



Ali Martin Zynda Aiub

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Diciembre de 2024



TEMA:	
ALUMNO:	Ali Martin Zynda Aiub
L.U. N°:	342/20
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Fernando Lombardo
CODIRECTORA:	Dra. Paula Villar
COLABORADOR:	Lic. Nicolás del Grosso
FECHA DE INICIO:	Marzo de 2024
FECHA DE FINALIZACIÓN:	Diciembre de 2024
FECHA DE EXAMEN:	18 de diciembre de 2024
INFORME FINAL APROBADO POR:	

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesora de Tesis de Licenciatura

---

Jurado



*Dedicado a mis padres, Gisela y Marcelo por darme siempre lo que necesité.*



---

---

# Índice general

---





---

# Índice de figuras

---



## **Resumen**

El modelo de Janyes-Cummings de un átomo es un ejemplo paradigmático en la teoría de los fundamentos e información cuántica, ya que describe de manera sencilla la interacción entre fotones y materia de manera puramente cuántica. Para extender este modelo, en el presente trabajo se consideran dos átomos interactuantes, inmersos en una cavidad que presenta no-linearidades y un medio tipo Kerr. En particular, se analizó la dinámica, la entropía y otros observables considerando el sistema aislado, y también en presencia de decoherencia. Además, se estudió la fase geométrica en ambos casos.



## **Agradecimientos**

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a Fer, quien me guió y ayudó desde el principio, y con quien intercambié y tuve una enorme cantidad de mails y conversaciones (no solamente de física). También a Nico y a Pau, siempre dispuestos a darme una mano y sugiriendo soluciones cuando tuve problemas. Fue un placer haber realizado esta tesis en el QUFIPHI con ellos, aprendí y me divertí muchísimo.

Quiero agradecer también a mi familia: a mis padres y a mi hermana. Desde chico, me apoyaron, acompañaron y motivaron en todos mis proyectos. Mis logros son, en gran parte, gracias a ellos.

A mis amigos y amigas, quienes me han llenado de risas y alegría.



# INTRODUCCIÓN

---





# FASE GEOMETRICA

---



---

# MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

---

En este capítulo analizaremos en profundidad la dinámica y los aspectos teóricos más importantes del modelo de Jaynes-Cummings, abordando el problema tanto desde un lado teórico, como desde el lado computacional, necesario para resolver la dinámica en sistemas abiertos. Primero se trabajará en el modelo de un átomo en una cavidad, se analizarán los casos importantes, y se explicará la dinámica del problema. Esto es importante para comprender conceptualmente como interactúan fundamentalmente la materia y la luz, y nos sirve para conseguir buena intuición del problema de dos átomos. También se verá la influencia del entorno sobre la cavidad, permitiendo pérdida (o absorción) de fotones, y también el bombeo coherente que puede excitar espontáneamente al átomo. Luego, se analizará el problema para dos átomos, primero en el caso que estos no interactúan directamente entre sí, sino que lo hace indirectamente a través de la cavidad. La comparativa entre esta situación y la más común, donde los átomos interactúan mediante sus espines o sus momentos dipolares, es muy rica porque nos permite discernir con claridad cuál es el efecto de la cavidad y cuál de la interacción entre los átomos a la hora de entrelazarse e intercambiar energía. El problema de dos átomos tiene una peculiaridad al elegir las condiciones iniciales, ya que la dinámica depende de esta elección, y hay muchas diferentes configuraciones interesantes, por un lado por la gran dimensión del espacio, y por otro lado, esta la posibilidad de jugar con las simetrías. Surge así la pregunta de si es importante, o si tiene sentido, teniendo dos átomos indistinguibles en una cavidad, que la condición inicial sea asimétrica ante intercambio.

## 3.1. JCM de un átomo

Comencemos entonces por el paradigmático modelo de 1 átomo.



