



# Entrelazamiento y fase geometrica en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo de dos atomos

Ali Martin Zynda Aiub

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2024



TEMA: Entrelazamiento y fase geometrica en un modelo  
de Jaynes-Cummings disipativo de dos atomos

ALUMNO: Ali Martin Zynda Aiub

L.U. N°: 342/20

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Fernando Lombardo

CODIRECTORA: Dra. Paula Villar

FECHA DE INICIO: Marzo de 2024

FECHA DE FINALIZACIÓN: Marzo de 2024

FECHA DE EXAMEN: 18 de diciembre de 2024

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesora de Tesis de Licenciatura

---

Jurado



*Dedicado a mis padres, Gisela y Marcelo por darme siempre lo que necesité.*



---

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fase Geometrica</b>	<b>3</b>
2.1. Régimen adiabático y fase de Berry . . . . .	3
2.2. Fase de Aharonov-Anandan . . . . .	4
2.2.1. Interpretación Geométrica y caso no-cíclico . . . . .	5
2.3. Enfoque Cinemático . . . . .	7
2.4. Ejemplo de aplicacion: Sistema de dos niveles en un campo magnético . . .	8
2.5. Fases geométricas en sistemas abiertos . . . . .	8
2.5.1. Enfoque cinemático en sistemas abiertos . . . . .	9
<b>3. Modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>13</b>
3.1. Modelo y aproximaciones . . . . .	13
3.1.1. Fase geométrica en el JCM . . . . .	16
3.2. Medio Kerr . . . . .	17
3.3. JCM disipativo . . . . .	19
3.3.1. Solución y régimen de acoplamiento . . . . .	20
3.3.2. Fase geométrica en presencia de disipación . . . . .	22
3.4. Resumen capítulo 3 . . . . .	29
<b>4. Jaynes-Cummings de dos átomos, no lineal, medio Kerr</b>	<b>31</b>
4.1. Modelo de dos átomos y solución unitaria . . . . .	31
4.2. Dinámica con apantallamiento . . . . .	36
4.2.1. Interacción átomo-átomo . . . . .	42
4.2.2. Medio Kerr . . . . .	44
4.2.3. Batidos . . . . .	46
4.3. Dinámica sin apantallamiento . . . . .	47
4.3.1. Dinámica con disipación . . . . .	47
4.4. Dinámica de entrelazamiento . . . . .	50
4.4.1. Dependencia con el detunning . . . . .	51
4.4.2. Dependencia con el medio $\chi$ . . . . .	55
4.4.3. Dependencia con la interacción entre átomos $k - J$ . . . . .	58
4.4.4. Acoplamiento Buck-Sukumar . . . . .	61
4.5. Conclusiones del capítulo 4 . . . . .	61

<b>5. Fase geométrica en JCM generalizado</b>	<b>63</b>
5.1. FG unitaria . . . . .	63
5.2. FG disipativa . . . . .	63
5.2.1. Dependencia con el régimen de acoplamiento . . . . .	63
5.2.2. Dependencia con el detuning . . . . .	64
5.2.3. Dependencia con el medio Kerr . . . . .	66
5.2.4. Dependencia con la interacción entre átomos . . . . .	69
5.2.5. Robustez . . . . .	69
<b>6. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>A. Derivacion de las ecuaciones maestras</b>	<b>73</b>

---

# Índice de figuras

---

3.1. Relación energía detunning para el modelo de Jaynes-Cummings. La diferencia de energía entre los estados de un mismo nivel para $\Delta = 0$ es $2g\sqrt{n}$ .	15
3.2. (a) Evolución de un autoestado $ \psi_{\pm}(t)\rangle$ bajo un campo de control que introduce cambios de fase. (b) Evolución de un estado genérico $ e, n\rangle$ . Las curvas se corresponden con diferentes valores del detunning, que son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = g$ (violeta) y $\Delta = 2g$ (naranja).	17
3.3. Gráfico de la frecuencia de Rabi $\Omega_{N,\chi}$ en función del detunning $\Delta$ para (a) $N=1$ y (b) $N=2$ .	19
3.4. Solución numérica al sistema de ecuaciones dada por la ecuación de Lindblad para el estado inicial $ e0\rangle \langle e0 $ . Estos gráficos se realizaron con $\Delta = 2g$ ; a la izquierda se observa el régimen de Weak Coupling con $\gamma = 0.1g$ , donde el sistema átomo-cavidad está débilmente acoplado con el entorno, y a la derecha el de Strong Coupling con $\gamma = 2g$ , donde las poblaciones y coherencias decaen sin oscilar. Las líneas sólidas son las poblaciones de los estados, en azul para el estado $ g0\rangle$ , en morado para $ e0\rangle$ y en amarillo $ g1\rangle$ , y la línea rayada representa la coherencia entre los estados con $N=1$ ( $ e0\rangle$ y $ g1\rangle$ ).	21
3.5. Análisis poblacional para una cavidad con medio Kerr con $\chi = 0.5g$ . Para la simulación se utilizaron los mismos parámetros que en la Figura 3.4 .	22
3.6. Fase geométrica acumulada por un sistema con un detunning $\Delta = 0.1g$ , para diferentes valores característicos del entorno. En todos los casos la tasa de bombeo es $p = 0.005g$ , y se muestran diferentes valores para $\gamma$ , partiendo de $\gamma = 0$ perteneciente a la línea azul oscuro que es el caso unitario, y para $\gamma = 0.01g, \gamma = 0.1g, \gamma = 0.5g$ y $\gamma = g$ , correspondientes a las líneas violeta, rosa, naranja y amarilla.	23
3.7. Fase geométrica acumulada por el estado inicial para diferentes valores del detunning. El entorno está caracterizado por una tasa d .	24
3.8. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detunning átomo-cavidad $\Delta$ , para $\chi = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$ , asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.	25

3.9. Dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores del medio Kerr dados por $\chi = 0, 0.1g, 0.5g, g$ y $2g$ representados por colores partiendo del mas oscuro al mas claro, y un valor fijo del detunning: (a) $\Delta = 0$ y (b) $\Delta = 0.1g$ . . . . .	26
3.10. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio $\chi$ , para $\Delta = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$ , asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. . . . .	27
3.11. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detunning átomocavidad $\Delta$ , para $\chi = g$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$ , asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. Se observa como la condición de robustez se alcanza para $\Delta/g = \chi/g = 1$ . . . . .	28
4.1. Relación entre energía y detunning para los diferentes niveles de energía del problema. Las líneas sólidas muestran la energía de los estados del JC doble con $N = 0$ (negro, sólido), $N = 1$ (violeta sólido) y $N = 2$ (naranja sólido). También se muestran los niveles de energía del JC de un átomo para $N = 1$ (negro; rayado) y $N = 2$ (naranja; rayado). Obsérvese que las energías del JC de un átomo están multiplicadas por 2. (a) $\chi = k - J = 0$ ; (b) $\chi = k - J = 0.5g$ . . . . .	35
4.2. Esquema del problema de estudio. Se nombran a las partes para referenciarlas fácilmente: los átomos se identifican por las letras A y B, y la cavidad por la C, esta puede contener una cantidad arbitraria de excitaciones, pero se trabajará principalmente en 0,1 y 2 excitaciones. Ambos átomos son de dos niveles, son idénticos e indistinguibles y su frecuencia natural es $\omega$ , mientras que la frecuencia natural de la cavidad es $\omega_0$ . El acoplamiento entre la cavidad y el átomo es $g$ , y las interacciones átomo-átomo son $k$ (interacción dipolar) y $J$ (interacción tipo Ising). . . . .	37
4.3. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es $ e_A g_b 0_C\rangle$ para diferentes valores del detunning, apantallando el átomo B. Los valores son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = 0.5g$ (morada) y $\Delta = 2g$ (naranja). . . . .	38
4.4. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es $( e_A g_b 0_C\rangle +  g_A e_b 0_C\rangle)/\sqrt{2}$ para diferentes valores del detunning, apantallando el átomo B. Los valores son $\Delta = 0$ (azul), $\Delta = 0.5g$ (morada) y $\Delta = 2g$ (naranja). . . . .	39
4.5. labels, ticks y legens chiquitos. unificar colores(a):Dinámica poblacional para el caso resonante $\Delta = 0$ con el estado inicial entrelazado $ \psi_0\rangle = ( eg0\rangle +  ge0\rangle)/\sqrt{2}$ . (b):Entropía de von Neuman del sistema total (negro con puntos), y de diferentes subsistemas. En rojo se muestra la entropía del sistema habiendo trazado parcialmente sobre la cavidad, y en azul habiendo trazado parcialmente sobre el átomo B. . . . .	40
4.6. Concurrencia en el caso resonante para estado inicial $ eg0\rangle +  ge0\rangle$ . . . . .	41

