



Entrelazamiento y fase geométrica en un modelo de Jaynes-Cumming disipativo no lineal de dos átomos

Ali Martin Zynda Aiub

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2025

TEMA: Entrelazamiento y fase geométrica en un modelo de Jaynes-Cumming disipativo no lineal de dos átomos

ALUMNO: Ali Martin Zynda Aiub

L.U. N°: 342/20

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Fernando Lombardo

CODIRECTORA: Dra. Paula Villar

FECHA DE INICIO: Marzo de 2024

FECHA DE FINALIZACIÓN: Marzo de 2025

FECHA DE EXAMEN: 13 de marzo de 2025

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesora de Tesis de Licenciatura

Jurado

Dedicado a mis padres, Gisela y Marcelo por darme siempre lo que necesité.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Fase Geométrica | 5 |
| 2.1. Régimen adiabático y fase de Berry | 5 |
| 2.2. Fase de Aharonov-Anandan | 6 |
| 2.2.1. Interpretación geométrica y caso no-cíclico | 7 |
| 2.3. Enfoque cinemático | 9 |
| 2.4. Fases geométricas en sistemas abiertos | 10 |
| 2.4.1. Enfoque cinemático en sistemas abiertos | 11 |
| 3. Modelo de Jaynes-Cummings | 15 |
| 3.1. Modelo y aproximaciones | 15 |
| 3.1.1. Fase geométrica en el JCM | 18 |
| 3.2. Medio no lineal | 19 |
| 3.3. Modelo de JC disipativo | 22 |
| 3.3.1. Solución y régimen de acoplamiento | 23 |
| 3.3.2. Fase geométrica en presencia de disipación | 25 |
| 3.4. Conclusiones | 31 |
| 4. Jaynes-Cummings de dos átomos con medio y acoplamiento no lineal | 33 |
| 4.1. Modelo de dos átomos y solución unitaria | 34 |
| 4.2. Dinámica con apantallamiento | 38 |
| 4.2.1. Interacción átomo-átomo | 43 |
| 4.2.2. Medio Kerr | 46 |
| 4.2.3. Batidos | 48 |
| 4.3. Dinámica sin apantallamiento | 48 |
| 4.3.1. Dinámica con disipación | 49 |
| 4.4. Dinámica de entrelazamiento | 52 |
| 4.4.1. Condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ | 53 |
| 4.4.2. Condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ | 58 |
| 4.5. Conclusiones del capítulo 4 | 64 |
| 5. Fase geométrica en JCM generalizado | 65 |
| 5.1. Dependencias de la FG | 65 |
| 5.1.1. Dependencia con el régimen de acoplamiento | 65 |

| | |
|--|-----------|
| 5.1.2. Dependencia con el detunning | 66 |
| 5.1.3. Dependencia con el medio Kerr | 69 |
| 5.1.4. Dependencia con la interacción entre átomos | 71 |
| 5.2. Robustez en función del detunning | 73 |
| 5.3. Conclusiones del capítulo 5 | 75 |
| 6. Conclusiones | 77 |
| A. Derivación de las ecuaciones maestras | 81 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 3.1. Relación energía detunning para el modelo de Jaynes-Cummings. La diferencia de energía entre los estados de un mismo nivel para $\Delta = 0$ es $2g\sqrt{n}$ | 17 |
| 3.2. (a) Evolución de un autoestado $ \psi_{\pm}(t)\rangle$ bajo un campo de control que introduce cambios de fase. (b) Evolución de un estado genérico $ e, n\rangle$. Las curvas se corresponden con diferentes valores del detunning, que son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = g$ (violeta) y $\Delta = 2g$ (naranja) | 19 |
| 3.3. Gráfico de la frecuencia de Rabi $\Omega_{N,\chi}$ en función del detunning Δ para (a) $N = 1$ y (b) $N = 2$ | 21 |
| 3.4. Solución numérica al sistema de ecuaciones dada por la ecuación de Lindblad para el estado inicial $ e0\rangle \langle e0 $. Estos gráficos se realizaron con $\Delta = 2g$; a la izquierda se observa el regimiento de WC con $\gamma = 0.1g$, donde el sistema átomo-cavidad está débilmente acoplado con el entorno, y a la derecha el de SC con $\gamma = 2g$, donde las poblaciones y coherencias decaen sin oscilar. Las líneas sólidas son las poblaciones de los estados, en azul para el estado $ g0\rangle$, en morado para $ e0\rangle$ y en amarillo $ g1\rangle$, y la línea rayada representa la coherencia entre los estados con $N=1$ ($ e0\rangle$ y $ g1\rangle$) | 24 |
| 3.5. Análisis poblacional para una cavidad con medio Kerr con $\chi = 0.5g$. Para la simulación se utilizaron los mismos parámetros que en la Figura 3.4 | 24 |
| 3.6. Fase geométrica acumulada por un sistema con un detunning $\Delta = 0.1g$, para diferentes valores característicos del entorno. En todos los casos la tasa de bombeo es $p = 0.005g$, y se muestran diferentes valores para γ , partiendo de $\gamma = 0$ perteneciente a la línea azul oscuro que es el caso unitario, y para $\gamma = 0.01g, \gamma = 0.1g, \gamma = 0.5g$ y $\gamma = g$, correspondientes a las líneas violeta, rosa, naranja y amarilla. | 26 |
| 3.7. Fase geométrica acumulada por el estado inicial para diferentes valores del detunning. El entorno esta caracterizado por una tasa de bombeo $p = 0.005g$ y una tasa de pérdidas $\gamma = 0.1g$. Los valores de Δ varían entre 0 (línea azul) y $2.5g$ (línea amarilla). | 27 |
| 3.8. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detunning átomo-cavidad Δ , para $\chi = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. | 27 |

| | |
|--|----|
| 3.9. Dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores del medio Kerr dados por $\chi = 0, 0.1g, 0.5g, g$ y $2g$ representados por colores partiendo del mas oscuro al mas claro, y un valor fijo del detunning: (a) $\Delta = 0$ y (b) $\Delta = 0.1g$ | 28 |
| 3.10. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio χ , para $\Delta = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. | 29 |
| 3.11. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detunning átomocavidad Δ , para $\chi = g$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. Se observa como la condición de robustez se alcanza para $\Delta/g = \chi/g = 1$ | 30 |
| 4.1. Relación entre energía y detunning para los diferentes niveles de energía del problema. Las líneas sólidas muestran la energía de los estados del JC de dos átomos con una cantidad de excitaciones: $N = 0$ (negro, sólido), $N = 1$ (violeta sólido) y $N = 2$ (naranja sólido). También se muestran los niveles de energía del JC de un átomo para $N = 1$ (negro; rayado) y $N = 2$ (naranja; rayado). Obsérvese que las energías del JC de un átomo están multiplicadas por 2. (a) $\chi = k - J = 0$; (b) $\chi = k - J = 0.5g$ | 37 |
| 4.2. Esquema del problema de estudio. Se nombran a las partes para referenciarlas fácilmente: los átomos se identifican por las letras A y B, y la cavidad por la C, esta puede contener una cantidad arbitraria de excitaciones, pero se trabajará principalmente en 0,1 y 2 excitaciones. Ambos átomos son de dos niveles, son idénticos e indistinguibles y su frecuencia natural es ω , mientras que la frecuencia natural de la cavidad es ω_0 . El acoplamiento entre la cavidad y el átomo es g , y las interacciones átomo-átomo son k (interacción dipolar) y J (interacción tipo Ising). | 39 |
| 4.3. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es $ e_A g_B 0_C\rangle$ para diferentes valores del detunning, apantallando el átomo B. Los valores son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = 0.5g$ (morada) y $\Delta = 2g$ (naranja). | 39 |
| 4.4. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es $(e_A g_B 0_C\rangle + g_A e_B 0_C\rangle)/\sqrt{2}$ para diferentes valores del detunning, apantallando el átomo B. Los valores son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = 0.5g$ (morada) y $\Delta = 2g$ (naranja). | 40 |
| 4.5. (a):Dinámica poblacional para el caso resonante $\Delta = 0$ con el estado inicial entrelazado $ \psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$. (b):Entropía de von Neuman del sistema total (negro con puntos), y de diferentes subsistemas. En rojo se muestra la entropía del sistema habiendo trazado parcialmente sobre la cavidad, y en azul habiendo trazado parcialmente sobre el átomo B. | 41 |
| 4.6. Concurrencia en el caso resonante para estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ | 42 |

| | |
|---|----|
| 4.7. Dinámica poblacional para la condición inicial $ \psi_0\rangle = eg0\rangle$, para los parámetros $\Delta = 0$, $J = 0$ y $k = 0.1g$. Las líneas sólidas se corresponden con las poblaciones de la matriz densidad total del sistema; en azul la probabilidad de encontrar al estado en el estado $ gg1\rangle$, en verde en $ eg0\rangle$, en rojo $ ge0\rangle$, y en negro $ gg0\rangle$. Las líneas rayadas son las coherencias entre estas poblaciones, la violeta entre $ gg1\rangle$ y $ ge0\rangle$, la celeste entre $ eg0\rangle$ y $ gg1\rangle$ y la amarilla entre $ eg0\rangle$ y $ gg1\rangle$. | 43 |
| 4.8. Dinámica poblacional para la condición inicial $ \psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, para los parámetros $\Delta = 0$, $J = 0$ y $k = 0.1g$. Las coherencias y poblaciones tienen los mismos colores que la figura anterior 4.7 | 44 |
| 4.9. Dinámica de entrelazamiento para $\Delta = 0$, $J = 0$ y $k = 0.1g$ para el estado inicial (a) $ eg0\rangle$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ | 45 |
| 4.10. Dinámica con parámetros $\Delta = 0$, $J = 0.5g$ y $k = 0$. En (a) las poblaciones y (c) la concurrencia del estado inicial es $ eg0\rangle$, y en (b) las poblaciones, y (d) la concurrencia del estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$. | 45 |
| 4.11. Dinámica de poblaciones para $x = g$ con el estado inicial (a) $ eg0\rangle$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ | 46 |
| 4.12. Dinámica de entrelazamiento para $x = g$ para estados iniciales (a) $ eg0\rangle$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ | 47 |
| 4.13. Dinámica de poblaciones para estado inicial $ eg0\rangle$ con (a) $\Delta = \chi = 0$ y (b) $\Delta = \chi = 0.5g$ | 47 |
| 4.14. Trayectoria en la esfera de Bloch para el estado inicial $ eg0\rangle$, trazando parcialmente sobre el átomo B, y los parámetros utilizados son $\Delta = 0, \chi = 0.5g, k = 0.5g$ y $J = 0$. | 48 |
| 4.15. Dependencia de las poblaciones con el régimen de acoplamiento, para $\Delta = J = \chi = 0$ y $k = 0.5g$, y para dos condiciones iniciales diferentes. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, $\Delta = \chi = k = 0$, $J = 0.5g$; (b) $ gg1\rangle$, $\Delta = \chi = J = 0$, $k = 0.5g$. | 50 |
| 4.16. Frecuencias de Rabi en función del detuning Δ para diferentes valores de χ , y $ k - J $, donde las frecuencias de Rabi son $\Omega_{ij}^{(2)} = E_j^{(2)} - E_i^{(2)}$. (a) Ω_{12} con $\chi \in [0, 5g]$; (b) Ω_{23} y Ω_{31} con $\chi \in [0, 5g]$; (c) Ω_{12} con $k - J \in [0, 5g]$; (d) Ω_{23} y Ω_{31} con $k - J \in [0, 5g]$ | 51 |
| 4.17. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, en función del detuning, para diferentes parámetros. Dinámica sin pérdidas: (a) $\chi = k - J = 0$. Dinámica con pérdidas: (b) $\chi = k - J = 0$; (c) $\chi = 0.1g$, $k - J = 0$; (d) $\chi = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\chi = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\chi = 0$, $k - J = 2.5g$. | 54 |
| 4.18. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, en función del detuning, y para $\chi = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas, (b) Dinámica con pérdidas. Luego, con pérdidas, (c) $\Delta = g$, $k - J = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\Delta = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $k - J = 2.5g$. | 56 |

| | |
|---|----|
| 4.19. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, en función de la interacción entre los átomos (a) Dinámica sin pérdidas con $\Delta = \chi = 0$. Dinámica con pérdidas (b) $\Delta = \chi = 0$; (c) $\Delta = g$, $\chi = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $\chi = 0$; (e) $\Delta = 0$, $\chi = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $\chi = 5g$ | 57 |
| 4.20. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, en función del detuning, y para $\chi = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas, (b) Dinámica con pérdidas. (c) $\chi = 0.1g$, $k - J = 0$; (d) $\chi = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\chi = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\chi = 0$, $k - J = 2.5g$ | 59 |
| 4.21. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$, en función del medio Kerr, y para $\Delta = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas,(b) Dinámica con pérdidas. (c) $\Delta = g$, $k - J = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\Delta = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $k - J = 2.5g$ | 61 |
| 4.22. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$, en función del detuning, y para $\chi = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas, (b) Dinámica con pérdidas. (c) $\Delta = g$, $\chi = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $\chi = 0$; (e) $\Delta = 0$, $\chi = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $\chi = 5g$ | 63 |
| 5.1. Dependencia de la FG acumulada con el acoplamiento con el entorno para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ | 66 |
| 5.2. Dependencia de la FG acumulada con el detuning para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ | 67 |
| 5.3. Robustez en función de Δ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ para (a) $\chi = 0$ y (b) $\chi = 5g$ | 68 |
| 5.4. Robustez en función de Δ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ para (a) $\chi = 0$ y (b) $\chi = 5g$ | 68 |
| 5.5. Dependencia de la FG acumulada con el medio Kerr para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ | 69 |
| 5.6. Dependencia de la FG acumulada con el medio Kerr con $\Delta = 0.5g$ para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ | 70 |
| 5.7. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ con (a) $\Delta = 0$ y (b) $\Delta = 5g$ | 70 |
| 5.8. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ con $k - J = 0$ y (a) $\Delta = 0$; (b) $\Delta = 5g$ | 71 |
| 5.9. Dependencia de la FG acumulada con la interacción entre los átomos $k - J$ para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ | 72 |
| 5.10. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg0\rangle + ge0\rangle)$ con $\Delta = 0$ y (a) $\chi = 0$; (b) $\chi = 2.5g$ | 72 |
| 5.11. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(eg1\rangle + ge1\rangle)$ con $\Delta = 0$ y (a) $\chi = 0$; (b) $\chi = 2.5g$ | 73 |

5.12. Condiciones de robustez para diferentes estados iniciales y valores de $k - J$

Los puntos representan las raíces de $\delta\phi_g = \phi_d - \phi_u$. Los paneles (a)-(e) son estados iniciales con 2 excitaciones, donde los colores representan el estado inicial: $|gg2\rangle$ en celeste, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ en gris, $|ee0\rangle$ en negro y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|ee0\rangle + gg2)$ en rojo. En estas, los valores de $k - J$ son: (a) $k - J = 0$, (b) $k - J = 1g$, (c) $k - J = 2.5g$, (d) $k - J = -1g$, (e) $k - J = -2.5g$. Las tres líneas negras son las condiciones de robustez predichas, donde la de mayor pendiente representa la condición Ec. (4.23), la del medio Ec. (4.24) y la de menor pendiente, la Ec. (4.25). Los paneles (f)-(i) son para las condiciones iniciales de 1 excitación, donde está el $|gg1\rangle$ en celeste, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + ge0\rangle)$ en gris, y $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + ge0\rangle) + gg1)$ en rojo. La línea negra sólida representa la condición de robustez dada por Ec. 4.21. Los valores de $k - J$ son: (f) $k - J = 0$, (g) $k - J = 1g$, (h) $k - J = 2.5g$, (i) $k - J = -2.5g$

74

5.13. Diferencia entre la FG unitaria y disipativa para $k - J = 0$ y múltiples valores de $\chi \in [0, 5g]$. Las líneas rayadas verticales representan las tres posibles condiciones de robustez.

75

Resumen

El modelo de Jaynes-Cummings de un átomo es un ejemplo paradigmático para el estudio de la interacción entre la radiación y la materia que sirve para estudiar fenómenos de información cuántica. El modelo describe de manera sencilla la interacción entre fotones y materia de manera puramente cuántica, y es utilizado en diversas aplicaciones. Desde el punto de vista experimental, permitió, entre otras cosas, realizar teleportación cuántica utilizando cavidades semiconductoras. Recientemente, con el creciente interés en las tecnologías cuánticas y la introducción de los transmones como arquitectura de cabecera para su desarrollo e innovación, este modelo tuvo renovadas aplicaciones, ya que la dinámica de los transmones es casi igual a la de un átomo en una cavidad descrita por el modelo de Jaynes-Cummings. Esto hace que estudiar estos modelos de electrodinámica de cavidades tenga un interés y una aplicación directa en la computación cuántica. La principal ventaja que trae la electrodinámica de circuitos superconductores sobre las demás arquitecturas propuestas, radica en su escalabilidad, en los rangos de acoplamientos que se pueden acceder y en su capacidad de reducir errores mediante códigos de corrección, que logra mitigar hasta cierto punto el ruido o las pérdidas introducidos por el entorno. Este último punto es en el que se concentra la tesis. Es interesante encontrar alguna cantidad u objeto que no sea sensible a los efectos del entorno; un "sensor cuántico" que de información del sistema. Un posible candidato es la fase geométrica. Esta es una fase que acumulan los estados cuánticos al evolucionar, relacionada con la trayectoria que recorre en el espacio de estados.

En el presente trabajo extendemos el modelo de Jaynes-Cummings a dos qubits interactivantes, inmersos en una cavidad no lineal (con medio Kerr). El estudio se concentra en entender la dinámica del sistema, analizar la dinámica de entrelazamiento entre ambos átomos y observar su comportamiento ante los efectos de un entorno a temperatura cero. Finalmente, se estudia la fase geométrica y su sensibilidad frente al entorno.

Se encontraron ciertas relaciones entre los parámetros el problema que predicen zonas de interés. Principalmente, sirven para predecir aproximadamente qué combinación de parámetros se debe utilizar para lograr que la fase geométrica sea robusta ante los efectos destructivos del entorno. Este resultado, es muy útil para diagramar implementaciones del modelo utilizando circuitos superconductores.

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Fer y a Pau por recibirme en su grupo, siempre predisuestos y con una sonrisa. Agradezco que me hayan acompañado como lo hicieron. Les deseo lo mejor siempre.

También a mis padres y a mis hermanas por su apoyo incondicional. A mi novia por acompañarme en este camino que elegí. A mis amigos de siempre por ser los de siempre, y a mis nuevos amigos por enseñarme que la física es mejor si se comparte.

Simplemente gracias.

INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica ha transformado nuestra comprensión de muchos sistemas físicos, incorporando conceptos fundamentales como la superposición y el entrelazamiento. Estos fenómenos no solo han sido fundamentales para el desarrollo de teorías físicas avanzadas, sino que también han dado lugar a una nueva era en tecnología de la información cuántica, donde el entrelazamiento y la superposición son elementos fundamentales, utilizados como recursos, y elevando la capacidad de los sistemas. Un ejemplo crucial de esta revolución son las computadoras cuánticas, que aprovechan las superposiciones de estados para ejecutar algoritmos físicamente viables.

En este contexto, los sistemas de electrodinámica cuántica de cavidades han emergido como una plataforma crucial para la implementación de procesos cuánticos controlados. En estos sistemas, se confina al campo electromagnético en una cavidad óptica de alta calidad, permitiendo interacciones controladas entre la radiación y átomos individuales o átomos artificiales de dos niveles, como los qubits superconductores. Esta capacidad de manipulación precisa ha convertido a la electrodinámica de cavidades en un campo clave para el desarrollo de la computación cuántica y las simulaciones cuánticas controladas.

Uno de los modelos más importantes en este ámbito es el modelo de Jaynes-Cummings (JCM) [1], que describe la interacción entre el campo electromagnético y un sistema atómico de dos niveles. Su relevancia en la física cuántica radica en que proporciona un marco teórico claro para entender la dinámica de sistemas cuánticos abiertos y su impacto en la coherencia cuántica. Experimentos recientes con circuitos superconductores han logrado simular de manera efectiva el modelo de Jaynes-Cummings, permitiendo el estudio de la dinámica de fotones y átomos artificiales en condiciones altamente controladas. En particular, el JCM permite explorar la transferencia de excitaciones entre la luz y la materia a nivel cuántico, lo que ha sido crucial también en experimentos con circuitos superconductores y cavidades o resonadores de microondas. Su extensión a configuraciones de múltiples átomos ha permitido una exploración detallada de la interacción entre átomos y la generación de estados entrelazados, lo cual es fundamental para el desarrollo de tecnologías cuánticas.

En este contexto, la fase geométrica (FG) se ha consolidado como un concepto central en la mecánica cuántica. Introducida inicialmente por Berry [2] en el caso de sistemas cerrados con evoluciones adiabáticas, este concepto ha sido extendido a escenarios más generales, incluyendo evoluciones no adiabáticas y sistemas abiertos. Su importancia nace de su capacidad para proporcionar información sobre la estructura del espacio de estados, además de su potencial para aplicaciones prácticas en la computación cuántica y metrología cuántica [3, 4, 5]. En sistemas de Jaynes-Cummings, la fase geométrica se manifiesta

en la evolución del estado del sistema cuando se recorren trayectorias cerradas en el espacio de parámetros, lo que permite inferir información sobre la coherencia cuántica y la interacción con el entorno. En experimentos recientes con qubits superconductores acoplados a cavidades, se ha logrado medir con precisión la acumulación de fase geométrica, lo que ha permitido validar predicciones teóricas y explorar su posible uso en puertas lógicas cuánticas robustas. Además, la FG se ha relacionado con efectos topológicos, y mucho trabajo en el área ha logrado resultados tanto experimentales como teóricos. En particular, aplicaciones en la computación cuántica incluyen implementaciones para la creación de compuertas lógicas utilizando computación cuántica topológica [6, 7, 8]. Esfuerzos recientes también buscan consolidar a la FG como método para estudiar el entrelazamiento entre dos átomos [9]. Esto es útil para medir la fidelidad de compuertas cuánticas, ya que los métodos actuales son inefficientes para sistemas de muchos cuerpos. Estos se basan en mediciones proyectivas, lo cual crece exponencialmente con el número de partículas, en cambio, la FG es solo un parámetro y no escala con el tamaño del sistema.

Por otro lado, el entrelazamiento cuántico es un recurso fundamental para la información cuántica, ya que permite la implementación de protocolos como la criptografía cuántica y la teleportación. En particular, la dinámica del entrelazamiento en sistemas de Jaynes-Cummings ha sido objeto de numerosos estudios. Trabajos pioneros como los de Eberly y Yu [10] han analizado fenómenos como la "muerte súbita del entrelazamiento", lo que ha permitido comprender mejor la influencia del entorno en la evolución de sistemas cuánticos. Además, se han desarrollado estrategias para generar y controlar estados altamente entrelazados en estos sistemas, lo cual tiene importancia directa en la implementación de redes cuánticas y simulaciones de materiales exóticos. Experimentos recientes han utilizado circuitos superconductores para generar estados entrelazados de manera eficiente, demostrando la viabilidad de estos sistemas para la implementación de algoritmos cuánticos y la creación de canales seguros de comunicación cuántica.

La electrodinámica cuántica de cavidades es un campo de investigación estrechamente vinculado con la computación cuántica. La posibilidad de manipular la interacción luz-materia en cavidades de alta calidad ha permitido el desarrollo de experimentos en arquitecturas de circuitos superconductores con qubits y/o con sistemas híbridos, proporcionando una plataforma versátil para la implementación de compuertas lógicas cuánticas y la creación de arquitecturas escalables para la computación cuántica. A medida que los experimentos han avanzado, se han abierto nuevas vías para explorar el entrelazamiento, la coherencia y la implementación de algoritmos cuánticos en estos sistemas. De manera particular, sistemas de electrodinámica de cavidades han sido utilizados para la implementación de simulaciones cuánticas de materiales exóticos, lo que abre la posibilidad a un mayor entendimiento de las fases topológicas de la materia y a nuevas formas de diseñar dispositivos cuánticos robustos ante errores y frente al ruido o decoherencia inducida por los entornos.

En esta tesis, se estudiará la dinámica de entrelazamiento y la fase geométrica en un sistema de dos átomos acoplados a una cavidad, modelado mediante la extensión del modelo de Jaynes-Cummings. Se analizarán las condiciones bajo las cuales el entrelazamiento

se preserva o se disipa, así como la influencia de los acoplamientos externos en la acumulación de la fase geométrica. Este análisis permitirá obtener una visión más clara de los mecanismos que afectan la coherencia cuántica en estos sistemas.

El presente trabajo no solo contribuye a una mejor comprensión de la mecánica cuántica fundamental, sino que también tendrá aplicaciones potenciales en el desarrollo de tecnologías cuánticas avanzadas. Los resultados obtenidos podrían ser relevantes para el diseño de dispositivos cuánticos de alta fidelidad, la optimización de protocolos de computación cuántica y la exploración de nuevos esquemas para la simulación de sistemas cuánticos complejos. Además, el estudio de la fase geométrica en sistemas abiertos contribuirá a la identificación de nuevas estrategias para la implementación de operaciones cuánticas resistentes al ruido y la decoherencia, un aspecto clave para el desarrollo de computadoras cuánticas funcionales.

FASE GEOMÉTRICA

Este capítulo presenta uno de los objetos de estudio del trabajo. La fase geométrica es un objeto relevante en el ámbito de la información cuántica, ya que como se verá más adelante, recupera información sobre la trayectoria del sistema en el espacio de Hilbert. Su potencial recae en el hecho de que se han encontrado situaciones [11] en donde esta fase es robusta frente a los efectos del entorno, y por lo tanto es un candidato formidable para la metrología y medición de sistemas cuánticos. El capítulo está estructurado de manera que en primer lugar se tratará una descripción general de las fases geométricas (FG) en el contexto de sistemas aislados, descritos consecuentemente mediante estados puros. Analizar este caso antes de centrar la atención en sistemas cuánticos abiertos permitirá asimilar nociones y ganar intuición sobre las fases geométricas en el marco de una teoría más simple. A lo largo del capítulo se trabajarán expresiones válidas bajo ciertas hipótesis, partiendo del caso menos general, y llegando al caso más general. Por lo tanto, al final del capítulo se presentará una definición particular para sistemas abiertos en evoluciones no-cíclicas ni unitarias, la cual se usará en los próximos capítulos.

2.1. Régimen adiabático y fase de Berry

La fase de Berry [2] es una manifestación fundamental del teorema adiabático. Esta representa la fase acumulada por el autoestado de un Hamiltoniano $H(t)$ que varía lentamente en un ciclo, que está relacionada con el circuito descrito por $H(t)$ en un dado espacio de parámetros.

Para ver esto, se considera un Hamiltoniano $H(R(t))$ que depende explícitamente del tiempo a través de un parámetro $R = (R_1, R_2, \dots)$. Dado este Hamiltoniano, formalmente se pueden encontrar los autoestados instantáneos del sistema $|\psi_n(R(t))\rangle$ que satisfacen

$$H(R(t)) |\psi_n(R(t))\rangle = E_n(R(t)) |\psi_n(R(t))\rangle, \quad (2.1)$$

suponiendo además que los autovalores satisfacen $E_1 < E_2 < \dots < E_n$ de forma que no hay degeneración. Se considera que la evolución temporal de un estado cualquiera $|\psi(t)\rangle$ está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \dot{|\psi(t)\rangle} = H(R(t)) |\psi(t)\rangle. \quad (2.2)$$

Desarrollando el estado en función de los autoestados instantáneos del Hamiltoniano, se

puede resolver formalmente el problema

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n(R(t))\rangle, \quad (2.3)$$

donde los coeficientes $c_n(t)$ satisfacen:

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \left(E_n - i\hbar \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle \right) c_n(t) - i\hbar \sum_{m \neq n} \langle \psi_n | \dot{\psi}_m \rangle c_m(t).$$

En el régimen adiabático, donde el Hamiltoniano cambia lentamente en comparación con las escalas internas del sistema, se desprecia el término de acoplamiento cruzado:

$$\dot{c}_n(t) \approx -\frac{i}{\hbar} \left(E_n - i\hbar \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle \right) c_n(t).$$

El estado resultante es:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt'} e^{i\phi_n(t)} |\psi_n(R(t))\rangle,$$

donde $\phi_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(R(t')) | \nabla_R | \psi_n(R(t')) \rangle \cdot \dot{R}(t') dt'$ es la fase geométrica acumulada.

Para circuitos cerrados en el espacio de parámetros, la fase geométrica se expresa como:

$$\phi_n(C) = i \oint_C \langle \psi_n(R) | \nabla_R | \psi_n(R) \rangle \cdot dR, \quad (2.4)$$

independiente de la velocidad con que se recorre el circuito. Sin embargo, la hipótesis para llegar a este resultado es que la velocidad de la evolución sea suficientemente lenta para que se puedan despreciar las transiciones no adiabáticas a otros niveles de energía. Por lo tanto, para llegar a este resultado no es totalmente independiente de la velocidad con la que se recorre el circuito en el espacio de parámetros.

2.2. Fase de Aharonov-Anandan

La formulación de Aharonov y Anandan permite definir una fase geométrica que es independiente de la evolución adiabática. Su propuesta se basa únicamente en la trayectoria del estado en el espacio proyectivo de rayos, sin referencia explícita al Hamiltoniano.

Considérese el espacio de Hilbert \mathcal{H} , y dentro de este, el subespacio N_0 que contiene vectores normalizados $|\psi\rangle$. El espacio proyectivo P se define como el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación $|\psi\rangle \sim e^{i\alpha} |\psi\rangle$. Estas colecciones $\xi = \{e^{i\alpha} |\psi\rangle ; 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ denominadas rayos, agrupan en un único elemento (la clase) todos los objetos equivalentes. Cada clase de equivalencia se denomina un rayo, y el mapeo $\Pi : N_0 \rightarrow P$ proyecta un vector al rayo correspondiente.

Durante una evolución cíclica, el estado al tiempo inicial $|\psi(0)\rangle$ y al tiempo final $|\psi(T)\rangle$ pertenecen al mismo rayo, por lo que:

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\phi} |\psi(0)\rangle.$$

Los estados solo pueden diferir en una fase total ϕ . Para determinar la fase geométrica, se descompone ϕ en dos contribuciones: una parte dinámica y una parte geométrica.

La relación entre el estado físico $|\psi(t)\rangle$ y su clase de equivalencia $\xi \in P$ se escribe como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{if(t)}|\xi(t)\rangle,$$

donde $f(t)$ es una función que recoge la fase acumulada. Sustituyendo esta relación en la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle,$$

se obtiene una ecuación para $f(t)$:

$$\hbar \dot{f}(t) = -\langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle + i\hbar \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle.$$

La fase total acumulada entre los tiempos 0 y T es:

$$\phi = f(T) - f(0) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle dt + \int_0^T i \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle dt.$$

Aquí, el primer término es la fase dinámica:

$$\phi_{\text{din}} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle,$$

y el segundo término corresponde a la fase geométrica:

$$\phi_{\text{AA}} = \int_0^T i \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle dt. \quad (2.5)$$

Esta última expresión muestra que la fase geométrica depende únicamente de la trayectoria en el espacio proyectivo P y no del Hamiltoniano o la velocidad de la evolución. Al ser independiente de estos factores, refleja una propiedad puramente geométrica de la curva trazada por el estado en P .

2.2.1. Interpretación geométrica y caso no-cíclico

En esta sección se mostrará la interpretación geométrica y la generalización al caso no cíclico, demostrada por Samuel y Bhandari [12]. Esta definición no requiere de la condición de ciclo cerrado, y tampoco requiere que el estado conserve su norma, como por ejemplo en una medición y colapso de la función de onda. Para esto es necesario dotar al espacio de Hilbert de geometría donde la fase surge de la estructura del espacio.

Para darle estructura al espacio, lo que ya hicimos antes es considerar un fibrado, donde definimos una clase de equivalencia para estados que difieren en una fase global. Para darle mayor estructura tenemos que introducir el concepto de conexión, que nos permitirá comparar elementos pertenecientes a fibras distintas mediante una regla de transporte

paralelo. La regla de transporte paralelo nos dice que

$$\text{Im} \left\langle \psi(t) \middle| \dot{\psi}(t) \right\rangle = 0. \quad (2.6)$$

Considérese una curva $C : t \in [0, T] \rightarrow |\psi(t)\rangle$ sobre N_0 , horizontal, y su vector tangente $|\dot{\psi}(t)\rangle / \langle \psi(t)|\psi(t)\rangle$. La conexión natural

$$A = \frac{\text{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle}, \quad (2.7)$$

transforma, frente a transformaciones $U(1)$ de gauge $|\psi(t)\rangle \rightarrow e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle$, según

$$A \rightarrow A + \dot{\alpha}(t). \quad (2.8)$$

Dado que C es horizontal por definición, la ley de transporte paralelo de la Ec. (2.6) impone que la conexión se anule a lo largo de la trayectoria del estado que le da origen. Si el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ está, además, asociado a una evolución cíclica en el sentido de Aharonov-Anandan, entonces retorna al rayo inicial en algún instante T .

Considérese, en este escenario, la integral de la conexión A sobre el camino construido a partir de la curva $|\psi(t)\rangle ; t \in [0, T]$, cerrada uniendo $|\psi(T)\rangle$ con $|\psi(0)\rangle$ sobre el rayo. Como se ha discutido, la curva $|\psi(t)\rangle$ es horizontal por definición y, por lo tanto, la conexión se anula $A = 0$ sobre ella. Por otra parte, la integral sobre el tramo vertical que cierra el camino da como resultado la diferencia de fase entre $|\psi(T)\rangle$ y $|\psi(0)\rangle$:

$$\oint Adl_{N_0} = \int_C A + \int_{\text{rayo}} A = \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle. \quad (2.9)$$

Es decir, la integral sobre el camino total (cerrado), es la diferencia de fase total entre el estado inicial y final. Por otra parte, la integral de la conexión A sobre una curva cerrada en N_0 es invariante por efecto de la ley de transformación Ec. (2.8). La holonomía de la curva $C \subset P$ asociada a la conexión A es entonces:

$$g(C) = e^{i \oint_C A} = e^{i\phi_{AA}}. \quad (2.10)$$

En el caso de una evolución no cíclica, el vector que describe el sistema no vuelve a su rayo de partida. Para este caso se establece una manera de comparar estados de diferentes fibras. Dicha comparación se hace a través de la fase de *Pancharatnam* [13], definida para dos estados no-ortogonales cualesquiera como

$$\phi_P = \arg \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle. \quad (2.11)$$

Para hacer la generalización al caso no-cíclico, tenemos que dar un concepto de distancia, y para esto tenemos que hablar de líneas geodésicas. No vamos a meternos en detalle en esto, pero lo importante es que la fase en el caso no cíclico consiste de la diferencia entre

la fase dinámica y la fase de Pancharatnam

$$\phi_{SB} = -\phi_P - \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle. \quad (2.12)$$

Este método se puede utilizar para generalizar al caso no unitario, en el sentido de un estado puro que no conserva su norma. Este tipo de evolución puede suceder cuanto estamos teniendo en cuenta mediciones en el sistema, colapsos de la función de onda no conservan la norma según la regla de colapso de la mecánica cuántica. En este caso, si consideramos el estado inicial $|\psi_0\rangle$ sobre el cual se realizan mediciones sucesivas, de forma tal que la N-ésima proyección es otra vez el estado inicial, el estado final del sistema está dado por

$$|\psi_0\rangle \langle \psi_0 | \psi_{N-1} \rangle \dots \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | \psi_0 \rangle. \quad (2.13)$$

Según el criterio de Pancharatnam los estados inicial y final tienen una diferencia de fase bien definida, dada por el argumento del número complejo que acompaña al estado $|\psi_0\rangle$.

