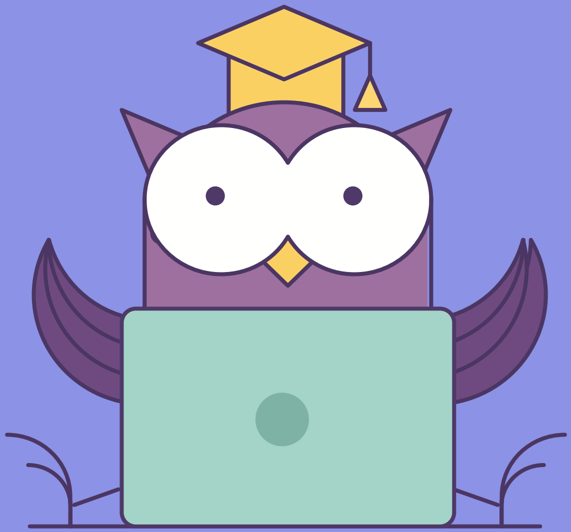
OTUS

ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЕ

Меня хорошо слышно и видно?



Напишите в чат, если есть проблемы!

Ставьте + если все хорошо

Правила вебинара

Активно участвуем

Задаем вопрос в чат или голосом

Off-topic обсуждаем в Slack #канал группы или #general

Вопросы вижу в чате, могу ответить не сразу

Случайные события

- Случайное событие
- Вероятность случайного события
- Основные формулы вычисления вероятностей

Цели занятия

После занятия вы будете знать:

1. что такое случайные события и какие операции с ними можно совершать

2. что такое вероятность случайного события

3. как находить вероятности различных случайных событий

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Василий	Виктория	Иван	Сергей	Виталий
182 см	163 см	177 см	191 см	175 см
брюнет	блондинка	блондин	брюнет	рыжий
в очках	без очков	без очкой	без очков	в очках
холост	не замужем	холост	холост	женат

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Василий	Виктория	Иван	Сергей	Виталий
182 см	163 см	177 см	191 см	175 см
брюнет	блондинка	блондин	брюнет	рыжий
в очках	без очков	без очкой	без очков	в очках
холост	не замужем	холост	холост	женат

A = {имя вызванного студента начинается на В}

B = {вызванный студент не состоит в браке}

C = {вызванный студент ниже 180 см}

D = {вызванный студент в очках}

E = {вызванный студент – женщина}

F = {вызванный студент – брюнет}

Что такое случайное событие

В группе 5 студентов. Я наугад выбираю одного и вызываю к доске.

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Василий	Виктория	Иван	Сергей	Виталий
182 см	163 см	177 см	191 см	175 см
брюнет	блондинка	блондин	брюнет	рыжий
в очках	без очков	без очкой	без очков	в очках
холост	не замужем	холост	холост	женат

A = {имя вызванного студента начинается на В} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}$

B = {вызванный студент не состоит в браке} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

C = {вызванный студент ниже 180 см} = $\{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$

D = {вызванный студент в очках} = $\{\omega_1, \omega_5\}$

E = {вызванный студент – женщина} = $\{\omega_2\}$

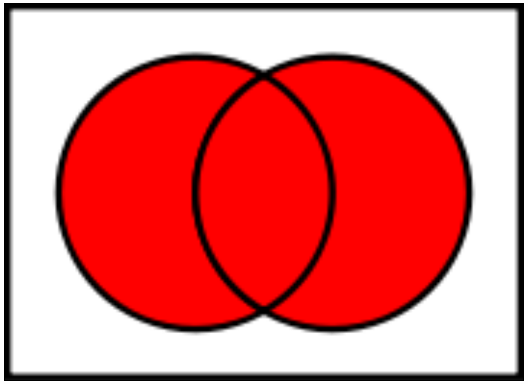
F = {вызванный студент – брюнет} = $\{\omega_2, \omega_4\}$

Что такое случайное событие

OTUS

Случайное событие – множество, элементами которого являются исходы опыта.