4.7. Dinámica poblacional para la condición inicial $ \psi_0\rangle =  eg0\rangle$ , para los parámetros $\Delta = 0$ , $J = 0$ y $k = 0.1g$ . Las lineas solidas se corresponden con las poblaciones de la matriz densidad total del sistema; en azul la probabilidad de encontrar al estado en el estado $ gg1\rangle$ , en verde en $ eg0\rangle$ , en rojo $ ge0\rangle$ , y en negro $ gg0\rangle$ . Las lineas rayadas son las coherencias entre estas poblaciones, la violeta entre $ gg1\rangle$ y $ ge0\rangle$ , la celeste entre $ eg0\rangle$ y $ gg1\rangle$ y la amarilla entre $ eg0\rangle$ y $ gg1\rangle$ .	42
4.8. Dinámica poblacional para la condición inicial $ \psi_0\rangle =  eg0 + ge0\rangle$ , para los parámetros $\Delta = 0$ , $J = 0$ y $k = 0.1g$ . Las coherencias y poblaciones tienen los mismos colores que la Figura anterior 4.7	43
4.9. Dinámica de entrelazamiento para $\Delta = 0$ , $J = 0$ y $k = 0.1g$	43
4.10. $\Delta = 0$ , $J = 0.5g$ y $k = 0$	44
4.11. Dinámica de poblaciones para $x = g$	45
4.12. Dinámica de entrelazamiento para $x = g$	45
4.13. Dinámica de entrelazamiento para $x = g$	46
4.14. Trayectoria sobre la esfera de Bloch para el estado inicial $ eg0\rangle$ , trazando parcialmente sobre el átomo B, y los parámetros utilizados son $\Delta = 0, \chi = 0.5g, k = 0.5g$ y $J = 0$ .	47
4.15. Dependencia de las poblaciones con el régimen de acoplamiento, para $\Delta = J = \chi = 0$ y $k = 0.5g$ , y para dos condiciones iniciales diferentes.	48
4.16. Frecuencias de Rabi en función del detunning $\Delta$ para diferentes valores de $\chi$ , y $ k - J $ , donde las frecuencias de Rabi son $\Omega_{ij}^{(2)} = E_j^{(2)} - E_i^{(2)}$ . (a) $\Omega_{12}$ con $\chi \in [0, 5g]$ ; (b) $\Omega_{23}$ y $\Omega_{31}$ con $\chi \in [0, 5g]$ ;(c) $\Omega_{12}$ con $k - J \in [0, 5g]$ ; (d) $\Omega_{23}$ y $\Omega_{31}$ con $k - J \in [0, 5g]$	49
4.17. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $ eg0 + ge0\rangle$ , en función del detunning, y para $\chi = k - J = 0$ .	51
4.18. Concurrencia en función del tiempo (eje x) y el detunning $\Delta$ (eje y) para diferentes parámetros (los que no están nombrados son cero).	52
4.19. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $ eg0 + ge0\rangle$ , en función del detunning, y para $\chi = k - J = 0$ .	54
4.20.	54
4.21. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $ eg0 + ge0\rangle$ , en función del detunning, y para $\chi = k - J = 0$ .	56
4.22. Entrelazamiento $ eg0 + ge0\rangle$	56
4.23. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $ eg1 + ge1\rangle$ , en función del medio Kerr, y para $\Delta = k - J = 0$ .	57
4.24. Dinámica de entrelazamiento para $ eg1 + ge1\rangle$ en función del medio Kerr, para diferentes valores de $\Delta$ y $k - J$ .	58
4.25. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $ eg0 + ge0\rangle$ , en función del detunning, y para $\chi = k - J = 0$ .	59
4.26. Dinámica de entrelazamiento para estado inicia  $eg0 + ge0\rangle$ en función de la interacción entre los atomos $k - J$ para diferentes parametros.	59

4.27. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial $ eg1 + ge1\rangle$ , en función del detunning, y para $\chi = k - J = 0$ . . . . .	60
4.28. Dinámica de entrelazamiento para estado inicial $ eg1 + ge1\rangle$ en función de la interacción entre los atomos $k - J$ para diferentes parametros. . . . .	61
5.1. Dependencia con el acoplamiento con el entorno . . . . .	64
5.2. Dependencia con el detunning . . . . .	65
5.3. Robustez en funcion de $\Delta$ para la condicion inicial $ eg0 + ge0\rangle$ . . . . .	65
5.4. Robustez en función de $\Delta$ para la condición inicial $ eg0 + ge0\rangle$ . . . . .	66
5.5. Dependencia con el medio Kerr . . . . .	67
5.6. Dependencia con el medio Kerr con $\Delta = 0.5g$ . . . . .	67
5.7. Robustez en función de $\chi$ para la condición inicial $ eg0 + ge0\rangle$ . . . . .	68
5.8. Robustez en función de $\chi$ para la condición inicial $ eg1 + ge1\rangle$ . . . . .	68
5.9. Dependencia con la interacción entre los átomos . . . . .	69

## **Resumen**

El modelo de Janyes-Cummings de un átomo es un ejemplo paradigmático en la teoría de los fundamentos e información cuántica, ya que describe de manera sencilla la interacción entre fotones y materia de manera puramente cuántica. Para extender este modelo, en el presente trabajo se consideran dos átomos interactuantes, inmersos en una cavidad que presenta no-linealidades y un medio tipo Kerr. En particular, se analizó la dinámica, la entropía y otros observables considerando el sistema aislado, y también en presencia de decoherencia. Además, se estudió la fase geométrica en ambos casos.



## **Agradecimientos**

Primero quiero agradecer a Fer, porque siempre estuvo dispuesto a ayudarme y siempre se adapto a mis tiempos y mi ritmo. Gracias a el la tesis se me hizo muy llevadera y sinceramente disfrute el proceso. Tambien quiero agradecer a Pau por sus aportes, y en general a ambos por recibirme en su grupo y darme un proyecto interesante en el cual trabajar. Sin ellos no hubiese sido posible.

A mi familia, Marcelo, Gisela, Mel y Lena. A Guada. A mis amigos de la vida Nico, Gunthi, Tincho y Emi. Y a mis compañeros de la carrera, que hicieron de estos años de estudio una experiencia unica. Gracias a todos, que contribuyeron en su manera a que esta tesis se haya escrito.