2.3. Enfoque cinemático

En la mayoría de las discusiones sobre la fase geométrica, el punto de partida es la ecuación de Schrödinger para algún sistema cuántico particular caracterizado por un dado Hamiltoniano. Sin embargo, la fase geométrica es consecuencia de la cinemática cuántica, esto es, independiente del detalle respecto del origen dinámico de la trayectoria descrita en el espacio de estados físicos. Mukunda y Simon ([14],[15]) resaltaron la independencia de la fase geométrica respecto del origen dinámico de la evolución proponiendo un enfoque cinemático en el cual la trayectoria descrita en el espacio de estados físicos es el concepto fundamental para la fase geométrica. En su desarrollo, se parte de la consideración de una curva uniparamétrica y suave $C \subset N_0$, conformada por una dada secuencia de estados $|\psi(t)\rangle$:

$$C = \{ |\psi(t)\rangle \in N_0 \mid t \in [0, T] \subset \mathbb{R} \}, \quad (2.14)$$

donde no se hace ninguna suposición respecto de si C es una curva abierta o cerrada, ni del origen dinámico de la secuencia de estados. Se observa luego detenidamente la cantidad $\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle$ construida a partir de esta curva. La condición de unitariedad implica que esta cantidad sea imaginaria pura, lo que puede escribirse como

$$\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = i \operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle. \quad (2.15)$$

Por otra parte, aplicando una transformación $U(1)$ de gauge

$$C \rightarrow C' : |\psi'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle, \quad t \in [0, T], \quad (2.16)$$

la cantidad analizada transforma según

$$\operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \rightarrow \operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle + \dot{\alpha}(t). \quad (2.17)$$

Lo que se quiere conseguir es una funcional que sea invariante ante transformaciones $U(1)$ (Ec. (2.16)), es decir, toma mismos valores para curvas C y C'

$$\phi_u[C] \equiv \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle - \text{Im} \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \middle| \dot{\psi}(t) \right\rangle \quad (2.18)$$

Está permitido definir este funcional de la curva C en el espacio de rayos, ya que es invariante ante reparametrizaciones. Algo importante de remarcar es que, si se aplica una transformación unitaria arbitraria a nuestro estado, entonces al cambiar el Hamiltoniano también cambiará la curva que describe el estado inicial en el espacio de Hilbert, y por lo tanto se puede mostrar que la fase geométrica cambia. Por suerte, en el caso que la transformación no depende del tiempo, entonces se demuestra que la fase no cambia.

2.4. Fases geométricas en sistemas abiertos

Las secciones anteriores tratan la fase geométrica en diferentes casos, ascendientes en generalidad, ya que se logra relajar condiciones e hipótesis, y se llegó a una expresión general que satisface propiedades importantes, como invarianza ante transformaciones de fase global $U(1)$ y a reparametrizaciones monótonas. También dependen únicamente de la trayectoria descrita por el estado físico en el espacio de rayos y no del Hamiltoniano que genera dicha trayectoria, y finalmente son interpretables en términos puramente geométricos.

Sin embargo, estamos asumiendo que el estado es puro durante toda su evolución, restricción que es una idealización y experimentalmente es necesario tener en cuenta que todo sistema físico está en contacto con un entorno. Se requiere entonces una descripción en términos de estados mixtos y evoluciones no unitarias. Muchos esfuerzos [[16]-[18]] se concentraron en definir la fase geométrica acumulada por un estado mixto, incluso existen reportes experimentales [19]. Otra ruta explorada considera el efecto del entorno como correcciones que permitan mantener las nociones de fase geométrica del caso unitario. Trabajos de este tipo introducen el efecto del entorno mediante un Hamiltoniano no hermítico [20, 21], y otros estudian modificaciones a la fase de Berry por ruido clásico en el campo magnético [22], o por un entorno cuántico [23, 24], tanto desde lo teórico como lo experimental [25, 26].

El marco en el cual una fase geométrica para sistemas cuánticos abiertos debe definirse es el siguiente: se supone que el efecto del entorno sobre el sistema de interés es tal que, bajo aproximaciones adecuadas, el sistema puede tratarse *efectivamente* como un sistema aislado que experimenta un tipo de evolución lineal no unitaria:

$$\Sigma : \rho(0) \rightarrow \Sigma_t[\rho(0)] \equiv \rho(t), \quad (2.19)$$

que da cuenta tanto de la dinámica interna del sistema como de su interacción con el entorno, y satisface una ecuación maestra. Una consecuencia de este enfoque es que, en el caso general, un estado inicial puro evoluciona en un estado mixto $\rho(t)$. El operador densidad que representa el estado del sistema admite una descomposición $\{|\psi_k(t)\rangle, \omega_k(t)\}$

en estados puros $|\psi_k(t)\rangle$ pesados con probabilidades $\omega_k(t)$, que permite expresarla como

$$\rho(t) = \sum_k \omega_k(t) |\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)|. \quad (2.20)$$

La asociación $\rho(t) \rightarrow \{|\psi_k(t)\rangle, \omega_k(t)\}$ entre el operador densidad y el *ensamble* de estados $\{|\psi_k(t)\rangle\}$ no es uno-a-uno, sino uno-a-muchos, lo que significa que en general existen diferentes ensambles, con diferentes estados y diferentes pesos, que sin embargo tienen la misma matriz densidad. Esto imposibilita la distinción entre estas situaciones solamente con la información que proporciona la matriz densidad.

Una estrategia recurrente en la literatura que aborda el problema de asociar una fase geométrica a un estado mixto $\rho(t)$ es descomponer formalmente la matriz densidad en una mezcla estadística como la de la ecuación anterior, y aplicar la fase unitaria Ec. (2.18) sobre cada elemento de la mezcla para asociar una fase a $\rho(t)$. Esto fue propuesto, desde una descripción en términos de operadores de saltos en [20, 21] y posteriormente en [27]-[30]. En una aproximación diferente al problema, Tong et al. [31] propone una definición de fase geométrica que se vale de una purificación del estado, pero resulta independiente de la elección que se utilice para purificar. La siguiente sección desarrolla esta propuesta en particular.

2.4.1. Enfoque cinemático en sistemas abiertos

La introducción teórica concluye con esta sección, siguiendo la propuesta de Tong et al. [31] para la fase geométrica en sistemas cuánticos abiertos. Para ésto, se considera un sistema y el espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión N . La evolución del estado puede describirse como una curva $C \subset \mathcal{P}$

$$C : t \in [0, T] \rightarrow \rho(t) = \sum_{k=1}^N \omega_k(t) |\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)|, \quad (2.21)$$

donde $\omega_k(t) \geq 0$ y $|\psi_k(t)\rangle$ son los autovalores y autoestados, respectivamente, de la matriz densidad $\rho(t)$ del sistema. Por simplicidad se asume que las funciones $\omega_k(t)$ que no son nulas, son no degeneradas en el intervalo de estudio $[0, T]$, y se refiere al trabajo original [31] para su generalización al caso degenerado.

Para introducir una noción de fase geométrica bajo estas condiciones, se comienza por realizar una purificación del estado mixto, haciendo uso de un sistema auxiliar con un espacio de Hilbert de igual dimensión que el espacio original. El estado mixto se eleva entonces a un estado purificado de mayor dimensión

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(t)} |\psi(t)\rangle \otimes |a_k\rangle, \quad (2.22)$$

donde $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{aux}$ es la purificación de $\rho(t)$, en el sentido de que la matriz densidad se recupera tomando traza parcial sobre el espacio auxiliar.

La fase de Pancharatnam entre las purificaciones inicial y final puede escribirse como

$$\phi_P = \arg \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(0)\omega_k(T)} \langle \psi_k(0) | \psi_k(T) \rangle \right), \quad (2.23)$$

Para extraer la fase asociada al sistema de interés, es necesario eliminar la dependencia en la purificación específica utilizada. Para esto, sabiendo que para cada instante $t \in [0, T]$ las bases $\{|\psi_k(t)\rangle\}$ y $\{|\psi_k(0)\rangle\}$ son bases ortonormales del mismo espacio, existe entonces una transformación que lleva de un conjunto a otro $|\psi_k(t)\rangle = U(t)|\psi_k(0)\rangle$, $\forall k$. El paso esencial para arribar a una fase puramente geométrica es el de notar que en realidad, existe una clase de equivalencia de mapas unitarios $\tilde{U}(t)$ que realizan todas la misma curva C . Específicamente, la expresión de la Ec. (2.21) que define la curva es manifiestamente invariante ante transformaciones de gauge $U(1)$, de forma que dos transformaciones unitarias $U(t)$ y $U'(t)$ que mapeen $\{|\psi_k(0)\rangle\}$ en $\{|\psi_k(t)\rangle\}$ o en $\{e^{i\alpha_k(t)}|\psi_k(t)\rangle\}$ resultan equivalentes. Los mapas $U(t)$ que en la clase de equivalencia tienen la forma

$$\tilde{U}(t) = U(t) \sum_{k=1}^N e^{i\alpha_k(t)} |\psi_k(0)\rangle\langle\psi_k(0)|. \quad (2.24)$$

En particular, puede identificarse el mapa $U^\parallel(t)$ que satisface la condición de transporte paralelo para cada $|\psi_k(t)\rangle$, es decir

$$U^\parallel(t) = U(t) |\langle\psi_k(0)| U^\dagger(t) \dot{U}(t) |\psi_k(0)\rangle = 0 \quad \forall k, \quad (2.25)$$

y definir la fase geométrica como la diferencia de fase Ec. (2.23) para este mapa particular. Sustituyendo en la Ec. (2.24) que describe la relación de equivalencia entre operadores, se obtiene que

$$\alpha_k(t) = i \int_0^t dt' \langle\psi_k(0)| U^\dagger(t') \dot{U}(t) |\psi_k(0)\rangle, \quad (2.26)$$

y en consecuencia, la fase geométrica resulta

$$\phi_g[C] = \arg \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(0)\omega_k(T)} \langle\psi_k(0)|\psi_k(T)\rangle e^{-\int_0^T dt \langle\psi_k(t)|\dot{\psi}_k(t)\rangle} \right). \quad (2.27)$$

La definición propuesta satisface las condiciones que rigen sobre una noción geométrica razonable para un estado mixto, que son: (i) Efectivamente es una fase, dado que su definición a través de la función argumento impone una periodicidad bien definida, (ii) es manifiestamente invariante de gauge ya que toma el mismo valor para cualquier operador unitario $U(t)$ en la clase de equivalencia descrita por la Ec. (2.24), y por lo tanto depende únicamente por el camino C trazado por la matriz $\rho(t)$ del sistema y (iii) cuando la evolución es unitaria, se recuperan los resultados anteriores para estados puros, y para estados iniciales mixtos [18] y [32]. Finalmente (iv) es accesible experimentalmente, por ejemplo usando interferometría o tomografía cuántica.

Será de utilidad para su aplicación, el caso particular en que el sistema se encuentre inicialmente en un estado puro $|\psi(0)\rangle$. En tal situación, la descomposición de la matriz

densidad del sistema en el instante inicial solo tendrá un autovalor distinto de cero: $\omega_+(0) = 1$. En consecuencia, la sumatoria en la Ec. (2.27) posee un único término no nulo, y la fórmula se reduce a

$$\phi_g[C] = \arg \langle \psi(0) | \psi_+(T) \rangle - \text{Im} \int_0^T dt \left\langle \psi_+(t) \middle| \dot{\psi}_+(t) \right\rangle. \quad (2.28)$$

Esta expresión admite la interpretación de fase geométrica acumulada por el autoestado $|\psi_+(t)\rangle$. Esta formulación ha sido ampliamente usada por su interés teórico y experimental en diferentes sistemas [33]-[38].

MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

En este capítulo se analizará en profundidad el modelo de Jaynes-Cummings (JC), abordando el problema tanto desde un lado teórico, como computacional, necesario para resolver posteriormente la dinámica en sistemas abiertos. Siguiendo los pasos del trabajo [39], se trabajará en el modelo de un átomo en una cavidad, se analizarán los casos importantes, y se explicará la dinámica del problema. Esto resulta importante para comprender conceptualmente cómo interactúan fundamentalmente la materia y la luz, y nos sirve para lograr buena intuición del problema de dos átomos. También se verá la influencia del entorno sobre la cavidad, permitiendo pérdidas (o absorción) de fotones, y el bombeo coherente que puede excitar espontáneamente al átomo. También se discutirán resultados conocidos sobre la fase geométrica para el modelo de JC disipativo. Finalmente, se extiende el trabajo para considerar un medio no lineal. Se consideran los efectos de las no linealidades sobre las cantidades estudiadas previamente.

3.1. Modelo y aproximaciones

El modelo de JC consiste en describir la interacción entre la materia y la luz de manera cuántica. El experimento más sencillo consta de un átomo de dos niveles atrapado en una cavidad. La simpleza del modelo surge de las aproximaciones e hipótesis que se hacen; en primer lugar, el campo electromagnético dentro de la cavidad puede, en principio, tener infinitos modos, pero para simplificar se considera solo un modo. Entonces el Hamiltoniano que describe el problema es ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_{int}, \\ \hat{H}_A &= \omega \frac{\hat{\sigma}_z}{2}, \\ \hat{H}_C &= \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} = \epsilon \hat{n}, \\ \hat{H}_{int} &= -ig(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde ϵ y ω son las frecuencias naturales de la cavidad y del átomo respectivamente. Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger son los operadores de aniquilación y creación fotónicos de la cavidad; $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es el operador de número de la cavidad, y $\hat{\sigma}_z$ es el operador de Pauli del átomo de dos niveles. Los estados del átomo de dos niveles los llamamos $|g\rangle$ y $|e\rangle$ como estados *ground* y excitado respectivamente, y con esta notación los operadores $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$ son los operadores de subida y bajada atómicos. Con esto en mente, el acoplamiento entre el átomo y la cavidad es mediado por la intensidad g . Este es el modelo de Rabi, para arribar

al modelo de Jaynes-Cummings hay que simplificar la interacción. Lo que se hace es usar la representación de interacción en donde se encuentran dos frecuencias: una que se considera *rotante* y es la diferencia entre las frecuencias características $\epsilon - \omega$, y la otra frecuencia es la suma $\epsilon + \omega$. La aproximación de onda rotante vale cuando las frecuencias son similares ($\epsilon \sim \omega$), y consiste en despreciar la dinámica de los términos contrarrotantes ya que oscilan muy rápidamente en comparación con los términos rotantes. Luego, se puede promediar los efectos de los términos rápidos. Entonces al aplicar esta aproximación, justificada cuando $\epsilon \sim \omega$ y $g \ll \epsilon, \omega$ se obtiene el Hamiltoniano de JC [1]

$$\hat{H}_{JC} = \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+). \quad (3.2)$$

La interpretación de la interacción en este caso es clara: las dos opciones son que el átomo suba un nivel de energía y en consecuencia la cavidad pierda un fotón, o que el átomo baje un nivel, y la cavidad gane una excitación. Este Hamiltoniano conserva el número total de excitaciones $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}$. En este momento es usual aplicar una transformación unitaria $K = \exp\{-i\omega t(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_z/2)\}$ sobre el Hamiltoniano y así se obtiene

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+), \quad (3.3)$$

donde $\Delta = \epsilon - \omega$ es la desintonía o *detuning* entre las frecuencias de la cavidad y el átomo. El experimento más estudiado de este modelo es un átomo de Rydberg atrapado en una cavidad [40]. Como el Hamiltoniano conserva la cantidad de excitaciones es oportuno agrupar los estados en función de la cantidad de excitaciones: $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$. En esta base el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques, donde los elementos de matriz entre estados con diferente cantidad de excitaciones está dado formalmente por

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{N}] = 0 &\implies \langle N' | \hat{H} \hat{N} | N \rangle = \langle N' | \hat{N} \hat{H} | N \rangle \\ &N \langle N' | \hat{H} | N \rangle = N' \langle N' | \hat{H} | N \rangle \\ &\implies \langle N' | \hat{H} | N \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } N' \neq N \\ \langle N | \hat{H} | N \rangle & \text{si } N' = N \end{cases} \end{aligned}$$

donde $|N\rangle$ es un estado con N excitaciones totales. Entonces, para resolver el problema solo se tiene que considerar el subespacio de 2×2 de n excitaciones, cuyo Hamiltoniano es

$$H_n = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Se resuelve el problema de autovalores y autovectores y se obtiene:

$$\begin{aligned} |\psi_-^n\rangle &= \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n\rangle - \sin \frac{\theta_n}{2} |e, n-1\rangle \\ |\psi_+^n\rangle &= \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

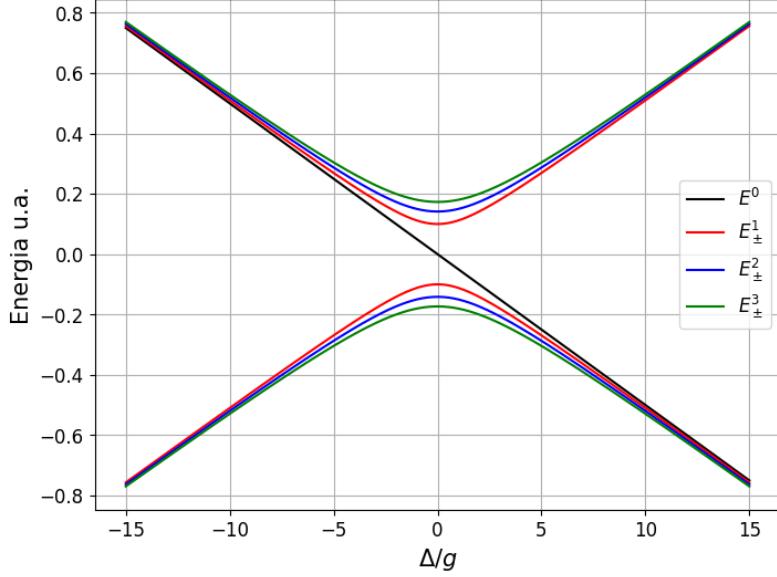


Figura 3.1. Relación energía detunning para el modelo de Jaynes-Cummings. La diferencia de energía entre los estados de un mismo nivel para $\Delta = 0$ es $2g\sqrt{n}$.

con $E_{\pm}^n = \pm \frac{\Omega_n}{2}$ las autoenergias y $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}$ la frecuencia de Rabi del sistema, $\cos \theta_n = \frac{\Delta}{\Omega_n}$ modulando la superposición de estados. En la Figura 3.1 se observan las curvas de energía en función del detuning para diferentes niveles. Lo primero que se tiene que observar es que en el caso resonante, es decir $\Delta = 0$, los autoestados del sistema son los estados máximamente entrelazados de Bell

$$|\psi_{\pm}^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gn\rangle \pm |e, n-1\rangle), \quad (3.6)$$

y la diferencia de energía entre los autoestados es $\Delta E^n = E_+^n - E_-^n = 2g\sqrt{n}$. En el caso muy lejos de resonancia se puede asumir que $\Delta \gg g$, y entonces los autoestados coinciden con los estados de la base,

$$\begin{aligned} |\psi_+^n\rangle &= |e, n-1\rangle \\ |\psi_-^n\rangle &= |g, n\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Acá hay una sutileza, y es que si $\Delta > 0$, entonces $|e, n-1\rangle$ es el estado de mayor energía y la notación coincide con la energía, pero si $\Delta < 0$ entonces el estado $|\psi_+^n\rangle$ es el estado de menor energía. Un efecto interesante es que en el caso de alta desintonía, se puede calcular la diferencia entre la energía del autoestado exacto del Hamiltoniano $|\psi_{\pm}^n\rangle$ y la energía asintótica a la que tiende, que es la energía de los estados de la base $|g, n\rangle, |e, n-1\rangle$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{e,n-1} &= E_+^n - E_{e,n-1}^{(0)} = \frac{g^2}{\Delta}(n+1), \\ \Delta E_{g,n} &= E_-^n - E_{g,n}^{(0)} = -\frac{g^2}{\Delta}(n+1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

El resultado importante de esta diferencia de energías es que aún en ausencia de fotones en la cavidad $n = 0$, hay una diferencia entre las energías del Hamiltoniano del átomo, y

de H_{JC} . Este efecto es el *Lamb Shift* y nos dice que el vacío electromagnético induce un corrimiento en la energía de los estados. Esto es importante notarlo, porque para el caso de dos átomos también se pone manifiesto.

3.1.1. Fase geométrica en el JCM

Ahora, siguiendo los resultados reportados en [11], se va a analizar la fase de Berry (cíclica y en la aproximación adiabática) y la fase geométrica en la formulación cinemática.

Fase de Berry

Para calcular la fase de Berry se tiene que tener un parámetro de control en el Hamiltoniano, el cual varía lentamente. Para esto es necesario aplicar una transformación unitaria de corrimiento de fase $R = \exp\{-i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}\}$ al Hamiltoniano de la Ec. (3.3), obteniendo así

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{-i\Omega} - +\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{i\Omega}), \quad (3.9)$$

que ahora depende explícitamente del parámetro externo de control Ω . Los autoestados de este nuevo Hamiltoniano se obtienen aplicando esta misma transformación sobre los autoestados del Hamiltoniano original. Si el parámetro de control varía lentamente entre 0 y 2π , entonces estamos dentro de las hipótesis propuestas por Berry, y podemos calcular la fase de Berry mediante la Ec. (2.4):

$$\phi_a^n = i \oint_C d\Omega \langle \psi_\pm^n | R(\Omega)^\dagger \frac{d}{d\Omega} | \psi_\pm^n \rangle = \pi(1 \mp \cos(\theta_n)). \quad (3.10)$$

Formulación Cinemática

Para comparar ambos métodos, ahora se calcula la fase geométrica utilizando la aproximación cinemática (aunque este abordaje es más general de lo necesario en este caso). Si se considera que el estado inicial es un autoestado del Hamiltoniano, como los estados $|\psi_\pm^n\rangle$, entonces la fase geométrica en este caso se anula. Pero si se considera un estado inicial, por ejemplo $|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle$, entonces el estado a tiempo t resulta

$$|\psi(t)\rangle = (\cos^2 \theta_n e^{-iE_+^n t} + \sin^2 \theta_n e^{iE_+^n t}) |e, n\rangle - i \sin \theta_n \sin(E_+^n t) |g, n+1\rangle. \quad (3.11)$$

La fase geométrica acumulada Ec. (2.18) es

$$\phi_u[C] = -\pi(1 - \cos \theta_n) \frac{t}{T} + \arg \left\{ 1 + e^{2\pi i \frac{t}{T}} \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n + \Delta} \right\} \quad (3.12)$$

con $T = \frac{2\pi}{\Omega_n}$ es un período correspondiente a la frecuencia de Rabi Ω_n . La FG en la formulación cinemática (Ec. (3.12)) y la de Berry (Ec. (3.11)), deberían coincidir cuando $t = T$, que se corresponde con un ciclo cerrado. En ese caso ($t = T$) se obtiene:

$$\phi_u = -\pi(1 - \cos \theta_n). \quad (3.13)$$

La diferencia de signos se puede explicar comparando las curvas descritas por la esfera de Bloch para cada evolución como muestra la Figura 3.2.

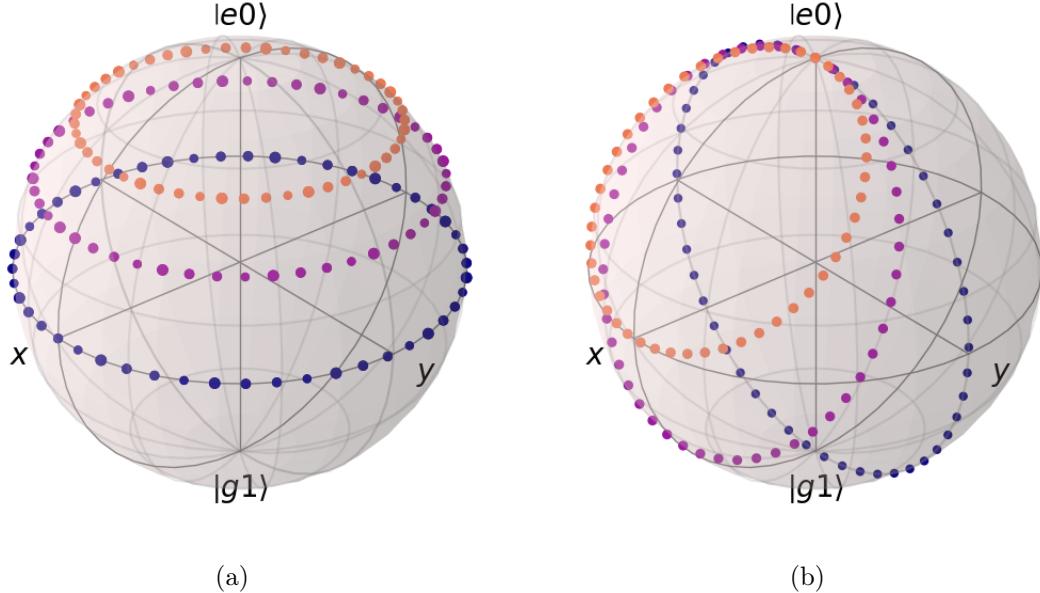


Figura 3.2. (a) Evolución de un autoestado $|\psi_{\pm}(t)\rangle$ bajo un campo de control que introduce cambios de fase. (b) Evolución de un estado genérico $|e, n\rangle$. Las curvas se corresponden con diferentes valores del detuning, que son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = g$ (violeta) y $\Delta = 2g$ (naranja).

La Figura 3.2a muestra la evolución bajo el campo que introduce un corrimiento de fases utilizado para calcular la fase de Berry, los autoestados son los autoestados $R(\Omega)|\psi_{\pm}^n\rangle = e^{-i\Omega\hat{n}}|\psi_{\pm}^n\rangle$, entonces al variar $\Omega \in [0, 2\pi]$ la trayectoria es simplemente un círculo paralelo al ecuador en la esfera de Bloch. En cambio, en el segundo caso, si preparamos el sistema inicialmente en el estado $|e, n\rangle$ y lo dejamos evolucionar por la acción del Hamiltoniano durante un tiempo, la trayectoria no consiste en círculos horizontales en la esfera, sino que parten del polo norte, que es el estado $|e, n\rangle$, y luego hace una trayectoria ovalada, para finalmente volver al punto inicial de partida a un tiempo $t = T$. La diferencia en el signo se explica a través de la transformación que nos lleva de una curva a la otra. Para esto, necesitamos de una rotación rígida, y una inversión de la parametrización, por su parte, esta última, introduce un signo negativo, cosa que se ve claramente en la Ec. (3.12) al cambiar $t \rightarrow -t$.

3.2. Medio no lineal

Para generalizar el resultado anterior, se le agrega un medio no lineal a la cavidad. Este medio se lo conoce como medio Kerr, y agrega un término en el Hamiltoniano de la cavidad Ec. (3.1):

$$\hat{H}_C = \epsilon\hat{n} \rightarrow \hat{H}_C^{\text{Kerr}} = \epsilon\hat{n}\left(1 + \frac{\chi}{\epsilon}\hat{n}\right), \quad (3.14)$$

donde χ es el parámetro que caracteriza al medio de la cavidad Kerr. Este medio hace que la energía de la cavidad dependa de la cantidad de fotones de manera no lineal, donde χ es

la frecuencia/energía característica de la dependencia cuadrática. Si se realiza nuevamente la RWA, se arriba a las mismas conclusiones sobre la forma del Hamiltoniano de la Ec. (3.3) y se obtiene

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \chi \hat{n}^2 + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+), \quad (3.15)$$

y en forma matricial, en el subespacio de n excitaciones $\{|gn\rangle, |e, n-1\rangle\}$:

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} + \chi n^2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \frac{\Delta}{2} + \chi(n-1)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Resolviendo, se obtiene que ahora los autovectores son

$$|\psi_\pm^n\rangle = \frac{1}{N_\pm} \left(\left(-\frac{\Delta}{2} + \chi(n-1/2) \mp \frac{\Omega_{n,\chi}}{2} \right) |gn\rangle + g\sqrt{n} |e, n-1\rangle \right), \quad (3.17)$$

donde $\Omega_{n,\chi} = \sqrt{(\chi(2n-1) - \Delta)^2 + 4g^2n}$, $N_\pm = \sqrt{(-\frac{\Delta}{2} + \chi(n-1/2) \mp \Omega_{n,\chi}/2)^2 + g^2n}$, y las autoenergías son

$$E_\pm^n = \chi(n - \frac{1}{2})^2 + \frac{\chi}{4} \pm \frac{\Omega_{n,\chi}}{2} \quad (3.18)$$

Se puede ver que el resultado con $\chi = 0$ se reduce al caso visto anteriormente, que representa una cavidad con un medio lineal.

Si se quiere resolver la dinámica de este problema para un estado inicial cualquiera, lo que se tiene que hacer es desarrollar este estado inicial en función de los autoestados del problema. Entonces se tendría para un estado arbitrario con un número total de excitaciones definido, que suponemos igual a 1 por simplificación (la generalización es inmediata):

$$|\psi\rangle(t) = U(t)(\langle\psi_+^1|\psi(0)\rangle|\psi_+^1\rangle + \langle\psi_-^1|\psi(0)\rangle|\psi_-^1\rangle) = c_+ e^{-iE_+t} |\psi_+\rangle + c_- e^{-iE_-t} |\psi_-\rangle. \quad (3.19)$$

Resulta interesante notar que al sacar factor común la fase e^{-iE_+t} , la cantidad relevante sigue siendo $\Omega_{n,\chi}$, que es la frecuencia de Rabi para medios tipo Kerr. Por otro lado, el producto interno que da lugar a los coeficientes c_\pm depende de χ , por lo tanto las amplitudes de probabilidad de encontrar al estado temporalmente evolucionado en algún otro estado haciendo una medición proyectiva, depende de χ . Concluyendo que el medio Kerr modifica las amplitudes de oscilación de las poblaciones del estado.

Entonces se analiza la relación entre $\pm\Omega_{n,\chi}/2$ y el detuning, teniendo en cuenta que ahora el medio puede tener $\chi \neq 0$.

Se observa en la Figura 3.3 como se modifica la frecuencia $\pm\Omega(N, \chi)$ para diferentes valores de χ , donde en el panel (a) se muestran las energías para $N = 1$ y en (b) para $N = 2$, en función del detuning. En colores (de más oscuro a más claro) se aprecia cómo el aumento de $\chi \in [0, 2g]$ afecta a las curvas: al aumentar χ , las curvas se desplazan hacia la derecha en una cantidad $\chi(n - 1/2)$.

Este comportamiento se puede predecir mirando la forma de la autoenergía Ec. (3.18), ya que lo que estamos haciendo es desplazando la raíz mediante un cambio de variables $\Delta \rightarrow \Delta - \chi(2n - 1)$. Este desplazamiento depende del número de excitaciones n . Dados dos valores diferentes de χ es de interés saber si al aumentar Δ , aumentan o disminuyen

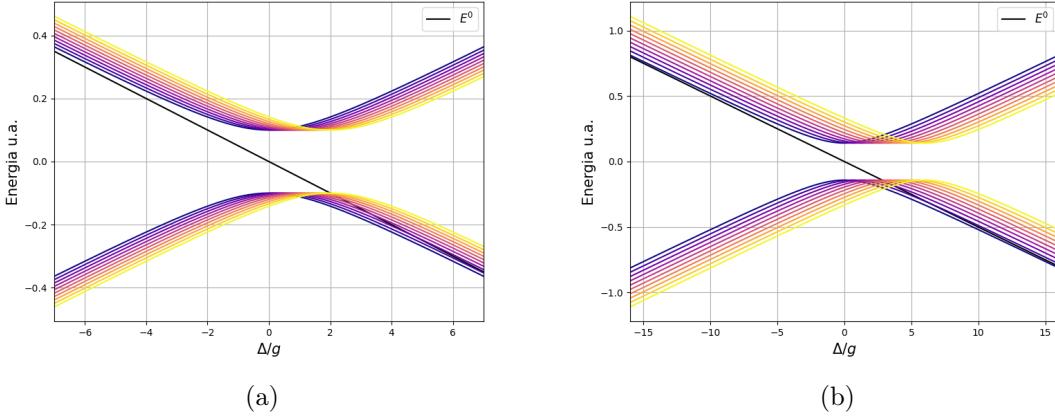


Figura 3.3. Gráfico de la frecuencia de Rabi $\Omega_{N,\chi}$ en función del detunning Δ para (a) $N = 1$ y (b) $N = 2$.

las energías de los estados, por ejemplo, si se comparan dos casos, uno con $\chi_1 = 0$ y otro con $\chi_2 = 0.5g$, y dado un valor de detunning $\Delta = 2g$, cuál de los dos casos tiene una mayor frecuencia?

Para esto se busca la intersección entre dos curvas con diferentes χ , que llamamos χ_1 y χ_2 , con $\chi_1 < \chi_2$. Mediante un cálculo se obtiene que la intersección es para $\Delta = (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$. Es decir, si $\Delta < (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ entonces la frecuencia de χ_2 es mayor que la de χ_1 , y viceversa si $\Delta > (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$.

Ahora, habiendo entendido esto, podemos ver que el efecto del medio es modificar la frecuencia y también la amplitud de la oscilación. En ambos casos, el mínimo de frecuencia y máximo de amplitud se alcanza cuando se cumple que

$$\Delta - \chi(2n - 1) = 0. \quad (3.20)$$

Esta condición se da en el mínimo de energía, y por lo tanto es inmediato concluir que la frecuencia es mínima en este lugar. Además, cuando se cumple esta condición, los autoestados son autoestados de $\hat{\sigma}_x$, y los estados de la base evolucionan según

$$\begin{aligned} |gn(t)\rangle &= \left[A_g \left(\frac{e^{-iE_+t}}{N_+^2} + \frac{e^{-iE_-t}}{N_-^2} \right) - B_g \left(\frac{e^{-iE_+t}}{N_+^2} - \frac{e^{-iE_-t}}{N_-^2} \right) \right] |gn\rangle \\ &\quad + g\sqrt{n} \left[C_g \left(\frac{e^{-iE_+t}}{N_+^2} + \frac{e^{-iE_-t}}{N_-^2} \right) - D_g \left(\frac{e^{-iE_+t}}{N_+^2} - \frac{e^{-iE_-t}}{N_-^2} \right) \right] |e, n-1\rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

con

$$A_g = (-\Delta/2 + \chi(n - 1/2))^2 + \Omega_{n,\chi}^2/4,$$

$$B_g = \Omega_{n,\chi}(-\Delta/2 + \chi(n - 1/2)),$$

$$C_g = g\sqrt{n}(-\Delta/2 + \chi(n - 1/2)),$$

$$D_g = g\sqrt{n}\Omega_{n,\chi}.$$

Para que las oscilaciones sean coherentes, se puede ver que cuando $\Delta - \chi(2n - 1) = 0$ las

constantes $B_g = C_g = 0$, $N_+ = N_- = \sqrt{2}g\sqrt{n}$, y así el estado evoluciona como:

$$|gn(t)\rangle = e^{-i(\chi(n-1/2)^2+\chi/4}} [\cos(\Omega t/2) |gn\rangle - \sin(\Omega t/2) |e, n-1\rangle], \quad (3.22)$$

y la evolución de $|e, n-1(t)\rangle$ debe ser el estado ortogonal. Si no se cumple la condición, entonces las oscilaciones no serán coherentes y su amplitud no será 1.

Una propiedad importante que se observa cuando se cumple la condición $\Delta - \chi(2n-1) = 0$, es que el autoestado del Hamiltoniano es máximamente entrelazado (MES por sus siglas en inglés). Para ver esto se parte de la Ec. (3.17) y la expresión para $\Omega_{n,\chi}$. Por un lado, es fácil ver que $\Omega_{n,\chi} = 2g\sqrt{n}$ y se obtiene

$$|\psi_{\pm}^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gn\rangle \mp |e, n-1\rangle), \quad (3.23)$$

que son estados de Bell.

3.3. Modelo de JC disipativo

Después del análisis de la fase geométrica acumulada por el sistema átomo-cavidad en la situación ideal de completo aislamiento, se aborda ahora el estudio para el escenario más realista en el que el mismo sistema se encuentra en interacción con un entorno, es decir, un modelo de JC disipativo.

Siguiendo la Ref. [39], en esta sección se estudia en detalle la fase geométrica acumulada en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo, como caso paradigmático dentro del campo de la electrodinámica en cavidades. Se considera que los principales mecanismos por los cuales el sistema “átomo + modo” interactúa con el entorno son el flujo de fotones a través de las paredes de la cavidad, y el continuo e incoherente bombeo del sistema de dos niveles, lo que conforma un escenario frecuente en electrodinámica de cavidades semiconductoras [41]-[43].

Para poder modelar estos mecanismos, se emplea la ecuación maestra fenomenológica de Lindblad (ver Ap. A)

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (2L_{\alpha}\rho(t)L_{\alpha}^{\dagger} - \{L_{\alpha}^{\dagger}L_{\alpha}, \rho(t)\}), \quad (3.24)$$

despreciando otros procesos con menor influencia en la dinámica como el desfasaje puro o el bombeo de fotones del entorno en la cavidad, donde además se ha considerado que el entorno se halla a temperatura cero. Los operadores de Lindblad

$$L_{\gamma} = \sqrt{\gamma} a, \quad (3.25)$$

$$L_p = \sqrt{p} \sigma_+, \quad (3.26)$$

representan la pérdida de fotones y el bombeo continuo e incoherente del átomo, respectivamente, con los parámetros γ y p denominados tasa de pérdida de fotones y amplitud del bombeo.