# JAYNES-CUMMINGS DE DOS ATOMOS, NO LINEAL, MEDIO KERR

En este capítulo se extiende el modelo de Jaynes-Cummings presentado en el capítulo ??, agregándole nuevas cosas. Lo más importante es que ahora vamos a tener dos átomos dentro de una misma cavidad. En la literatura en general, el JCM fue extendido para considerar dos cavidades donde cada una tiene su propio átomo, y usando una condición inicial entrelazada se puede hacer interactuar ambas cavidades REFS. El camino que se tomó en este trabajo, es un tanto fuera de lo convencional ya que no hay muchos estudios sobre este sistema. El principal obstáculo que presenta este problema, es que el espacio de Hilbert crece mucho y se torna inmanejable analíticamente; como bien ya sabemos, el JCM tiene subespacios de 2 dimensiones que no se mezclan, y utilizando esta estrategia vamos a ver que en este caso tenemos subespacios de 4x4 que tampoco se mezclan en el caso unitario. Esto nos permite encontrar algunas expresiones analíticas, pero en general se utilizarán métodos numéricos para analizar la dinámica.

Este capítulo entonces seguirá un hilo conductor, partiendo desde el caso más sencillo hasta llegar a analizar cuáles son los efectos de los diferentes parámetros en el problema. Primero vamos a considerar una cavidad perfecta, es decir sin disipación, agregándole el segundo átomo, vamos a intentar de entender cuál es el efecto de este sobre el modelo de un solo átomo. Para esto haremos un análisis poblacional, y de observables como la entropía reducida, la concurrencia, las matrices de Pauli. Una vez agregado el segundo átomo, vamos a prender las interacciones de a una y vamos a analizar cuáles son sus efectos. Luego, vamos a comparar esto con el caso en donde la cavidad presenta pérdidas. Principalmente, nos centraremos en un análisis del entrelazamiento, ya que esta es la cualidad más interesante que tenemos en el ámbito de la información cuántica.

## 4.1. JCM de dos átomos

En este trabajo, nos vamos a concentrar en una extensión del modelo, donde vamos a ubicar dos átomos dentro de la cavidad. Estos átomos pueden interactuar entre sí, y con la cavidad, y además agregaremos no-linealidades en el acoplamiento y en el medio. Vamos a usar un modelo de Jaynes-Cummings para describir la interacción entre el campo electromagnético y los átomos. Además supondremos que el acoplamiento depende de la cantidad de fotones y los átomos podrán interactuar entre sí mediante un término tipo Ising y otro tipo dipolo-dipolo. Recordemos que para estamos asumiendo que vale

la aproximación de onda rotante ( $\omega_0 \sim \omega$ ) y  $g \ll \omega, \omega_0$ . Entonces, el Hamiltoniano que describe este problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \underbrace{\hbar\omega_0 h(\hat{n})\hat{n}}_{\hat{H}_F} + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)})}_{\hat{H}_A} \\ & + \underbrace{\hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger)}_{H_{FA}} + \\ & \underbrace{2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)}}_{H_{AA}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\hat{a}$  es el operador de aniquilación del fotón,  $\omega_0$  y  $\omega$  son las frecuencias del fotón y del átomo respectivamente,  $g$  es la constante de acoplamiento, las constantes  $J$  y  $\kappa$  son los parámetros de Ising y de dipolo-dipolo para las interacciones átomo-átomo, y los operadores  $\sigma^{(i)}$  son las matrices de Pauli que actúan sobre el átomo  $i$ -ésimo. Finalmente, las funciones  $h(\hat{n})$  y  $f(\hat{n})$  son las que van a dar cuenta de la no linealidad dependiente del número de fotones de la cavidad  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ .

Tomando un medio tipo Kerr la función  $h(\hat{n}) = 1 + \frac{\chi}{\omega_0}\hat{n}$  [?](CITA), y la función  $f(\hat{n}) = 1$  si tomamos un acoplamiento lineal, y  $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$  si consideramos un acoplamiento tipo Buck-Sukumar [?](CITA)

En este punto es normal hacer una transformación unitaria  $K = \exp\{-i\omega t(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sigma_z/2)\}$  para dejar el Hamiltoniano en función del Detuning  $\Delta(\sim 0)$ .