# INTRODUCCIÓN

---



# FASE GEOMETRICA

Este capítulo presenta el objeto de estudio del trabajo. La fase geométrica es un observable que promete en el ámbito de la información cuántica, ya que como se verá más adelante, recupera información sobre la trayectoria del sistema en el espacio de Hilbert, y en algunos casos se observa que está relacionado con el entrelazamiento. El capítulo está estructurado de manera que en primer lugar se tratará una descripción general de las fases geométricas (FG) en el contexto de sistemas aislados, descritos consecuentemente mediante estados puros. Analizar este caso antes de centrar la atención en sistemas cuánticos abiertos permitirá asimilar nociones y ganar intuición sobre las fases geométricas en el marco de una teoría formalmente más simple. A lo largo del capítulo se trabajarán expresiones válidas bajo ciertas hipótesis, partiendo del caso menos general, y llegando al caso más general conocido hasta el momento, aunque la aplicación de las fases geométricas a sistemas abiertos no llegó a un consenso unánime. Por lo tanto, al final del capítulo se presentará una propuesta particular, la cual se usará en los próximos capítulos.

## 2.1. Régimen adiabático y fase de Berry

La fase de berry ?? ludmi 1 es un fenómeno fundamental relacionado con el teorema adiabático. Esta representa la fase acumulada por el autoestado de un Hamiltoniano  $H(t)$  que varía lentamente en un ciclo, que está relacionada con el circuito descrito por  $H(t)$  en un dado espacio de parámetros.

Para ver esto, se considera un Hamiltoniano  $H(R(t))$  que depende explícitamente del tiempo a través de un parámetro  $R = (R_1, R_2, \dots)$ . Dado este Hamiltoniano, formalmente se pueden encontrar los autoestados instantáneos del sistema  $|\psi_n(R(t))\rangle$  que satisfacen

$$H(R(t)) |\psi_n(R(t))\rangle = E_n(R(t)) |\psi_n(R(t))\rangle \quad (2.1)$$

, suponiendo además que los autovalores satisfacen  $E_1 < E_2 < \dots$  de forma que no hay degeneración. Se considera que la evolución temporal de un estado cualquiera  $|\psi(t)\rangle$  está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \left| \dot{\psi}(t) \right\rangle = H(R(t)) |\psi(t)\rangle \quad (2.2)$$

## 2.2. Fase de Aharonov-Anandan

---

Desarrollando el estado en función de los autoestados instantáneos del Hamiltoniano, se puede resolver formalmente el problema

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n(R(t))\rangle \quad (2.3)$$

los coeficientes  $c_n(t)$  satisfacen:

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \left( E_n - i\hbar \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle \right) c_n(t) - i\hbar \sum_{m \neq n} \langle \psi_n | \dot{\psi}_m \rangle c_m(t).$$

En el régimen adiabático, donde el Hamiltoniano cambia lentamente en comparación con las escalas internas del sistema, se desprecia el término de acoplamiento cruzado:

$$\dot{c}_n(t) \approx -\frac{i}{\hbar} \left( E_n - i\hbar \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle \right) c_n(t).$$

El estado resultante es:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt'} e^{i\phi_n(t)} |\psi_n(R(t))\rangle,$$

donde  $\phi_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(R(t')) | \nabla_R | \psi_n(R(t')) \rangle \cdot \dot{R}(t') dt'$  es la fase geométrica acumulada.

Para circuitos cerrados en el espacio de parámetros, la fase geométrica se expresa como:

$$\phi_n(C) = i \oint_C \langle \psi_n(R) | \nabla_R | \psi_n(R) \rangle \cdot dR, \quad (2.4)$$

independiente de la velocidad con que se recorre el circuito. Sin embargo, la hipótesis de este resultado es que la velocidad de la evolución sea suficientemente lenta para que se puedan despreciar las transiciones no adiabáticas a otros niveles de energía, por lo tanto este resultado no es totalmente independiente de la velocidad con la que se recorre el circuito en el espacio de parámetros.

## 2.2. Fase de Aharonov-Anandan

La formulación de Aharonov y Anandan permite definir una fase geométrica que es independiente de la evolución adiabática. Su propuesta se basa únicamente en la trayectoria del estado en el espacio proyectivo de rayos, sin referencia explícita al Hamiltoniano.

Considérese el espacio de Hilbert  $H$ , y dentro de este, el subespacio  $N_0$  que contiene vectores normalizados  $|\psi\rangle$ . El espacio proyectivo  $P$  se define como el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación  $|\psi\rangle \sim e^{i\alpha} |\psi\rangle$ , estas colecciones  $\xi = \{e^{i\alpha} |\psi\rangle ; 0 \leq \alpha < 2\pi\}$  denominadas rayos, agrupan en un único elemento (la clase) todos los objetos equivalentes. Cada clase de equivalencia se denomina un rayo, y el mapeo  $\Pi : N_0 \rightarrow P$  proyecta un vector al rayo correspondiente.

Durante una evolución cíclica, el estado al tiempo inicial  $|\psi(0)\rangle$  y al tiempo final  $|\psi(T)\rangle$

pertenecen al mismo rayo, por lo que:

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\phi}|\psi(0)\rangle.$$

los estados solo pueden diferir en una fase total  $\phi$ . Para determinar la fase geométrica, se descompone  $\phi$  en dos contribuciones: una parte dinámica y una parte geométrica.

La relación entre el estado físico  $|\psi(t)\rangle$  y su clase de equivalencia  $\xi \in P$  se escribe como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{if(t)}|\xi(t)\rangle,$$

donde  $f(t)$  es una función que recoge la fase acumulada. Sustituyendo esta relación en la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle,$$

se obtiene una ecuación para  $f(t)$ :

$$\hbar \dot{f}(t) = -\langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle + i\hbar \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle.$$

La fase total acumulada entre los tiempos 0 y  $T$  es:

$$\phi = f(T) - f(0) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle dt + \int_0^T i \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle dt.$$

Aquí, el primer término es la fase dinámica:

$$\phi_{\text{din}} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle,$$

y el segundo término corresponde a la fase geométrica:

$$\phi_{\text{AA}} = \int_0^T i \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle dt. \quad (2.5)$$

Esta última expresión muestra que la fase geométrica depende únicamente de la trayectoria en el espacio proyectivo  $P$  y no del Hamiltoniano o la velocidad de evolución. Al ser independiente de estos factores, refleja una propiedad puramente geométrica de la curva trazada por el estado en  $P$ .

### 2.2.1. Interpretación Geométrica y caso no-cíclico

En esta sección se mostrará la interpretación geométrica y la generalización al caso no cíclico, demostrada por Samuel y Bhandari [?]ludim 4. Esta definición no requiere de la condición de ciclo cerrado, y tampoco requiere que el estado conserve su norma, como por ejemplo en una medición y colapso de la función de onda. Para esto es necesario dotar al espacio de Hilbert de geometría donde entonces la fase surge de la estructura del espacio. Para darle estructura al espacio, lo que ya hicimos antes es considerar un fibrado, donde definimos una clase de equivalencia para estados que difieren en una fase global. Para darle mayor estructura tenemos que introducir el concepto de conexión, que nos permitirá

comparar elementos pertenecientes a fibras distintas mediante una regla de transporte paralelo. Esta regla nos dice que

$$\text{Im} \left\langle \psi(t) \middle| \dot{\psi}(t) \right\rangle = 0 \quad (2.6)$$

Considérese una curva  $C : t \in [0, T] \rightarrow |\psi(t)\rangle$  sobre  $N_0$ , horizontal, y su vector tangente  $|\dot{\psi}(t)\rangle / \langle \psi(t)|\dot{\psi}(t)\rangle$ . La conexión natural

$$A = \frac{\text{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle}, \quad (2.7)$$

transforma, frente a transformaciones  $U(1)$  de gauge  $|\psi(t)\rangle \rightarrow e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle$ , según

$$A \rightarrow A + \dot{\alpha}(t). \quad (2.8)$$

Dado que  $C$  es horizontal por definición, la ley de transporte paralelo de la ecuación 2.6 impone que la conexión se anule a lo largo de la trayectoria del estado que le da origen. Si el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  está, además, asociado a una evolución cíclica en el sentido de Aharonov-Anandan, entonces retorna al rayo inicial en algún instante  $T$ .