El bombeo sobre el átomo es siempre secundario frente a la pérdida de fotones, lo cual nos da las relaciones $\frac{p}{g}, \frac{p}{\gamma} \ll 1$, y la relación entre γ y g da lugar a dos regímenes que se diferencian con claridad [44]-[48]. El régimen de acoplamiento fuerte (SC o Strong Coupling) aparece cuando la interacción átomo-cavidad es más fuerte que la disipación del entorno, es decir $\gamma/g < 1$. En el caso contrario $\gamma/g > 1$ estamos en el régimen de acoplamiento débil (WC o Weak Coupling). Para no generar confusiones, hay que destacar que, en general, cuando en la literatura se habla de acoplamientos fuertes y débiles, se refiere a la interacción entre las partes del mismo sistema, pero en este caso, se está haciendo referencia a la interacción del sistema con el entorno *en comparación* con la interacción interna del sistema.

3.3.1. Solución y régimen de acoplamiento

En esta ocasión se resuelve el problema restringiéndose al subespacio donde el átomo puede estar en cualquiera de sus dos estados, y la cavidad tiene 1 o 2 fotones. En consecuencia, el problema se limita a un subespacio truncado cuya base son los estados $\{|0\rangle = |g, 0\rangle; |1\rangle = |e, 0\rangle; |2\rangle = |g, 1\rangle\}$. Desarrollar explícitamente el sistema de ecuaciones dadas por la ecuación de Lindblad Ec. (3.24), lleva a ecuaciones para los elementos ρ_{0i} que quedan desacoplados de los demás:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{01} &= -\frac{p}{2}\rho_{01} + i\Delta\rho_{01} + ig\rho_{02} \\ \dot{\rho}_{02} &= -\frac{p}{2}\rho_{02} - \gamma\rho_{02} + ig\rho_{01}\end{aligned}\tag{3.27}$$

con lo cual, si inicialmente los elementos de matriz $\rho_{0i}(0) = 0$, permanecerán así durante toda la evolución del sistema. Para hacer una analogía y comparar con el caso unitario, se estudia la condición inicial $\rho(0) = |e, 0\rangle\langle e, 0|$, de modo que la matriz $\rho(t)$ exhiba una estructura diagonal por bloques. El primer bloque de 1x1 representando al estado $|0\rangle$, y luego un bloque de 2x2 que describe la dinámica entre los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{00} &= -p\rho_{00} + \gamma\rho_{22} \\ \dot{\rho}_{11} &= -ig(\rho_{21} - \rho_{12}) + p\rho_{00} \\ \dot{\rho}_{22} &= -ig(\rho_{12} - \rho_{21}) - \gamma\rho_{22} \\ \dot{\rho}_{12} &= -ig(\rho_{22} - \rho_{11}) - i\Delta\rho_{12} - \frac{\gamma}{2}\rho_{12},\end{aligned}\tag{3.28}$$

se resuelven numéricamente para acceder al estado $\rho(t)$ a tiempo $t > 0$.

En la Figura 3.4a, se muestra el régimen de SC, donde el acoplamiento entre el átomo y la cavidad es mayor al acoplamiento con el entorno, según la relación entre los parámetros $\gamma/g = 0.1$, y en el panel 3.4b, se muestra el caso del WK. En el primer caso, tanto las poblaciones como las coherencias presentan oscilaciones coherentes antes de decaer por la influencia del entorno. En cambio, para el caso de WK, estas oscilaciones coherentes no están presentes y el sistema llega a su estado asintótico en tiempos muy cortos. Las características de la dinámica de cada régimen, influyen profundamente en el estudio de la

3.3. Modelo de JC disipativo

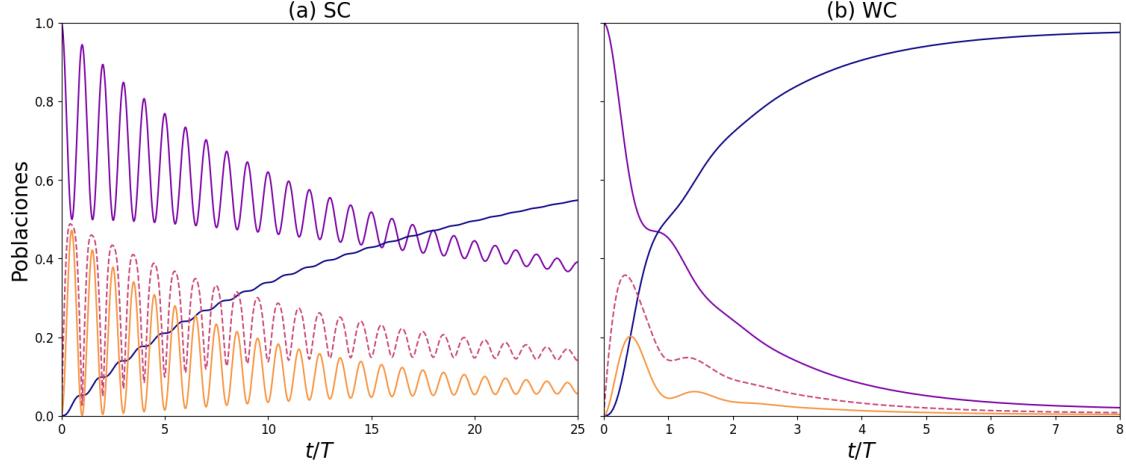


Figura 3.4. Solución numérica al sistema de ecuaciones dada por la ecuación de Lindblad para el estado inicial $|e_0\rangle\langle e_0|$. Estos gráficos se realizaron con $\Delta = 2g$; a la izquierda se observa el régimen de WC con $\gamma = 0.1g$, donde el sistema átomo-cavidad está débilmente acoplado con el entorno, y a la derecha el de SC con $\gamma = 2g$, donde las poblaciones y coherencias decaen sin oscilar. Las líneas sólidas son las poblaciones de los estados, en azul para el estado $|g_0\rangle$, en morado para $|e_0\rangle$ y en amarillo $|g_1\rangle$, y la línea rayada representa la coherencia entre los estados con $N=1$ ($|e_0\rangle$ y $|g_1\rangle$).

fase geométrica, haciendo posible únicamente su utilización en el caso de Strong Coupling, donde la dinámica presenta oscilaciones coherentes durante varios ciclos, antes de decaer, haciendo del régimen de SC el único escenario conveniente para su estudio. Antes de fundamentar esta afirmación, se realiza un estudio poblacional en el caso de una cavidad con medio Kerr. Como se vio anteriormente, el efecto del medio Kerr sobre los autoestados y

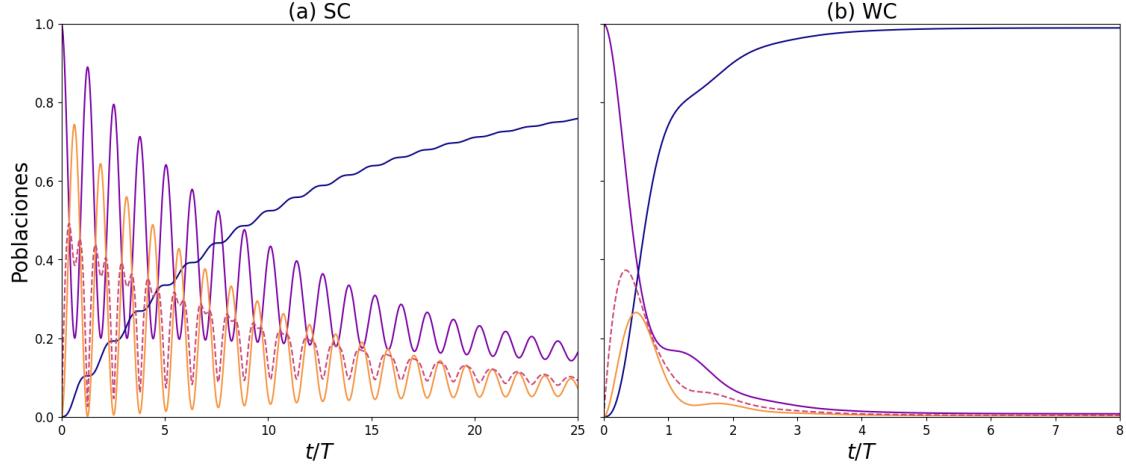


Figura 3.5. Análisis poblacional para una cavidad con medio Kerr con $\chi = 0.5g$. Para la simulación se utilizaron los mismos parámetros que en la Figura 3.4.

las autoenergías es, por un lado, desplazar los niveles de energía. Si se comparan las Figuras 3.4 con 3.5, entonces se pueden observar dos diferencias. La primera es lo mencionado anteriormente; en el mismo tiempo, es decir entre $0 \leq t/T \leq 25$, en el caso de $\chi = 0$ se observan 25 oscilaciones, pero en el caso de $\chi = 0.5g$ solo se observan 23 oscilaciones. Esto se debe a la condición que se encontró al final de la sección 3.2. En este caso se verifica

que $\Delta = 2g > (2n - 1) \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} = \frac{g}{4}$, entonces la diferencia de energías entre los autoestados disminuye al aumentar χ , y por lo tanto, las oscilaciones son más lentas para el caso de $\chi = 0.5g$ en comparación con $\chi = 0$.

3.3.2. Fase geométrica en presencia de disipación

En esta sección se muestran algunos resultados conocidos acerca de la fase geométrica adquirida por el sistema, calculada siguiendo la definición de la Ec. (2.27), y se analiza como esta se ve modificada con respecto del valor unitario por efecto del contacto con el entorno. Como el estado inicial es puro, la definición se reduce al caso particular descrito por la Ec. (2.28).

Los autovalores y autovectores del operador densidad pueden escribirse formalmente diagonalizando el subespacio de 2x2 de la matriz densidad:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 & \dots \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

donde se asume nuevamente una estructura diagonal por bloques, que se da cuando el estado inicial tiene un número definido de excitaciones, dando lugar a dos autovectores. De estos dos, es el de mayor energía el de interés para utilizar la definición de la fase geométrica Ec. (2.28)

$$|\psi_+\rangle(t) = \frac{-(\rho_{22} - \epsilon_+) |e, 0\rangle + \rho_{21} |g, 1\rangle}{((\rho_{22} - \epsilon_+)^2 + \rho_{21}\rho_{12})^{1/2}}, \quad (3.30)$$

con $\epsilon_+ = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{22})^2 + 4\rho_{12}\rho_{21}})$ el autovalor asociado. Recurriendo a este resultado, podemos escribir formalmente la fase geométrica en función de los elementos de matriz $\rho_{ij}(t)$ [11]:

$$\phi_g(t) = \int_0^t dt' \frac{\text{Im } \dot{\rho}_{21}\rho_{12}}{(\rho_{22} - \epsilon_+)^2 + \rho_{12}\rho_{21}}. \quad (3.31)$$

En general, esta fase diferirá de aquella acumulada en una evolución unitaria de forma que puede escribirse, sin pérdida de generalidad, como $\phi_g = \phi_u + \delta\phi$, con $\delta\phi$ la diferencia entre la fase unitaria y aquella modificada por la presencia del entorno. Caracterizar la corrección $\delta\phi$ permite relacionar este objeto, perteneciente a la geometría misma del espacio de Hilbert, con los efectos de disipación y decoherencia experimentados por el sistema, así como determinar bajo qué circunstancias $\delta\phi$ resulta despreciable y se puede considerar que la fase geométrica es robusta (o no) al efecto del entorno.

Dependencia con el régimen de acoplamiento

En la Figura 3.6 se muestra la fase geométrica acumulada en función del tiempo adimensionalizado por un tiempo característico $T = \frac{2\pi}{\Omega_{n,\chi}}$, para el estado inicial puro $|e, 0\rangle$, comparando 4 casos para la relación γ/g pertenecientes al régimen de SC. Como referencia,

además, se muestra la fase geométrica unitaria.

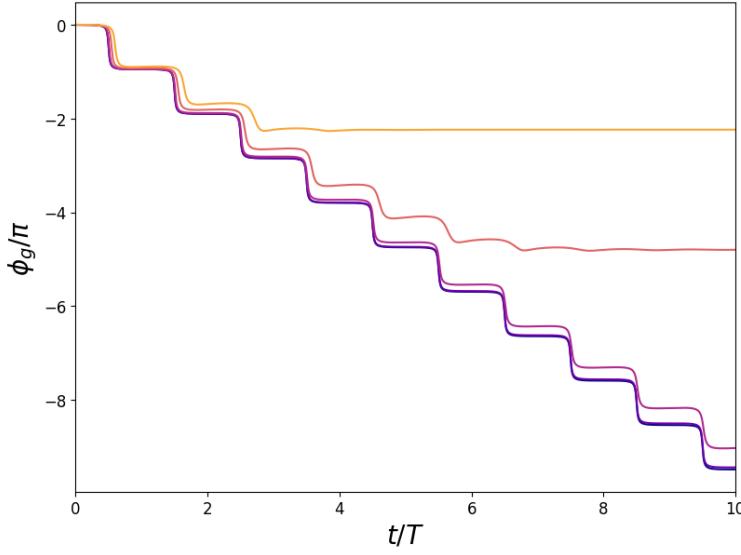


Figura 3.6. Fase geométrica acumulada por un sistema con un detuning $\Delta = 0.1g$, para diferentes valores característicos del entorno. En todos los casos la tasa de bombeo es $p = 0.005g$, y se muestran diferentes valores para γ , partiendo de $\gamma = 0$ perteneciente a la línea azul oscuro que es el caso unitario, y para $\gamma = 0.01g, \gamma = 0.1g, \gamma = 0.5g$ y $\gamma = g$, correspondientes a las líneas violeta, rosa, naranja y amarilla.

Al aumentar la interacción con el entorno, aumenta la diferencia $\delta\phi$ entre la fase acumulada con aquella correspondiente al caso unitario. Sin embargo, si el valor aumenta demasiado, la pérdida de coherencia detiene el movimiento del estado y consecuentemente la acumulación de fase. Por esto es que el estudio sobre la fase geométrica debe ser en el régimen de SC, ya que si la relación $\gamma/g \gg 1$, la fase dejará de acumularse luego de un período muy corto de tiempo.

Dependencia con el detunning

Ya que las amplitudes de los estados y las frecuencias de oscilación dependen de los parámetros del problema, entonces la curva que describe el estado en el espacio de rayos dependerá también de estos, heredando así la fase geométrica una dependencia con los parámetros. Manteniendo las características del entorno iguales, se estudia la dependencia de la fase geométrica con el detunning Δ . En la Figura 3.7 se observa que conforme se aumenta el detunning átomo-caidad, la fase acumulada es menor (en valor absoluto) y se suaviza.

Como se discutió anteriormente, la fase geométrica en presencia del entorno se puede descomponer en la parte unitaria ϕ_u dada por la Ec. (2.18), más una corrección $\delta\phi$ que refleja la desviación introducida por el entorno. La dependencia de la componente unitaria en Δ/g está explícita en la Ec. (3.12). Surge entonces la pregunta de la dependencia del término $\delta\phi$ con respecto a los parámetros del problema, o si toda la dependencia se encuentra contenida en la parte unitaria ϕ_u . Para tratar con esta pregunta se analiza la corrección $\delta\phi$ en un instante dado (que se elige y se mantiene fijo), observándola como función del valor de Δ/g . El resultado se presenta en la Figura 3.8, en el cual se contrasta además esta dependencia para tres entornos caracterizados por distintos valores de tasa de perdida de fotones γ . Puede verse que la corrección en efecto depende del valor del

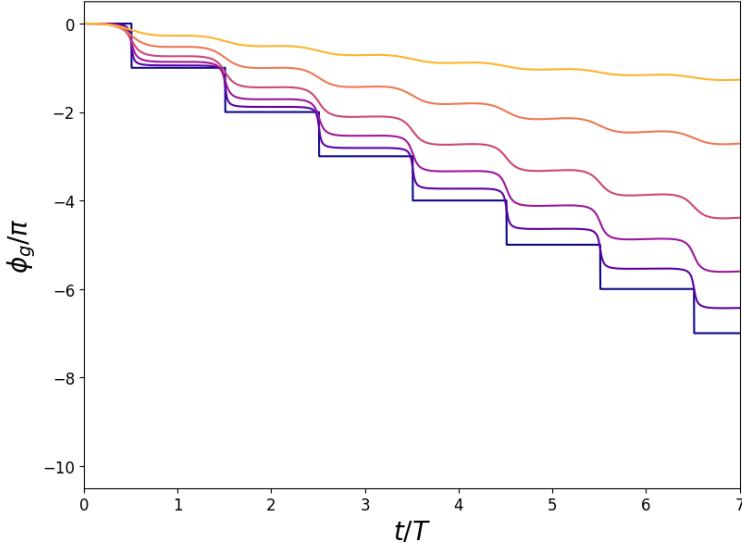


Figura 3.7. Fase geométrica acumulada por el estado inicial para diferentes valores del detuning. El entorno está caracterizado por una tasa de bombeo $p = 0.005g$ y una tasa de pérdidas $\gamma = 0.1g$. Los valores de Δ varían entre 0 (línea azul) y $2.5g$ (línea amarilla).

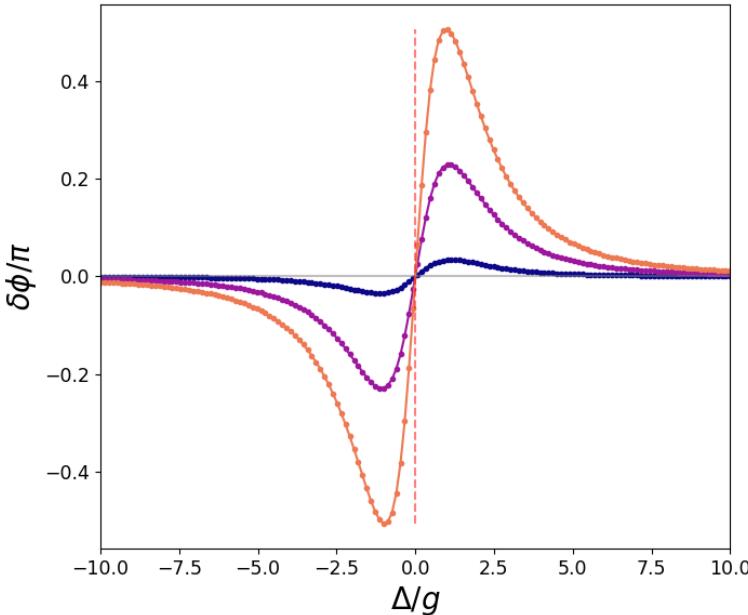


Figura 3.8. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad Δ , para $\chi = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.

detuning Δ/g , y dos aspectos resaltan. En primer lugar, la corrección se anula, en todos los casos considerados, cuando se satisface la condición de resonancia $\Delta = 0$. Este hecho resulta prometedor, insinuando que en este caso la fase geométrica ϕ_g resultaría robusta a los efectos de un entorno en el régimen de SC. La otra característica de la corrección $\delta\phi$ que se revela en la Figura 3.8 es la no-monotonía de la corrección como función de Δ/g , que exhibe un extremo para un valor Δ/g que depende débilmente tanto en las constantes γ/g y p/g que caracterizan el entorno como en el instante t en el que se realiza la observación. De esta forma la Figura 3.8 despierta un interés doble, ya que permite identificar: (i) las condiciones en las cuales el efecto del entorno sobre la fase geométrica es mayor, acercando la posibilidad de una detección experimental y, (ii) las condiciones que mitigan, permitiendo ignorarlo, este efecto o incluso que lo eliminan por completo.

Dependencia con el medio Kerr

Ahora se considera la dependencia con el medio Kerr. Al estudiar los efectos del detuning, se consideró que la cavidad era lineal, es decir $\chi = 0$. Es ahora el objeto de estudio ver cómo se modifican la fase geométrica y los resultados obtenidos para el detuning al considerar un medio Kerr. En primer lugar, se muestra la dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores de χ/g , considerando un entorno idéntico en todos los casos, con un valor fijo del detuning.

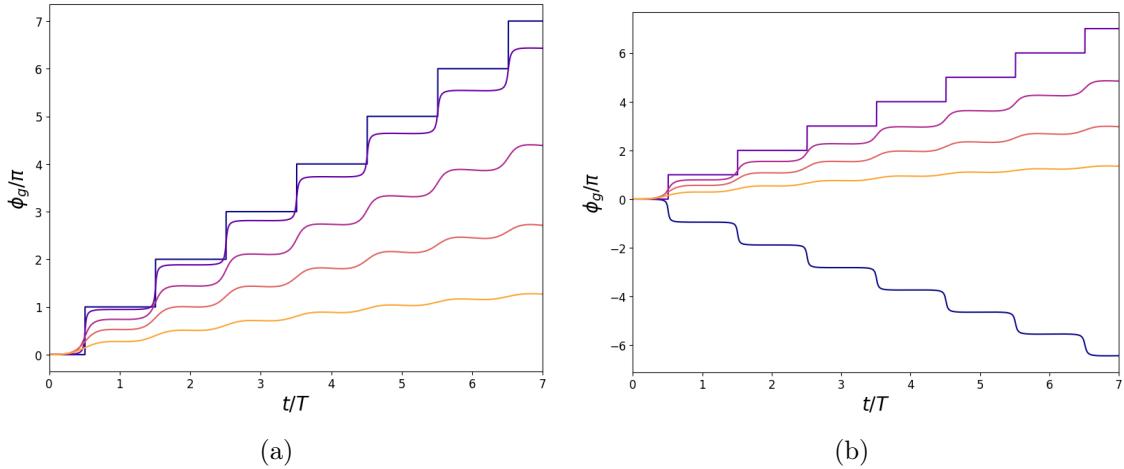


Figura 3.9. Dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores del medio Kerr dados por $\chi = 0, 0.1g, 0.5g, g$ y $2g$ representados por colores partiendo del mas oscuro al mas claro, y un valor fijo del detuning: (a) $\Delta = 0$ y (b) $\Delta = 0.1g$

En la Figura 3.9a se observa el efecto del medio sobre la fase geométrica acumulada, donde la línea azul oscuro, correspondiente al caso $\chi = 0$ se corresponde con el caso robusto en donde tenemos una acumulación por escalones. Al comparar con la fase correspondiente a $\Delta = \chi = 0$ de la Figura 3.7 hay una diferencia notable, y es que en esta la fase acumulada es negativa, mientras que en la Figura 3.9a es positiva. Esta discrepancia entre simulaciones para los mismos parámetros se debe a algo numérico.

Al aumentar el parámetro χ , similarmente al caso del detuning, la fase acumulada es menor y se suaviza. Este comportamiento es algo esperable, ya que en la ecuación para la energía el detuning Δ y el medio χ están casi en igualdad de condiciones, en el sentido que la dependencia funcional de la energía en estos parámetros es igual. En la Figura 3.9b, donde se consideró un valor de $\Delta = 0.1g$, se aprecia como el caso de $\chi = 0$ (línea azul oscuro), ya no pertenece al caso robusto, sino que esta situación se recupera cuando $\chi = 0.1g = \Delta$ (línea morada). Al seguir aumentando χ el comportamiento es igual que antes, la fase se acumula más lentamente y los escalones se suavizan. Este resultado insinúa que para la fase geométrica, el medio y el detuning también están en igualdad de condiciones. Dos preguntas son pertinentes para confirmar esta intuición. En primer lugar, para corroborar la dependencia de la fase geométrica en el parámetro χ , hay que realizar el estudio de la dependencia de la diferencia de fases geométricas $\delta\phi$ al igual que en el caso del detuning. En segundo lugar, se quiere ver como cambia la robustez en función del detuning si cambiamos el medio. Por lo tanto se repetirá el estudio en función del

detuning, pero para diferentes valores de χ .

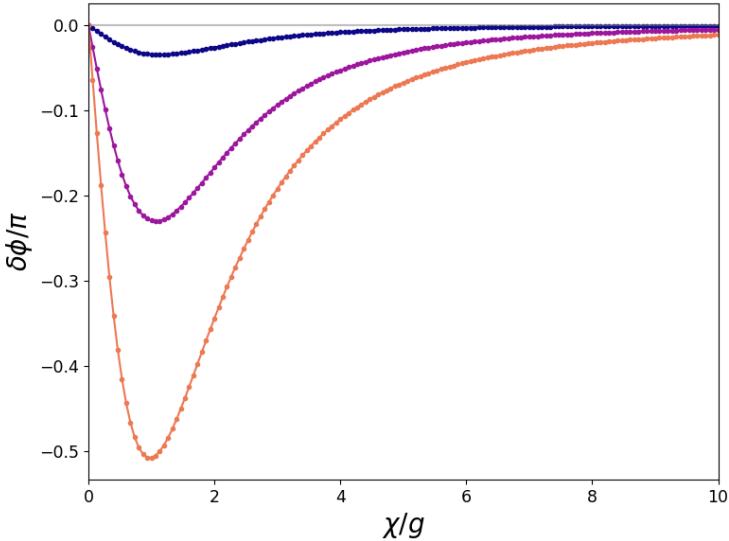


Figura 3.10. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio χ , para $\Delta = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.

En la Figura 3.10 se observa la dependencia de la diferencia en la fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio χ . El comportamiento es el mismo que con el detuning: la diferencia se anula para $\chi = 0$, que coincide con el caso de robustez $\Delta = 0$. La diferencia es que ahora la fase acumulada es negativa, pero solo es una reflexión con respecto al caso anterior. Esto se debe a que el detuning Δ y el parámetro del medio χ , tienen signos diferentes en todas las expresiones vistas anteriormente y la fase hereda este signo, conservando los demás comportamientos. En este caso también hay un máximo no trivial que depende suavemente de los parámetros γ/g y p/g , consecuentemente la dependencia en la fase geométrica en este parámetro no es trivial, y al igual que en el caso del detuning, es no-monótona, por lo tanto tiene las mismas implicaciones que en el caso anterior. Resulta interesante estudiar como se comportan ambos parámetros en conjunto. Se espera que, por los comportamiento observados hasta ahora, en realidad la dependencia general sea en $\Delta - \chi(2n - 1)$, por lo tanto, se realiza nuevamente el estudio de robustez en función del detuning, para un valor $\chi/g = 1$, que se observa en la Figura 3.11. Se observa ahora una simetría al rededor de $\Delta = \chi = g$, donde se encuentra el cero de esta relación. Esto es lo que se esperaba, ya que en este caso de $n = 1$, la dependencia será en $\Delta - \chi(2n - 1) \implies \Delta - \chi$, es decir, si en el caso de $\chi = 0$ la robustez se da para $\Delta = 0$, la predicción es que los demás casos robustos se den en general cuando se cumple la relación

$$\Delta - \chi(2n - 1) = 0 \quad (3.32)$$

comportamiento que se observa en la Figura 3.11.

Además, cuando se cumple esta condición, los autoestados del problema son los estados máximamente entrelazados de Bell, al igual que en el caso de medio lineal Ec. (3.23).

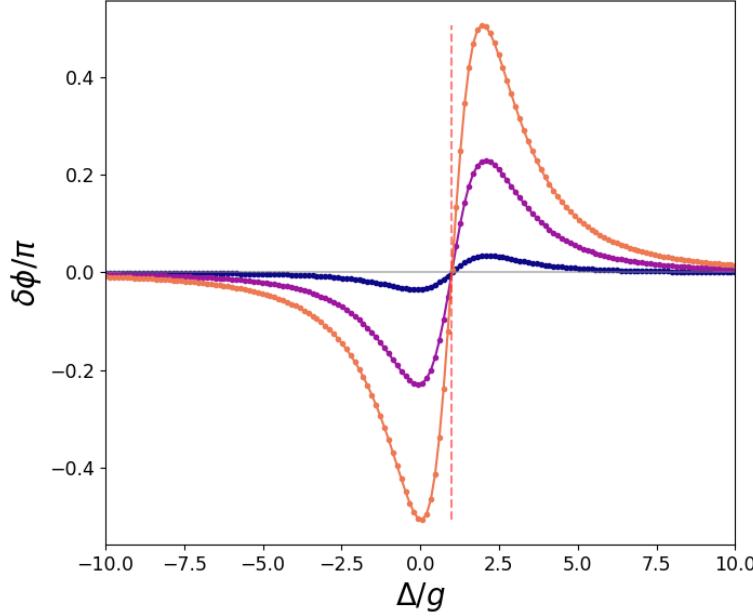


Figura 3.11. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad Δ , para $\chi = g$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. Se observa como la condición de robustez se alcanza para $\Delta/g = \chi/g = 1$.

Robustez de la fase geométrica en el caso resonante

En esta sección se discute la razón detrás de la robustez en los casos estudiados anteriormente.

Como se ha mencionado, las Figuras 3.8, 3.10 y 3.11, muestran el resultado notable de que la diferencia $\delta\phi$ entre la fase geométrica acumulada en una hipotética evolución unitaria y la fase geométrica acumulada por el sistema abierto se anula cuando se satisface la condición de resonancia $\Delta = 0$ cuando el medio es lineal, y una segunda condición que llamaremos **condición de robustez**: $\Delta - \chi(2n - 1) = 0$ en el caso de considerar un medio tipo Kerr. La condición de robustez claramente incluye a la primera y es más general. El resultado sugiere que la fase geométrica es robusta a los efectos del entorno en este caso. Esta robustez puede estudiarse y explicarse en términos geométricos analizando la evolución del estado $\rho(t)$ del sistema átomo-modo y se vincula con el salto en π que exhibe la fase geométrica unitaria ϕ_u del sistema resonante, cuyo estado describe un círculo máximo de la esfera de Bloch.

Para explicar el salto en π de la fase unitaria es necesario recordar, como fue desarrollado en las secciones 2.1 y 2.2.1, que la fase geométrica asociada a una trayectoria unitaria no-cíclica puede entenderse como la fase geométrica asociada a una curva cerrada específica: aquella construida a partir de la trayectoria abierta original, luego cerrada mediante una curva geodésica que conecte sus extremos. Esta interpretación permite explicar un salto abrupto en π que muestra la fase geométrica acumulada en la evolución del sistema cuando el estado recorre un meridiano de la esfera de Bloch. Debido a que las geodésicas de la esfera de Bloch son, precisamente, sus círculos máximos, cuando la evolución recorre uno de éstos sin alcanzar a transitar la mitad de su longitud, la curva geodésica que debe considerarse coincide con la trayectoria de forma que la curva cerrada retorna sobre si misma acumulando fase geométrica nula. Por el contrario, si la trayectoria descrita por el estado supera la mitad del círculo máximo, la geodésica que une sus extremos lo completa

encerrando un área de 2π que corresponde a una fase geométrica $\phi_u = \pi$.

Para el caso de un sistema en interacción con el entorno, la identidad formal entre la ecuación (2.28) y la fase geométrica unitaria para el autoestado $|\psi_+(t)\rangle$ de la matriz densidad demanda el estudio de la curva descrita en la esfera de Bloch por (la proyección de) $|\psi_+(t)\rangle$. Lo que se observa es que para el caso robusto $|\psi_+(t)\rangle$ recorre una trayectoria que se superpone con aquella descrita por su análogo unitario pero que por efecto del entorno resulta de menor longitud (para un intervalo temporal idéntico). En un período $t \in [0, T]$ de evolución, entonces, el rayo asociado al estado $|\psi(t)\rangle$ retorna al punto inicial describiendo una trayectoria cíclica, mientras que aquél asociado a $|\psi_+(t)\rangle$ describe una curva abierta. Sin embargo, esto no afecta el valor obtenido para la fase geométrica que resulta $\phi_g = \pi$ siempre que el rayo recorra más de la mitad del círculo máximo. En consecuencia, siempre y cuando los efectos disipativos no sean lo suficientemente destructivos como para impedir que el autoestado supere el polo opuesto en un intervalo $t' \in [0, T]$, la fase geométrica acumulada en un período no se verá afectada. En este sentido, el caso robusto resulta entonces la situación ideal para realizar detecciones experimentales o implementar aplicaciones tecnológicas que requieran un escenario en que se puedan despreciar los efectos del entorno.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se estudió en detalle la dinámica, y los efectos del medio Kerr sobre el modelo de JC. También se consideró el efecto del entorno sobre las poblaciones y en particular, el efecto que éste tiene sobre la fase geométrica. Se logró extender el entendimiento de la condición de robustez de la fase geométrica encontrado en la Ref. [11] para englobar el caso más general de un medio no lineal de tipo Kerr, donde el resultado importante es que en general, la robustez se da para $\Delta - \chi(2n - 1) = 0$.

JAYNES-CUMMINGS DE DOS ÁTOMOS CON MEDIO Y ACOPLAMIENTO NO LINEAL

En este capítulo se extiende el modelo de Jaynes-Cummings presentado en el capítulo 3. Lo más importante es que ahora se tienen dos átomos dentro de una misma cavidad. En la literatura en general, el modelo de JC fue extendido para considerar dos cavidades donde cada una tiene su propio átomo, y usando una condición inicial entrelazada se puede hacer interactuar ambas cavidades. El camino que se toma en este trabajo, es un tanto fuera de lo convencional, ya que no hay muchos estudios sobre este sistema. El principal obstáculo que presenta este problema, es que el espacio de Hilbert se duplica con respecto al caso de 1 átomo, y se torna inmanejable analíticamente. Como bien es sabido, el JCM tiene subespacios de 2 dimensiones que no se mezclan. Utilizando esta estrategia pero con dos átomos, se tendrán subespacios de 4×4 que tampoco se mezclan en el caso unitario. Esto permite encontrar algunas expresiones analíticas, pero en general se utilizarán métodos numéricos para analizar la dinámica.

Este capítulo entonces seguirá un hilo conductor, partiendo desde el caso más sencillo hasta llegar a analizar cuáles son los efectos de los diferentes parámetros en el problema, y particularmente se considerarán los efectos que éstos tienen sobre la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos. Primero se resolverá el problema unitario de manera exacta, y se analizarán las energías. Luego, para comprender las partes del problema, se aislará uno de los dos átomos, haciéndolo invisible a las interacciones con el otro átomo y con la cavidad. El objetivo de esto será recuperar numéricamente los resultados del capítulo anterior. Al terminar ese análisis, se continuará preudiendo las interacciones del átomo que se aisló del sistema, volviendo al problema completo. En este contexto se estudiará la dinámica poblacional y principalmente la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos. Para esto es necesario trazar sobre la cavidad, obteniendo así una matriz densidad reducida que solo tiene en cuenta la dinámica de los dos átomos. Los efectos de la cavidad estarán entonces contemplados de manera efectiva, y no implícita. El efecto que tienen las interacciones del problema sobre el entrelazamiento entre los átomos, será la última parte de este capítulo.

4.1. Modelo de dos átomos y solución unitaria

Este trabajo se concentra en una extensión del modelo, donde se ubican dos átomos dentro de la cavidad. Estos átomos pueden interactuar entre sí, y con la cavidad, y además se consideran no-linealidades en el acoplamiento y en el medio. Se utiliza un modelo de Jaynes-Cummings para describir la interacción entre el campo electromagnético y los átomos. Además se supondrá que el acoplamiento depende de la cantidad de fotones y los átomos podrán interactuar entre sí mediante un término tipo Ising y otro tipo dipolo-dipolo. Recordemos que se asume que vale la aproximación de onda rotante ($\omega_0 \sim \omega$) y $g \ll \omega, \omega_0$. Entonces, el Hamiltoniano que describe este problema es el siguiente ($\hbar = 1$):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \underbrace{\omega_0 h(\hat{n}) \hat{n}}_{\hat{H}_F} + \underbrace{\frac{\omega}{2} (\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)})}_{\hat{H}_A} \\ & + \underbrace{g (\hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{a} f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{a} f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger)}_{H_{FA}} \\ & + \underbrace{2\kappa (\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)}) + J \hat{\sigma}_Z^{(1)} \hat{\sigma}_Z^{(2)}}_{H_{AA}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde \hat{a} es el operador de aniquilación del fotón, ω_0 y ω son las frecuencias del fotón y del átomo respectivamente (ambos átomos en la cavidad tienen la misma frecuencia natural para simplificar el problema), g es la constante de acoplamiento, las constantes J y κ son los parámetros de Ising y de dipolo-dipolo para las interacciones átomo-átomo, y los operadores $\hat{\sigma}^{(i)}$ son las matrices de Pauli que actúan sobre el átomo i -ésimo. Finalmente, las funciones $h(\hat{n})$ y $f(\hat{n})$ son las que dan cuenta de la no linealidad dependiente del número de fotones de la cavidad $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

Un medio tipo Kerr está descrito por la función $h(\hat{n}) = 1 + \frac{\chi}{\omega_0} \hat{n}$ [50], y la función $f(\hat{n})$ describe el tipo de acoplamiento, de las cuales se consideran dos opciones: si el acoplamiento es lineal $f(\hat{n}) = 1$, y si el acoplamiento es no lineal, específicamente se considera de tipo Buck-Sukumar $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$ [51].