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \hbar\chi\hat{n}^2 + \frac{\hbar\Delta}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)}) \\ & + \hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger) \\ & + 2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este es el Hamiltoniano con el que vamos a trabajar, así que a partir de ahora vamos a olvidarnos del subíndice I. Obsérvese que el caso de  $\chi = 0$  es el caso de un medio lineal. ACA PUEDO AGREGAR UN ESQUEMA DE COMO SERIA. En este esquema se ve como sería el experimento planteado.

Este Hamiltoniano se puede resolver analíticamente para el caso de una cavidad sin pérdidas. En analogía con el caso de 1 átomo, vamos a elegir la base de  $N$  excitaciones, donde esperamos que estos subespacios queden invariantes, es decir, que el Hamiltoniano sea diagonal por bloques, pero como ahora tenemos 2 átomos, tenemos que elegir una base que respete simetrías, para  $N$  excitaciones los estados de la base son  $\left\{ |gg\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n-1\rangle + |ge, n-1\rangle), |ee, n-2\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n-1\rangle - |ge, n-1\rangle) \right\}$ . En esta base, el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques y el bloque de  $N$  excitaciones queda. El problema unitario se puede resolver analíticamente. Esto está hecho en el paper de los autores *O de los Santos-Sánchez, C González-Gutiérrez and J Récamier*, titulado *Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms* [?](CITA). **Acá tengo que**

pasar las cuentas a latex, pero las hice en papel para ver si entendía todo. Para resolver el problema lo primero que hacemos es notar que el Hamiltoniano conserva el número de excitaciones, es decir  $[H, \hat{N}] = 0$ , y en esta situación es sabido que el Hamiltoniano de JC es diagonal por bloques si elegimos convenientemente la base, esta es la que agrupa los estados con misma cantidad de excitaciones  $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} |\Phi_1^{(n)}\rangle &= |ggn\rangle, |\Phi_2^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle + |gen-1\rangle), |\Phi_3^{(n)}\rangle = |een-2\rangle, \\ |\Phi_4^{(n)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle - |gen-1\rangle) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

,donde se eligió esta combinación particular porque el último estado de la base, que es impar ante intercambio, queda desacoplado de los otros, simplificando el problema. Esto se ve al evaluar los elementos de matriz del Hamiltoniano  $H_{i,j} = \langle \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j \rangle$ , este queda en bloques, y el subespacio correspondiente a  $n$  excitaciones  $\hat{H}^{(n)}$  es una matriz de  $4 \times 4$

$$\hat{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} \hbar\chi n^2 - \hbar\Delta + \hbar J & \sqrt{2}\hbar g f(n)\sqrt{n} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar g f(n)\sqrt{n} & \hbar\chi(n-1)^2 - \hbar J + 2\hbar k & \sqrt{2}\hbar g f(n-1)\sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar g f(n-1)\sqrt{n-1} & \hbar\chi(n-2)^2 + \hbar\Delta + \hbar J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\chi(n-1)^2 - \hbar\Delta - 2\hbar k \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Vemos claramente que el estado impar ante intercambio está aislado, y entonces es autoestado del problema, y por lo tanto evoluciona solo y no se mezcla con los otros estados. Esto nos sirve porque ahora, para terminar de resolver el problema, tenemos que diagonalizar la matriz de  $3 \times 3$ . Cabe aclarar que esta matriz solo es válida para  $n \geq 2$ , ya que los subespacios con  $N = 0, 1$  no tienen 4 estados. En estos casos la solución del problema de autovalores es más sencilla aún, así que solo dejaremos los resultados. A partir de ahora se usará como convención  $\hbar = 1$ .