Considérese, en este escenario, la integral de la conexión  $A$  sobre el camino construido a partir de la curva  $|\psi(t)\rangle ; t \in [0, T]$ , cerrada uniendo  $|\psi(T)\rangle$  con  $|\psi(0)\rangle$  sobre el rayo. Como se ha discutido, la curva  $|\psi(t)\rangle$  es horizontal por definición y, por lo tanto, la conexión se anula  $A = 0$  sobre ella. Por otra parte, la integral sobre el tramo vertical que cierra el camino da como resultado la diferencia de fase entre  $|\psi(T)\rangle$  y  $|\psi(0)\rangle$ :

$$\oint Adl_{N_0} = \int_C A + \int_{\text{rayo}} A = \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle. \quad (2.9)$$

Es decir, la integral sobre el camino total (cerrado), es la diferencia de fase total entre el estado inicial y final. Por otra parte, la integral de la conexión  $A$  sobre una curva cerrada en  $N_0$  es invariante por efecto de la ley de transformación 2.8. La holonomía de la curva  $C \subset P$  asociada a la conexión  $A$  es entonces:

$$g(C) = e^{i \oint_C A} = e^{i\phi_{AA}}. \quad (2.10)$$

En el caso de una evolución no cíclica, el vector que describe el sistema no vuelve a su rayo de partida. Para este caso se establece una manera de comparar estados de diferentes fibras. Dicha comparación se hace a través de la fase de *Pancharatnam* ??66 ludmi, definida para dos estados no-ortogonales cualesquiera como

$$\phi_P = \arg \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (2.11)$$

Para hacer la generalización al caso no-cíclico, tenemos que dar un concepto de distancia, y para esto tenemos que hablar de líneas geodésicas. No vamos a meternos en detalle en esto, pero lo importante es que la fase en el caso no cíclico consiste de la diferencia entre

la fase dinámica y la fase de Pancharatnam

$$\psi_{SB} = -\psi_P - \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle \quad (2.12)$$

Este método se puede utilizar para generalizar al caso no unitario, en el sentido de un estado puro que no conserva su norma. Este tipo de evolución puede suceder cuando estamos teniendo en cuenta mediciones en el sistema, colapsos de la función de onda no conservan la norma según la regla de colapso de la mecánica cuántica. En este caso, si consideramos el estado inicial  $|\psi_0\rangle$  sobre el cual se realizan mediciones sucesivas, de forma tal que la N-esima proyección es otra vez al estado inicial, el estado final del sistema está dado por

$$|\psi_0\rangle \langle \psi_0 | \psi_{N-1} \rangle \dots \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | \psi_0 \rangle. \quad (2.13)$$

Según el criterio de Pancharatnam los estados inicial y final tienen una diferencia de fase bien definida, dado por el argumento del número complejo que acompaña al estado  $|\psi_0\rangle$ .

### 2.3. Enfoque Cinemático

En la mayoría de las discusiones sobre la fase geométrica, el punto de partida es la ecuación de Schrödinger para algún sistema cuántico particular caracterizado por un dado Hamiltoniano. Sin embargo, la fase geométrica es consecuencia de la cinemática cuántica, esto es, independiente del detalle respecto del origen dinámico de la trayectoria descrita en el espacio de estados físicos. Mukunda y Simon ?? 5 y 67 resaltaron la independencia de la fase geométrica respecto del origen dinámico de la evolución proponiendo un enfoque cinemático en el cual la trayectoria descrita en el espacio de estados físicos es el concepto fundamental para la fase geométrica. En su desarrollo, se parte de la consideración de una curva uniparamétrica y suave  $C \subset N_0$ , conformada por una dada secuencia de estados  $|\psi(t)\rangle$ :

$$C = \{ |\psi(t)\rangle \in N_0 \mid t \in [0, T] \subset \mathbb{R} \}, \quad (2.14)$$

donde no se hace ninguna suposición respecto de si  $C$  es una curva abierta o cerrada, ni del origen dinámico de la secuencia de estados. Se observa luego detenidamente la cantidad  $\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle$  construida a partir de esta curva. La condición de unitariedad implica que esta cantidad sea imaginaria pura, lo que puede escribirse como

$$\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = i \operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle. \quad (2.15)$$

Por otra parte, aplicando una transformación  $U(1)$  de gauge

$$C \rightarrow C' : |\psi'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle, \quad t \in [0, T], \quad (2.16)$$

la cantidad analizada transforma según

$$\operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \rightarrow \operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle + \dot{\alpha}(t). \quad (2.17)$$

Lo que queremos conseguir es una funcional que sea invariante ante transformaciones  $U(1)$  ??, es decir, toma mismos valores para curvas  $C$  y  $C'$

$$\psi_u[C]\psi(T) - \text{Im} \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \middle| \dot{\psi}(t) \right\rangle \quad (2.18)$$

Tenemos permitido definir este funcional de la curva  $C$  en el espacio de rayos, ya que es invariante ante reparametrizaciones. Algo importante de remarcar es que, si aplicamos una transformación unitaria arbitraria a nuestro estado, entonces al cambiar el Hamiltoniano también cambiará la curva que describe el estado inicial en el espacio de Hilbert, y por lo tanto se puede mostrar que la fase geométrica cambia. Por suerte, en el caso que la transformación no depende del tiempo, entonces se demuestra que la fase no cambia.

Hasta ahora solo tratamos con sistemas aislados. Antes de pasar a sistemas abiertos, vamos a analizar un ejemplo sencillo utilizando las diferentes definiciones, para ganar intuición y encontrar algunas explicaciones interesantes a comportamientos característicos de este observable.

## 2.4. Ejemplo de aplicacion: Sistema de dos niveles en un campo magnético

LO PONGO O NO LO PONGO?

## 2.5. Fases geométricas en sistemas abiertos

Las secciones anteriores tratan la fase geométrica en diferentes casos, ascendientes en generalidad ya que se logra relajar condiciones e hipótesis, y se llego a una expresión general que satisface propiedades importantes, como invarianza ante transformaciones de fase global  $U(1)$  y a reparametrizaciones monótonas, también dependen únicamente de la trayectoria descrita por el estado físico en el espacio de rayos y no del Hamiltoniano que genera dicha trayectoria, y finalmente son interpretables en términos puramente geométricos.

Sin embargo, estamos asumiendo que el estado es puro durante toda su evolución, restricción que es una idealización y experimentalmente es necesario tener en cuenta que todo sistema físico esta en contacto con un entorno, y se requiere entonces una descripción en términos de estados mixtos y evoluciones no unitarias. La definición de una fase geométrica que aplique en tal escenario es todavía un problema cuya solución todavía no llegó a un consenso unánime. Muchos esfuerzos notables [[?], [?]-[?]] se concentraron en definir la fase geométrica acumulada por un estado mixto, incluso existen reportes experimentales de detecciones [?]. Otra ruta explorada considera el efecto del entorno como correcciones que permitan mantener las nociones de fase geométrica del caso unitario. Trabajos de este tipo introducen el efecto del entorno mediante un hamiltoniano no hermitico [?, ?], y otros estudian modificaciones a la fase de Berry por ruido clásico en el campo magnético [?], o por un entorno cuántico [?, ?], tanto desde lo teórico como lo experimental [?, ?].