En este punto es útil hacer una transformación unitaria $K = \exp \{-i\omega t(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_z/2)\}$ para dejar el Hamiltoniano en función del detuning $\Delta (\sim 0)$.

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \chi \hat{n}^2 + \frac{\Delta}{2} (\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)}) \\ & + g (\hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{a} f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{a} f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger) \\ & + 2\kappa (\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)}) + J \hat{\sigma}_Z^{(1)} \hat{\sigma}_Z^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este es el Hamiltoniano con el que se trabaja, así que a partir de ahora el subíndice I es redundante y se dejará implícito. Obsérvese que el caso de $\chi = 0$ es el caso de un medio lineal.

Este Hamiltoniano se puede resolver analíticamente para el caso de una cavidad sin pérdidas [49]. Lo primero que se nota es que el Hamiltoniano conserva el número de

excitaciones, es decir $[H, \hat{N}] = 0$, y en esta situación es sabido que el Hamiltoniano de JC es diagonal por bloques si se elige convenientemente la base. Esta es la que agrupa los estados con misma cantidad de excitaciones $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{\sigma}_-^{(2)}$:

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \left| \Phi_1^{(n)} \right\rangle = |gg, n\rangle, \left| \Phi_2^{(n)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n-1\rangle + |ge, n-1\rangle), \left| \Phi_3^{(n)} \right\rangle = |ee, n-2\rangle, \right. \\ \left. \left| \Phi_4^{(n)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n-1\rangle - |ge, n-1\rangle) \right\}, \quad (4.3)$$

donde se eligió esta combinación particular, porque el último estado de la base, que es impar ante intercambio, queda desacoplado de los otros. Esto se ve al evaluar los elementos de matriz del Hamiltoniano $H_{i,j} = \langle \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j \rangle$. El subespacio correspondiente a n excitaciones $\hat{H}^{(n)}$ es una matriz de 4x4

$$\hat{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} \chi n^2 - \Delta + J & \sqrt{2}gf(n)\sqrt{n} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}gf(n)\sqrt{n} & \chi(n-1)^2 - J + 2k & \sqrt{2}gf(n-1)\sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}gf(n-1)\sqrt{n-1} & \chi(n-2)^2 + \Delta + J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi(n-1)^2 - J - 2k \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Claramente, el estado impar ante intercambio está aislado, y entonces es autoestado del problema. Por lo tanto evoluciona sólo y no se mezcla con los otros estados. Entonces, para terminar de resolver el problema, hay que diagonalizar la matriz de 3x3. Cabe aclarar que esta matriz solo es válida para una cantidad de excitaciones $N \geq 2$, ya que los subespacios con 0 o 1 excitación no tienen 4 estados. En estos casos la solución del problema de autovalores es más sencilla aún, así que solo se mostrarán los resultados.

Para resolver el problema de autovalores de la matriz de 3x3 se utiliza la fórmula de Cardano para conseguir las raíces triples que aparecen en el polinomio característico, cuyos autovalores son

$$E_j^{(n)} = -\frac{1}{3}\beta_n + 2\sqrt{-Q_n} \cos\left(\frac{\theta_n + 2(j-1)\pi}{3}\right), \quad (4.5)$$

para $j = 1, 2, 3$, y donde:

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{R_n}{\sqrt{-Q_n^3}}\right), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \frac{3\gamma_n - \beta_n^2}{9}, \\
 R_n &= \frac{9\beta_n\gamma_n - 27\eta_n - 2\beta_n^3}{54}, \\
 \beta_n &= -(\chi(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2) + J + 2k), \\
 \gamma_n &= (\chi(n-1)^2 - J + 2k)(x(n-2)^2 + \chi n^2 + 2J) \\
 &\quad + (\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(xn^2 - \Delta + J) - 2g^2(n^{2a} + (n-1)^{2a}), \\
 \eta_n &= -(\chi n^2 - \Delta + J)(\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(\chi(n-1)^2 - J + 2k) \\
 &\quad + 2g^2 [\chi(n-2)^2 n^{2a} + \chi n^2 (n-1)^{2a} + \Delta(n^{2a} - (n-1)^{2a}) + J(n^{2a} + (n-1)^{2a})].
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $a = \frac{1}{2}$ se corresponde con acoplamiento lineal, es decir, $f(n) = 1$, y $a = 1$ a Buck-Sukumar $f(n) = \sqrt{n}$. Los autovalores son reales si $Q_n^3 + R_n^2 < 0$. Con esto podemos escribir los autovectores:

$$\begin{aligned}
 |u_j^{(n)}\rangle &= \frac{1}{N_j^{(n)}} \left[\left((E_j^{(n)} - H_{22}^{(n)}) (E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) - H_{23}^{(n)2} \right) |\Phi_1^{(n)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + H_{21}^{(n)} (E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) |\Phi_2^{(n)}\rangle + H_{23}^{(n)} H_{12}^{(n)} |\Phi_3^{(n)}\rangle \right].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Obviamente el último es el estado $|\Phi_4^{(n)}\rangle$, que también es autoestado, con autovalor $E_4^{(n)} = \chi(n-1)^2 - J - 2k$. Para el subespacio de $N = 0$ solo hay un vector $|\Phi_1^{(0)}\rangle = |gg0\rangle$ y su autovalor es $E_1^{(0)} = -\Delta + J$. Para $N = 1$ se tienen tres vectores en el subespacio, y las autoenergías son

$$E_{1,2}^{(1)} = \frac{\chi - \Delta}{2} + k \pm \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2}, \tag{4.9}$$

$$E_3^{(1)} = -2k - J, \tag{4.10}$$

y sus autovectores

$$\begin{aligned}
 |u_{1,2}^{(1)}\rangle &= \frac{1}{N_{1,2}^{(1)}} (-\sqrt{2}g|gg1\rangle + \left(\frac{\chi - \Delta}{2} + J - k \mp \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \right) \frac{|eg0\rangle + |ge0\rangle}{\sqrt{2}}), \\
 |u_3^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle - |ge0\rangle).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Con esto, se resuelve analíticamente la evolución temporal de cualquier estado inicial. Para esto sólo es necesario desarrollar el estado inicial en términos de los autovectores, y la evolución temporal está dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \sum_{j,n} c_j^{(n)} e^{-iE_j^{(n)} t} |u_j^{(n)}\rangle, \tag{4.12}$$

donde $c_j^{(n)} = \langle u_j^{(n)} | \psi(0) \rangle$. La complejidad de estas expresiones hace difícil conseguir conclusiones interesantes, aun así, algo que se puede notar, es la diferencia fundamental entre

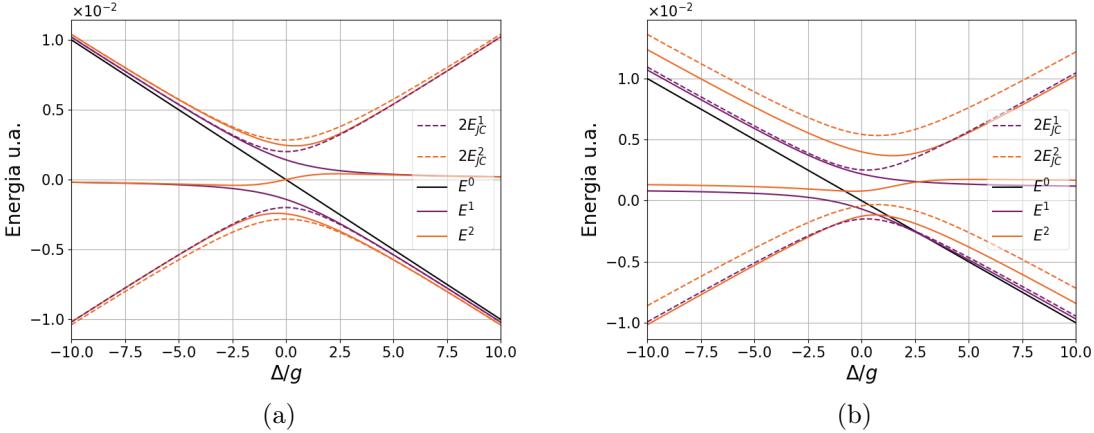


Figura 4.1. Relación entre energía y detuning para los diferentes niveles de energía del problema. Las líneas sólidas muestran la energía de los estados del JC de dos átomos con una cantidad de excitaciones: $N = 0$ (negro, sólido), $N = 1$ (violeta sólido) y $N = 2$ (naranja sólido). También se muestran los niveles de energía del JC de un átomo para $N = 1$ (negro; rayado) y $N = 2$ (naranja; rayado). Obsérvese que las energías del JC de un átomo están multiplicadas por 2. (a) $\chi = k - J = 0$; (b) $\chi = k - J = 0.5g$

las energías con un número total de excitaciones $N = 1$ y $N > 1$. Hay un factor antes de la raíz cuadrada, que para el caso en que $N \geq 2$ es $\frac{1}{3}\beta_n$ que sólo depende de χ , J , k y n . Mientras que en el caso de $N = 1$, este factor depende del detuning Δ . Esto es interesante, ya que uno podría pensar que la fórmula para N excitaciones se puede generalizar para incluir $N = 0, 1$, pero la diferencia fundamental de tener más o menos estados que interactúan entre sí, da lugar a efectos fundamentalmente diferentes. Más en detalle, en el caso de $N = 1$ este factor Δ aparece, ya que en la matriz Hamiltoniana el único estado con $N = 1$ que tiene un término que incluye al detuning, es el estado $|gg1\rangle$. Por lo tanto, este término con Δ sobrevive, al contrario que en todos los demás subespacios, ya que por un lado el término del $|ggn\rangle$ que aporta un Δ , y el término de $|ee, n-2\rangle$ aporta otro Δ pero con el signo cambiado, y elimina la contribución del primer estado a la energía. La consecuencia de esto es que para $N = 1$, si se aumenta el detuning, no sólo se separan los niveles de energía, sino que también hay una asimetría por el término independiente. Para analizar ésto en detalle, en la figura 4.1 se observan las energías de los diferentes niveles en función del detuning.

En la figura 4.1a se observan las energías de los primeros niveles para el modelo de un átomo (líneas rayadas), y de dos átomos (líneas sólidas). Para esta figura se tomaron átomos que no interactúan ($k = J = 0$) y una cavidad lineal ($\chi = 0$). Se puede ver que, si bien el modelo de dos átomos tiene estructuras más complicadas, son similares a las de 1 átomo. En primer lugar, los estados con $N = 2$ (naranja; sólido) tienen una forma igual a la de JC de 1 átomo, si bien está un poco desfasada, es interesante ver como las líneas tienen una coincidencia muy grande. Recordando que en el gráfico las líneas rayadas están multiplicadas por 2, esto tiene una interpretación bastante buena, y es que la energía de dos átomos no interactuantes en una cavidad es igual (o muy parecida) a dos veces la energía de 1 átomo en una cavidad. Esta diferencia se debe al corrimiento Lamb, ya que

ahora al tener dos átomos que interactúan con el vacío, tiene una forma un poco diferente:

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= E_1^n - E_1^{(0)} = \frac{2g^2}{\Delta}(2n - 1), \\ \Delta E_2 &= E_2^n - E_2^{(0)} = -\frac{2g^2}{\Delta}(2n - 1), \\ \Delta E_3 &= 0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Las tres autoenergías presentan correcciones del orden de $\frac{g^2}{\Delta}$ en su valor asintótico, pero la dependencia cambia con respecto al caso de 1 átomo, lo que explica las diferencias de la figura 4.1a. Esta dependencia es sorprendente ya que no es simplemente el doble que el caso de 1 átomo. En la figura 4.1b, donde hay interacción entre átomos, se pierde la analogía con el caso de 1 átomo.

Por otro lado, la energía de los estados con $N = 1$ tienen un término fuera de la raíz, que hace que sea más asimétrico aún. Normalmente, en el JC de 1 átomo, ya que todos los niveles de energía tienen la misma forma funcional, este término de afuera de la raíz se le puede agregar o quitar como un offset en la energía del estado fundamental. La diferencia con este caso es que no todos los niveles de energía presentan esto, entonces si se agrega un offset, igualmente habría una diferencia.

Una observación menor es que si la cavidad es lineal, entonces los estados antisimétricos de diferentes excitaciones $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n\rangle - |ge, n\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n'\rangle - |ge, n'\rangle)$, están degenerados en energía. Esto solo tiene importancia al considerar una cavidad con pérdidas.

Una vez estudiados los niveles de energía y comparados con el caso de 1 átomo, se prosigue con la dinámica del problema, que en el caso unitario puede resolverse analíticamente, pero aún así, la herramienta principal de análisis son las simulaciones numéricas. Para comenzar se quiere recuperar el caso de un átomo. Para esto se trabaja con $k = J = 0$ y se agrega un parámetro adimensional α que solamente actúa sobre el átomo B, y sirve de apantallamiento. Este parámetro α acompaña a las constantes de acoplamiento $g \rightarrow g\alpha$, tal que si $\alpha \rightarrow 0$ entonces el átomo se desacopla de la cavidad.

4.2. Dinámica con apantallamiento

Lo primero que buscamos es recuperar los resultados anteriores para un solo átomo para estar seguros de la extensión posterior a dos átomos acoplados. Para aclarar, en la figura 4.2 se muestra un esquema de cómo es el problema que se está trabajando, con los nombres que se le dan a las partes del sistema. Llamaremos átomo B al que está apantallado mediante el parámetro adimensional α , el índice A se refiere al otro átomo, y C a la cavidad. Entonces, para recuperar los resultados anteriores, se propone que $\alpha = 0$ y la interacción entre los átomos $k = J = 0$. De esta manera, se elige en analogía con el caso de 1 átomo, como estado inicial cualquier estado donde el átomo A esté excitado, y la cavidad C no tenga ningún fotón; por lo tanto se elige el estado inicial más sencillo posible que cumple estas condiciones $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$. Si bien este apantallamiento no tiene un significado físico, y experimentalmente sería en principio, muy difícil de generar, realizar

este estudio sirve para comprender cualitativamente los efectos de cada parámetro del problema, y también, entender que el entrelazamiento entre los dos átomos lleva a efectos impredecibles. La complejización del problema de 1 átomo al de 2 átomos es muy grande, y por eso es necesario ir de a poco. Utilizando esta condición inicial se realiza una simulación

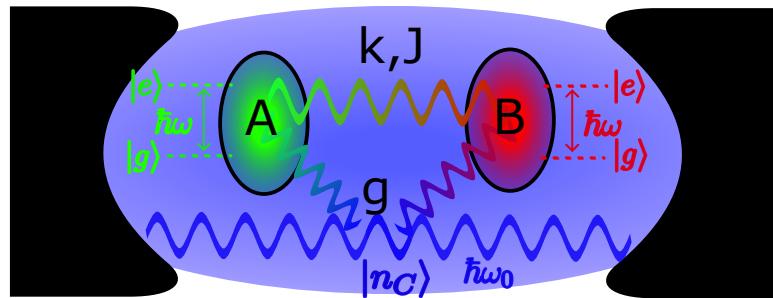


Figura 4.2. Esquema del problema de estudio. Se nombran a las partes para referenciarlas fácilmente: los átomos se identifican por las letras A y B, y la cavidad por la C, esta puede contener una cantidad arbitraria de excitaciones, pero se trabajará principalmente en 0,1 y 2 excitaciones. Ambos átomos son de dos niveles, son idénticos e indistinguibles y su frecuencia natural es ω , mientras que la frecuencia natural de la cavidad es ω_0 . El acoplamiento entre la cavidad y el átomo es g , y las interacciones átomo-átomo son k (interacción dipolar) y J (interacción tipo Ising).

numérica y se observan las poblaciones. Se espera recuperar la misma dinámica que en el caso de 1 átomo, ya que el átomo B no interactúa con ninguna de las otras partes del sistema A y C. Para poder representar el estado del sistema sobre una esfera de Bloch, se realiza una traza parcial sobre el átomo B, y así se obtiene la figura 4.3, donde se muestran tres trayectorias correspondientes a diferentes valores del detuning. Los puntos azules son el caso resonante $\Delta = 0$, la morada y naranja se corresponden con $\Delta = 0.5g$ y $\Delta = 2g$ respectivamente.

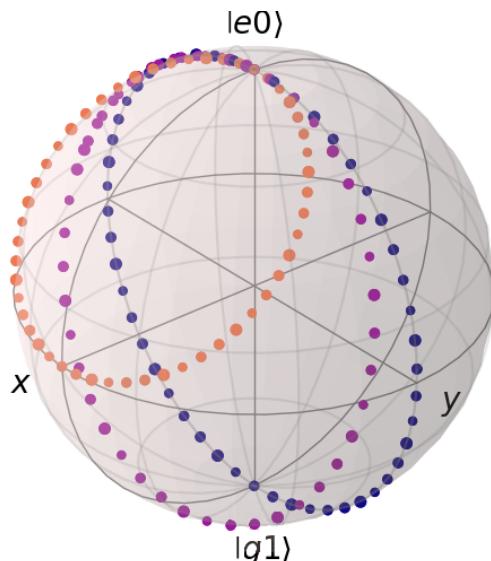


Figura 4.3. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es $|e_A g_B 0_C\rangle$ para diferentes valores del detuning, apantallando el átomo B. Los valores son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = 0.5g$ (morada) y $\Delta = 2g$ (naranja).

Se observa como la dinámica entre estos dos estados es exactamente igual que la ob-

servada en la figura 3.2b, además, como todos los puntos están sobre la superficie de la esfera, los estados son puros y entonces el estado global es separable. Haber trazado sobre el átomo B no tuvo efecto sobre la dinámica entre el átomo A y la cavidad. Para corroborar esto se realiza un análisis poblacional más profundo. Para ello consideramos una condición inicial entrelazada. Si bien los átomos no interactúan (el átomo B está aislado del universo) se puede pensar que en algún momento los átomos se entrelazaron y luego se apagan las interacciones con el átomo B. Por ejemplo, si se considera el estado inicial entrelazado $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, se obtienen las trayectorias mostradas en la figura 4.4.

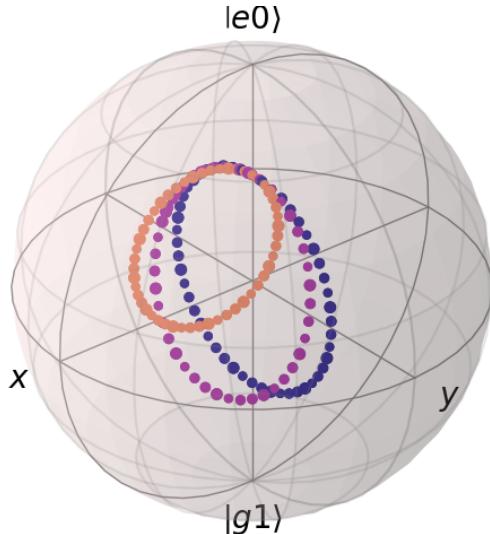


Figura 4.4. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es $(|e_A g_B 0_C\rangle + |g_A e_B 0_C\rangle)/\sqrt{2}$ para diferentes valores del detuning, apantallando el átomo B. Los valores son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = 0.5g$ (morada) y $\Delta = 2g$ (naranja).

Ahora, los estados no están sobre la superficie, lo que se interpreta como que estamos en presencia de un estado mixto. Al trazar sobre el átomo B, efectivamente se considera como si éste fuese parte de un entorno. Al olvidarse de la dinámica del segundo átomo, se puede interpretar como que este se lleva un 50 % de probabilidad de estar excitado, ya que no sabemos si inicialmente el átomo A o el átomo B es el que tiene la excitación. Entonces efectivamente tenemos un 50 % de probabilidad de que el estado de la cavidad sea $|g0\rangle$, y no evoluciona, y un 50 % de probabilidad de que la excitación este dentro de la cavidad, y por lo tanto vemos que la dinámica es la misma que en el caso anterior, pero con amplitudes menores.

Para analizar más en detalle la dinámica, y para poder realizar comparaciones cuando se complejiza el problema, se puede realizar un estudio poblacional, y también podemos mirar las entropías relativas y otros observables importantes. En primer lugar, el caso separable $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$, es idéntico al caso de 1 átomo, ya que el átomo B no evoluciona por estar totalmente aislado del sistema. Lo único que se puede resaltar es que, si se traza sobre la cavidad, que es algo útil para observar el entrelazamiento entre los átomos, entonces el estado es mixto, ya que la evolución temporal del sistema átomo A-átomo B consta del átomo B en el estado fundamental $|g\rangle$, y el átomo A oscila entre el estado excitado y fundamental. La amplitud de oscilación y el grado de *mixing* entre los estados depende del detuning, siendo el caso $\Delta = 0$ el de oscilaciones coherentes entre estados, y

al aumentar Δ se atenúa este comportamiento. En segundo lugar, cuando el estado inicial de los átomos no es separable por estar entrelazados $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, entonces la dinámica es un poco diferente. La figura 4.5 muestra el caso de $\Delta = 0$, donde se observan las evoluciones de las diferentes partes del sistema.

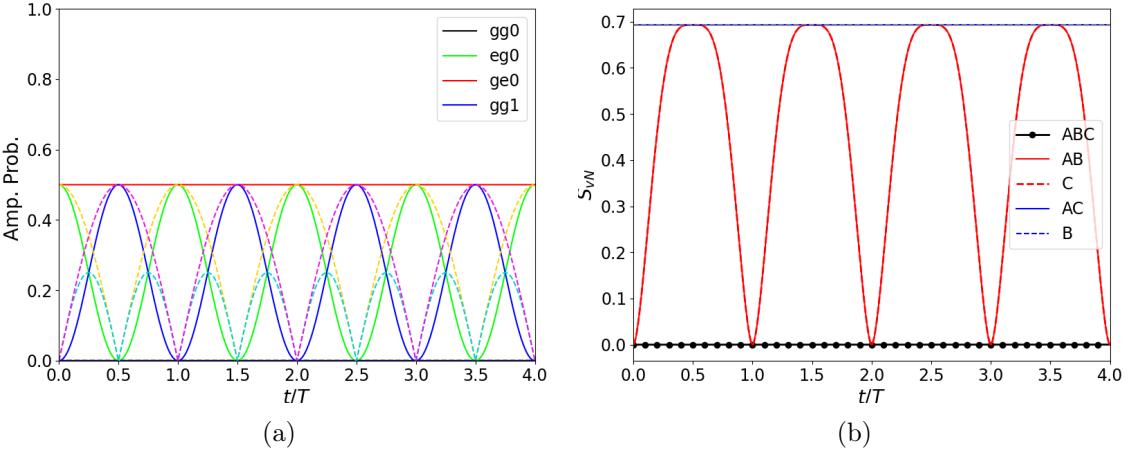


Figura 4.5. (a):Dinámica poblacional para el caso resonante $\Delta = 0$ con el estado inicial entrelazado $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$. (b):Entropía de von Neuman del sistema total (negro con puntos), y de diferentes subsistemas. En rojo se muestra la entropía del sistema habiendo trazado parcialmente sobre la cavidad, y en azul habiendo trazado parcialmente sobre el átomo B.

En la figura 4.5a se muestran las poblaciones y las coherencias correspondientes a la condición inicial $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ en el caso resonante, y en la figura 4.5b se muestra la entropía de Von Neuman, en función del tiempo t/T con $T = 2\pi/\Omega(n, j)$. La entropía de von Neuman es una cantidad que está definida según:

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_j \lambda_j \ln \lambda_j, \quad (4.14)$$

donde ρ es la matriz densidad del sistema, y λ_j son los autovalores de la matriz densidad. La entropía de Von Neuman sirve para determinar si un estado es puro o mixto, ya que $S(\rho) = 0$ representa un estado puro, y $S(\rho) = \ln(d)$ representa un estado máximamente mixto, donde d es la dimensión del espacio de Hilbert. Vemos como el estado $|ge0\rangle$ no evoluciona, ya que en este caso, el átomo B contiene la única excitación y está aislado. Pero la otra parte, si evoluciona. La presencia de las mismas oscilaciones coherentes entre los estados $|eg0\rangle$ y $|gg1\rangle$ es evidente. La diferencia principal es que el estado de los subsistemas es mixto. Esto se observa claramente en el gráfico de la entropía, pero también se puede deducir este comportamiento desde la figura 4.5a, ya que a $t/T = 0.5$, tenemos el estado $|\psi(T/2)\rangle = |g\rangle_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_B0_C\rangle + |g_B1_C\rangle)$, que es separable solo en el átomo A, y los otros dos están totalmente entrelazados, y por lo tanto, al tomar traza parcial tal que el átomo B y la cavidad estén separadas, este estado es máximamente mixto. Vemos como el entrelazamiento entre la cavidad y el átomo B, que están totalmente aislados, evoluciona indirectamente por medio del átomo A, y paradójicamente, éste queda desentrelazado del sistema para tiempos $t = (k-1/2)T$; $k \in \mathbb{N}$. En este punto notamos algo muy importante,

y es que la entropía de von Neuman sólo sirve para estados puros. Cuando $t = 0$, la entropía del subsistema AB es 0, porque es un estado puro, y está máximamente entrelazado. Pero al evolucionar, el subsistema AB se hace mixto, y como se observa en la línea azul, la entropía del átomo B es siempre $\log 2$, que según la interpretación de la entropía de von Neuman es que está siempre máximamente entrelazado. Este no es el caso, y la descripción falla porque el estado AB no es puro.

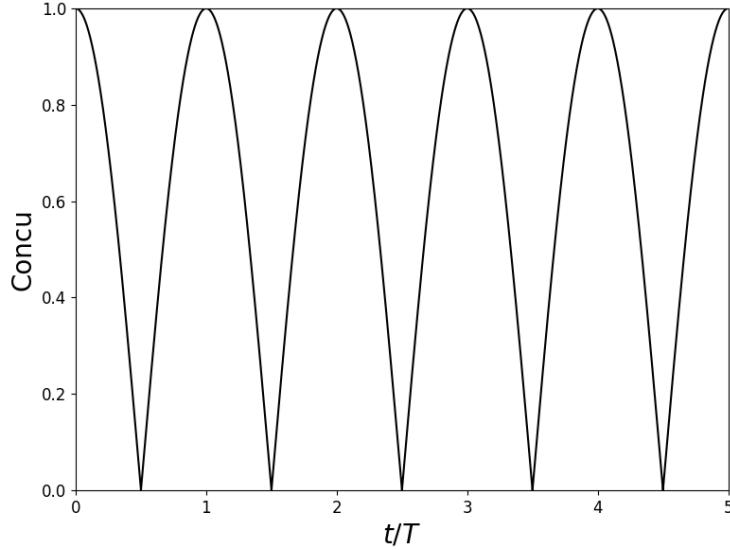


Figura 4.6. Concurrencia en el caso resonante para estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$

Entonces, ya que el entrelazamiento es un recurso muy importante y va a ser objeto de estudio, es necesario introducir una medida de entrelazamiento más general. Si bien la entropía de Von Neuman es útil en el caso de estados puros, cuando se tienen estados mixtos como mencionamos más arriba, o en el caso de tener un sistema abierto, esta medida ya no sirve. Una de las medidas más utilizadas y con mayor aplicación es el *Entanglement of Formation* (E_F) [52], que coincide con la entropía de von Neuman para estados puros, y sirve para estados mixtos. La E_F está definida como

$$E_F(\rho) = \inf \left(\sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) : \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right). \quad (4.15)$$

Esta medida representa el entrelazamiento promedio mínimo entre todas las posibles descomposiciones puras de ρ , donde $E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = S(\text{tr}_B |\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$ es la entropía de von Neuman, que es la medida que se utiliza para estados puros. Esta definición es general, pero en el caso presente, donde se estudia el entrelazamiento entre dos sistemas de dos niveles, como lo son los átomos A y B, existe una simplificación muy útil. Esta medida es la concurrencia, y está definida como

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (4.16)$$

donde los λ_i son las raíces de los autovalores, en orden decreciente, de la matriz $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, donde ρ^* es el conjugado (sin transponer) de ρ . La concurrencia y la entropía de formación E_F están relacionadas, y la concurrencia obtiene su interpretación a

través de ella. Un estado máximamente entrelazado tiene $C(\rho) = 1$ y un estado separable $C(\rho) = 0$.

En la figura 4.6 se observa la concurrencia entre los átomos AB, para el caso estudiado anteriormente. Como era de esperar, a $t = 0$ el estado es máximamente entrelazado, y luego el entrelazamiento se pierde a $t = T/2$, donde el átomo B está entrelazado con la cavidad.

4.2.1. Interacción átomo-átomo

El siguiente paso es analizar el rol de las interacciones entre los átomos, aún manteniendo el apantallamiento $\alpha = 0$. Para ésto, se siguen utilizando las mismas condiciones iniciales y el átomo B seguirá sin interactuar con la cavidad, pero ahora se considera que la interacción entre átomos, definida por los parámetros k y J , será distinta de cero. Para comenzar, en la figura 4.7 se observa la evolución temporal para el estado inicial $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$, con $\Delta = 0$, $J = 0$ pero $k = 0.1g$. Recordar que k es la intensidad de la interacción $\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + \text{c.c.}$ (ver Ec. (4.1)).

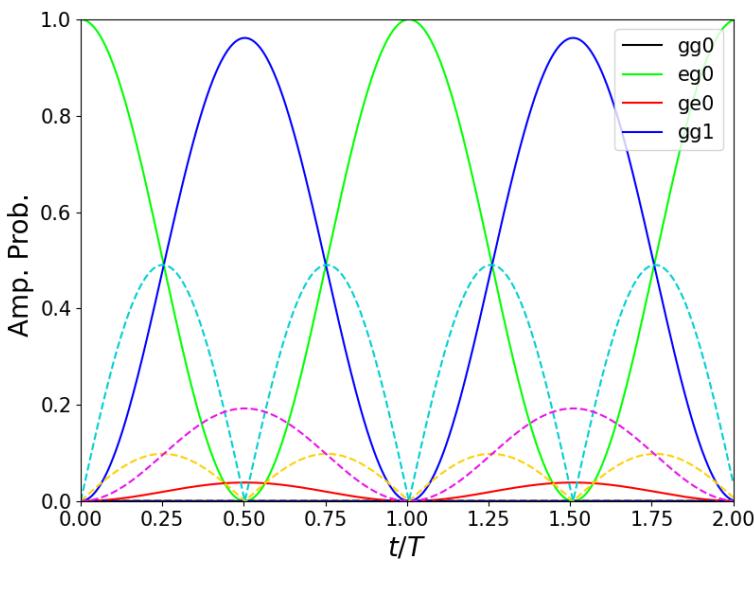


Figura 4.7. Dinámica poblacional para la condición inicial $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$, para los parámetros $\Delta = 0$, $J = 0$ y $k = 0.1g$. Las líneas sólidas se corresponden con las poblaciones de la matriz densidad total del sistema; en azul la probabilidad de encontrar al estado en el estado $|gg1\rangle$, en verde en $|eg0\rangle$, en rojo $|ge0\rangle$, y en negro $|gg0\rangle$. Las líneas rayadas son las coherencias entre estas poblaciones, la violeta entre $|gg1\rangle$ y $|ge0\rangle$, la celeste entre $|eg0\rangle$ y $|gg1\rangle$ y la amarilla entre $|eg0\rangle$ y $|gg1\rangle$.

Lo que sucede es que la excitación está inicialmente en el átomo A, y como siempre, se observan oscilaciones entre los estados $|eg0\rangle$ y $|gg1\rangle$, la diferencia es que al haber interacciones entre los átomos, ahora la excitación inicial que está en el átomo A, sufre dos procesos diferentes, primero la oscilación, y además, la interacción con el átomo B. Al tener la excitación el átomo A, una parte de ésta se va hacia la cavidad, y la otra hacia el átomo B, excitándolo parcialmente. La amplitud de la oscilación depende de la intensidad de la interacción k . Mediante la curva roja, se contempla que su pendiente crece mientras que la probabilidad de $|eg0\rangle$ es mayor a la de $|gg1\rangle$. Cuando las probabilidades cambian, la amplitud crece, pero de manera desacelerada, hasta que la probabilidad del estado $|eg0\rangle$

es nula. En ese momento, ya no hay excitación que pasar del átomo A al B, y el proceso se revierte. Antes de analizar el entrelazamiento entre los átomos, se observa en la figura 4.8 la dinámica para los mismos parámetros, pero para la condición inicial entrelazada $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$: La dinámica en este caso presenta oscilaciones en la población

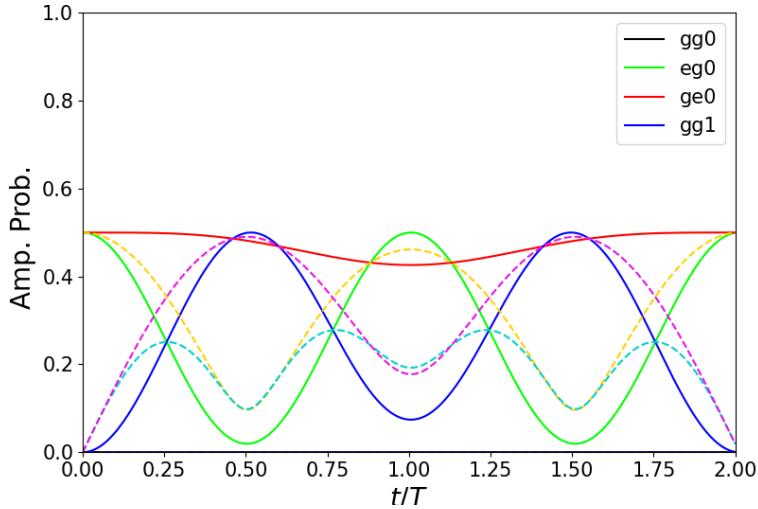


Figura 4.8. Dinámica poblacional para la condición inicial $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, para los parámetros $\Delta = 0$, $J = 0$ y $k = 0.1g$. Las coherencias y poblaciones tienen los mismos colores que la figura anterior 4.7

de $|ge0\rangle$ con un periodo dos veces más grande. Esto se debe a una *pelea* entre los estados $|eg0\rangle$ y $|ge0\rangle$, ya que tienen las excitaciones en diferentes átomos. Inicialmente, como los estados están entrelazados, no está bien definido en cuál de los dos átomos está la excitación, entonces la interacción k se anula y la curva tiene pendiente 0. Entonces la dinámica inicial es igual que para $k = 0$ y comienza a oscilar. Al decrecer la curva verde, la probabilidad de encontrar la excitación en el átomo B es mayor que la del átomo A, entonces el átomo B comienza a perder esta excitación y se la da lentamente al átomo A, y por lo tanto la oscilación del estado $|eg0\rangle$ no llega a tener amplitud nula en $t/T = 0.5$. Luego, la evolución sigue su curso oscilante, y al llegar a $t = T$, la probabilidad de encontrar la excitación en el átomo A es mayor que en el átomo B, y por lo tanto comienza a revertirse la situación, hasta completar el ciclo en $t = 2T$.

El entrelazamiento entre los átomos se analiza utilizando la concurrencia, como se muestra en la figura 4.9, donde 4.9a muestra la condición inicial separable $|eg0\rangle$, y 4.9b el entrelazamiento para la condición inicial entrelazada $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$.

Ahora se analiza la interacción tipo Ising, para eso se utilizan parámetros $k = 0$ y $J \neq 0$. En la figura 4.10 se observa que, si bien la dinámica es similar, los átomos no se entrelazan.

