро на незнакомой станции метро. И неожиданно для вас на этой станции метро сейчас мало людей и вы комфортно садитесь в вагон.

## Гипотезы

- **Гипотеза 1.** Каждый день в это время на этой станции метро мало людей.
- **Гипотеза 2.** Раз в неделю есть день, когда на этой станции метро мало людей и вы попали именно в этот день.
- **Гипотеза 3.** Раз в месяц есть день, когда на этой станции метро мало людей и вы попали именно в этот день.
- **Гипотеза 4.** Раз в год есть день, когда на этой станции метро мало людей и вы попали именно в этот день.

**Какую гипотезу выбрали бы вы?**

**Будем пытаться оценивать неизвестные параметры с помощью математической статистики, но в общем задача остается такой же.**

**Задача.** Вы зашли в метро на незнакомой станции метро. И неожиданно для вас на этой станции метро сейчас мало людей и вы комфортно садитесь в вагон.

## Гипотезы

- **Гипотеза 1.** Каждый день в это время на этой станции метро мало людей.
- **Гипотеза 2.** Раз в неделю есть день, когда на этой станции метро мало людей и вы попали именно в этот день.
- **Гипотеза 3.** Раз в месяц есть день, когда на этой станции метро мало людей и вы попали именно в этот день.
- **Гипотеза 4.** Раз в год есть день, когда на этой станции метро мало людей и вы попали именно в этот день.

**Метод максимального правдоподобия выберет гипотезу с максимальной вероятностью, а значит гипотезу 1.**

**Определение.** Пусть есть выборка  $X_1, \dots, X_n$  из распределения  $P_\theta$ , где  $\theta \in \Theta$  - неизвестные параметры.

**Определение.** Назовем  $L(\mathbf{x} \mid \theta): \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  функцией правдоподобия, где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$L = \prod p(x_i \mid \theta)$  в случае дискретного распределения

$L = \prod f(x_i \mid \theta)$  в случае непрерывного распределения

**Будем искать точечную оценку для параметров**

**Определение.** Точечную оценку  $\hat{\theta}_{\text{МП}} = \hat{\theta}_{\text{МП}}(X_1, \dots, X_n) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(X_1, \dots, X_n \mid \theta)$

будем называть оценкой максимального правдоподобия параметра  $\theta$ .

То есть оценка ММП - это такая точечная оценка, при которой функция правдоподобия достигает своего максимума при заданных параметрах.



**Задача.** К вам на работе приставили стажера. Он задает вам вопросы каждый день. Вы заметили такую зависимость:

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 0$$

Введем такую модель поведения стажера

$y_i$	0	1	2
$P(y_i)$	$p$	$2p$	$1-3p$

**Оценим точечную оценку с помощью метода максимального правдоподобия, считая поведения стажера в разные дни независимо**

**Решение.** Для начала напишем чему будет равна вероятность наших наблюдений с учетом модели поведения стажера:

$$\begin{aligned} P(y_1 = 0; y_2 = 1; y_3 = 2; y_4 = 0) &= \\ P(y_1 = 0)P(y_2 = 1)P(y_3 = 2)P(y_4 = 0) &= \\ p * 2p * (1 - 3p) * p &= 2p^3(1 - 3p) \end{aligned}$$

Продифференцируем получившееся уравнение и найдем максимум

$$\begin{aligned} (2p^3(1 - 3p))' &= 6p^2(1 - 3p) - 6p^3 = \\ 6p^2 - 24p^3 &= 6p^2(1 - 4p) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Получаем ответ: } p = \frac{1}{4}$$

**Решение.** Для начала напишем чему будет равна вероятность наших наблюдений с учетом модели поведения стажера:

$$\begin{aligned} L &= P(y_1 = 0; y_2 = 1; y_3 = 2; y_4 = 0) = \\ &P(y_1 = 0)P(y_2 = 1)P(y_3 = 2)P(y_4 = 0) = \\ &p * 2p * (1 - 3p) * p = 2p^3(1 - 3p) \end{aligned}$$

Часто вместо взятие производной от произведения напрямую выражение немного преобразовывают

$$\ln(L) = \ln(2) + 3\ln(p) + \ln(1 - 3p)$$

$$\ln'(L) = \frac{3}{p} - \frac{3}{1-3p} = \frac{3-9p-3p}{p(1-3p)} = \frac{3-12p}{p(1-3p)} = 0$$

Получаем ответ:  $p = \frac{1}{4}$

# Метод максимального правдоподобия (примеры)

1. Пусть вам задали выборку

$$y_0 = 0, y_1 = 3, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 1, y_5 = 1, y_6 = 0$$

И задали модель

$y_i$	0	1	2	3
$P(y_i)$	$p$	$2p$	$1-5p$	$2p$

$$\hat{p} = \frac{6}{35}$$

Найдите с помощью ММП точечную оценку  $\hat{p}$

2. Пусть вам задана выборка из непрерывного распределения

$$y_1 = 1.1, \dots, y_{100} = 1.5$$

Также известно, что  $\sum y_i = 200$

Модель задана распределением  $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Найдите с помощью ММП точечную оценку  $\hat{\lambda}$

$y_i$  **независимы в обеих выборках**

1. Пусть у вас есть выборка  $X_1, \dots, X_n$  из распределения Пуассона, при  $\lambda > 0$ .  
Найти оценку ММП  $\hat{\lambda}$ .

$$f(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$$

$$\hat{\lambda} = \bar{X}$$

Метод максимального правдоподобия иногда могут давать некорректные  $\lambda > 0$  результаты. Все зависит от дизайна эксперимента.

**Пример.** Предположим я сказал, что бросил монету 12 раз и получил 3 решки. Из этого вы сможете сделать некоторые выводы о вероятности выпадения решки у этой монеты. А теперь предположим, что я бросал монету пока решка не выпала 3 раза и бросал также 12 раз. Сделаете ли вы теперь другие выводы?

В обоих случаях функция правдоподобия будет одинакова и равна

$$p^3 (1 - p)^9$$

**Метод максимального правдоподобия обладает несколькими очень полезными свойствами, которые выделяют его на фоне остальных**

- Оценки ММП состоятельны, то есть  $\hat{\theta}_{ML} \rightarrow \theta$  при  $n \rightarrow \infty$
- Оценки ММП асимптотически несмещенные, то есть  $M(\hat{\theta}_{ML}) \rightarrow \theta$  при  $n \rightarrow \infty$
- Оценки ММП асимптотически эффективны, то есть дисперсия  $D(\hat{\theta}_{ML})$  будет наименьшей среди асимптотически несмещенных оценок
- Оценки ММП асимптотически нормальны, то есть  $\hat{\theta}_{ML} \sim N(\theta, I^{-1})$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $I$  - информация Фишера,  $I = -\ln(L''(\theta))$

# Есть вопросы или замечания?



Напишите в чат свои вопросы и замечания!

Ставьте  если все понятно





# Антон Лоскутов

Slack:

@LoskutovAnton

# Пройдите опрос



Помогите нам стать лучше!  
<https://otus.ru/polls/4422/>

**Спасибо  
за внимание!**