El marco en el cual una fase geométrica para sistemas cuánticos abiertos debe definirse es el siguiente: se supone que el efecto del entorno en el sistema de interés es tal que, bajo aproximaciones adecuadas, el sistema puede tratarse *efectivamente* como un sistema aislado que experimenta un tipo de evolución lineal no unitaria:

$$\Sigma : \rho(0) \rightarrow \Sigma_t[\rho(0)] \equiv \rho(t) \quad (2.19)$$

que da cuenta tanto de la dinámica interna del sistema como de su interacción con el entorno, y satisface una ecuación maestra. Una consecuencia de este enfoque es que, en el caso general, un estado inicial puro evoluciona en un estado mixto  $\rho(t)$ . El operador densidad que representa el estado del sistema admite una descomposición  $\{|\psi_k(t)\rangle, \omega_k(t)\}$  en estados puros  $|\psi_k(t)\rangle$  pesados con probabilidades  $\omega_k(t)$ , que permite expresarla como

$$\rho(t) = \sum_k \omega_k(t) |\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)| \quad (2.20)$$

. La asociación  $\rho(t) \rightarrow \{|\psi_k(t)\rangle, \omega_k(t)\}$  entre el operador densidad y el *ensamble* de estados  $\{|\psi_k(t)\rangle\}$  no es uno-a-uno, sino uno-a-muchos, lo que significa que en general existen diferentes ensambles, con diferentes estados y diferentes pesos, que sin embargo tienen la misma matriz densidad. Esto imposibilita la distinción entre estas situaciones solamente con la información que proporciona la matriz densidad.

Una estrategia recurrente entre la literatura que aborda el problema de asociar una fase geométrica a un estado mixto  $\rho(t)$  es descomponer formate la matriz densidad en una mezcla estadística como la de la ecuación anterior, y aplicar la fase unitaria ?? sobre cada elemento de la mezcla para asociar una fase a  $\rho(t)$ . Esto fue propuesto, desde una descripción en términos de operadores de saltos en [?, ?] y posteriormente en [?]. En una aproximación diferente al problema, en Tong et al. [?] se propone una definición de fase geométrica que se vale de una purificación del estado, pero resulta independiente de la elección que se utilice para purificar. La siguiente sección desarrolla esta propuesta en particular.

### 2.5.1. Enfoque cinemático en sistemas abiertos

La introducción teórica concluye con esta sección, siguiendo la propuesta de Tong et al. [?] para la fase geométrica en sistemas cuánticos abiertos. Para esto, se considera un sistema y el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión  $N$  asociado al mismo. La evolución del estado puede describirse como una curva  $C \subset \mathcal{P}$

$$C : t \in [0, T] \rightarrow \rho(t) = \sum_{k=1}^N \omega_k(t) |\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)| \quad (2.21)$$

donde  $\omega_k(t) \geq 0$  y  $|\psi_k(t)\rangle$  son los autovalores y autoestados, respectivamente, de la matriz densidad  $\rho(t)$  del sistema. Por simplicidad se asume que las funciones  $\omega_k(t)$  que no son nulas, son no degeneradas en el intervalo de estudio  $[0, T]$ , y se refiere al trabajo original [?] para su generalización al caso degenerado.

Para introducir una noción de fase geométrica bajo estas condiciones, se comienza por realizar una purificación del estado mixto, haciendo uso de un sistema auxiliar con un espacio de Hilbert de igual dimensión que el espacio original. El estado mixto se eleva entonces a un estado purificado de mayor dimensión

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(t)} |\psi(t)\rangle \otimes |a_k\rangle \quad (2.22)$$

donde  $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{aux}$  es la purificación de  $\rho(t)$ , en el sentido de que la matriz densidad se recupera tomando traza parcial sobre el espacio auxiliar.

La fase de Pancharatnam entre las purificaciones inicial y final puede escribirse como

$$\phi_P = \arg \left( \sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(0)\omega_k(T)} \langle \psi_k(0) | \psi_k(T) \rangle \right) \quad (2.23)$$

Para extraer la fase asociada al sistema de interés, es necesario eliminar la dependencia en la purificación específica utilizada. Para esto, sabiendo que para cada instante  $t \in [0, T]$  las bases  $\{|\psi_k(t)\rangle\}$  y  $\{|\psi_k(0)\rangle\}$  son bases ortonormales del mismo espacio, existe entonces una transformación que lleva de un conjunto a otro  $|\psi_k(t)\rangle = U(t)|\psi_k(0)\rangle \forall k$ . El paso esencial para arribar a una fase puramente geométrica es el de notar que en realidad, existe una clase de equivalencia de mapas unitarios  $\tilde{U}(t)$  que realizan todas la misma curva  $C$ . Específicamente, la expresión ?? que defina la curva es manifiestamente invariante ante transformaciones de gauge  $U(1)$ , de forma que dos transformaciones unitarias  $U(t)$  y  $U'(t)$  que mapeen  $\{|\psi_k(0)\rangle\}$  en  $\{|\psi_k(t)\rangle\}$  o en  $\{e^{i\alpha_k(t)}|\psi_k(t)\rangle\}$  resultan equivalentes. Los mapas  $U(t)$  que en la clase de equivalencia tienen la forma

$$\tilde{U}(t) = U(t) \sum_{k=1}^N e^{i\alpha_k(t)} |\psi_k(0)\rangle \langle \psi_k(0)| \quad (2.24)$$

. En particular, puede identificarse el mapa  $U^\parallel(t)$  que satisface la condición de transporte paralelo para cada  $|\psi_k(t)\rangle$ , es decir

$$U^\parallel(t) = U(t) |\langle \psi_k(0) | U^\dagger(t) \dot{U}(t) | \psi_k(0) \rangle = 0 \quad \forall k \quad (2.25)$$

y definir la fase geométrica como la diferencia de fase ?? para este mapa particular. Sustituyendo en la ecuación ?? que describe la relación de equivalencia entre operadores, se obtiene que

$$\alpha_k(t) = i \int_0^t dt' \langle \psi_k(0) | U^\dagger(t') \dot{U}(t) | \psi_k(0) \rangle \quad (2.26)$$

y en consecuencia, la fase geométrica resulta

$$\phi_g[C] = \arg \left( \sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(0)\omega_k(T)} \langle \psi_k(0) | \psi_k(T) \rangle e^{-\int_0^T dt \langle \psi_k(t) | \dot{\psi}_k(t) \rangle} \right) \quad (2.27)$$

La definición propuesta satisface las condiciones que rigen sobre una noción geométrica

razonable para un estado mixto, que son: (i) Efectivamente es una fase, dado que si definición a través de la función argumento impone una periodicidad bien definida, (ii) es manifestamente invariante de gauge ya que toma el mismo valor para cualquier operador unitario  $U(t)$  en la clase de equivalencia descrita por ??, y por lo tanto depende únicamente por el camino  $C$  trazado por la matriz  $\rho(t)$  del sistema y (iii) cuando la evolución es unitaria, se recuperan los resultados anteriores para estados iniciales puros, y [?] para estados iniciales mixtos. Finalmente (iv) es accesible experimentalmente, por ejemplo usando interferometria.

Sera de utilidad para su aplicación, el caso particular en que el sistema se encuentre inicialmente en un estado puro  $|\psi(0)\rangle$ . En tal situación, la descomposición de la matriz densidad del sistema en el instante inicial solo tendrá un autovalor distinto de cero:  $\omega_+(0) = 1$ . En consecuencia, la sumatoria en la ecuación 2.27 posee un único término no nulo, y la formula se reduce a

$$\phi_g[C] = \arg \langle \psi(0) | \psi_+(T) \rangle - \text{Im} \int_0^T dt \left\langle \psi_+(t) \middle| \dot{\psi}_+(t) \right\rangle \quad (2.28)$$

Esta expresión admite la interpretación de fase geométrica acumulada por el autoestado  $|\psi_+(t)\rangle$ .



# MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

En este capítulo se analizará en profundidad la dinámica y los aspectos teóricos más importantes del modelo de Jaynes-Cummings (JC), abordando el problema tanto desde un lado teórico, como computacional, necesario para resolver la dinámica en sistemas abiertos. Primero, se trabajará en el modelo de un átomo en una cavidad, se analizarán los casos importantes, y se explicará la dinámica del problema. Esto resulta importante para comprender conceptualmente cómo interactúan fundamentalmente la materia y la luz, y nos sirve para lograr buena intuición del problema de dos átomos. También se verá la influencia del entorno sobre la cavidad, permitiendo perdida (o absorción) de fotones, y el bombeo coherente que puede excitar espontáneamente al átomo.

## 3.1. Modelo y aproximaciones

Se estudia primero el paradigmático modelo de 1 átomo. El modelo de JC consiste en describir la interacción entre la materia y la luz de manera cuántica. El experimento más sencillo consta de un átomo de dos niveles atrapado en una cavidad. La simplicidad del modelo surge de las aproximaciones e hipótesis que se hacen; en primer lugar, el campo electromagnético dentro de la cavidad puede, en principio, tener infinitos modos, pero para simplificar se considera solo un modo. Entonces el Hamiltoniano que describe el problema es ( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_{int}, \\ \hat{H}_A &= \omega \frac{\hat{\sigma}_z}{2}, \\ \hat{H}_C &= \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} = \epsilon \hat{n}, \\ \hat{H}_{int} &= -ig(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $\epsilon$  y  $\omega$  son las frecuencias naturales de la cavidad y del átomo respectivamente. Los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación fotónicos de la cavidad;  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  es el operador de número de la cavidad, y  $\hat{\sigma}_z$  es el operador de Pauli. Los estados del átomo de dos niveles los llamamos  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  al estado *ground* y excitado respectivamente, y con esta notación los operadores  $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$  son los operadores de subida y bajada atómicos. Con esto en mente, la acoplamiento entre el átomo y la cavidad mediado por la intensidad  $g$ . La interacción es complicada, y para simplificar, lo que se hace es usar la representación de interacción. Así, se encuentran dos frecuencias: una que se considera *rotante* y es la diferencia entre las frecuencias características  $\epsilon - \omega$ , y la otra frecuencia es

### 3.1. Modelo y aproximaciones

---

la suma  $\epsilon + \omega$ . La aproximación de onda rotante vale cuando las frecuencias son similares ( $\epsilon \sim \omega$ ), y consiste en despreciar la dinámica de los términos contrarrotantes ya que oscilan muy rápidamente en comparación con los términos rotantes. Luego, se puede promediar los efectos de los términos rápidos. Entonces al aplicar esta aproximación, justificada cuando  $\epsilon \sim \omega$  y  $g \ll \epsilon, \omega$  se obtiene el Hamiltoniano de JC [1]

$$\hat{H}_{JC} = \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{\sigma}_z / 2 + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) \quad (3.2)$$

La interpretación de la interacción en este caso es clara, las dos opciones son que el átomo suba un nivel de energía y en consecuencia la cavidad pierda un fotón, o que el átomo baje un nivel, y la cavidad gane una excitación. Este Hamiltoniano conserva el número total de excitaciones  $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}$ . En este momento es usual aplicar una transformación unitaria  $K = \exp\{-i\omega t(a^\dagger a + \sigma_z/2)\}$  sobre el Hamiltoniano que queda

$$H = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (3.3)$$

donde  $\Delta = \epsilon - \omega$  es el *detuning* entre las frecuencias de la cavidad y el átomo. Un ejemplo de ésto es un átomo de Rydberg atrapado en una cavidad [2], o en general puntos cuánticos, magnones, átomos de Rydberg, ondas acústicas superficiales y sistemas mecánicos, que interactúan con fotones de microondas. [ver referencias de esto](#) Como el Hamiltoniano conserva la cantidad de excitaciones es oportuno agrupar los estados en función de la cantidad de excitaciones:  $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$ . En esta base el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques, donde los elementos de matriz entre estados con diferente cantidad de excitaciones esta dado formalmente por

$$\begin{aligned} [H, \hat{N}] = 0 &\implies \langle N' | H \hat{N} | N \rangle = \langle N' | \hat{N} H | N \rangle \\ N \langle N' | H | N \rangle &= N' \langle N' | H | N \rangle \\ &\implies \langle N' | H | N \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } N' \neq N \\ \langle N | H | N \rangle, & \text{si } N' = N \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $|N\rangle$  es un estado con  $N$  excitaciones totales. Entonces, para resolver el problema solo se tiene que considerar el subespacio de  $2 \times 2$  de  $n$  excitaciones, cuyo Hamiltoniano es

$$H_n = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Se resuelve el problema de autovalores y autovectores y se obtiene:

$$\begin{aligned} |\psi_-^n\rangle &= \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n\rangle - \sin \frac{\theta_n}{2} |e, n-1\rangle \\ |\psi_+^n\rangle &= \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

con  $E_\pm^n = \pm \frac{\Omega_n}{2}$  las autoenergías y  $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}$  la frecuencia de Rabi del sistema,  $\cos \theta_n = \frac{\Delta}{\Omega_n}$  modulando la superposición de estados. En la Figura 3.1 se observan las

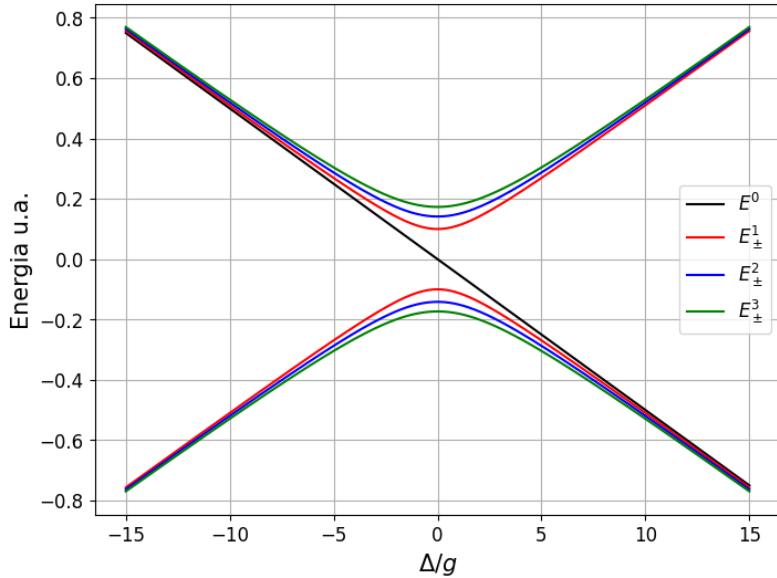


Figura 3.1. Relación energía detuning para el modelo de Jaynes-Cummings. La diferencia de energía entre los estados de un mismo nivel para  $\Delta = 0$  es  $2g\sqrt{n}$ .

curvas de energía en función del detuning para diferentes niveles. Lo primero que se tiene que observar es que en el caso resonante, es decir  $\Delta = 0$ , los autoestados del sistema son los estados máximamente entrelazados de Bell

$$|\psi_{\pm}^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gn\rangle \pm |e, n-1\rangle) \quad (3.6)$$

y la diferencia de energía entre los autoestados es  $\Delta E^n = E_+^n - E_-^n = 2g\sqrt{n}$ . En el caso muy lejos de resonancia se puede asumir que  $\Delta \gg g$ , y entonces los autoestados coinciden en este límite con los estados de la base,

$$\begin{aligned} |\psi_+^n\rangle &= |e, n-1\rangle \\ |\psi_-^n\rangle &= |g, n\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

Acá hay una sutileza, y es que si  $\Delta > 0$ , entonces  $|e, n-1\rangle$  es el estado de mayor energía y la notación coincide con la energía, pero si  $\Delta < 0$  entonces el estado  $|\psi_+^n\rangle$  es el estado de menor energía. Un efecto interesante es que en el caso de alta desintonía, se puede calcular la diferencia entre la energía del autoestado exacto del Hamiltoniano  $|\psi_{\pm}^n\rangle$  y la energía asintótica a la que tiende, que es la energía de los estados de la base  $|g, n\rangle, |e, n-1\rangle$ :

$$\begin{aligned} \Delta E_{e,n-1} &= E_+^n - E_{e,n-1}^{(0)} = \frac{g^2}{\Delta} n \\ \Delta E_{g,n} &= E_-^n - E_{g,n}^{(0)} = -\frac{g^2}{\Delta} n \end{aligned} \quad (3.8)$$

El resultado importante de esta diferencia de energías es que aún en ausencia de fotones en la cavidad  $n = 0$ , hay una diferencia entre las energías entre el Hamiltoniano del átomo, y del  $H_{JC}$ . Este efecto es el *Lamb Shift* y nos dice que el vacío electromagnético induce un

corrimiento en la energía de los estados. Esto es importante notarlo, porque para el caso de dos átomos también está manifiesto.