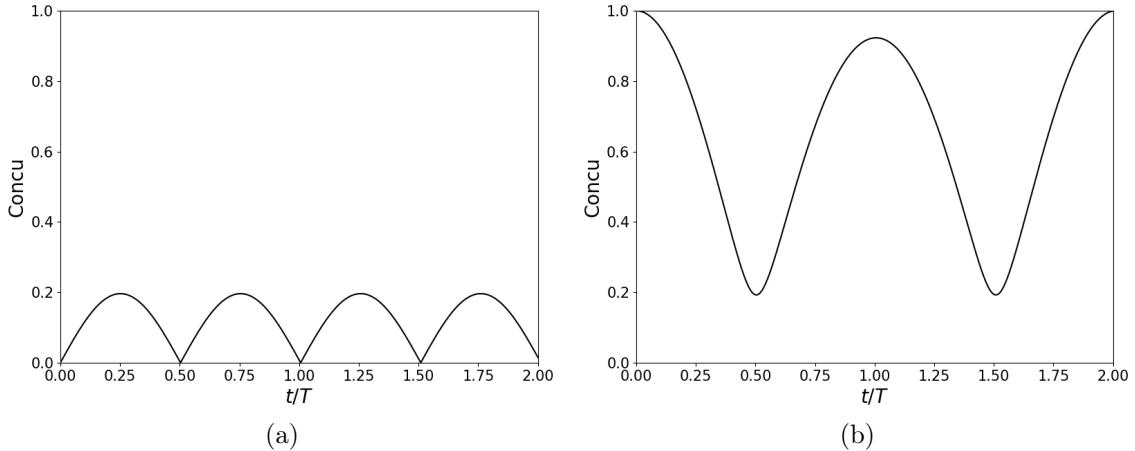


Figura 4.9. Dinámica de entrelazamiento para $\Delta = 0$, $J = 0$ y $k = 0.1g$ para el estado inicial (a) $|eg0\rangle$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$

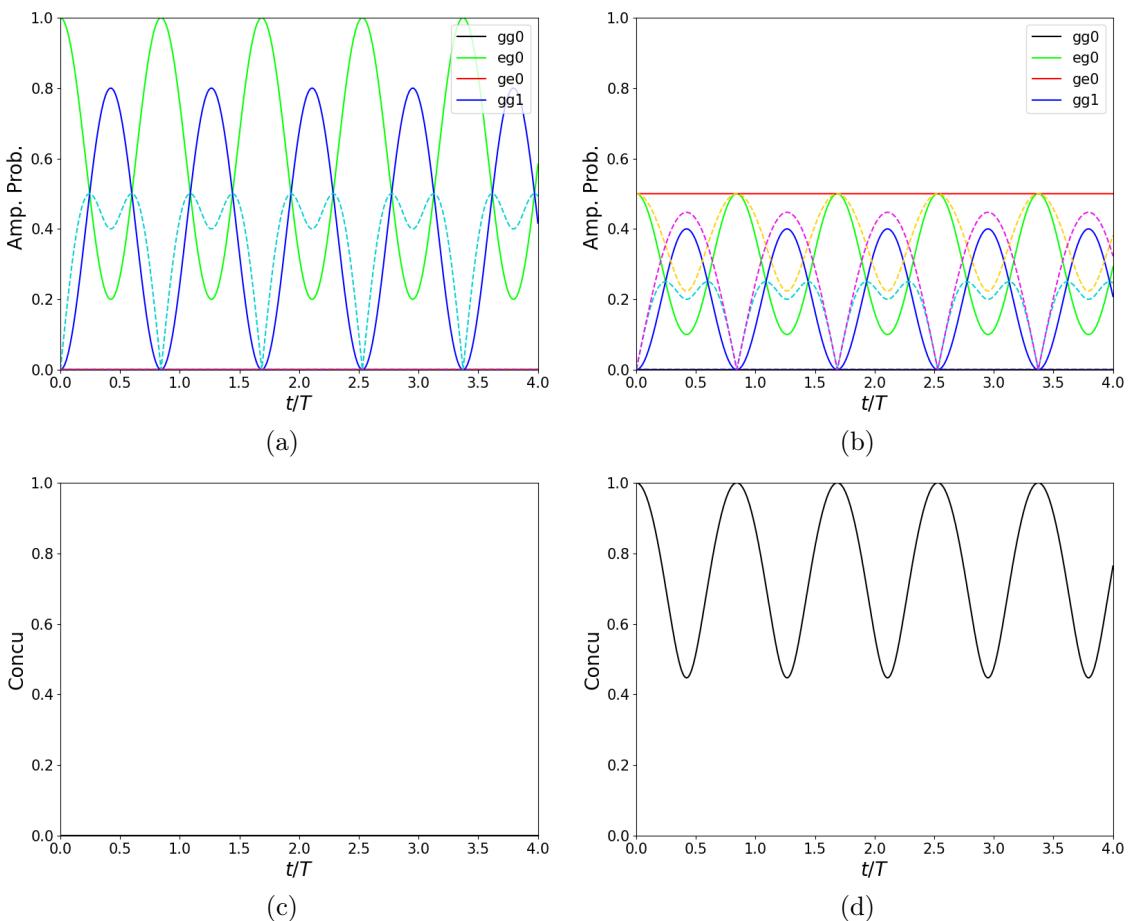


Figura 4.10. Dinámica con parámetros $\Delta = 0$, $J = 0.5g$ y $k = 0$. En (a) las poblaciones y (c) la concurrencia del estado inicial es $|eg0\rangle$, y en (b) las poblaciones, y (d) la concurrencia del estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$.

La diferencia principal entre la interacción tipo Isign ($J\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$) y la dipolar ($k\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)}$ + c.c.), es que el segundo parece entrelazar los átomos, ya que en el primer caso, el efecto es separar los niveles de energía, pero en el segundo no solo eso, sino que también pasa

excitaciones de un átomo al otro. Si bien esto sirve para entender intuitivamente el efecto, el problema de este análisis es que se asumen cosas no físicas mediante el apantallamiento y la asimetría que se impone entre los dos átomos. Ya que en el Hamiltoniano del sistema sin apantallamiento (Ec. (4.1)), donde se utiliza la base con estados simétricos y anti-simétricos (Ec. (4.3)), el efecto de ambos parámetros debería ser el mismo, ya que solo aparecen en la diagonal principal. Si bien la interacción J actúa sobre todos los estados, y el k solamente solo sobre los $\frac{1}{\sqrt{2}}(|egn\rangle \pm |gen\rangle)$, su principal función es separar las energías de los estados de la base. Entonces será necesario retomar este análisis sin apantallamiento y con la base adecuada de la Ec.(4.3).

4.2.2. Medio Kerr

En esta sección estudiamos el efecto del medio Kerr. Para ésto, se apagan las interacciones interatómicas $k = J = 0$, y se modifica la no linealidad del medio a través del parámetro χ .

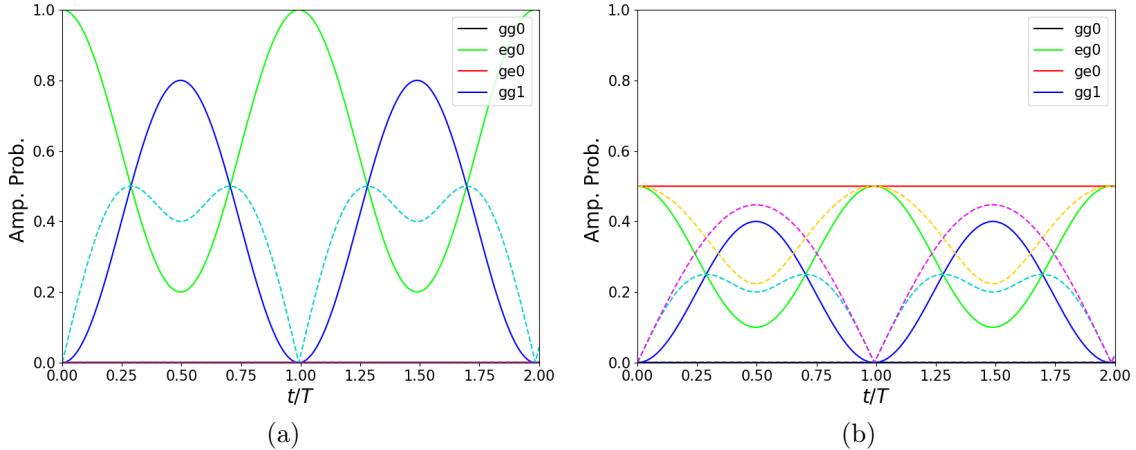


Figura 4.11. Dinámica de poblaciones para $x = g$ con el estado inicial (a) $|eg0\rangle$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$

Al igual que en el caso de 1 átomo, se puede observar en las Ec. (4.5) y Ec. (4.7) que la frecuencia depende del medio. En la figura 4.11 el tiempo está normalizado con la frecuencia, entonces no se nota el cambio. Pero lo que es necesario analizar, es cómo las oscilaciones no son totalmente coherentes, en el sentido de que la amplitud de probabilidad no es 1, como en el caso de $\chi = 0$. Esto se debe a que el aumento de χ hace que las energías de ambos estados se separen, y por lo tanto las transiciones entre los estados sean menos probables. Este comportamiento también se observa si el estado inicial se toma como $|gg1\rangle$. Es lógico estudiar el entrelazamiento en este caso. En la figura 4.12 se muestran las concurrencias para ambas condiciones iniciales. Es interesante comparar la figura 4.12b con la figura cuando $\chi = 0$, para esta misma condición inicial, representada en la figura 4.6. La diferencia se encuentra en la amplitud de oscilación. Si bien ambos comienzan a $t = 0$ en $C = 1$, cuando el medio es lineal ($\chi = 0$) la concurrencia oscila hasta llegar a su mínimo en $C = 0$, en cambio cuando $\chi = g$ las oscilaciones llegan solamente hasta $C = 0.4$ aproximadamente. En principio, se puede pensar que el medio no lineal rompe con

el entrelazamiento del sistema. Pero como se ve al comparar estas figuras, la interpretación correcta es que el medio no hace más que ralentizar el comportamiento preexistente de la cavidad, ya que en este caso, no destruye el entrelazamiento, sino que lo conserva por virtud de haber ralentizado el proceso: las amplitudes de oscilación entre los dos estados dinámicos son menores. También se puede recuperar el comportamiento visto en el modelo

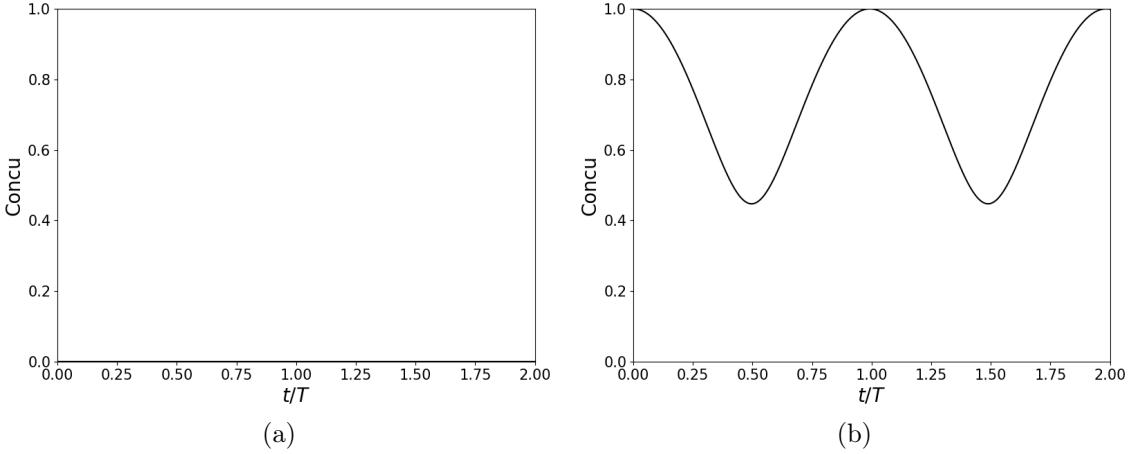


Figura 4.12. Dinámica de entrelazamiento para $x = g$ para estados iniciales (a) $|eg0\rangle$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$

de 1 átomo, que el medio Kerr no es más que un desplazamiento lateral en las frecuencias, además de modificar las amplitudes. Para esto se realiza otra evolución para $\chi = \Delta = \frac{g}{2}$, y se compara con el caso en que $\chi = \Delta = 0$. Se observa cómo se anula el efecto del medio, y

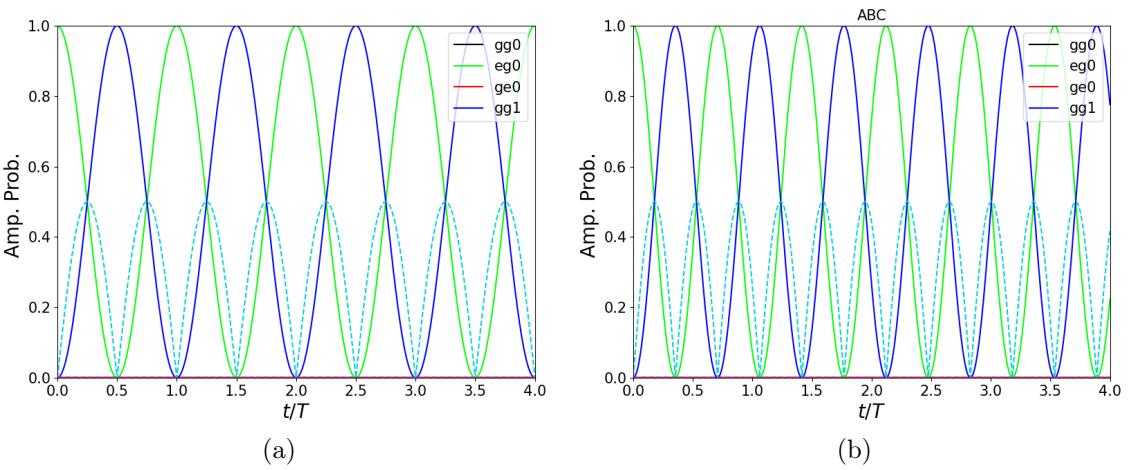


Figura 4.13. Dinámica de poblaciones para estado inicial $|eg0\rangle$ con (a) $\Delta = \chi = 0$ y (b) $\Delta = \chi = 0.5g$

la dinámica es la misma pero con un cambio en la frecuencia. Al igual que antes, aumenta el tiempo característico del sistema y por lo tanto la frecuencia es mayor en el segundo caso.

4.2.3. Batidos

Al complejizar el problema, la dinámica comienza a presentar batidos entre las amplitudes de probabilidad de las poblaciones y en las coherencias, comportamiento que se atribuye a la modulación de dos procesos simultáneos. Por ejemplo, en la evolución temporal con $\chi \neq 0$ y $k \neq 0$, el primero disminuye la amplitud de oscilación de los estados con mayor cantidad de fotones en la cavidad, que dentro del subespacio N la jerarquía del medio sera favorecer a los estados $|eg, N - 1\rangle$ y $|ge, N - 1\rangle$ por sobre el $|ggN\rangle$. Por el contrario, se observó que en esta situación, el término de interacción entre los átomos disminuye la amplitud del estado $|ggN\rangle$ como se vio en la sección anterior. Por lo tanto, si dos procesos están en juego y sus efectos son similares, es esperable que se observen oscilaciones moduladas. No vale la pena mostrar la dinámica de las poblaciones, porque no se pueden sacar conclusiones muy importantes, pero sí podemos observar la trayectoria en la esfera de Bloch, para dar una idea de la complejidad de la evolución. En la figura 4.14

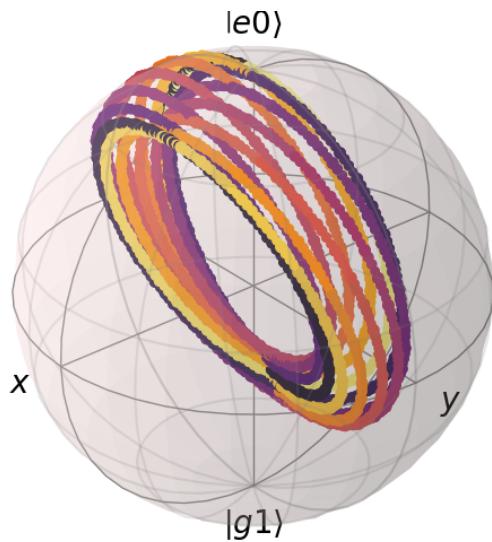


Figura 4.14. Trayectoria en la esfera de Bloch para el estado inicial $|eg0\rangle$, trazando parcialmente sobre el átomo B, y los parámetros utilizados son $\Delta = 0, \chi = 0.5g, k = 0.5g$ y $J = 0$.

se representa la trayectoria en el espacio de estados cuyo estado inicial es $|eg0\rangle$, habiendo trazado parcialmente sobre el átomo B que está apantallado. Es evidente por la curva descrita en la esfera de Bloch, que la dinámica es complicada y los análisis poblacionales carecen de sentido, ya que se pierde la periodicidad. En este gráfico, el color representa el tiempo comenzando por el color negro, y aclarándose hasta llegar a $t = 7T$, representado por el color amarillo.

4.3. Dinámica sin apantallamiento

Al sacar el apantallamiento, es necesario utilizar la base de la Ec. (4.3), ya que los átomos son indistinguibles y esta base es más apropiada. Además, el Hamiltoniano desacopla los estados antisimétricos, facilitando la solución. Resulta de interés estudiar el

entrelazamiento entre los átomos, y su dependencia con los parámetros.

4.3.1. Dinámica con disipación

Para modelar la dinámica disipativa se utiliza nuevamente el formalismo de la ecuación de Lindblad, donde los operadores de colapso ahora deben tener en cuenta a ambos átomos por igual. Se consideran los procesos de pérdidas al igual que en el caso de un átomo como la pérdida de fotones por las imperfecciones de la cavidad, y el bombeo incoherente de los átomos. La ecuación maestra ahora tiene los operadores

$$L_\gamma = \sqrt{\gamma} \hat{a}, \quad (4.17)$$

$$L_p = \sqrt{p} (\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)}). \quad (4.18)$$

Explícitamente la ecuación de Lindblad es

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = -i & \left[\rho(t), \chi \hat{n}^2 + \frac{\Delta}{2} (\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)}) + g(\hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{a} f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{a} f(\hat{n}) \right. \\ & \left. + \hat{\sigma}_-^{(2)} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger) + 2\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)}) + J \hat{\sigma}_Z^{(1)} \hat{\sigma}_Z^{(2)} \right] \\ & + \gamma \left(\hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho(t) \right\} \right) + p \left(\hat{\sigma}_+ \rho(t) \hat{\sigma}_- - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+, \rho(t) \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_\pm^{(1)} + \hat{\sigma}_\pm^{(2)})$. Este es un sistema de ecuaciones acopladas, y la necesidad de acudir a métodos numéricos es evidente.

Lo primero que hay que considerar es la dependencia de la dinámica con el régimen de acoplamiento, se espera un comportamiento igual al del caso de un átomo (sección 3.3.1). Recordar que el régimen de acoplamiento fuerte (SC) es el caso en donde la interacción entre cavidad y átomos es mayor a la interacción entre sistema y entorno. En la figura 4.15 se muestran las coherencias y las poblaciones. Como se esperaba, estas tienen el mismo comportamiento que en el caso de 1 átomo. Notablemente, se puede ver el efecto de la interacción entre los átomos. Como las energías se separan inicialmente, las oscilaciones no logran la inversión total de población, solo una inversión parcial, y a tiempos largos la disipación hace que se tenga una mayor probabilidad de encontrar al sistema en el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ ya que tiene menor energía. Eventualmente alcanza su estado estacionario. Lo que se recupera, ahora que ya no hay apantallamiento, es que ambos tipos de interacción (J y k) generan entrelazamiento, consecuentemente la concurrencia para ambas interacciones es oscilante.

Nuevamente, nos concentraremos en el régimen SC. Si bien hasta ahora se estudió principalmente estados con una excitación, interesantes por sus implicancias y similitudes al modelo de 1 átomo, considerar estados con mayor cantidad de excitaciones hace a la riqueza del problema. Si solo consideramos $N = 1$, el subespacio del problema tiene tres estados, de los cuales uno es el estado antisimétrico $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle - |ge0\rangle)$ que está desconectado de los otros estados, y por lo tanto efectivamente se tiene un modelo de Jaynes-Cummings

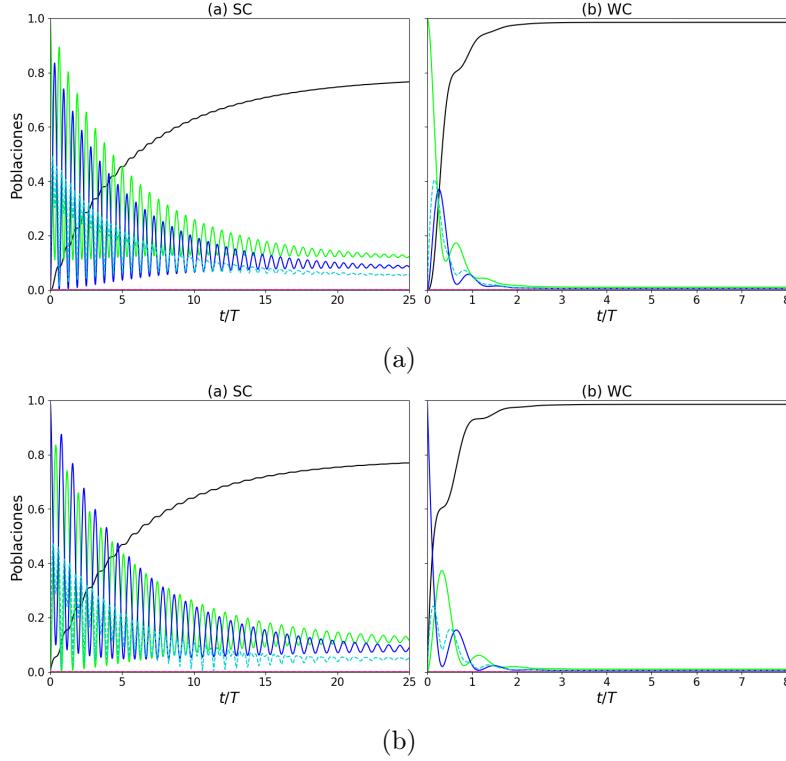


Figura 4.15. Dependencia de las poblaciones con el régimen de acoplamiento, para $\Delta = J = \chi = 0$ y $k = 0.5g$, y para dos condiciones iniciales diferentes. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, $\Delta = \chi = k = 0$, $J = 0.5g$; (b) $|gg1\rangle$, $\Delta = \chi = J = 0$, $k = 0.5g$.

de 1 átomo con dos estados dinámicamente relevantes. Si se permiten $N = 2$ excitaciones, ahora hay cuatro estados en el subespacio, de los cuales tres son relevantes. Primero veremos cuáles son los efectos de las interacciones y la dinámica para estados iniciales en el subespacio de $N = 2$. Para mantener el paralelismo, comenzaremos con el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, pero como se verá, las condiciones iniciales cambian totalmente la dinámica de entrelazamiento del sistema. La enorme cantidad de posibilidades para elegir condiciones iniciales, hace que estudiar todos sea imposible, así que se concentrarán los esfuerzos en algunos de ellos. Al tener tres estados dinámicamente relevantes, se tienen tres autoestados con sus respectivas autoenergías, y por lo tanto tres frecuencias que compiten entre sí, y son las tres frecuencias de Rabi del sistema:

$$\begin{aligned}\Omega_{12}^{(n)} &= E_2^{(n)} - E_1^{(n)}, \\ \Omega_{23}^{(n)} &= E_3^{(n)} - E_2^{(n)}, \\ \Omega_{31}^{(n)} &= E_1^{(n)} - E_3^{(n)}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Estas frecuencias se muestran en función del detuning Δ y para diferentes valores de χ y de $k - J$ en la figura 4.16.

Al cambiar las no linealidades del medio χ (figura 4.16a y b), la frecuencia $\Omega_{12}^{(2)}$ se comporta de manera similar a la frecuencia de Rabi del JC de 1 átomo, que es también igual a la $\Omega^{(1)}$. En ambos casos la diferencia de energía tiene un máximo que se desplaza lateralmente al aumentar el parámetro $\chi \in [0, 5g]$, pero presenta una sutil diferencia, ya

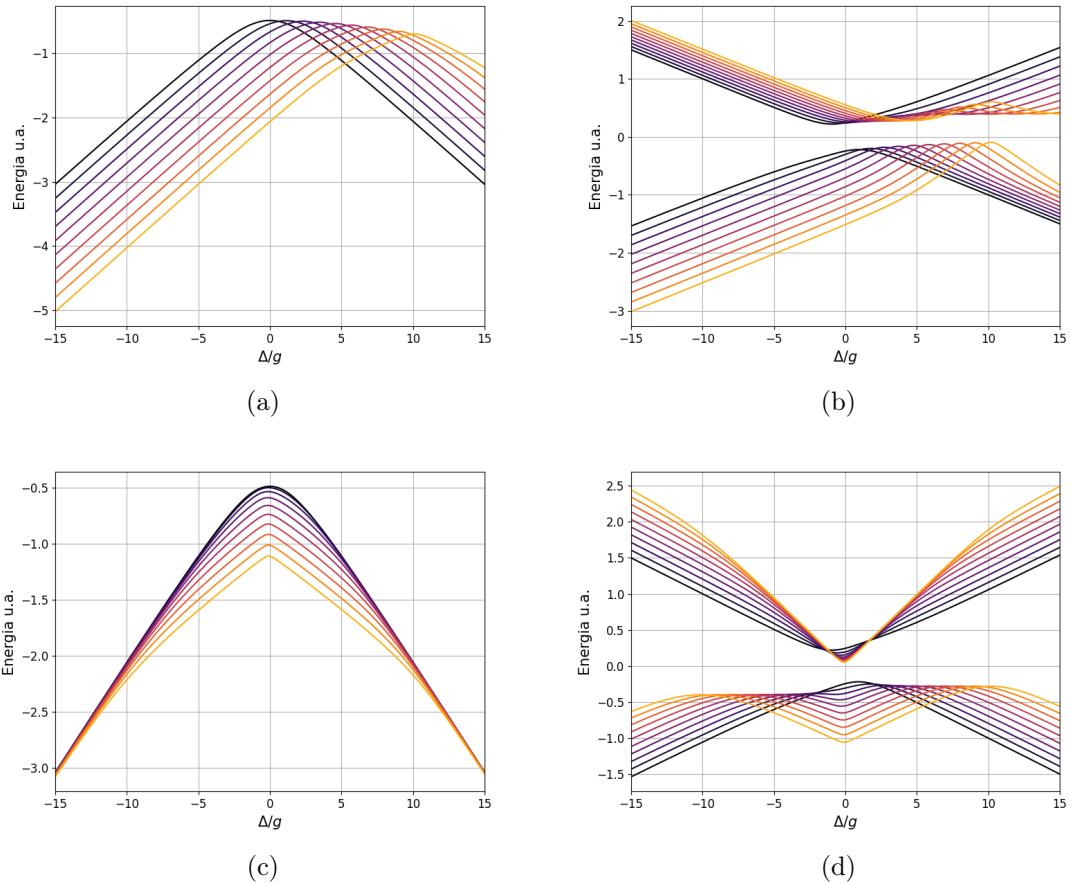


Figura 4.16. Frecuencias de Rabi en función del detunning Δ para diferentes valores de χ , y $|k - J|$, donde las frecuencias de Rabi son $\Omega_{ij}^{(2)} = E_j^{(2)} - E_i^{(2)}$. (a) Ω_{12} con $\chi \in [0, 5g]$; (b) Ω_{23} y Ω_{31} con $\chi \in [0, 5g]$;(c) Ω_{12} con $k - J \in [0, 5g]$; (d) Ω_{23} y Ω_{31} con $k - J \in [0, 5g]$

que también el máximo aumenta en valor absoluto. En la figura 4.16c y d se explora el efecto de modificar $k - J \in [0, 5g]$, donde el máximo ya no se desplaza lateralmente, sino que aumenta en valor absoluto. Por otro lado, en los paneles derechos, se puede analizar qué sucede con las frecuencias $\Omega_{23}^{(2)}$ y $\Omega_{31}^{(2)}$ al aumentar χ (Fig. 4.16b) y $k - J$ (Fig. 4.16d). Es interesante notar como al aumentar χ , se comienza a observar un máximo y mínimo local para la frecuencia $\Omega_{23}^{(2)}$ (rama superior). Similarmente, pero en la rama inferior, se observa este mismo comportamiento al aumentar $k - J$.

La dinámica para el caso de $N \geq 2$ es compleja, ya que ahora se tienen 3 frecuencias diferentes, y predecir que sucede para cada combinación de parámetros y para cada condición inicial se hace muy complicado, por lo tanto, el análisis para estos casos no es profundo, sino cualitativo. Lo que se puede distinguir es que cuando $\chi, k - J > g$, se comienzan a observar estos mínimos y máximos locales en las frecuencias, y se puede estudiar cuál es el efecto que tiene esto en el entrelazamiento de los átomos, y también si hay alguna relación entre los parámetros, por ejemplo como se encontró para el caso de 1 átomo (y para el subespacio de $N=1$) que hay una clara relación entre el detunning Δ y el medio χ . En particular, es de interés encontrar una condición de robustez, similar a la Ec. (3.32).

4.4. Dinámica de entrelazamiento

De manera general, se puede estudiar el entrelazamiento del sistema total. La dificultad que se encuentra es que, la entropía de von Neumann para sistemas mixtos, ya no es una buena medida para estudiar el entrelazamiento. Como mencionamos antes, una medida que sirve es la *Entanglement of Formation* dada por la Ec. (4.15). Esta definición formal es complicada de aplicar para sistemas tripartitos (en general para sistemas de más de dos partes). Por lo tanto, en este capítulo, se estudia el entrelazamiento entre los dos átomos dentro de la cavidad. De esta forma, el sistema de estudio es bipartito, ya que la cavidad pasa a tomar el rol de entorno. Para sistemas bipartitos, la medida de entrelazamiento utilizada es la concurrencia. Si bien se traza sobre la cavidad y pasa a formar parte del entorno, su dinámica sigue siendo relevante, ya que la solución la tiene en cuenta, y al final se toma traza parcial para obtener esta cantidad. Por lo tanto hay efectos no-markovianos en la concurrencia, ya que las excitaciones y la información que se transmiten de los átomos a la cavidad, no se pierde como si fuera un entorno con infinitos grados de libertad. Por lo tanto, para estudiar la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos $\rho_{AB} = \text{tr}_C\{\rho\}$, se utiliza la concurrencia como medida de entrelazamiento definida por la Ec. (4.16) ($0 \leq C_{AB} \leq 1$).

Lo primero que se analiza son los efectos de las interacciones entre los átomos. Se diferencian dos regímenes, el de Strong Interacting (SI) y Weak Interacting (WI), refiriéndose a la interacción entre los átomos con respecto a la cavidad. El SI será cuando la interacción entre los átomos es fuerte en comparación con la cavidad, es decir $k - J > g$, y WI con $k, J < g$. Ya que no se encontró un límite muy claro, se utilizará un valor representativo de cada régimen, $k - J = 0.5g$ y $k - J = 2.5g$ respectivamente, además de utilizar un

parámetro del entorno $\gamma = 0.25g$. Para ilustrar las diferencias entre condiciones iniciales, y para seguir con el paralelismo con el caso de 1 átomo, se considerarán únicamente las siguientes condiciones iniciales:

- $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ para seguir el paralelismo con el JCM de 1 átomo
- $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ para comparar con el anterior y explorar el subespacio $N = 2$.

Para comparar el efecto de los parámetros entre sí, todos los gráficos que se muestran en el resto del capítulo estarán caracterizados por un acoplamiento con el entorno de $\gamma = 0.25g$, y todos los tiempos estarán normalizados según un periodo $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ con $\Omega_0 = \Omega^{(1)}(\Delta = 0, \chi = 0, k - J = 0)$.

4.4.1. Condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$

Primero se analiza la dinámica para el estado inicial $|\phi_2^{(1)}\rangle$ de la base \mathcal{B}_1 .

Dependencia con el detuning

En la figura 4.17 se observa la evolución de la concurrencia para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, cuyo entrelazamiento entre los átomos es máximo. El eje x es el tiempo, y el eje y es el detuning Δ/g . En el panel 4.17a se muestra el caso sin pérdidas. Lo primero que se aprecia es que la figura es simétrica sobre $\Delta = 0$ (caso resonante), y las oscilaciones son de menor frecuencia pero de mayor amplitud. A medida que se aumenta el valor absoluto del detuning, las oscilaciones son de mayor frecuencia y menor amplitud. Consecuentemente, al tomar la dinámica disipativa, en el panel (b), las oscilaciones siguen estando, pero ahora su máximo disminuye con el tiempo. Esto es de esperar, ya que la cavidad deja escapar fotones y el estado del sistema se hace mixto. Un estado mixto ya no es entrelazado, porque no hay coherencias, entonces se observa el deterioro del entrelazamiento a medida que el tiempo avanza. Hay otros dos comportamientos notables. Por un lado, se observa como el máximo del entrelazamiento decae más lentamente para valores más altos del detuning, esto se debe a la naturaleza de la dinámica poblacional. Al aumentar el detuning, como se vio anteriormente, uno de los efectos principales es que las oscilaciones entre los estados tienen poca amplitud, y en este caso, esto implica que si bien el estado $|gg1\rangle$ tiene amplitud no nula, principalmente la probabilidad está concentrada en el estado inicial, que no sufre decoherencia por pérdida de fotones, ya que no tiene fotones en la cavidad. Entonces, mientras mayor el detuning, menor la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|gg1\rangle$, y por lo tanto tiene pocas probabilidades de perder fotones. Por otro lado, un efecto frecuente en este tipo de sistemas, es la muerte y reanimación súbita del entrelazamiento, que se nombran SDE (Sudden Death Effect) y SBE (Sudden Birth Effect) por sus siglas en inglés. En el caso disipativo, se marcaron zonas en negro. Estas zonas o regiones muestran cómo el entrelazamiento *muere* durante un tiempo finito y *revive* luego. Este efecto es sorprendente, ya que se espera que las coherencias, responsables en gran medida del entrelazamiento entre átomos, decaigan asintóticamente. Este efecto muestra que esto no es así para algunos sistemas, y aún cuando las coherencias son

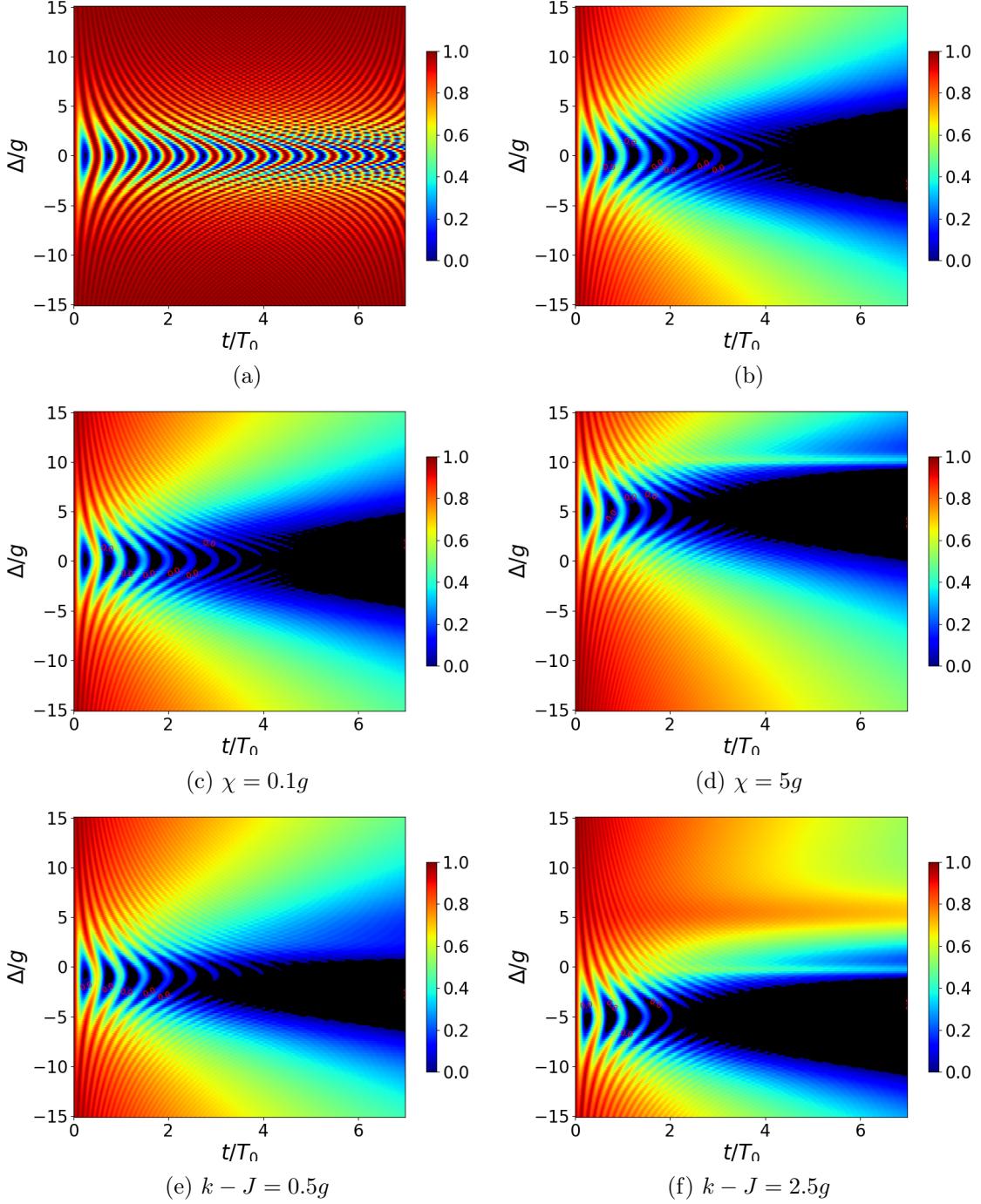


Figura 4.17. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, en función del detuning, para diferentes parámetros. Dinámica sin pérdidas: (a) $\chi = k - J = 0$. Dinámica con pérdidas: (b) $\chi = k - J = 0$; (c) $\chi = 0.1g$, $k - J = 0$; (d) $\chi = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\chi = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\chi = 0$, $k - J = 2.5g$.

distintas de cero, el entrelazamiento puede ser nulo durante un tiempo, y luego reaparecer súbitamente. La razón por la que aparece este fenómeno es que se está tomando traza parcial sobre la cavidad, lo que hace que algunas coherencias desaparezcan. Aún así, no se entiende bien el por qué de este efecto [53].