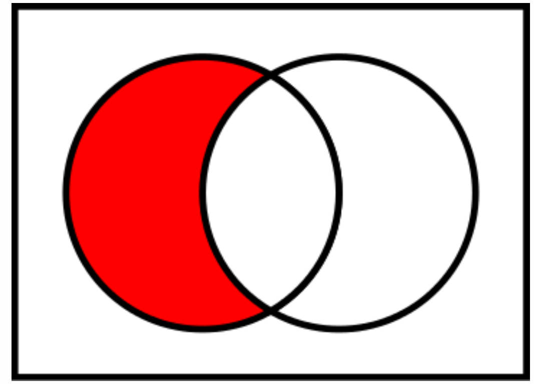
Операции над случайными событиями



$A + B$

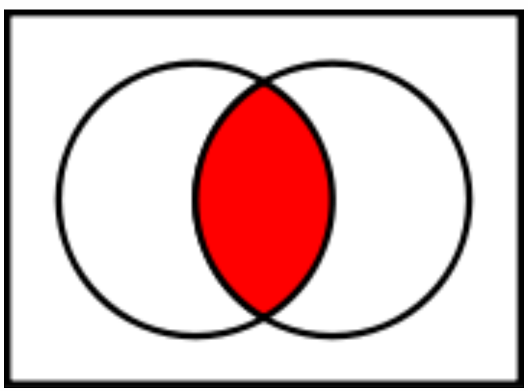
$A \cup B$

ИЛИ хотя бы 1 из 2-х: А или В



$A \setminus B$

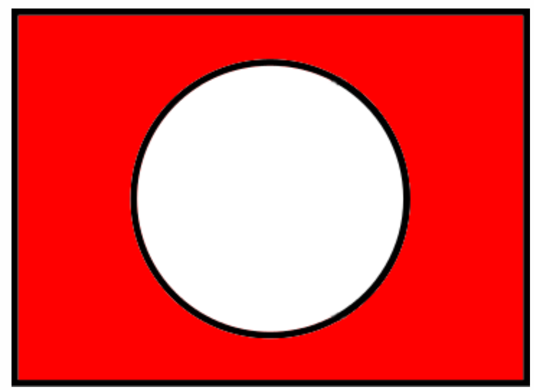
НО НЕ А, но не В



$A\ B$

$A \cap B$

И оба: и А, и В

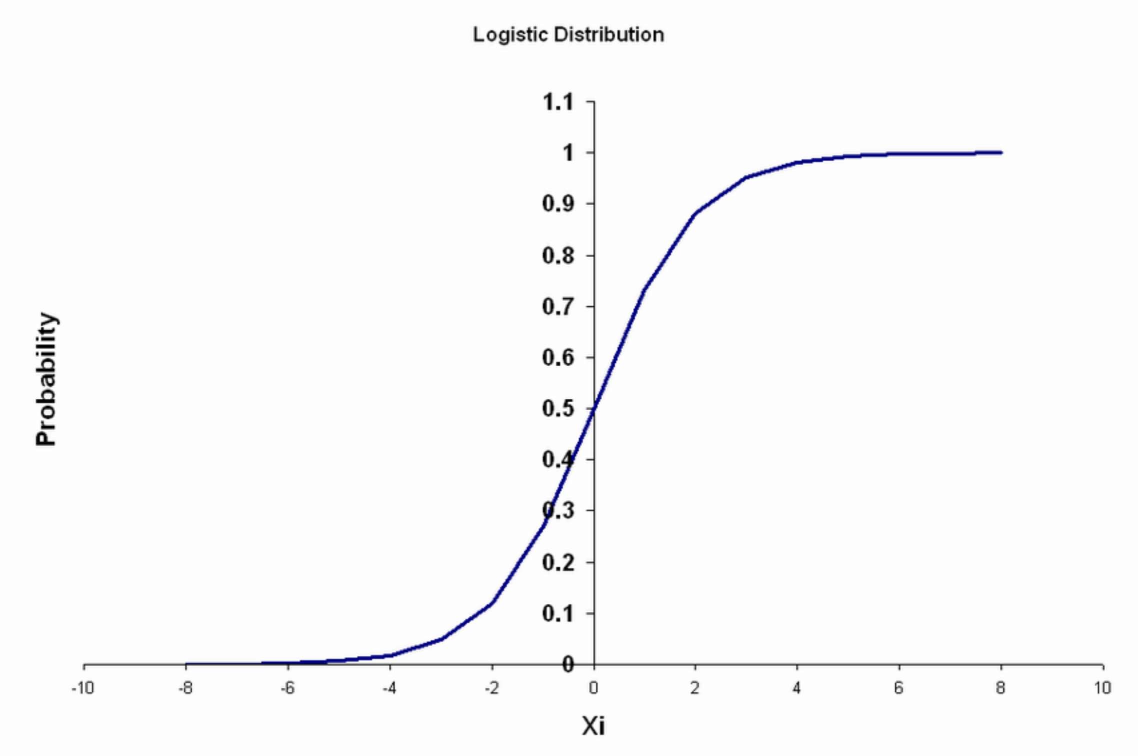


$\bar{A}$

НЕ не А

Вероятность случайного события

<u>**def**</u> (неформальное)
Вероятность случайного события – число от 0 до 1, показывающее степень уверенности в том, что событие произойдёт.



Классическая формула

Если исходы опыта равновероятны,
n – общее число всех возможных исходов опыта,
n_A – число исходов, благоприятных для события *A*,

то $P(A) = \frac{n_A}{n}$

Классическая формула

Если исходы опыта равновероятны,
n – общее число всех возможных исходов опыта,
n_A – число исходов, благоприятных для события *A*,

то $P(A) = \frac{n_A}{n}$

Пример
Подбрасывается игральная кость. С какой вероятностью выпадет чётное число очков?

Классическая формула

Если исходы опыта равновероятны,
n – общее число всех возможных исходов опыта,
n_A – число исходов, благоприятных для события *A*,

то $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n_A}{n}$

Пример
Подбрасывается игральная кость. С какой вероятностью выпадет чётное число очков?