### 3.1.1. Fase geométrica en el JCM

Ahora se va a analizar la fase de Berry y la fase geométrica en la aproximación cinemática.

#### Fase de Berry

Para ver la fase de Berry se tiene que tener un parámetro de control en el Hamiltoniano, el cual varía lentamente. Para esto es necesario aplicar una transformación unitaria de corrimiento de fase  $R = \exp\{-i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}\}$  al Hamiltoniano de la Ec. 3.3 , obteniendo así

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{-i\Omega} - +\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{i\Omega}) \quad (3.9)$$

que ahora depende explícitamente del parámetro externo de control  $\Omega$ . Los autoestados de este nuevo Hamiltoniano se obtienen aplicando esta misma transformación sobre los autoestados del Hamiltoniano original. Si el parámetro de control varía lentamente entre 0 y  $2\pi$ , entonces estamos dentro de las hipótesis propuestas por Berry, y podemos calcular la fase de Berry mediante la Ec. 2.4:

$$\phi_a^n = i \oint_C d\Omega \langle \psi_\pm^n | R(\Omega)^\dagger \frac{d}{d\Omega} | \psi_\pm^n \rangle = \pi(1 \mp \cos(\theta_n)) \quad (3.10)$$

#### Aproximación Cinemática

Para comparar ambos métodos, ahora se calcula la fase geométrica utilizando la aproximación cinemática (aunque este abordaje es más general de lo necesario en este caso). Si se considera que el estado inicial es un autoestado del Hamiltoniano, como los estados  $|\psi_\pm^n\rangle$ , entonces la fase geométrica en este caso se anula. Pero si se considera un estado inicial, por ejemplo  $|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ , entonces el estado a tiempo  $t$  resulta

$$|\psi(t)\rangle = (\cos^2 \theta_n e^{-iE_+^n t} + \sin^2 \theta_n e^{iE_+^n t}) |e, n\rangle - i \sin \theta_n \sin(E_+^n t) |g, n+1\rangle \quad (3.11)$$

La fase geométrica acumulada Ec. 2.18 es

$$\phi_u[C] = -\pi(1 - \cos \theta_n) \frac{t}{T} + \arg \left\{ 1 + e^{2\pi i \frac{t}{T}} \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n + \Delta} \right\} \quad (3.12)$$

con  $T = \frac{2\pi}{\Omega_n}$  es un período correspondiente a la frecuencia de Rabi  $\Omega_n$ . La FG en la aproximación cinemática (Ec. 3.12) y la de Berry (Ec. 3.11), deberían coincidir cuando  $t = T$ , que se corresponde con un ciclo cerrado. En ese caso ( $t = T$ ) se obtiene:

$$\phi_u = -\pi(1 - \cos \theta_n) \quad (3.13)$$

La diferencia de signos se puede explicar comparando las curvas descritas por la esfera de Bloch para cada evolución como muestra la Figura 3.2.

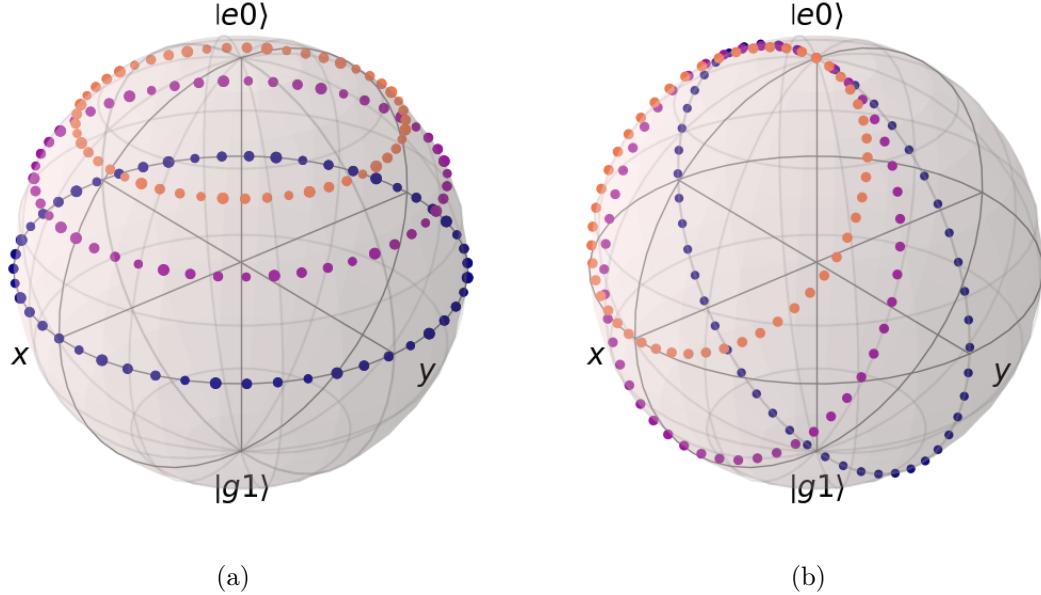


Figura 3.2. (a) Evolución de un autoestado  $|\psi_{\pm}(t)\rangle$  bajo un campo de control que introduce cambios de fase. (b) Evolución de un estado genérico  $|e, n\rangle$ . Las curvas se corresponden con diferentes valores del detuning, que son  $\Delta = 0$  (azul),  $\Delta = g$  (violeta) y  $\Delta = 2g$  (naranja).

La Figura 3.2a muestra la evolución bajo el campo que introduce un corrimiento de fases utilizado para calcular la fase de Berry, los autoestados son los autoestados  $R(\Omega)|\psi_{\pm}^n\rangle = e^{-i\Omega\hat{n}}|\psi_{\pm}^n\rangle$ , entonces al variar  $\Omega \in [0, 2\pi]$  la trayectoria es simplemente un círculo en la esfera de Bloch. En cambio, en el segundo caso, si preparamos el sistema inicialmente en el estado  $|e, n\rangle$  y lo dejamos evolucionar por la acción del Hamiltoniano durante un tiempo, la trayectoria no consiste en círculos horizontales en la esfera, sino que parten del polo norte, que es el estado  $|e, n\rangle$ , y luego hace una trayectoria ovalada, para finalmente volver al punto inicial de partida a un tiempo  $t = T$ . La diferencia en el signo se explica a través de la transformación que nos lleva de una curva a la otra. Para esto, necesitamos de una rotación rígida, y una inversión de la parametrización, por su parte, esta última, introduce un signo negativo, cosa que se ve claramente en la Ec. 3.12 al cambiar  $t \rightarrow -t$ .