La pregunta natural que sigue es si cambiar los parámetros χ y $k - J$, cambian la

forma de la figura 4.17. En las figuras 4.17c-f se muestra nuevamente la dinámica de entrelazamiento en función del detuning, donde se modificó alguno de los parámetros.

En las figuras 4.17c y 4.17d se muestran dos casos en donde se puso de manifiesto la no linealidad del medio, cuyos parámetros son $\chi = 0.1g$ y $\chi = 5g$ respectivamente, ambos casos en presencia del entorno. Al comparar con la figura 4.17b, la forma cambia al aumentar las no linealidades, y la figura ya no es simétrica. De todas formas, cerca del centro ($\Delta/g = 5$) el comportamiento es similar, y por lo tanto podría esperarse que este eje será el caso coherente, que en analogía con la sección 3.3.2, puede ser una posible condición de robustez para la fase geométrica. Esto se analizará más adelante. En los paneles 4.17e y 4.17f se muestra el cambio al considerar acoplamiento entre los átomos, dados por una intensidad de $k - J = 0.5g$ y $k - J = 2.5g$ respectivamente. Nuevamente hay un desplazamiento, que se comporta igual que en el caso anterior, pero ahora el desplazamiento del eje es el doble que el aumento del parámetro de estudio, por ejemplo, si $k - J = 2.5g$, entonces la figura se desplaza y su *centro* está en $\Delta_0 = -2(k - J) = -5g$. Esto no es tan sorprendente si se observa la expresión de la energía Ec. (4.9), donde los parámetros χ y Δ aparecen con un factor $1/2$, mientras que $k - J$ no.

La simetría de la figura se rompe en una dirección, y se ve como hay, en ambos casos, una franja donde el entrelazamiento parece mantenerse durante un periodo más largo de tiempo. Además, se observa cómo en el panel 4.17f (que se corresponde con el caso $k - J = 2.5g$), en la parte superior de la imagen, el entrelazamiento persiste mayor tiempo que su contraparte de menor interacción (panel 4.17e) con $k - J = 0.5g$.

Básicamente, el subespacio de $N = 1$ se comporta igual que el Jaynes-Cummings de 1 átomo, pero donde se tiene un estado *inerte*, el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle - |ge0\rangle)$ que no interactúa con los otros dos. Esto puede ser de interés, porque usando como condición inicial el estado $|\psi_0\rangle = \cos\theta|eg0\rangle + \sin\theta|ge0\rangle$ que es combinación lineal de los estados $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle \pm |ge0\rangle)$, donde el estado simétrico evoluciona como siempre, y el antisimétrico no evoluciona, se encuentra una manera de mantener el entrelazamiento siempre por arriba de un cierto valor, que depende del valor de θ , aún en presencia de decoherencia. Esto es porque el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle - |ge0\rangle)$ es un estado que no sufre pérdidas.

Dependencia con el Kerr

En la figura 4.18 se muestra la dinámica de entrelazamiento en función de la no linealidad del medio. No hay diferencias mayores con la dependencia en Δ (figura 4.17). Nuevamente se observa que el efecto principal de modificar los parámetros es desplazar el centro donde se observan oscilaciones de mayor amplitud y SDE. Es interesante que también emergen asimetrías, y en particular, en las figuras 4.18d y f se observan franjas de entrelazamiento robustas para $\chi = \Delta/2 = 2.5g$ en la primera, y para $\chi = \Delta = 0$ en la segunda.

Esto reafirma que en el espacio de $N = 1$, el medio Kerr es muy similar al detuning.

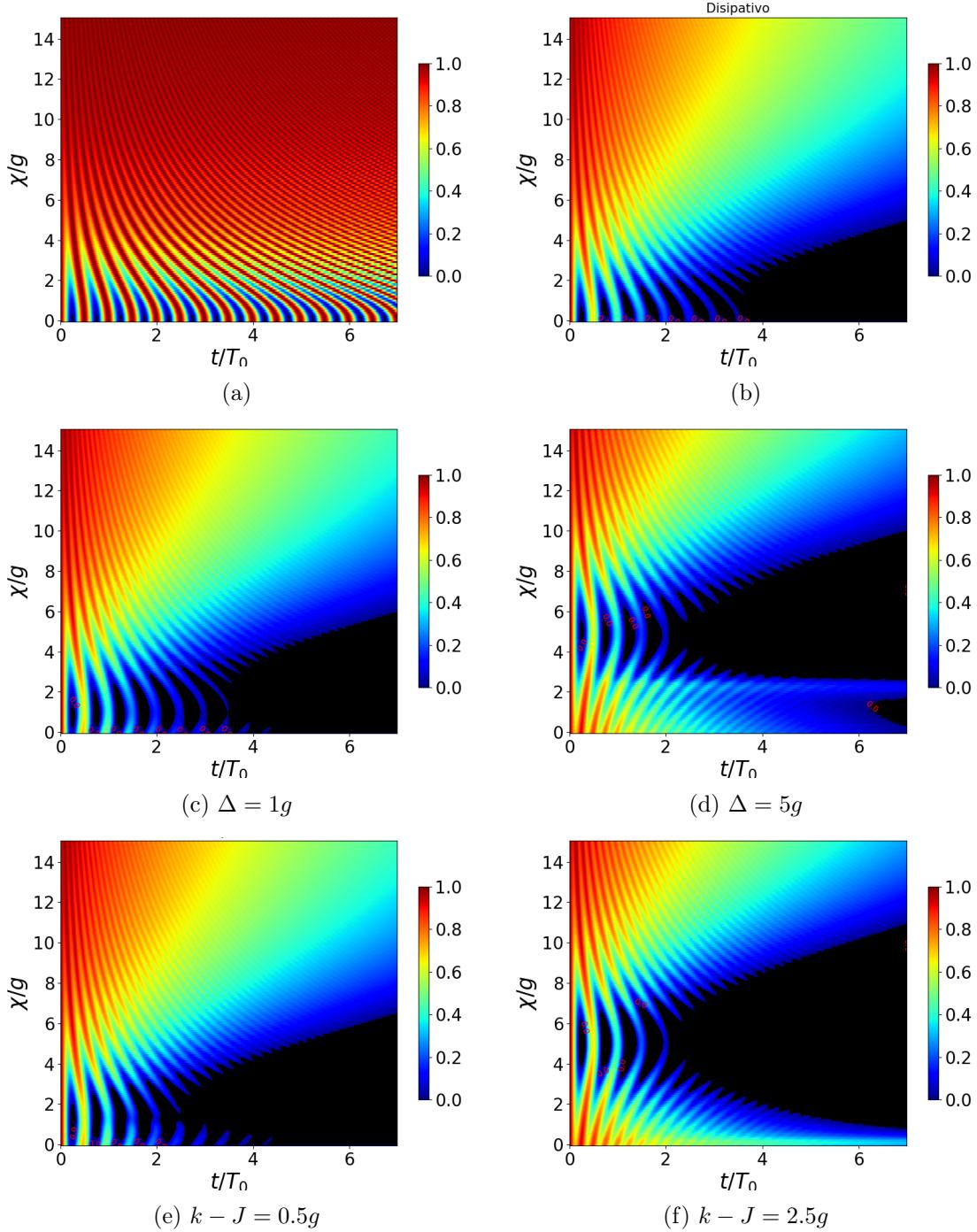


Figura 4.18. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, en función del detuning, y para $\chi = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas, (b) Dinámica con pérdidas. Luego, con pérdidas, (c) $\Delta = g$, $k - J = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\Delta = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $k - J = 2.5g$.

Dependencia con la interacción entre átomos

Desde el comienzo ya se puede ver como al aumentar el valor absoluto de la interacción el comportamiento es el mismo que en los otros dos casos, donde aumenta la frecuencia y disminuye la amplitud conservando el entrelazamiento inicial, pero en este caso el comportamiento se ve acentuado.

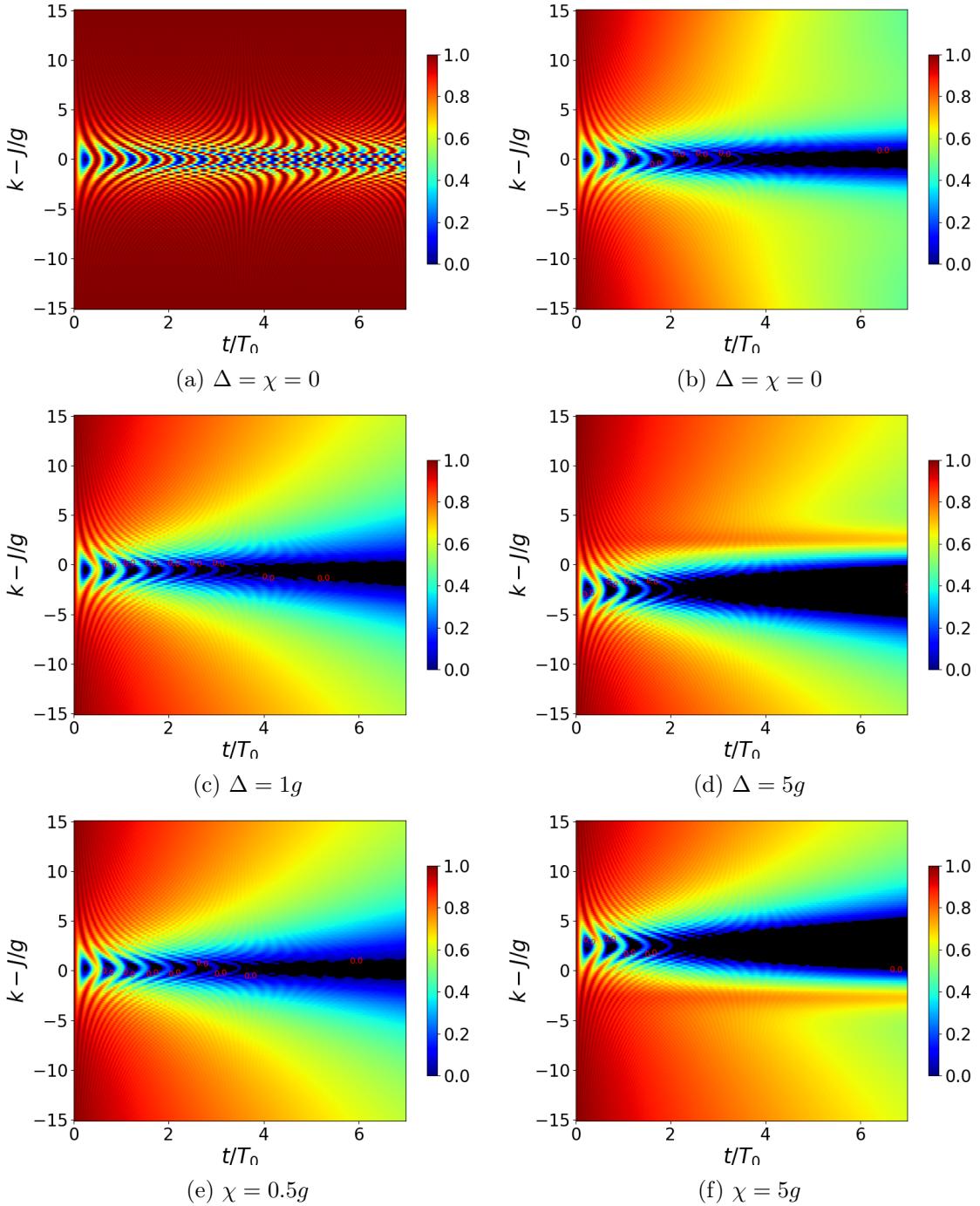


Figura 4.19. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, en función de la interacción entre los átomos (a) Dinámica sin pérdidas con $\Delta = \chi = 0$. Dinámica con pérdidas (b) $\Delta = \chi = 0$; (c) $\Delta = g$, $\chi = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $\chi = 0$; (e) $\Delta = 0$, $\chi = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $\chi = 5g$.

La interacción entre los átomos conserva mejor el entrelazamiento. Esto también se observa cuando se agrega la disipación, en comparación con las otras interacciones. En la figura 4.19a se ve como se conserva mejor el entrelazamiento.

En las figuras 4.19c-f se observan los efectos que tienen los otros dos parámetros en la dinámica. Por un lado, vemos que aumentar el detuning 4.19c desplaza el centro hacia

abajo pero no parece haber mucha diferencia. Al seguir aumentando la desintonía 4.19d, el centro se sigue desplazando y podemos ver que éste se desplaza la mitad que lo que aumenta Δ . Además, la estructura pierde la simetría y se observa una franja en la parte superior donde el entrelazamiento se conserva mejor. Este valor parece corresponderse con $+\Delta/2$.

Juntando estos análisis, y mirando las expresiones de las energías Ec. (4.5), es evidente que la condición de robustez para los estados de una excitación $N = 1$ se da cuando

$$\Delta - \chi + 2(k - J) = 0. \quad (4.21)$$

En particular, cuando se cumple esta condición, los autovectores del Hamiltoniano son

$$|u_{1,2}^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg1\rangle \mp \frac{|eg0\rangle + |ge0\rangle}{\sqrt{2}}) = \frac{|\phi_1^{(1)}\rangle \mp |\phi_2^{(1)}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.22)$$

que son estados entrelazados en la base utilizada. Si solo consideramos que hay dos estados relevantes, entonces estos autovectores son MES.

Es interesante que al cambiar las no linealidades, en las figuras 4.19d y f, vemos que el efecto es exactamente el mismo, pero el desplazamiento es ahora en el otro sentido, y las condiciones de degeneración siguen siendo las mismas, a menos de un signo.

4.4.2. Condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$

Dependencia con el detunning

Ahora se estudia la dinámica para el estado simétrico en el subespacio de $N = 2$. Igual que en el caso anterior, la figura 4.20 muestra la evolución unitaria a la izquierda, y la disipativa a la derecha. En este subespacio hay más estructura, y si bien sigue siendo simétrico con respecto al eje $\Delta = 0$, la forma es más complicada, y en el caso unitario también se observan regiones que presentan SDE, cosa que para $N = 1$ no aparecen. Al igual que antes, al aumentar el detunning las oscilaciones son de mayor frecuencia y menor amplitud, conservando mejor el entrelazamiento. La razón es la misma: si bien ahora el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ si puede perder fotones, al hacerlo cae al estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, que tiene el mismo entrelazamiento, y los otros dos estados del subespacio $|gg2\rangle$ decaen al $|gg1\rangle$, y $|ee0\rangle$ no tiene fotones así que no pierde excitaciones. Por lo tanto, en el caso de alta desintonía, el comportamiento es similar al de anterior: las oscilaciones no tienen mucha amplitud y por lo tanto la probabilidad está concentrada casi toda en el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, que al perder un fotón decae al estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ (junto con sus coherencias), entonces el entrelazamiento es el mismo.

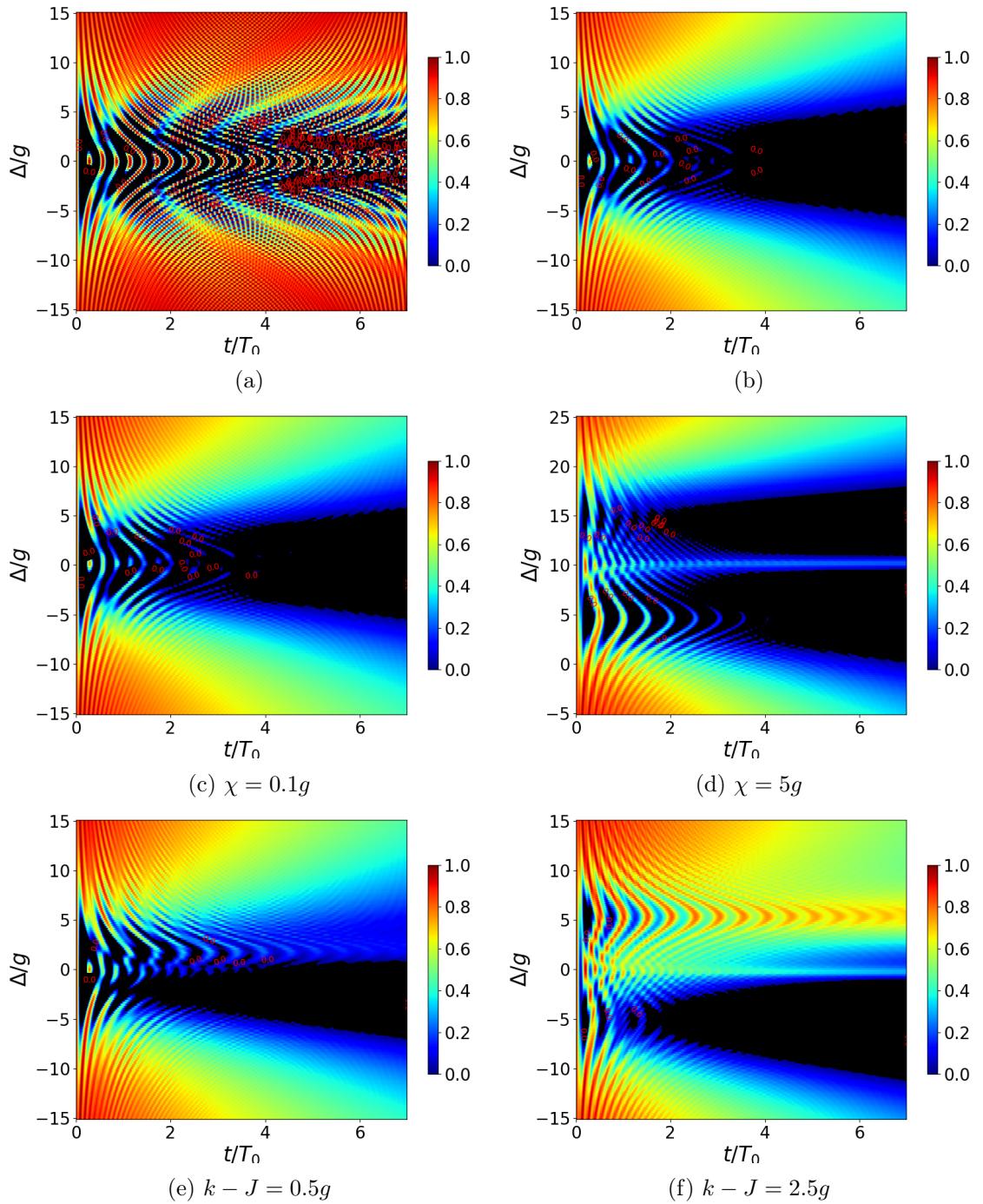


Figura 4.20. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, en función del detunning, y para $\chi = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas, (b) Dinámica con pérdidas. (c) $\chi = 0.1g$, $k - J = 0$; (d) $\chi = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\chi = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\chi = 0$, $k - J = 2.5g$

Este subespacio de mayor excitación es relevante, ya que las energías de los estados presentan máximos y mínimos locales en función de los parámetros del problema (figuras 4.16), lo que cambia drásticamente el entrelazamiento al modificar los valores de los parámetros.

En las figuras 4.20c-f se muestran diferentes casos. En la primera fila los casos con medio Kerr cuyos parámetros son $\chi = 0.1g$ y $\chi = 5g$ respectivamente. En la figura 4.17c

correspondiente a $\chi = 0.1g$, no se observa ningún cambio significativo con respecto al caso $\chi = 0$, es muy pequeño para ser notado y la estructura queda igual. Pero al aumentar mucho la no linealidad del medio, se comienza a observar el desdoblamiento en las energías, y los máximos y mínimos locales comienzan a tomar importancia. En la figura 4.20d se ve como hay dos zonas en donde las oscilaciones tienen gran amplitud y poca frecuencia, similar al caso *resonante*. Esto se puede explicar con el desdoblamiento de energías. Hay dos mínimos en las frecuencias de Rabi que participan en este proceso, que están cerca de $\Delta_1 = 5g$ y $\Delta_2 = 15g$ aproximadamente. Haciendo una analogía con el caso de 1 átomo, donde vimos que la condición de robustez se daba para $\Delta = \chi(2n_c - 1)$ (ver (3.2)) y recordando que esta condición se obtiene de la diferencia entre las contribuciones diagonales del Hamiltoniano, entonces en este caso, se puede hacer lo mismo y obtener dos condiciones. La primera con $\chi n_c^2 - \chi(n_c - 1)^2 = \chi(2n_c - 1)$ que es igual a la del caso de $N = 1$, y la segunda con $\chi(n_c - 1)^2 - \chi(n_c - 2)^2 = \chi(2n_c - 3)$. Sustituyendo $n = 2$, la condición se da para $\Delta = \chi$ y $\Delta = 3\chi$, que es justo donde se aprecian los mínimos. Si bien el segundo mínimo de 3χ parece ser menos pronunciado, esta analogía funciona bien.

Si se hace esta resta pero ahora con $\chi = 0$ y nos concentraremos en $k - J$, la condición se da cuando $\Delta = \pm 2(k - J)$, que es donde se observan los mínimos del entrelazamiento en la figura 4.20f. En general entonces, se puede decir que esta condición de menor frecuencia y mayor amplitud de oscilación se da cuando las energías de los estados están cerca de la degeneración, y como hay 3 estados que interactúan siempre por medio del estado del medio (el $\frac{1}{\sqrt{2}}(|egn\rangle + |gen\rangle)$), entonces se dan en el caso general cuando se satisface que:

$$\Delta - \chi(2n - 1) + 2(k - J) = 0, \quad (4.23)$$

que se corresponde con la degeneración entre las energías del estado $|ggn\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n - 1\rangle + |ge, n - 1\rangle)$, y en el otro caso:

$$\Delta - \chi(2n - 3) - 2(k - J) = 0, \quad (4.24)$$

que se corresponde con los estados $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n - 1\rangle + |ge, n - 1\rangle)$ y $|ee, n - 2\rangle$. También, se puede dar que los tres estados están degenerados si se cumplen las dos condiciones simultáneamente.

La tercera condición que se puede dar es cuando los estados $|ggn\rangle$ y $|ee, n - 2\rangle$ son degenerados. Si bien estos no interactúan directamente entre sí, el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ interactúa con ambos, y si estos son degenerados, entonces están en igualdad de condiciones ante el estado inicial. Por lo tanto, la ultima condición se da cuando:

$$\Delta - 2\chi(n - 1) = 0. \quad (4.25)$$

En particular para $n = 2$ se tiene que $\Delta = 2\chi$. En las figuras 4.20d y f, se observa que cuando se cumple esta condición, el entrelazamiento es más fuerte ante el efecto del entorno.

Dependencia con el Kerr

Para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ en función de χ se observan diferencias con el caso del detuning: las imágenes 4.21 y 4.20 tienen diferentes estructuras. Esto significa que ya no están en igualdad de condiciones el detuning y el medio, como era el caso de el subespacio de $N = 1$. Aparte de esto, los demás comportamientos no son

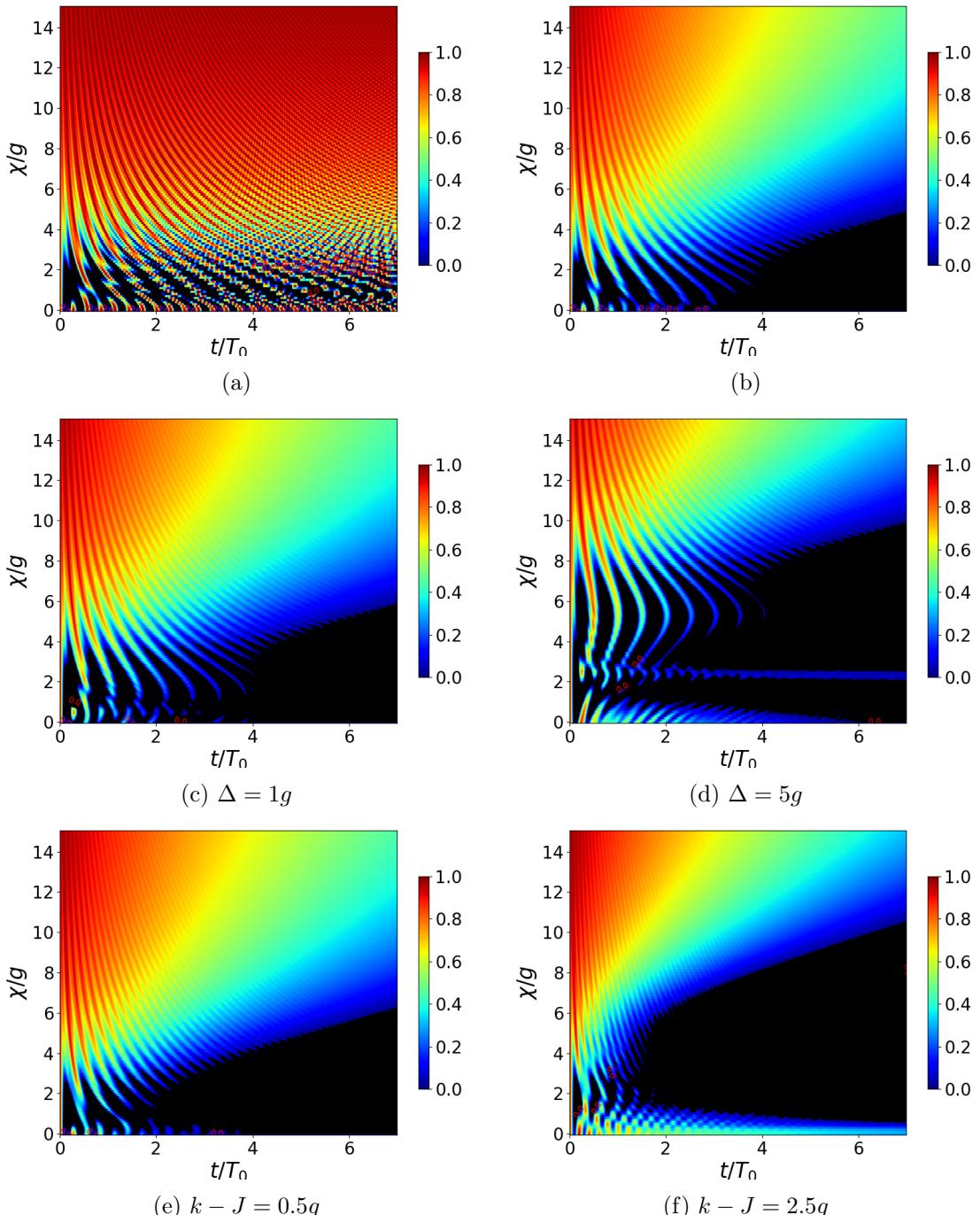


Figura 4.21. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, en función del medio Kerr, y para $\Delta = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas,(b) Dinámica con pérdidas. (c) $\Delta = g$, $k - J = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $k - J = 0$; (e) $\Delta = 0$, $k - J = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $k - J = 2.5g$.

inesperados. Al aumentar χ , el entrelazamiento inicial se conserva, ya que las oscilaciones son de menor amplitud; además, al agregar disipación, las oscilaciones decaen en amplitud y las zonas donde existe SDE se agrandan. También, al aumentar la no linealidad del medio, la frecuencia de oscilación aumenta haciendo que el entrelazamiento sea más robusto ante el efecto del entorno.

Al cambiar algunos de los parámetros para ver cómo afectan al entrelazamiento en función de χ , se muestra en las figuras 4.21c y 4.21d cómo afecta aumentar el detuning. En primer lugar, aumentar a $\Delta = g$ no afecta sustancialmente la estructura (comparar con 4.21b). El efecto principal es desplazar hacia arriba la figura. Pero al aumentar mucho el detuning, como en el caso de $\Delta = 5g$, observamos que no solo la frecuencia cambia (poco pero cambia, en el primer caso para llegar a $t/T_0 = 2$ se necesitan 3 oscilaciones pero para el segundo 4), como se esperaba, sino que también hay nuevamente una separación en dos regiones. Esto se atribuye a que la diferencia de energías tiene máximos y mínimos locales, haciendo que en estas regiones las oscilaciones sean de mayor amplitud. La estructura en las figuras 4.21e y f cambian con respecto a las dos anteriores. Al aumentar la interacción entre los átomos, la zona de SDE se acentúa y ya no se aprecian oscilaciones que entran en la zona negra. Las diferencias principales son que para $\chi \approx 0$ en el caso de $k = J = 2.5g$ parece conservar bien el entrelazamiento cosa que no es tan notable para el caso de $\Delta = 5g$. La segunda es que en la figura 4.21d cerca de $\chi = 2.5g$ se observa también una franja que conserva mejor el entrelazamiento en comparación con los valores cercanos.

Dependencia con la interacción entre átomos

Al considerar el espacio de $N = 2$, lo primero que resalta es que la zona central que presenta SDE ahora es más ancha. Por otro lado, al agregar disipación, las diferencias parecen desaparecer con respecto a su contraparte de $N = 1$. Esto probablemente se debe a que en presencia de disipación, para tiempos largos, el estado del sistema será similar. Más aún considerando que se está ignorando la dinámica de la cavidad al observar el entrelazamiento entre los átomos. La mayor diferencia entre ambos casos aparece cuando observamos los efectos de los parámetros Δ y χ . Este caso es interesante porque nos ayuda a ver concretamente cómo, al tener ahora 3 estados dinámicos, el efecto del detuning y del medio son diferentes, que en el caso de 1 átomo (o en el subespacio de $N = 1$) por lo que vimos antes son lo mismo. En las figuras 4.22d y f se observa la clara diferencia entre estos dos efectos. Para el detuning aparecen 2 regiones que, nuevamente, son correctamente predichas por las condiciones (4.23) y (4.24) (considerando $\chi = 0$), y para el caso del medio (panel f), si traducimos las condiciones para $\Delta = 0$ obtenemos que la condición de degeneración se da para $k - J = \frac{3}{2}\chi = 7.5g$ y $k - J = \frac{-\chi}{2} = -2.5g$, que es justamente donde se observan las regiones con mayor estructura. Esto nos dice que fundamentalmente, la degeneración de estados lleva a una mayor coherencia entre las oscilaciones del entrelazamiento. Si bien esto es cierto, puede ser que este entrelazamiento muera súbitamente, o que sea más robusto que otras combinaciones de parámetros. Esto se ve claramente en estas dos figuras (paneles d y f), donde se pudo predecir correctamente que había zonas más coherentes, pero en ambos casos tenemos una de las zonas que presenta SDE y el

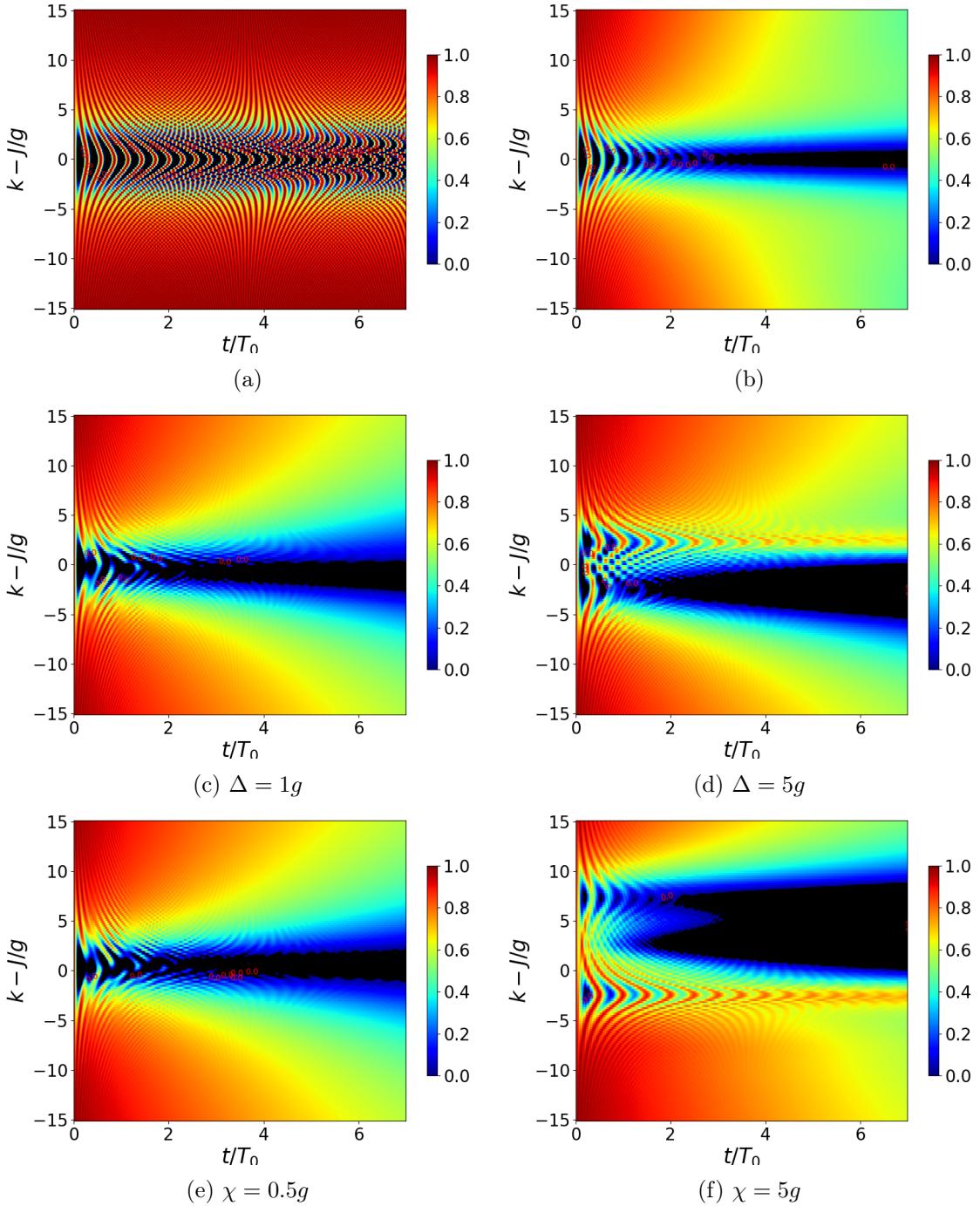


Figura 4.22. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, en función del detuning, y para $\chi = k - J = 0$. (a) Dinámica sin pérdidas, (b) Dinámica con pérdidas. (c) $\Delta = g$, $\chi = 0$; (d) $\Delta = 5g$, $\chi = 0$; (e) $\Delta = 0$, $\chi = 0.5g$; (f) $\Delta = 0$, $\chi = 5g$.

entrelazamiento muere, y la segunda zona donde las oscilaciones perduran en el tiempo más que en cualquier otra combinación de parámetros.

Para completar el análisis de la dinámica de entrelazamiento, se considera un acoplamiento no lineal entre la cavidad y los átomos: el acoplamiento Buck-Sukumar. Este es

mayor mientras más excitaciones tenga la cavidad, concretamente la intensidad del acoplamiento se multiplica por la raíz de la cantidad de fotones de la cavidad $\sqrt{n_C}$. La conclusión de este estudio es que en el caso de $N = 1$, es todo exactamente igual. Para $N = 2$, hay algunas pequeñas diferencias, pero son casi insignificantes y no tienen consecuencias mayores sobre el entrelazamiento de los átomos.

Por lo tanto, no justifica mostrar nada, sólo mencionar que en los casos observados no afecta significativamente.

4.5. Conclusiones del capítulo 4

En este capítulo se analizó la dinámica del sistema, primero se recuperó el caso de 1 átomo apantallando uno de los dos átomos, situación que no es física pero sirve para estudiar el efecto de los parámetros del problema.