$n = 6$, $n_A = 3$

P(A) = 3/6 = 1/2

Статистическое оценивание вероятности

Пусть опыт, с которым связано случайное событие, повторяется много раз.
N – общее число повторений опыта,
N_A – число повторений, при которых произошло событие A.

def

Частотой случайного события A называется число $\hat{\mathrm{P}}_N(A) = \dfrac{N_A}{N}$

Когда число N повторений опыта стремится к бесконечности, частота события стремится к его вероятности.

$$\hat{\mathrm{P}}_N(A) \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathrm{P}(A)$$

Независимость и несовместность

def

События A и B называются несовместными, если они не могут поизойти одновременно при одном повторении опыта.

def

События A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$P(AB) = P(A)\,P(B)$

Вероятности сложных событий

Условная вероятность

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n_{AB}}{n_B}$$

Формула умножения

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

Формула сложения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Вероятность обратного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Вероятности сложных событий

Пример

Система состоит из двух параллельно соединённых элементов и работает, если работает хотя бы один из них. Вероятность поломки первого элемента 0,1, вероятность поломки второго – 0,2. В настоящий момент система работает. С какой вероятностью первый элемент неисправен, если элементы выходят из строя независимо друг от друга?

Вероятности сложных событий

Пример

Система состоит из двух параллельно соединённых элементов и работает, если работает хотя бы один из них. Вероятость поломки первого элемента 0,1, вероятность поломки второго – 0,2. В настоящий момент система работает. С какой вероятностью первый элемент неисправен, если элементы выходят из строя независимо друг от друга?

A = {1-й элемент работает}
B = {2-й элемент работает}
C = {система работает}

Вероятности сложных событий

Пример

Система состоит из двух параллельно соединённых элементов и работает, если работает хотя бы один из них. Вероятость поломки первого элемента 0,1, вероятность поломки второго – 0,2. В настоящий момент система работает. С какой вероятностью первый элемент неисправен, если элементы выходят из строя независимо друг от друга?

A = {1-й элемент работает}
B = {2-й элемент работает}
C = {система работает}

$$\mathrm{P}\left(\bar{A} \mid C\right) = P\left(\bar{A} \mid A+B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\bar{A}(A+B)\right)}{\mathrm{P}(A+B)} = \frac{\mathrm{P}\left(\bar{A}A+\bar{A}B\right)}{\mathrm{P}(A+B)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(\bar{A}B\right)}{\mathrm{P}(A+B)} = \frac{\mathrm{P}\left(\bar{A}B\right)}{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)} = \frac{\mathrm{P}\left(\bar{A}\right)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$$

Формулы полной вероятности и Байеса

H_1, …, H_n – гипотезы об исходе опыта. В результате опыта всегда происходит ровно одно из этих событий.
A – другое событие, связанное с этим же опытом.

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)$$

Формула Байеса

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)}$$

Формулы полной вероятности и Байеса

Пример

При анализе крови на ВИЧ-инфекцию используется тест, который для ВИЧ-положительных людей с вероятностью 0,99, показывает, что человек инфицирован, а для ВИЧ-отрицательных с вероятностью 0,99 показывает, что человек не инфицирован. Человек сдал анализ и тест показал, что он ВИЧ-инфицированный. С какой вероятностью он действительно ВИЧ-инфицированный?

Формулы полной вероятности и Байеса

Пример

При анализе крови на ВИЧ-инфекцию используется тест, который для ВИЧ-положительных людей с вероятностью 0,99, показывает, что человек инфицирован, а для ВИЧ-отрицательных с вероятностью 0,99 показывает, что человек не инфицирован. Человек сдал анализ и тест показал, что он ВИЧ-инфицированный. С какой вероятностью он действительно ВИЧ-инфицированный?

H_1 = {человек ВИЧ-инфицирован}
H_2 = {человек не ВИЧ-инфицирован}
A = {анализ показывает, что человек ВИЧ-инфицирован}

$$\mathrm{P}(H_1) = 0{,}005 \quad \mathrm{P}(A \mid H_1) = 0{,}99$$

$$\mathrm{P}(H_2) = 0{,}995 \quad \mathrm{P}(A \mid H_2) = 0{,}01$$

Формулы полной вероятности и Байеса

Пример

При анализе крови на ВИЧ-инфекцию используется тест, который для ВИЧ-положительных людей с вероятностью 0,99, показывает, что человек инфицирован, а для ВИЧ-отрицательных с вероятностью 0,99 показывает, что человек не инфицирован. Человек сдал анализ и тест показал, что он ВИЧ-инфицированный. С какой вероятностью он действительно ВИЧ-инфицированный?

H_1 = {человек ВИЧ-инфицирован}
H_2 = {человек не ВИЧ-инфицирован}
A = {анализ показывает, что человек ВИЧ-инфицирован}

$$\mathrm{P}(H_1) = 0{,}005 \quad \mathrm{P}(A \mid H_1) = 0{,}99$$

$$\mathrm{P}(H_2) = 0{,}995 \quad \mathrm{P}(A \mid H_2) = 0{,}01$$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A \mid H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A \mid H_2)$$

$$\mathrm{P}(H_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A \mid H_1)}{\mathrm{P}(A)}$$

Спасибо
за внимание!