Para resolver el problema de autovalores de la matriz de  $3 \times 3$  utilizamos la fórmula de Cardano para conseguir las raíces triples que nos aparecen en el polinomio característico, y entonces encontramos que los autovalores son

$$E_j^{(n)} = -\frac{1}{3}\beta_n + 2\sqrt{-Q_n} \cos\left(\frac{\theta + 2(j-1)\pi}{3}\right) \quad (4.5)$$

para  $j = 1, 2, 3$ , y donde

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{R_n}{\sqrt{-Q_n^3}}\right) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \frac{3\gamma_n - \beta_n^2}{9} \\
 R_n &= \frac{9\beta_n\gamma_n - 27\eta_n - 2\beta_n^3}{54} \\
 \beta_n &= -(\chi(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2) + J + 2k) \\
 \gamma_n &= (\chi(n-1)^2 - J + 2k)(\chi(n-2)^2 + \chi n^2 + 2J) \\
 &\quad + (\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(\chi n^2 - \Delta + J) - 2g^2(n^{2a} + (n-1)^{2a}) \\
 \eta_n &= -(\chi n^2 - \Delta + J)(\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(\chi(n-1)^2 - J + 2k) \\
 &\quad + 2g^2[\chi(n-2)^2 n^{2a} + \chi n^2(n-1)^{2a} + \Delta(n^{2a} - (n-1)^{2a}) + J(n^{2a} - (n-1)^{2a})]
 \end{aligned}$$

donde  $a = \frac{1}{2}$  se corresponde con acoplamiento lineal, es decir,  $f(n) = 1$ , y  $a = 1$  a Buck-Sukumar  $f(n) = \sqrt{n}$ . Los autovalores serán reales si  $Q_n^3 + R_n^2 < 0$ . Con esto podemos escribir los autovectores:

$$\begin{aligned}
 |u_j^{(n)}\rangle &= \frac{1}{N_j^{(n)}} \left[ \left( (E_j^{(n)} - H_{22}^{(n)})(E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) - H_{23}^{(n)^2} \right) |\Phi_1^{(n)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + H_{31}^{(n)}(E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) |\Phi_2^{(n)}\rangle + H_{23}^{(n)} H_{12}^{(n)} |\Phi_3^{(n)}\rangle \right]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Obviamente no nos olvidemos del estado  $|\Phi_4^{(n)}\rangle$ , que también es autoestado, con autovalor  $E_4^{(n)} = \chi(n-1)^2 - J - 2k$ . Para el subespacio de  $N = 0$  solo tenemos un vector  $|\Phi_1^{(0)}\rangle = |gg0\rangle$  y su autovalor es  $E_1^{(0)} = -\Delta + J$ . Para  $N = 1$  tenemos 3 vectores en el subespacio, y las autoenergías son

$$E_{1,2}^{(1)} = \frac{\chi - \Delta}{2} + k \pm \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \tag{4.8}$$

$$E_3^{(1)} = -2k - J \tag{4.9}$$

y sus autovectores

$$|u_{1,2}^{(1)}\rangle = \frac{1}{N_{1,2}^{(1)}} \left( \frac{2J - 4k + 2\sqrt{2}gE_{1,2}^{(1)}}{2\sqrt{2}} |gg1\rangle + \frac{|eg0\rangle + |ge0\rangle}{\sqrt{2}} \right) \tag{4.10}$$

$$|u_3^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg0\rangle - |ge0\rangle) \tag{4.11}$$

Con esto, podemos resolver analíticamente la evolución temporal de cualquier estado inicial. Para comenzar, vamos a intentar de recuperar el caso de un átomo, asimetrizando el acoplamiento uno de los dos átomos que tenemos en la cavidad, y haciendo tender este a cero, es decir, vamos a trabajar con  $k = J = 0$  y vamos a agregar un parámetro adimensional  $\alpha$  que solamente actúa sobre el átomo 2, y sirve de apantallamiento.



# FASE GEOMETRICA EN JCM GENERALIZADO

---



# DERIVACION DE LAS ECUACIONES MAESTRAS

---



---

## Referencias

---



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2023