Luego se estudió la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos, ignorando la cavidad, a través de la concurrencia. Esta es una medida estándar que sirve para medir el entrelazamiento entre dos sistemas de dos niveles. Para hacerlo debemos ignorar la cavidad, tomando traza parcial sobre ésta. Si bien a la hora de estudiar la concurrencia solo se tiene en cuenta los dos átomos, la dinámica de la cavidad queda escondida pero sigue siendo relevante, ya que la solución numérica la tiene en cuenta. Este estudio resultó útil, ya que por un lado se concluye que el subespacio de $N = 1$ se comporta igual que el modelo de Jaynes-Cummings de 1 átomo, y donde se observó que el detuning Δ y la no linealidad del medio Kerr χ juegan un mismo rol. Pero para el caso de $N = 2$ esto ya no es cierto, y se encontró una dinámica con mucha más estructura. Además, se pudo utilizar una analogía que llevó al estudio de los casos de degeneración energética entre estados, y estas condiciones (Ecs. (4.23)-(4.25)) sirvieron para predecir correctamente zonas de entrelazamiento particulares, donde la combinación de estos parámetros da lugar a oscilaciones coherentes y mayor duración del entrelazamiento frente al entorno. Si bien estas condiciones tienen un cierto poder de predicción, no se encontró una herramienta concreta para saber si esta zona presentará muerte del entrelazamiento, o robustez ante el efecto del entorno, sin mencionar, que estas condiciones se encontraron por analogía y no se adjudicó a ninguna razón fundamental. Por esto mismo, hay algunos comportamientos que este análisis no logra explicar. Además, se concluye que de los parámetros del problema (Δ , χ y $k - J$) aumentar la interacción entre los átomos es la más efectiva para preservar el entrelazamiento, por su contrario, aumentar las no linealidades (χ) hace que el entrelazamiento decaiga más rápidamente.

Un resultado interesante que se ha obtenido en este capítulo es la capacidad de predecir numéricamente qué desintonía debe haber entre la cavidad y los átomos para lograr un entrelazamiento más robusto ante los efectos del entorno.

FASE GEOMÉTRICA EN JCM GENERALIZADO

Este capítulo se divide en dos partes. En la primera se estudia la dependencia de la FG con los parámetros del problema, y se analizan situaciones de robustez, intentando ver si las condiciones halladas en el capítulo anterior predicen correctamente dichas características. En la segunda parte, se examina en detalle la robustez para varias condiciones iniciales diferentes, pero siempre en función del detunning, ya que este es el parámetro más accesible experimentalmente.

5.1. Dependencias de la FG

Al igual que en la sección 3.3, se estudia la dependencia de la fase geométrica con los distintos parámetros del problema, siguiendo la definición de la FG en Ec. (2.28). Se estudian los efectos en cada caso, y se buscan condiciones de robustez. Nuevamente, se estudian las condiciones iniciales $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, con el objetivo de recuperar comportamientos similares al JCM de 1 átomo para el primer caso, y comparar estos con el otro.

5.1.1. Dependencia con el régimen de acoplamiento

En la figura 5.1 se observa la fase geométrica acumulada para diferentes valores del acoplamiento con el entorno $\gamma = 0, 0.01g, 0.1g, 0.5g, g$, donde cada valor se corresponde con una curva mostrada, en orden ascendente en los colores. Es decir, $\gamma = 0$ se corresponde con la curva azul oscuro, y $\gamma = g$ con el color más claro (naranja). El comportamiento para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ mostrado en la figura 5.1a es idéntico al caso del JCM de 1 átomo, donde aumentar la disipación hace que los escalones se suavicen, y dejen de acumular fase rápidamente por la destrucción de las coherencias.

En el caso de la condición inicial correspondiente al subespacio de $N = 2$, se observa un nuevo comportamiento: un *rebote*. Al aumentar lo suficiente el acoplamiento con el entorno, la acumulación de fase geométrica hace un salto en la dirección contraria a la que lleva normalmente, y luego oscila cerca a su valor asintótico. Como se vio anteriormente, los saltos que hacen aparecer los escalones, se podían interpretar en el caso de 1 átomo utilizando la esfera de Bloch. Estos saltos ocurren cuando la trayectoria llega al otro lado de la esfera de Bloch. Al llegar al lado opuesto (digamos $\phi = \pi$), justo al superar este punto, el camino más corto para cerrar el ciclo, según la regla de la geodésica, es recorrer

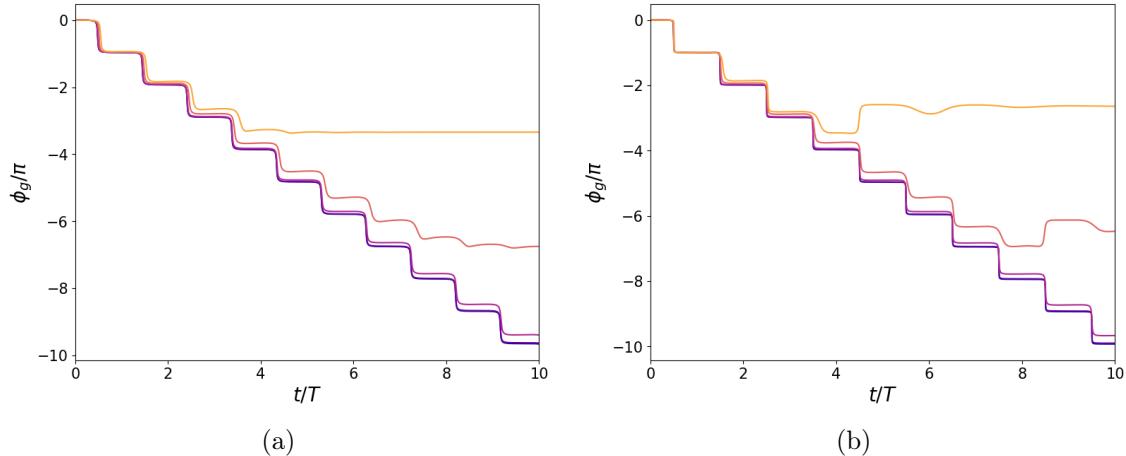


Figura 5.1. Dependencia de la FG acumulada con el acoplamiento con el entorno para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$.

la esfera por el otro lado, dando así un salto de π en el caso resonante. Esta interpretación en el caso de un espacio de Hilbert más extenso no es tan directa, pero se puede pensar en analogía en una esfera de mayor dimensión, en donde el rebote sería una situación similar a la descrita anteriormente. Más allá de esto, el comportamiento es el esperado, e incluso se ve que ambos casos acumulan una fase geométrica muy similar en términos de su valor absoluto. No parece haber diferencias significativas en la influencia que tiene el entorno sobre estos dos estados.

5.1.2. Dependencia con el detunning

Para estudiar el efecto del detunning sobre la fase geométrica, se dejan fijos los otros parámetros del problema y se varía la diferencia entre las frecuencias de los átomos y la cavidad. Como el régimen de acoplamiento fuerte es el que nos interesa, se elige un acoplamiento con el entorno $\gamma = 0.1g$ y $p = 0.005g$, y en un principio los demás parámetros en cero $\chi = k - J = 0$. En la figura 5.2 se muestran la fase acumulada para diferentes valores del detunning Δ para las dos condiciones iniciales elegidas. En 5.2a se observa el mismo comportamiento que en el caso de 1 átomo, el detunning hace que los escalones sean más suaves y el salto menor, haciendo que en conjunto el sistema acumule menos fase geométrica. Si asociamos la fase geométrica al camino que recorre el estado en el espacio de estados, es evidente que a mayor detunning, la fase acumulada será menor, ya que como se mencionó en reiteradas ocasiones, al aumentar el detunning las oscilaciones entre los estados son más pequeñas, y por lo tanto la probabilidad está concentrada en la condición inicial. Consecuentemente, en el espacio de rayos, la curva se mantiene cerca del origen y, por lo tanto, la fase acumulada es menor. En el caso de la condición inicial en el subespacio de $N = 2$, si el detunning es bajo, entonces el efecto es similar al anterior y la fase acumulada tiene una forma y un valor similar. Pero aproximadamente en el rango de $1g \leq \Delta \leq 5g$, hay una gran diferencia. La fase acumulada es más errática y presenta saltos y *rebotes*. Al seguir aumentando el detunning, estos parecen disminuir y converger al comportamiento esperado para un detunning grande: que la fase acumulada sea poca. Una

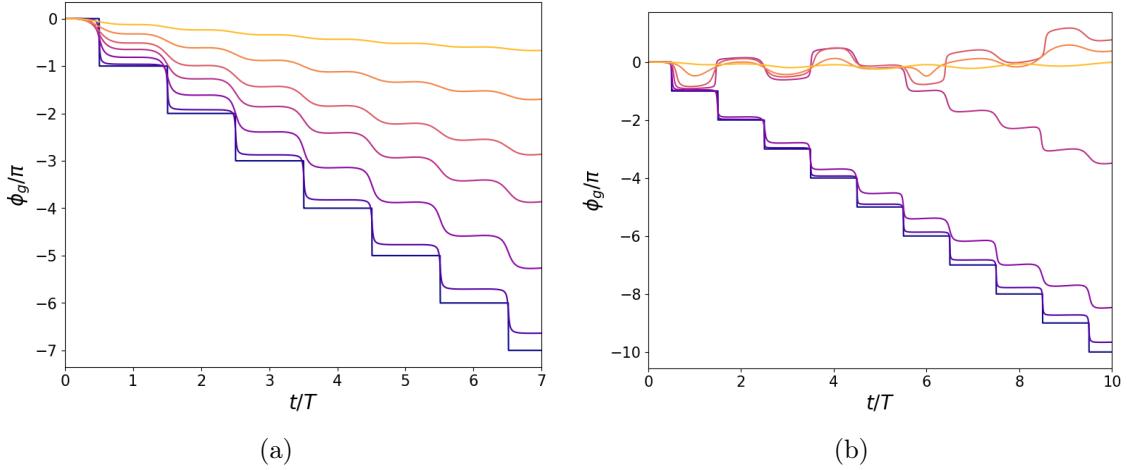


Figura 5.2. Dependencia de la FG acumulada con el detuning para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$.

explicación para el comportamiento en el rango medio de detuning es que las poblaciones comienzan a presentar batidos. Las probabilidades de los estados $|ee0\rangle$ y $|gg2\rangle$ comienzan a aumentar y son comparables a la probabilidad del estado inicial. Esto hace que en el espacio de estados, las curvas sean complicadas y tengan trayectorias largas, haciendo que en algunos casos el salto sea positivo, y en otros, negativo. Para valores de detuning bajos, el sistema principalmente se centra en el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, y para detunings altos también. Es en este rango intermedio, que las amplitudes de los 3 estados sin similares y oscilan de manera errática, presentando batidos, y por eso la fase geométrica acumulada no sigue un comportamiento continuo a lo largo de su dependencia con el parámetro. No se encontró una manera clara de representar ésto en el espacio de parámetros para poder entender intuitivamente el comportamiento, ya que la esfera de Bloch no es una herramienta que se pueda utilizar en esta situación. Para seguir el estudio, se presenta la diferencia entre la fase geométrica unitaria y la disipativa en función del detuning. Para ello se realizan simulaciones para diferentes valores de Δ y se compara el valor de la fase geométrica luego de un tiempo fijo $t = 3T$ para dos casos, el primero presentando pérdidas y el segundo sin pérdidas. Luego se realiza la resta de ambas cantidades y se obtiene el gráfico 5.3.

En este gráfico se muestran tres curvas diferentes correspondientes a tres valores diferentes del acoplamiento con el entorno, respectivamente caracterizados por $\gamma = 0.01g, 0.1g$ y $0.25g$, y la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$. En primer lugar, se ve que las curvas pasan por el origen, lo que nos dice que la diferencia entre la fase geométrica en ambos casos es 0, que es lo que llamamos condición de robustez, ya que el entorno no tiene efecto sobre la fase geométrica y esta se mantiene robusta ante los efectos del entorno. En el panel 5.3a, correspondiente a $\chi = k - J = 0$, la condición de robustez se da para $\Delta = 0$, como era de esperarse, ya que es la misma que para el caso de 1 átomo. De la misma manera, al observar el caso de $\chi = 5g$ en la figura 5.3b, esta condición se da para $\Delta = \chi = 5g$, que también es lo que se espera. La figura 5.4 muestra la robustez para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, sin interacción entre átomos, y para (a) $\chi = 0$ y (b) $\chi = 5g$. Con $\chi = 0$, no cambia nada

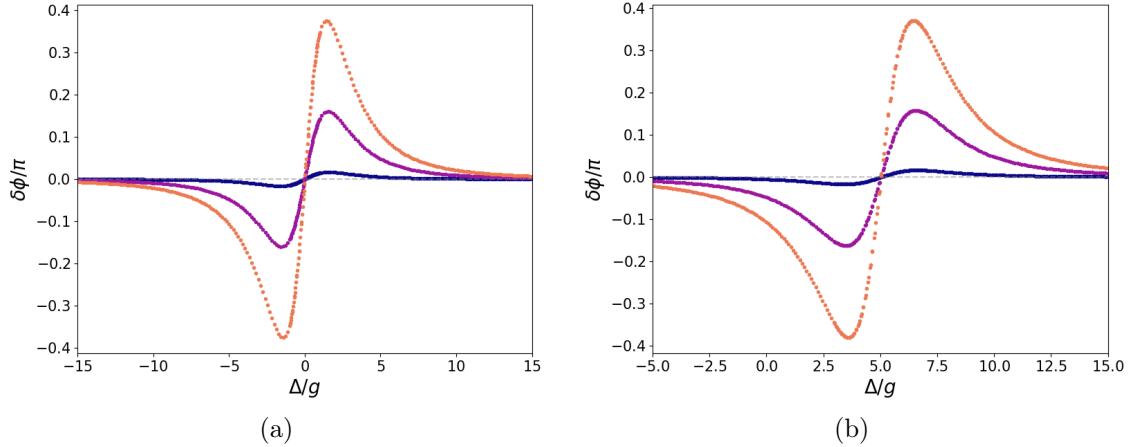


Figura 5.3. Robustez en función de Δ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ para (a) $\chi = 0$ y (b) $\chi = 5g$.

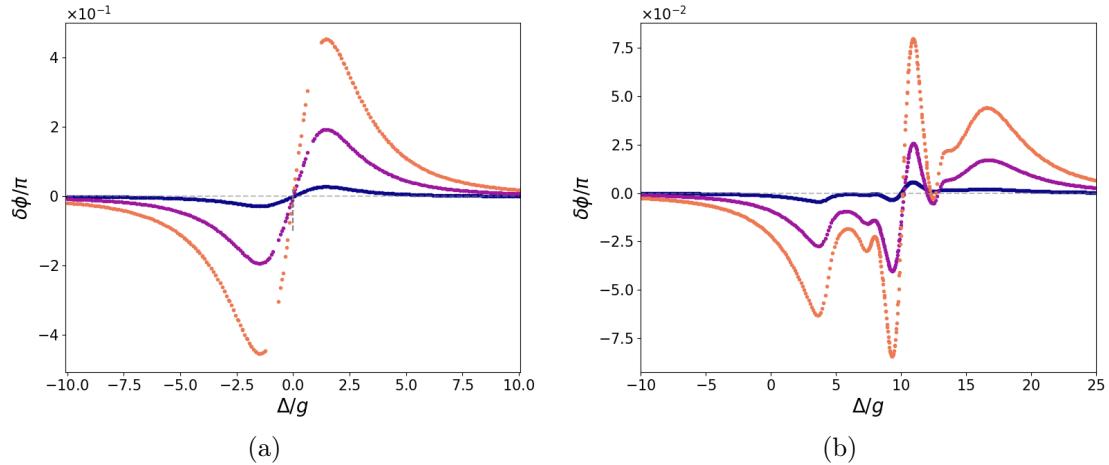


Figura 5.4. Robustez en función de Δ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ para (a) $\chi = 0$ y (b) $\chi = 5g$

con respecto al caso de $N = 1$. Pero cuando $\chi = 5g$ se observan comportamientos nuevos: (i) hay máximos y mínimos nuevos que dependen suavemente de los parámetros y (ii) hay más de un valor para el cual la diferencia es 0 que además (iii) las condiciones de robustez no predicen correctamente. Para $\Delta = 10g$ hay un punto de robustez, correspondiente a la condición dada por Ec. (4.25) $\Delta = 2\chi$, donde las tres curvas presentan una raíz. Pero también para $\Delta \approx 12.5g$ se observan otras raíces. El mínimo en esta zona depende del acoplamiento con el entorno, y sorprendentemente, para valores de $\gamma = 0.1g$ y $\gamma = 0.25g$, hay dos raíces, mientras que para $\gamma = 0.01g$ no. Si bien las condiciones propuestas logran predecir el caso de robustez, es evidente que el efecto del entorno no se está teniendo en cuenta y puede llevar a comportamientos inesperados. Las dos evidencias más concretas de esto es que, por un lado, la condición de robustez predice correctamente pero con un muy pequeño error ocasionado por el corrimiento de frecuencias por el entorno, y por el otro lado, como se observó en este caso, hay algunos ceros nuevos de la función que aparecen al cambiar el acoplamiento con el entorno. Estos ceros no son condiciones de robustez, ya que suceden *accidentalmente*, en el sentido que justo en el tiempo que se está observando

la diferencia, la FG unitaria y disipativa coinciden, pero no en todo tiempo.

5.1.3. Dependencia con el medio Kerr

En el caso de 1 átomo se observó que el efecto del medio sobre la fase es análogo al detunning, y en el caso de dos átomos, se observa en la figura 5.5a la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ que esto sigue siendo cierto para el subespacio de $N = 1$. Pero en el caso de la figura 5.5b se muestra que el efecto sobre la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$, en comparación con la figura 5.2b, muestra diferencias en el régimen intermedio que se había definido aproximadamente para valores entre $1g \leq \chi \leq 5g$. Si bien la forma no es igual, es notable que el rango que se definió como *intermedio* es el mismo. Entonces, si bien para $N = 2$ el medio Kerr no es simplemente un corrimiento en el detunning, el comportamiento es similar.

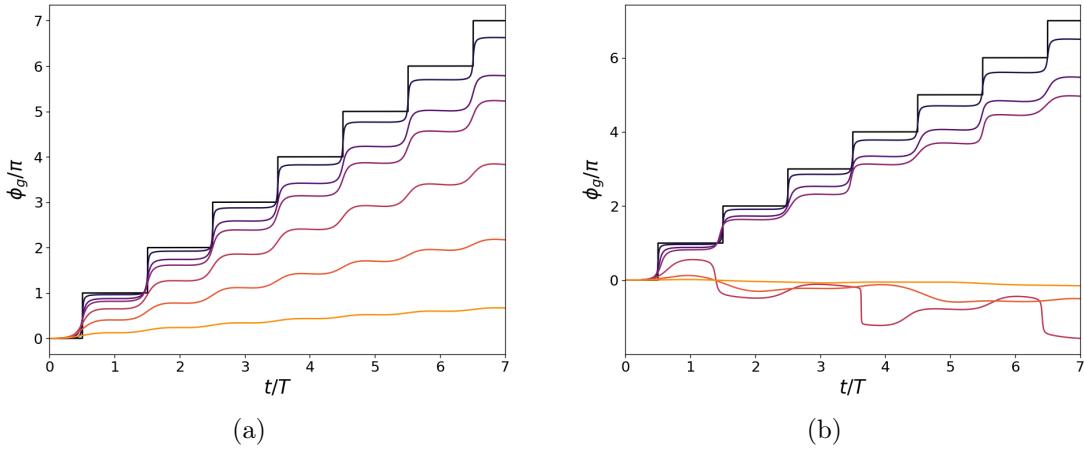


Figura 5.5. Dependencia de la FG acumulada con el medio Kerr para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$.

La pregunta que surge de todas formas es, qué sucede si se realiza un corrimiento en el detunning. En el caso de 1 átomo se había observado cómo la condición de robustez se cumplía cuando $\Delta = \chi(2n - 1)$, y la dependencia de la fase geométrica parecía no cambiar, solo presentaba un corrimiento.

En la figura 5.6a se observa cómo en el primer caso, aumentar el detunning hace que las primeras cuatro curvas, que representan valores de $\chi = 0, g/10, g/6$ y $g/4$ (en negro y violeta oscuro respectivamente), acumulan fase negativa y los saltos son suaves. Ahora, la curva de $\chi = \Delta = 0.5g$ (línea violeta clara) es igual a la de $\chi = \Delta = 0$ de la figura 5.5a, y a partir de esta, al seguir aumentando el detunning el comportamiento es el mismo que antes. Pero para el caso de $N = 2$, ya no es así. Primero, para $\chi = 0$ y $\chi = 0.1g$ las curvas presentan saltos más abruptos, y hay un rebote. Por otro lado, el caso robusto ya no se observa para $\chi = 0.5g$. Ahora, la curva violeta oscura, que representa un valor de $\chi = \frac{\Delta}{3} = g/6$, si bien no es el caso robusto, es muy similar. Se probó por inspección y el valor encontrado para la robustez se dio para $\chi = 0.37\Delta$. Esto coincide aproximadamente con la condición de la Ec. (4.25). Si se sigue aumentando el valor de χ , en el rango intermedio las oscilaciones de la fase parecen tener más de una componente

5.1. Dependencias de la FG

en frecuencia. Esto se observa claramente en la curva roja, donde se ve que hay dos saltos diferentes.

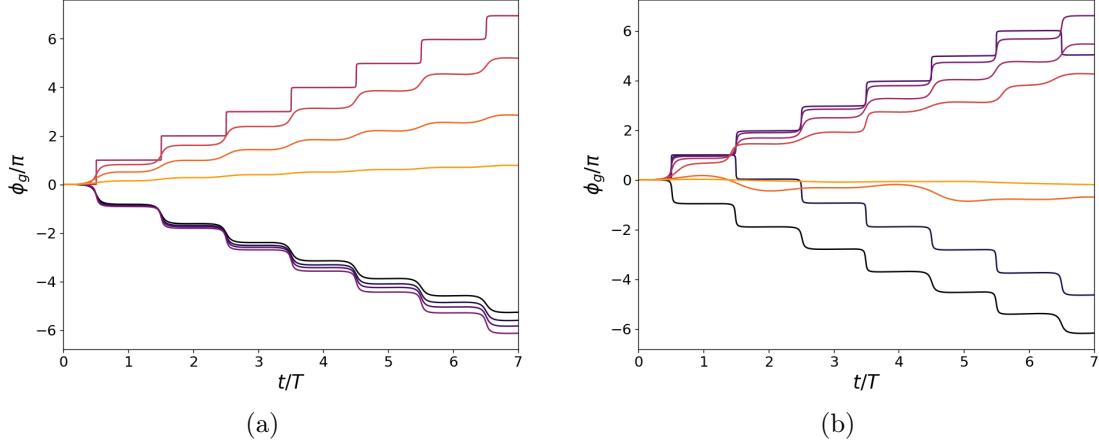


Figura 5.6. Dependencia de la FG acumulada con el medio Kerr con $\Delta = 0.5g$ para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$.

Finalmente, se realiza un gráfico de diferencias entre la FG unitaria y la disipativa en función del parámetro χ . En la figura 5.7 se muestra la diferencia $\delta\phi = \phi_d - \phi_u$ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$. Se ve cómo la condición de robustez en este caso es igual que para el modelo de 1 átomo, donde la condición se da para $\Delta = \chi$.

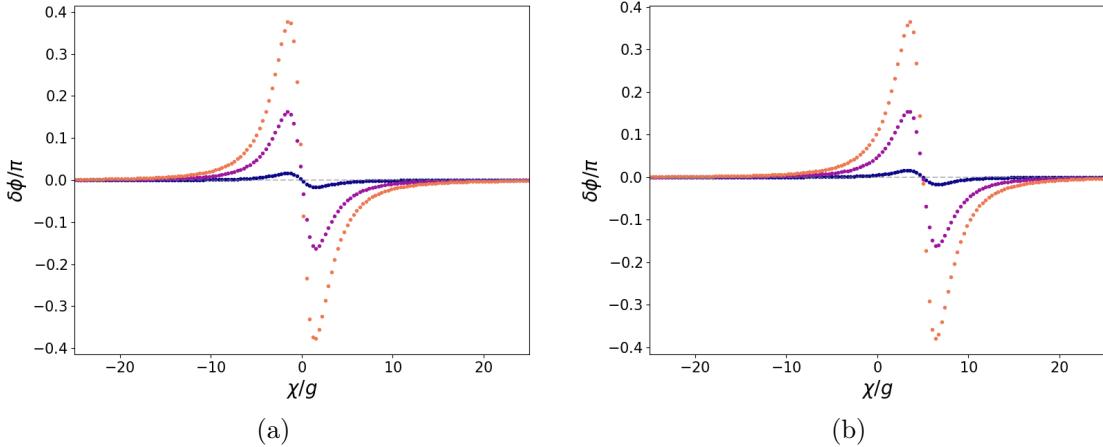


Figura 5.7. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ con (a) $\Delta = 0$ y (b) $\Delta = 5g$

Para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ se muestra la figura 5.8. Primero, en el panel (a) se muestra el caso de $\Delta = 0$. La única raíz se da para $\chi = \Delta = 0$.

Hay que aclarar parte de las curvas donde no tienen puntos. En estos casos lo que sucede es que el entorno introduce un corrimiento en las frecuencias. Consecuentemente, hay un pequeño cambio entre la fase unitaria y la no unitaria. En principio, esto no es un problema, ya que lo único que hace es retrasar un poco el escalón. Pero en combinación con la dinámica complicada del sistema, lo que ocurre en casos muy puntuales, es que la fase unitaria y la disipativa hacen un escalón en direcciones contrarias y la diferencia

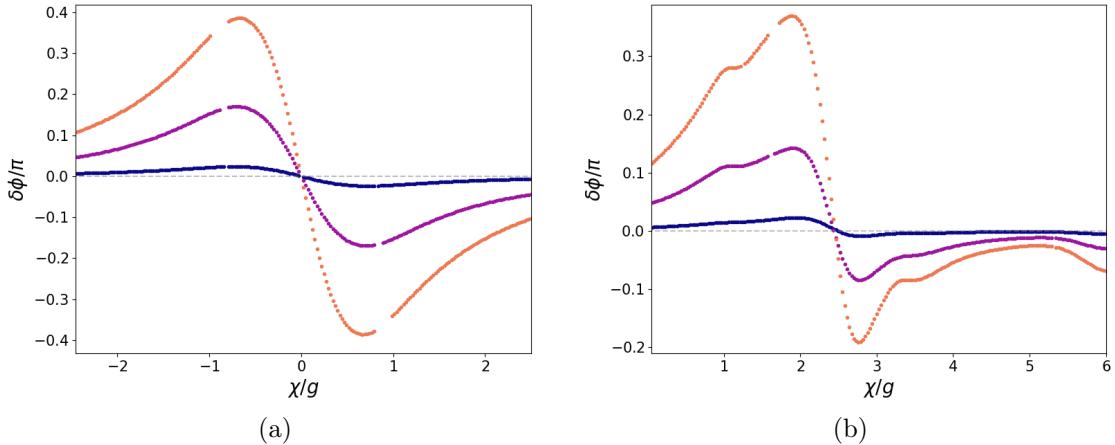


Figura 5.8. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ con $k - J = 0$ y (a) $\Delta = 0$; (b) $\Delta = 5g$

entre ambas presenta un salto abrupto. En la figura 5.8a cerca de los valores $\chi/g = \pm 1$ se observan la falta de puntos, estos están más arriba por el salto que se mencionó. Es también interesante, que no es solo para un caso aislado, sino que es en un rango de valores donde se observa este comportamiento.

En la figura 5.8b se muestra el caso en donde se aumentó el detuning hasta $\Delta = 5g$. Se observan máximos y mínimos locales, y la condición de robustez parece estar cercana a $\chi \simeq 2.45g$ y varía suavemente con cada valor de γ . Esto es muy interesante, ya que el efecto que tiene el entorno también se refleja en esta condición. Nuevamente, esta condición en el subespacio de $N = 2$ se da cuando $\Delta = 2\chi$ (Ec. (4.25)), y en la figura 4.21d se observa que para $\chi \simeq 2.5g$ también la concurrencia presenta una franja robusta. Algo interesante es que la franja observada en la concurrencia, no es de una gran amplitud, aun así, la fase geométrica presenta una raíz para este caso. Si bien esto es un indicio de que la fase geométrica y la concurrencia están relacionadas, es evidente que hay un mecanismo más fundamental que genera este comportamiento y que será motivo de estudio en el futuro.

5.1.4. Dependencia con la interacción entre átomos

Finalmente, se considera la dependencia en la interacción entre los átomos $k - J$. En la figura 5.9 nuevamente se muestran las dos condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$. En ambos casos el comportamiento es el mismo. Al aumentar la interacción, la FG acumulada es menor y los saltos son más suaves. A diferencia con el detuning y con el medio, no se reconoce un rango intermedio para el cual el comportamiento sea diferente.

En la figura 5.10 se muestra la diferencia entre la FG unitaria y disipativa para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$. El comportamiento es el esperado: la condición de robustez se da cuando $k - J = \frac{\chi - \Delta}{2}$. Nuevamente, los máximos dependen suavemente de los parámetros, y en particular dependen del entorno γ .

Para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ se muestra la figura 5.11. Cuando $\Delta = \chi = 0$ (a), la dependencia parece ser la misma que en el caso de $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$, pero en este

5.1. Dependencias de la FG

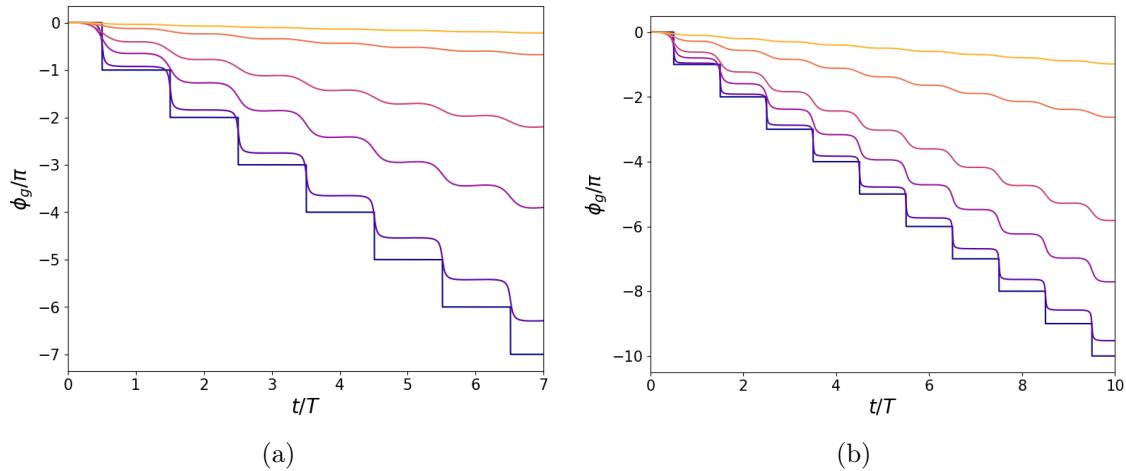


Figura 5.9. Dependencia de la FG acumulada con la interacción entre los átomos $k - J$ para condiciones iniciales (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$.

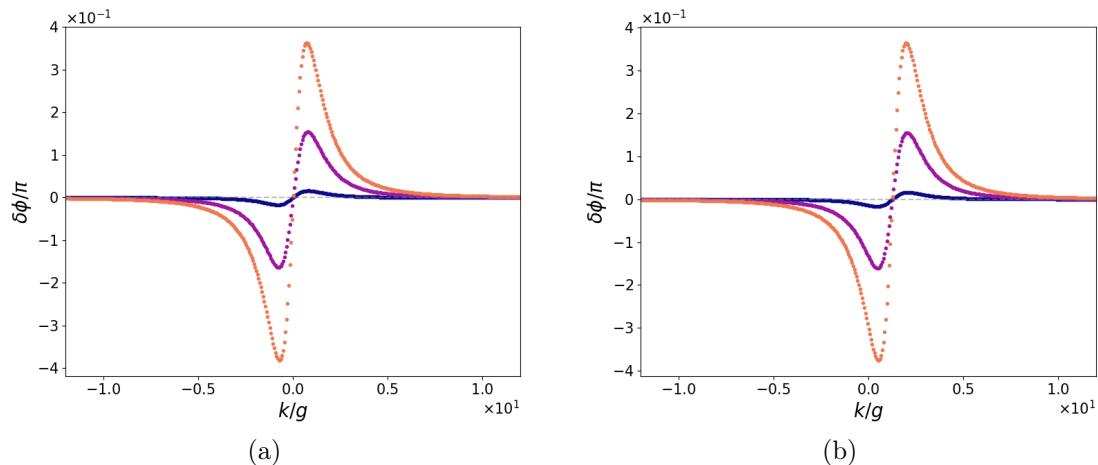


Figura 5.10. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle+|ge0\rangle)$ con $\Delta = 0$ y (a) $\chi = 0$; (b) $\chi = 2.5g$

caso la fase acumulada es menor por casi 1 orden de magnitud. En la figura 5.11b se muestra el caso en que $\Delta = 0$ y $\chi = 2.5g$. De las tres condiciones de robustez, la condición $\Delta - \chi(2n - 2)$ (4.25) no puede cumplirse nunca.

Es interesante que en los casos estudiados anteriormente, en general, era esta la condición que predecía la condición de robustez. Como en este caso no es posible cumplir esta condición, entonces se ve que las otras dos condiciones actúan como condiciones de robustez, que se dan cuando $k - J = -\frac{\chi}{2}$ (Ec. (4.24)) y $k - J = \frac{3}{2}\chi$ (Ec. (4.23)). En este caso, en particular son para $k - J = -1.25g$ y $k - J = 4.75g$, valores que se marcan con líneas rayadas. Si bien la predicción no es exacta, es bastante buena para aproximar. La discrepancia entre valor predicho y valor observado en las figuras se debe a que no se tuvo en cuenta el efecto del entorno a la hora de conseguir estas condiciones. Otra evidencia de esto es que el cero de cada una de las tres funciones, cuyos valores de γ son diferentes, varían suavemente.

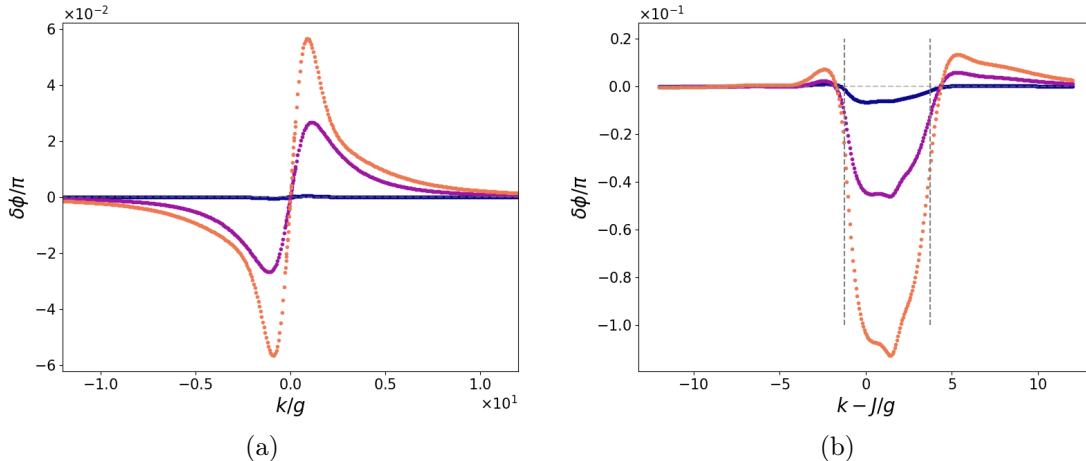


Figura 5.11. Robustez en función de χ para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ con $\Delta = 0$ y (a) $\chi = 0$; (b) $\chi = 2.5g$

5.2. Robustez en función del detunning

Finalmente, se explora más en detalle las condiciones de robustez dadas por las Ecs. (4.23)-(4.25) en función del detuning. Esto es importante, ya que este es en general el parámetro de control al que se tiene acceso en los experimentos, en general, cambiando la frecuencia de la cavidad.

Ya se vio que las condiciones de robustez (4.23)-(4.25) predicen correctamente, con cierto error por el efecto del entorno, cuando la diferencia entre la FG unitaria y en sistema abierto es nula. Esto es uno de los resultados más importantes del trabajo, y se quiere estudiar si estas condiciones se cumplen en todos los casos, ya que si bien en los gráficos mostrados por ahora siempre se cumplió, no fueron demasiadas las combinaciones de parámetros estudiados. Lo que se va a hacer en esta sección, es realizar gráficos de robustez como se hicieron anteriormente, pero para un valor fijo del acoplamiento con el entorno $\gamma = 0.25g$. También, ya que las condiciones de robustez que se encontraron salieron de pedir degeneración entre las energías de los estados de la base Ec. (4.3), entonces se quiere ver qué pasa con las otras dos condiciones iniciales del subespacio de $N = 2$, que son $|gg2\rangle$ y $|ee0\rangle$.

En la figura 5.12 se muestran los casos de robustez para las condiciones iniciales $|gg2\rangle$ mostradas con el número 1 en celeste, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ con un número 2 en gris, y $|ee0\rangle$ con un número 3 en negro. Las tres líneas representan las tres condiciones de robustez (Ecs. (4.23)-(4.25), para diferentes valores de $k - J$. En general, los casos robustos caen sobre las líneas predichas, y en su gran mayoría cada estado inicial respeta consistentemente alguna de las condiciones. Por ejemplo, los estados iniciales $|gg2\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ respetan la condición $\Delta = 2\chi$, y el estado inicial $|ee0\rangle$ respeta la condición de robustez $\Delta = \chi + 2(k - J)$. Esto se cumple en la gran mayoría de los casos, pero como se observa en el caso de $k - J = 2.5g$ (panel (c)), el estado inicial $|gg2\rangle$ en un principio respetaba la condición $\Delta = 3\chi - 2(k - J)$, pero luego este comportamiento cambió.

Como se mencionó anteriormente, hay pequeñas discrepancias gracias al efecto del entorno. Para cuantificar estas diferencias, se realizó un ajuste lineal, y se obtiene que en

presencia del entorno las condiciones se modifican un poco.

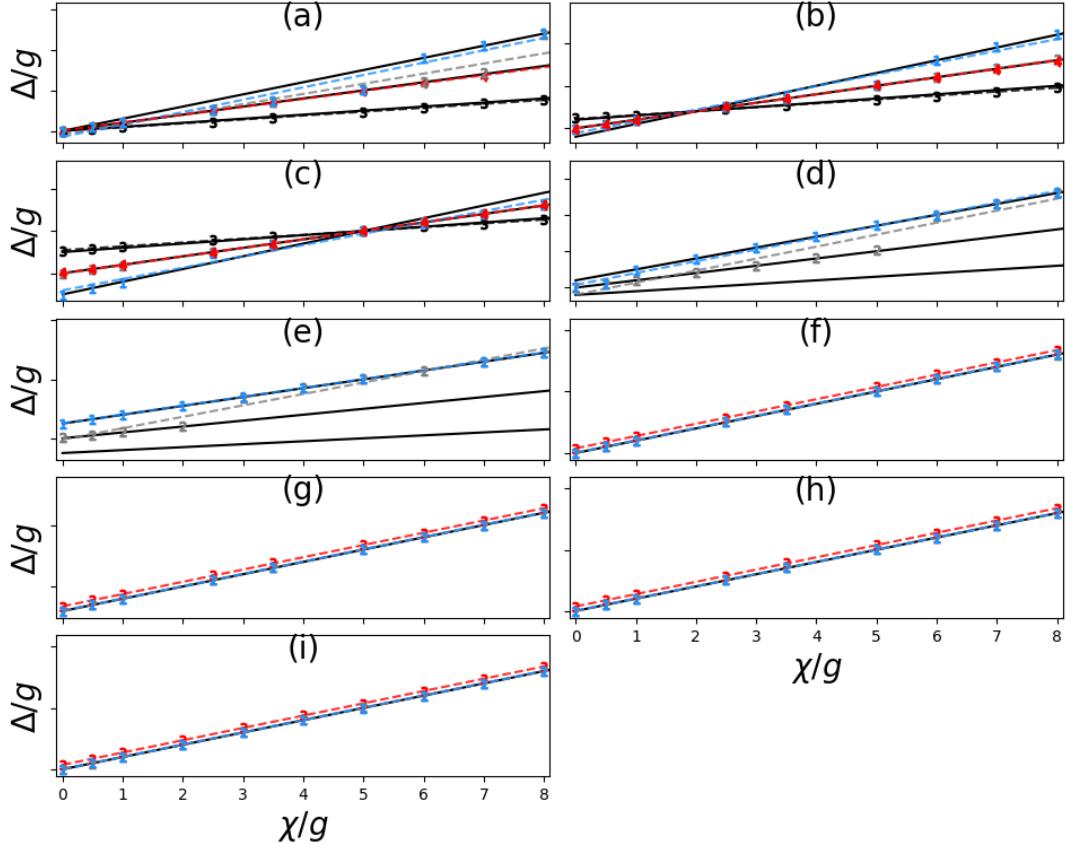


Figura 5.12. Condiciones de robustez para diferentes estados iniciales y valores de $k - J$. Los puntos representan las raíces de $\delta\phi_g = \phi_d - \phi_u$. Los paneles (a)-(e) son estados iniciales con 2 excitaciones, donde los colores representan el estado inicial: $|gg2\rangle$ en celeste, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ en gris, $|ee0\rangle$ en negro y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|ee0\rangle + gg2\rangle)$ en rojo. En estas, los valores de $k - J$ son: (a) $k - J = 0$, (b) $k - J = 1g$, (c) $k - J = 2.5g$, (d) $k - J = -1g$, (e) $k - J = -2.5g$. Las tres líneas negras son las condiciones de robustez predichas, donde la de mayor pendiente representa la condición Ec. (4.23), la del medio Ec. (4.24) y la de menor pendiente, la Ec. (4.25). Los paneles (f)-(i) son para las condiciones iniciales de 1 excitación, donde está el $|gg1\rangle$ en celeste, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + ge0\rangle)$ en gris, y $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + ge0\rangle) + gg1\rangle)$ en rojo. La línea negra sólida representa la condición de robustez dada por Ec. 4.21. Los valores de $k - J$ son: (f) $k - J = 0$, (g) $k - J = 1g$, (h) $k - J = 2.5g$, (i) $k - J = -2.5g$.

El estado inicial $|ee0\rangle$ siempre sigue la condición Ec. (4.24), y en presencia del entorno el ajuste predice una modificación aproximada según

$$\Delta \simeq 0.9\chi + 2.2(k - J). \quad (5.1)$$

Los estados iniciales $|gg2\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg1\rangle + |ge1\rangle)$ siguen la condición (4.25), y el ajuste en estos casos predice una condición modificada

$$\Delta \simeq 2.05\chi - 0.05(k - J). \quad (5.2)$$

Similarmente, el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|ee0\rangle + |gg2\rangle)$ también sigue la condición 2. Esto nos dice que los estados superposición de la base también siguen estas condiciones. Es interesante que, si bien el estado $|gg2\rangle$ a veces sigue la condición 1, y el $|ee0\rangle$ la 3, su superposición sigue la 2. Este estado es un estado entrelazado, solo si se mira el total del sistema. Si solamente se consideran los dos átomos, esto no es cierto, ya que la cavidad tiene diferente cantidad de excitaciones en cada estado, y por lo tanto al tomar traza parcial las coherencias desaparecen.

Para los casos de 1 excitación, mostrados en las figuras 5.12(f)-(i), se ve cómo las dos condiciones iniciales $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle)$ y $|gg1\rangle$ siguen la única condición de robustez para este subespacio Ec. (3.32). Sorprendentemente, cuando se considera el estado inicial entrelazado entre ambos estados de la base, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg0\rangle + |ge0\rangle) + |gg1\rangle)$, entonces presenta un pequeño *offset* con respecto a los otros dos estados de la base.

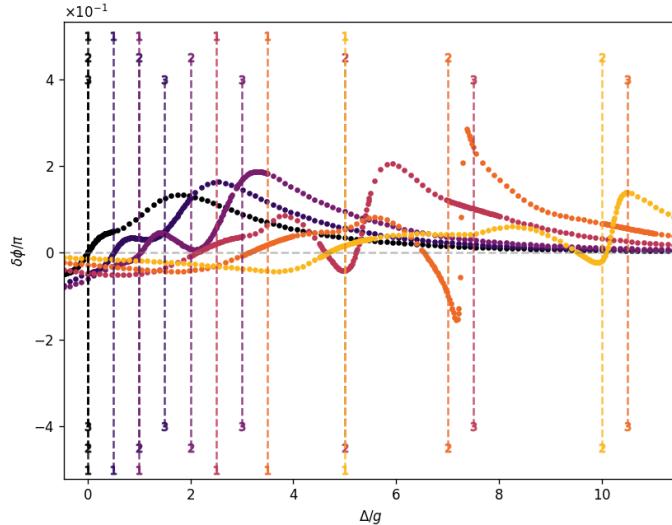


Figura 5.13. Diferencia entre la FG unitaria y disipativa para $k - J = 0$ y múltiples valores de $\chi \in [0, 5g]$. Las líneas rayadas verticales representan las tres posibles condiciones de robustez.

5.3. Conclusiones del capítulo 5

En esta sección se trabajó con la FG en presencia del entorno. Se estudió el efecto de los parámetros del problema y se estudiaron los casos de robustez para distintos estados iniciales. En conclusión se puede decir que las condiciones encontradas predicen los casos de robustez con precisión y sirven en general para cualquier combinación de parámetros, siempre y cuando el estado inicial sea alguno de los estados de la base.

Por otro lado, se encontraron indicios de que la FG y la concurrencia están relacionadas, ya que ambas siguen las condiciones de robustez. Este mecanismo debe ser algo fundamental y un análisis numérico no es suficiente para determinar cuál es el mecanismo escondido que los relaciona y produce una conservación excepcional de las cantidades estudiadas ante los efectos del entorno. A partir de las simulaciones numéricas utilizadas, se

5.3. Conclusiones del capítulo 5

puede concluir que el entorno modifica la condición de robustez. Cuantificar el efecto del entorno requiere un análisis similar al realizado, variando los valores de acoplamiento que excede los objetivos y tiempos de esta Tesis.

CONCLUSIONES

En esta sección resumiremos los contenidos y principales resultados de la Tesis. En primer lugar, y después de la Introducción general al trabajo, en el capítulo 2 presentamos la fase geométrica (FG), un objeto ampliamente estudiado en diferentes áreas de la física actual. Comenzamos con la fase de Berry para sistemas bajo evoluciones cíclicas y adiabáticas, y posteriormente, se generalizó la definición de la FG al caso de sistemas abiertos bajo evoluciones arbitrarias (no-cíclicas, no-adiabáticas). La FG tiene muchas propiedades importantes, y en particular es de interés en este trabajo, estudiar las condiciones para su robustez frente al efecto del entorno. Estas condiciones fueron utilizadas en los siguientes capítulos, en diferentes implementaciones.

Luego, en la sección 3, mostramos los principales aspectos del modelo de Jaynes-Cummings (un átomo dentro de una cavidad con un sólo modo del campo electromagnético). Analizamos la dinámica del modelo, donde el Hamiltoniano se diagonaliza en sub-espacios de 2x2, pudiéndose estudiar el problema de manera exacta. La baja dimensionalidad del problema permite representar las trayectorias (estados) en el espacio de fases en la esfera de Bloch. Esto nos permitió interpretar la FG. Si el medio de la cavidad es lineal, entonces la FG es robusta en el caso resonante ($\Delta = 0$), trazando trayectorias máximas sobre la esfera de Bloch [11]. Extendimos el modelo incluyendo un medio no lineal, lo cual nos permitió demostrar que el detunning Δ y el parámetro del medio χ están relacionados. En este caso, el medio y el detunning están en igualdad de condiciones, y modificar la frecuencia de la cavidad permite eliminar completamente el efecto de las no linealidades del medio. Encontramos la condición de robustez que incluye a ambos parámetros. Este resultado es interesante ya que tiene implicancias experimentales importantes.

Luego, en el capítulo 4 estudiamos la dinámica de poblaciones generada por dos átomos acoplados dentro de la cavidad de JC. Para este análisis se introdujo un apantallamiento "no físico", para re-obtener los resultados del capítulo anterior al trazar parcialmente sobre el átomo apantallado. Los resultados sirvieron para ver que el modelo estaba bien extendido y que no aparecían inconsistencias. Al liberar el apantallamiento, se logró capturar la complejidad del problema que era el objeto de estudio. En particular se estudió la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos y la dependencia con los parámetros del problema. Pudimos ver que al agregar un tercer estado dinámicamente relevante, sumado a las no linealidades de la cavidad, la estructura energética se hace mucho más compleja. Consecuentemente, el comportamiento del entrelazamiento en función de los parámetros no es sencilla, y demostramos que hay ciertas condiciones (4.23)- (4.25) que predicen comportamientos particulares e interesantes. Estas condiciones se dan cuando las energías de los estados de la base están degeneradas. Por un lado, predicen zonas donde la concu-

rrencia presenta oscilaciones coherentes y de mayor amplitud, en general acompañadas de SDE. Por otro, predicen zonas donde el entrelazamiento decae lentamente en el tiempo, es decir, un caso robusto ante los efectos del entorno.

Finalmente, en el capítulo 5, se estudió la FG en el modelo completo de dos átomos en una cavidad disipativa no-lineal. Primero se mostró la dependencia de la FG con los parámetros del problema, comparando las condiciones iniciales en el subespacio de $N = 1$ y $N = 2$ excitaciones, donde encontramos nuevamente que el espacio de $N = 2$ presenta estructuras muy complejas. Luego, estudiando las correcciones a la FG inducidas por el entorno: $\delta\phi = \phi_d - \phi_u$, se corroboró que las condiciones de degeneración, no solo conservan el entrelazamiento, sino que también conservan la fase geométrica. Es decir, para estos puntos, se demostró que la corrección a la FG es nula: $\delta\phi = 0$. Por lo tanto, se encontraron situaciones donde la FG es robusta frente a la disipación y decoherencia.

Es importante destacar que las condiciones de robustez sufren una modificación por el efecto del entorno. Los puntos exactos en el espacio de parámetros donde el sistema presenta robustez, dependen suavemente del acoplamiento con el entorno. Hicimos este análisis al final del capítulo.

Si bien las condiciones halladas existen y son, en principio útiles para las implementaciones experimentales del modelo, aún no pudimos encontrar la razón cuantitativa fundamental del por qué estas condiciones funcionan. Podemos especular acerca del origen topológico asociado a las FGs, pero claramente entender estos aspectos requiere de un estudio profundo en el futuro próximo.

La riqueza del modelo presentado en el capítulo 4 abre muchas posibilidades de estudios posteriores. Por ejemplo, ¿qué pasa si el estado inicial es superposición de estados de la base? ¿Cuál es la razón fundamental que lleva a la robustez de la FG?

Vimos que los autoestados son máximamente entrelazados en el caso de un átomo en la cavidad y en el subespacio de $N = 1$ para dos átomos, cuando se cumple la condición de robustez $\Delta - \chi + 2(k - J) = 0$. En el caso de un átomo este era un estado de Bell $|u_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e0\rangle \pm |g1\rangle)$, mientras que en el caso de dos átomos para el subespacio de $N = 1$, los autoestados son también entrelazados $|u_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|\phi_1^{(1)}\right\rangle \mp \left|\phi_2^{(1)}\right\rangle)$.

Es importante determinar si el entrelazamiento es una condición para la robustez de la FG. Un indicio de que están relacionadas se estableció en los capítulos 4 y 5: concretamente el entrelazamiento entre los átomos y la FG son especialmente robustos ante el efecto del entorno cuando se cumplían las **mismas condiciones**. Las condiciones (4.23)-(4.25) predicen correctamente dónde se encontrarán los puntos donde el entorno no tiene efecto sobre estas cantidades.

Como perspectivas para el futuro próximo, esta Tesis ha dejado varios resultados de interés para analizar y profundizar. En primer lugar, podemos mencionar que sería importante buscar una razón analítica fundamental por la cual las condiciones de robustez funcionan. El problema que se presenta es que las expresiones son muy complicadas de interpretar. Quizás se puede recurrir a una combinación entre análisis analíticos y numéricos para encontrar dicha razón fundamental.

En segundo lugar, es importante profundizar sobre el entendimiento del entrelaza-

miento en sistemas tripartitos. Utilizar y comparar diferentes definiciones en este sistema, puede ayudar a comprender si el entrelazamiento total del sistema contribuye a la robustez. Como hemos visto, la concurrencia, que es parte del entrelazamiento total, parece estar relacionada. Por lo tanto, no se puede descartar que el entrelazamiento total sea la causa fundamental de la robustez. Estudiar el entrelazamiento en sistemas tripartitos y su relación con la condición de robustez para la FG es muy interesante e importante para el diseño de implementaciones de este sistema en el laboratorio (por ejemplo, usando arquitecturas de circuitos superconductores). Otra potencial aplicación de la FG con relación al entrelazamiento se ve en la detección de la fidelidad en compuertas cuánticas [9].

Finalmente, y en relación a posibles implementaciones utilizando circuitos superconductores, en este modelo se puede estudiar el régimen de acoplamiento ultra-fuerte. Este régimen es de relevancia para el control de transmones en implementaciones de información y/o computación cuántica. El circuito superconductor análogo al de este trabajo, consta de dos transmones acoplados a una guía de ondas coplanar, donde los transmones actúan como átomos artificiales, y la guía de ondas como cavidad resonante. Este problema es el bloque fundamental de la electrodinámica cuántica de circuitos, donde la cavidad puede estar también sometida a un forzado clásico externo (campos de control).

DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES MAESTRAS

En este apéndice se desarrolla la derivación de la ecuación de Lindblad, que es la ecuación maestra que determina la evolución temporal de una matriz densidad ρ , que está en contacto con un entorno del cual no se conoce la dinámica. La dinámica en conjunto está regida por un Hamiltoniano que formalmente puede escribirse como

$$H = H_S + H_B + H_{int} \quad (\text{A.1})$$

donde los subíndices se refieren a diferentes partes del problema. En primer lugar S se refiere al sistema de estudio, del cual se quiere encontrar la evolución temporal, y está en contacto con un entorno B, entonces H_B es el Hamiltoniano que rige la dinámica del entorno que en principio no conocemos. Finalmente, tenemos la interacción entre las dos partes, dada por el Hamiltoniano de interacción H_{int} . El conjunto completo se puede pensar como un sistema cerrado, y por lo tanto su evolución temporal está formalmente dada por la ecuación de Schrödinger, y su correspondiente operador de evolución $U(t)$ es

$$U(t) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_0^t dt' H(t') \right) \quad (\text{A.2})$$

donde \mathcal{T} indica la prescripción de ordenamiento temporal, y $U(0) = \mathbb{1}$. Si se representa el estado del sistema total con un operador densidad $\rho_{tot} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, entonces al aplicar la ecuación de Schrödinger de ambos lados se obtiene que

$$\dot{\rho}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho_{tot}(t)] \quad (\text{A.3})$$

que es la ecuación de Louiville-Von Neumann, que describe la trayectoria en el espacio de Hilbert del operador densidad del sistema total cerrado.

Va a ser útil trabajar en el *picture* de interacción, en donde reescribimos el Hamiltoniano separandolo en dos partes

$$H(t) = H_0 + \hat{H}_I(t) \quad (\text{A.4})$$

la manera de separar el sistema va a variar de problema a problema, pero en general se tiene que H_0 es simplemente la energía de las dos partes del sistema si despreciamos la interacción entre ellos, y que asumimos es independiente del tiempo; y luego tenemos $\hat{H}_I(t)$ que es el Hamiltoniano que describe las interacciones entre los sistemas. Como

siempre, notamos $U(t, t_0)$ al operador de evolución temporal, y el valor de expectación de un observable $A(t)$ en la representación de Schroedinger

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{A(t)U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)\} \quad (\text{A.5})$$

Ahora se introducen los operadores unitarios

$$U_0(t, t_0) \equiv \exp[-iH_0(t - t_0)] \quad (\text{A.6})$$

con $U_I(t, t_0) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)$. Entonces el valor de expectación [A.5](#) también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= \text{tr}\{U_0^\dagger(t, t_0)A(t)U_0(t, t_0)U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0)\} \\ &\equiv \text{tr}\{A_I(t)\rho_I(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde introducimos al operador en el *picture* de interacción, y entonces la matriz densidad evoluciona en esta representación segundo

$$\rho_I(t) = U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0) \quad (\text{A.8})$$

De esto lo que se debe recordar es que en la representación de interacción el Hamiltoniano y la ecuación de von Neumann, se escriben como

$$H_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)\hat{H}_I(t)U_0(t, t_0) \quad (\text{A.9})$$

Y

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_{int,I}(t), \rho_I(t)] \quad (\text{A.10})$$

Si se integra esta ecuación se obtiene la solución formal

$$\rho_I(t) = \rho_I(t_0) - i \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t'), \rho_I(t')]. \quad (\text{A.11})$$

Esta ecuación puede sustituirse nuevamente en [A.10](#), y se toma traza parcial sobre los grados de libertad del entorno para obtener

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{1}{\hbar} \text{tr}_B[H_{int,I}(t), \rho_I(t_0)] - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_B \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t), [H_{int,I}(t'), \rho_I(t')]]. \quad (\text{A.12})$$

Esta ecuación sigue siendo exacta, ya que todavía no se aplica ninguna aproximación, pero esta ecuación sigue siendo formal, en el sentido que se necesita la matriz densidad TOTAL $\rho_I(t)$ para resolver el problema. Para eliminarlo, se introduce la *aproximación de Born*, que consiste en suponer que las correlaciones entre el sistema y el entorno son despreciables, y por lo tanto en las escalas de tiempo que se consideran, el estado del conjunto es separable $\rho_I(t) = \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_{B,I}(t)$. Además, suponemos que el entorno es muy grande, y por lo tanto su tiempo de decoherencia es muy pequeño en comparación con los tiempos considerados,

y por lo tanto suponemos que $\rho_B(t) \sim \rho_B(0)$. Aplicando estas suposiciones sobre A.11

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{1}{\hbar} \text{tr}_B[H_{int,I}(t), \rho_{S,I}(t_0) \otimes \rho_B] - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_B \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t), [H_{int,I}(t'), \rho_{S,I}(t') \otimes \rho_B]] \quad (\text{A.13})$$

Para lo que incumbe en este trabajo, nos concentraremos en situaciones donde es valida la aproximación de Markov. La característica principal de los procesos de Markov se pueden resumir en que los tiempos de correlación del entorno son muy cortos, y en palabras mas amigables, que el entorno tiene una memoria muy corta. Esto permite decir que la evolución del sistema depende únicamente del estado actual de este, y no de su historia, ya que el entorno tiene una memoria muy corta y todo lo que el estado instantáneo del sistema no nos pueda decir, se pierde. Esto permite eliminar la dependencia en t' que tiene la matriz dentro de la integral, sustituyendola por el tiempo actual t .

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{1}{\hbar} \text{tr}_B[H_{int,I}(t), \rho_{S,I}(t_0) \otimes \rho_B] - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_B \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t), [H_{int,I}(t'), \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B]] \quad (\text{A.14})$$

Esta expresión es local en el tiempo, y permite tratamiento analítico o numérico dependiendo de la complejidad y la forma explícita de los operadores involucrados. Sin embargo, se puede todavía seguir trabajando la expresión, para llegar a la ecuación de tipo Lindblad.

Para esto, se nota que el Hamiltoniano de interacción en la representación de Schrödinger puede escribirse en término de un conjunto de operadores hermíticos A_α y B_α que actúan sobre el sistema y el entorno respectivamente, de manera que

$$H_{int} = g \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha} \quad (\text{A.15})$$

En la representación de Interacción, estos operadores evolucionan de forma que el Hamiltoniano puede escribirse en esta representación como

$$H_{int,I} = g \sum_{\alpha} A_{\alpha,I}(t) \otimes B_{int,I}(t) \quad (\text{A.16})$$

con $A_{int,I}(t) = U_S^\dagger(t) A_\alpha U_S(t)$ y $B_{int,I}(t) = U_B^\dagger(t) B_\alpha U_B(t)$, y reemplazando en A.14

$$\dot{\psi}_{S,I}(t) = -\frac{g^2}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \sum_{\alpha,\beta} \langle B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t') \rangle [A_{\alpha,I}(t) A_{\beta,I}(t') \rho_{S,I}(t) - A_{\beta,I}(t') \rho_{S,I}(t) A_{\alpha,I}(t) + \text{h.c.}] \quad (\text{A.17})$$

donde $\langle B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t') \rangle = \text{tr}_B(B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t') \rho_B)$ son las funciones de correlación del entorno. Se supone ademas, que el primer termino de A.14 se anula, que es equivalente a pedir que los operadores que actúan sobre el entorno se anulan en valor medio $\langle B_{\alpha,I}(t) \rangle = 0$. Para proseguir, se realiza un cambio de variables de integración $t \rightarrow t - t'$ e imponiendo que el estado del entorno es estacionario mediante la condición $[H_B, \rho_B] = 0$, se tiene que las funciones de correlación son homogeneas en T

$$\langle B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t - t') \rangle = \langle B_{\alpha,I}(t') B_{\beta,I}(0) \rangle \quad (\text{A.18})$$

Como se supuso anteriormente mediante la aproximación de Born, las correlaciones del entorno decaen en una escala temporal corta, y esto justifica tomar $t \rightarrow \infty$ en el límite superior de la integral.

Finalmente, la última aproximación que se debe hacer, consiste en despreciar términos que resulten altamente oscilantes, y se vincula estrechamente con la aproximación de onda rotante [?]. Para justificar esta última aproximación, se considera la descomposición espectral del Hamiltoniano del sistema H_S , y denominando ϵ a los autovalores de H_S y $\Pi(\epsilon)$ al proyector al espacio asociado a al autovalor ϵ , pueden definirse operadores

$$A(\omega) = \sum_{\epsilon - \epsilon' = \omega} \Pi(\epsilon) A_\alpha \Pi(\epsilon') \quad (\text{A.19})$$

donde la suma es sobre todos los autovalores de S cuya diferencia toma el valor fijo ω . Una consecuencia inmediata es que en la representación de interacción se puede escribir $A_{\alpha,I}(\omega) = \exp(-i\omega t) A_\alpha(\omega)$, tal que

$$A_{\alpha,I}(t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega) \quad (\text{A.20})$$

Si se introduce explícitamente la descomposición espectral de los operadores se obtiene

$$\dot{\rho}_{S,I} = \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\omega,\omega'} \left(\Gamma_{\alpha\beta}(\omega') [A_\alpha(\omega) A_\beta(\omega') \rho_{S,I}(t) - A_\beta(\omega') \rho_{S,I}(t) A_\alpha(\omega)] e^{-i(\omega-\omega')t} + \text{h.c.} \right) \quad (\text{A.21})$$

donde se definieron las transformadas de Fourier de las funciones de correlación

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = g^2 \int_0^\infty dt' \langle B_{\alpha,I}(t') B_{\beta,I}(0) \rangle e^{i\omega t'} \quad (\text{A.22})$$

Se denota τ_S cada escala típica de evolución intrínseca del sistema, definida por $|\omega + \omega'|^{-1}$. Si τ_S es chico en comparación con la escala τ_R de relajación del sistema abierto, entonces los términos no seculares presentes en la suma A.21, pueden despreciarse los términos para los cuales $\omega + \omega' \neq 0$ ya que oscilan rápidamente. En consecuencia

$$\dot{\rho}_{S,I} = \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\omega} \left(\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) [A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta^\dagger(\omega) \rho_{S,I}(t) - A_\beta(\omega') \rho_{S,I}(t) A_\alpha(\omega)] + \text{h.c.} \right) \quad (\text{A.23})$$

donde se uso que $A^\dagger(\omega) = A(-\omega)$. El factor $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ es el que contiene toda la información sobre el entorno, y es conveniente separarlo en partes imaginaria y real, según $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(\omega) + iS_{\alpha\beta}(\omega)$, lo que nos permite retomando la representación de Schrödinger

$$\dot{\rho}_S(t) = \frac{-i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] - \frac{i}{\hbar} [H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}[\rho_S(t)] \quad (\text{A.24})$$

donde el operador hermítico $H_{LS} = \sum_{a,b} \sum_{\omega} S_{a,b}(\omega) A_a^\dagger(\omega) A_b(\omega)$ da una contribución hamiltoniana a la ecuación y es usualmente llamado corrimiento Lamb, puesto que describe una renormalización de las energías del sistema introducido por el acoplamiento al entorno.

El término $\mathcal{D}[\rho_S(t)]$ es el *dissipador*

$$\mathcal{D}[\rho_S(t)] = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\omega} \gamma_{a,b}(\omega) \left(A_a^\dagger(\omega) A_b(\omega), \rho_S(t) - 2A_b(\omega)\rho_S(t)A_a^\dagger(\omega) \right) \quad (\text{A.25})$$

Diagonalizando las matrices $\gamma_{ab}(\omega)$ se obtiene la ecuación de tipo Lindblad que se utiliza para estudiar la evolución de los sistemas:

$$\dot{\rho}_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(2L_{\alpha}\rho_S(t)L_{\alpha}^\dagger - L_{\alpha}^\dagger L_{\alpha}, \rho_S(t) \right) \quad (\text{A.26})$$

. Particularmente, en el marco de electrodinámica de cavidades, los dos operadores de Lindblad que contribuyen a la decoherencia son $L_{\gamma} = \sqrt{\gamma}a$ y $L_p = \sqrt{p}\sigma_+$, que se refieren a la perdida de fotones por las imperfecciones de la cavidad según la tasa γ , y el bombeo incoherente de los átomos según una tasa p . Estos *superoperadores* (operadores de Lindblad) no tienen una derivación microscópica clara, son elegidos fenomenológicamente, y se comprobó en extensivas ocasiones que describen correctamente la dinámica de sistemas dentro del marco de la electrodinámica cuántica de cavidades, como lo es el caso del modelo de Jaynes-Cummings.

Referencias

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser* , in Proceedings of the IEEE, vol. 51, no. 1, pp. 89-109. (1963)
- [2] Berry M. V. Proc. R. Soc. London, 392(1802):45–57, (1984).
- [3] Ekert, A., Ericsson, M., Hayden, P., Inamori, H., Jones, J. A., Oi, D. K. L., Vedral, V. Geometric quantum computation. Journal of Modern Optics, 47(14–15), 2501–2513. (2000).
- [4] Johnsson, Mattias T. and Mukty, Nabomita Roy and Burgarth, Daniel and Volz, Thomas and Brennen, Gavin K. Geometric Pathway to Scalable Quantum Sensing . Phys-RevLett.125 (19) 190403. (2020).
- [5] A. Shapere, F. Wilczek. Geometric Phases in Physics. Advanced Series in Mathematical Physics 5. World Scientific. (1989)
- [6] V.Vedral , *Int. J. Quantum Information* 1 1 (2003).
- [7] F. Wilczek and A. Zee , Phys. Rev. Lett. 52 2111 (1984).
- [8] A. Zee, Phys.Rev.A 38 1 (1988).
- [9] Hanchanahal, Ganesh; Raj, Dharma; Vathsan, Radhika. Entanglement dynamics via Geometric phases in Trapped-ions. (2025).
- [10] Yu, Ting and Eberly, J. H. *Sudden Death of Entanglement*. American Association for the Advancement of Science (AAAS) 323 (5914) 1095-9203. (2009).
- [11] Viotti, Ludmila, Fernando C. Lombardo, and Paula I. Villar. *Geometric phase in a dissipative Jaynes-Cummings model: Theoretical explanation for resonance robustness*. Physical Review A 105.2 (2022): 022218.
- [12] Samuel J. and Bhandari R. Physical Review Letters, 60(23):2339, (1988).
- [13] Pancharatnam S. *Generalized theory of interference, and its applications: Part i. coherent pencils*. In Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A, volume 44, pages 247–262. Springer India New Delhi, (1956).
- [14] Mukunda N. and Simon R. Annals of Physics, 228(2):205–268, (1993).
- [15] Mukunda N. and Simon R. Annals of Physics, 228(2):269–340, (1993)

- [16] Uhlmann A. Reports on Mathematical Physics, 24(2):229–240, (1986).
- [17] Uhlmann A. letters in mathematical physics, 21:229–236, (1991).
- [18] Singh K., Tong D., Basu K., Chen J., and Du J. Physical Review A, 67(3):032106, (2003).
- [19] Du J., Zou P., Shi M., Kwek L. C., Pan J.-W., Oh C. H., Ekert A., Oi D. K., and Ericsson M. Physical review letters, 91(10):100403, (2003).
- [20] Carollo A., Fuentes-Guridi I., Santos M. F., and Vedral V. Physical review letters, 90(16):160402, (2003).
- [21] Carollo A. Modern Physics Letters A, 20(22):1635–1654, (2005)
- [22] De Chiara G. and Palma G. M. Physical review letters, 91(9):090404, (2003).
- [23] Whitney R. S. and Gefen Y. Physical review letters, 90(19):190402, (2003).
- [24] Whitney R. S., Makhlin Y., Shnirman A., and Gefen Y. Physical review letters, 94(7):070407, (2005).
- [25] Berger S., Pechal M., Abdumalikov Jr A. A., Eichler C., Steffen L., Fedorov A., Wallraff A., and Filipp S. Physical Review A, 87(6):060303, (2013).
- [26] Berger S. J. Geometric phases and noise in circuit QED. PhD thesis, ETH Zurich, (2015).
- [27] Sjöqvist E. Acta Physica Hungarica B) Quantum Electronics, 26:195, (2009)
- [28] Bassi A. and Ippoliti E. Physical Review A, 73(6):062104, (2006).
- [29] Pawlus P. and Sjöqvist E. Physical Review A, 82(5):052107, (2010).
- [30] Buric N. and Radonjić M. Phys. Rev. A, 80:014101. (2009).
- [31] Tong D., Sjöqvist E., Kwek L. C., and Oh C. H. Physical review letters, 93(8):080405, (2004)
- [32] Sjöqvist E., Pati A. K., Ekert A., Anandan J. S., Ericsson M., Oi D. K., and Vedral V. Physical Review Letters, 85(14):2845, (2000).
- [33] Lombardo, Fernando C. and Villar, Paula I. *Environmentally induced effects on a bipartite two-level system: Geometric phase and entanglement properties.* Physical Review A 81 (1094-1622). (2010).
- [34] Lombardo, Fernando C. and Villar, Paula I. *Correction to the geometric phase by structured environments: The onset of non-Markovian effects,* Physical Review A, 91 (1094-1622). (2015).
- [35] Fernando C. Lombardo and Paula I. Villar. *Environmentally induced corrections to the geometric phase in a two-level system.* arXiv 0802.2873. (2008)

- [36] Lombardo, Fernando C. and Villar, Paula I. *Geometric phases in open systems: A model to study how they are corrected by decoherence*; Physical Review A 74 (1094-1622) (2006)
- [37] FM Cucchietti, JF Zhang, FC Lombardo, PI Villar, R Laflamme, Geometric phase with non-unitary evolution in the presence of a quantum critical bath, Phys. Rev. Lett. 105, 240406 (2010)
- [38] L Viotti, AL Gramajo, PI Villar, FC Lombardo, R Fazio, Geometric phases along quantum trajectories, Quantum 7, 1029 (2023)
- [39] L Viotti. Fases geométricas en sistemas cuánticos abiertos: análisis y aplicaciones. arXiv:2307.03825v1. (2023).
- [40] Haroche, Serge, and J-M. Raimond. Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons. Oxford university press, (2006).
- [41] Khitrova G., Gibbs H., Kira M., Koch S. W., and Scherer A. Nature physics, 2(2):81–90, (2006).
- [42] Laussy F. P., Del Valle E., and Tejedor C. Physical Review B, 79(23):235325, (2009).
- [43] Del Valle E., Laussy F. P., and Tejedor C. Physical Review B, 79(23):235326, (2009).
- [44] Carmichael H., Brecha R., Raizen M., Kimble H., and Rice P. Physical Review A, 40(10):5516, (1989).
- [45] Yamamoto Y., Tassone F., and Cao H. *Semiconductor cavity quantum electrodynamics, volume 169*. Springer, (2003).
- [46] Laussy F. P., Del Valle E., and Tejedor C. Physical review letters, 101(8):083601, (2008).
- [47] Vera C. A., Quesada N., Vinck-Posada H., and Rodríguez B. A. Journal of Physics: Condensed Matter, 21(39):395603, (2009).
- [48] Lodahl P., Mahmoodian S., and Stobbe S. Reviews of Modern Physics, 87(2):347, (2015).
- [49] O. de los Santos-Sánchez, C. González-Gutiérrez, J. Récamier. *Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms*. arXiv:1607.03216. (2016)
- [50] Lugiato, L. A. and Lefever, R. *Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems*. Phys. Rev. Lett. (58) 21, 2209–2211. (1987).
- [51] B. Buck, C.V. Sukumar *Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival* Physics Letters A, Volume 81, Issues 2–3, Pages 132-135. (1981).

Referencias

- [52] Martin B. Plenio and S. Virmani. *An introduction to entanglement measures*. ArXiv quant-ph/0504163, (2016).
- [53] Paz, Juan Pablo and Roncaglia, Augusto J. *Dynamics of the Entanglement between Two Oscillators in the Same Environment*. Physical Review Letters (100) 22. (2008).



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2025