### 3.2. Medio Kerr

Ahora que ya se trabajó el caso más sencillo, se estudian casos más generales. La primera generalización que se hará es agregar un medio no lineal. Este medio se lo conoce como medio Kerr, y lo que hace es agregar un término en el Hamiltoniano de la Ec. 3.1:

$$\hat{H}_C = \epsilon \hat{n} \rightarrow \hat{H}_C^{\text{Kerr}} = \epsilon \hat{n} \left(1 - \frac{\chi}{\epsilon}\right) \quad (3.14)$$

donde  $\chi$  es el parámetro que caracteriza al medio de la cavidad Kerr. Si se realizan nuevamente los mismos pasos, se arriba a las mismas conclusiones sobre la forma del Hamiltoniano y se obtiene

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \chi\hat{n}^2 + g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\hat{a}\hat{\sigma}_+) \quad (3.15)$$

y en forma matricial, en el subespacio de  $n$  excitaciones  $\{|gn\rangle, |e, n-1\rangle\}$ :

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} + \chi n^2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \frac{\Delta}{2} + \chi(n-1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Resolviendo, se obtiene que ahora los autovectores son

$$|\psi_\pm^n\rangle = \frac{1}{N_\pm} \left( \left( -\frac{\Delta}{2} + \chi(n-1/2) \mp \frac{\Omega_{n,\chi}}{2} \right) |gn\rangle + g\sqrt{n} |e, n-1\rangle \right) \quad (3.17)$$

donde  $\Omega_{n,\chi} = \sqrt{(\chi(n-1/2) - \Delta)^2 + 4g^2n}$ ,  $N_\pm = \sqrt{(-\frac{\Delta}{2} + \chi(n-1/2) \mp \Omega_{n,\chi}/2)^2 + g^2n}$ , y las autoenergias son

$$E_\pm^n = \chi(n - \frac{1}{2})^2 + \frac{\chi}{4} \pm \frac{\Omega_{n,\chi}}{2} \quad (3.18)$$

Se puede ver que el resultado con  $\chi = 0$  se reduce al caso visto anteriormente, que representa una cavidad con un medio lineal.

Si se quiere resolver la dinámica de este problema para un estado inicial cualquiera, lo que se tiene que hacer es desarrollar este estado inicial en función de los autoestados del problema, entonces se tendría para un estado arbitrario con un número total de excitaciones definido, que suponemos igual a 1 por simplificación (la generalización es inmediata):

$$|\psi\rangle(t) = U(t)(\langle\psi_+^1|\psi(0)\rangle|\psi_+^1\rangle + \langle\psi_-^1|\psi(0)\rangle|\psi_-^1\rangle) = c_+ e^{-iE_+ t} |\psi_+\rangle + c_- e^{-iE_- t} |\psi_-\rangle \quad (3.19)$$

Resulta interesante notar que al sacar factor común la fase  $e^{-iE_+ t}$ , la cantidad relevante sigue siendo  $\Omega_{n,\chi}$ , que es la frecuencia de Rabi para medios tipo Kerr. Por otro lado, el producto interno que da lugar a los coeficientes  $c_\pm$  depende de  $\chi$ , por lo tanto las amplitudes de probabilidad de encontrar al estado temporalmente evolucionado en algún otro estado haciendo una medición proyectiva, depende de  $\chi$ . Concluyendo que el medio Kerr modifica las amplitudes de oscilación de las poblaciones del estado.

Entonces se analiza la relación entre  $\pm\Omega_{n,\chi}/2$  y el detuning, teniendo en cuenta que ahora el medio puede tener  $\chi \neq 0$ .

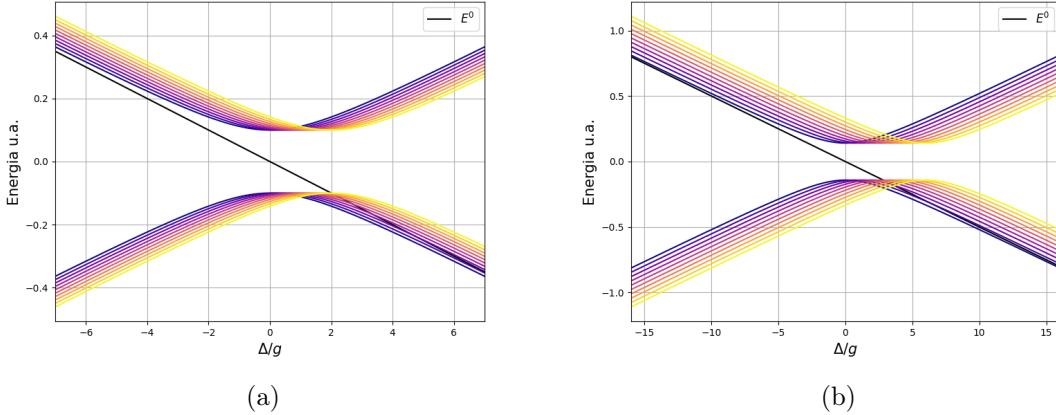


Figura 3.3. Gráfico de la frecuencia de Rabi  $\Omega_{N,\chi}$  en función del detunning  $\Delta$  para (a)  $N=1$  y (b)  $N=2$ .

Se observa en la Figura 3.3 como se modifica la frecuencia  $\pm\Omega(N,\chi)$  para diferentes valores de  $\chi$ , donde en el panel a se muestran las energías para  $N=1$  y en b para  $N=2$ , en función del detunning. En colores (de más oscuro a más claro) se aprecia cómo el aumento de  $\chi \in [0, 2g]$  afecta a las curvas: al aumentar  $\chi$ , las curvas se desplazan hacia la derecha en una cantidad  $\chi(n - 1/2)$ .

Este comportamiento se puede predecir mirando la forma de la autoenergía Ec. 3.18, ya que lo que estamos haciendo es desplazando la raíz mediante un cambio de variables  $\Delta \rightarrow \Delta - \chi(n - 1/2)$ . Este desplazamiento depende del número de excitaciones  $N$ . Dados dos valores diferentes de  $\chi$  es de interés saber si al aumentar  $\Delta$ , aumentan o disminuyen las energías de los estados, por ejemplo, si se comparan dos casos, uno con  $\chi_1 = 0$  y  $\chi_2 = 0.5g$ , y dado un valor de detunning  $\Delta = 2g$ , cual de los dos casos tiene una mayor frecuencia. Para esto se busca la intersección entre dos curvas con diferentes  $\chi$ , que llamamos  $\chi_1$  y  $\chi_2$ , con  $\chi_1 < \chi_2$ . Mediante un cálculo se obtiene que la intersección es para  $\Delta = (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ , es decir, si  $\Delta < (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ . Entonces la frecuencia de  $\chi_2$  es mayor que la de  $\chi_1$ , y viceversa si  $\Delta > (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ .

Ahora, habiendo entendido esto, podemos ver que el efecto del medio es modificar la frecuencia y también la amplitud de la oscilación, haciendo que la primera sea menor, y **para ver que pasa con las amplitudes tengo que hacer algunas cuentas**

### 3.3. JCM disipativo

Habiendo desarrollado el análisis de la fase geométrica acumulada por el sistema átomocavidad en la situación ideal de completo aislamiento, se aborda ahora el estudio para el escenario más realista en el que el mismo sistema se encuentra en interacción con un entorno. El problema se estudia para la implementación específica en estructuras semiconductoras, en las que un punto cuántico (al cual se sigue, sin embargo, refiriendo como átomo o sistema de dos niveles) se ubica en una nano o micro-cavidad.

Siguiendo [3], en esta sección se estudia en detalle la fase geométrica acumulada en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo, como caso paradigmático dentro del campo de la

electrodinámica en cavidades. Se considera que los principales mecanismos por los cuales el sistema “átomo + modo” interactúa con el entorno son el flujo de fotones a través de las paredes de la cavidad y el continuo e incoherente bombeo del sistema de dos niveles, lo que conforma un escenario frecuente en electrodinámica de cavidades semiconductoras ([4],[5],[6]).

Para poder modelar estos mecanismos, se emplea la ecuación maestra fenomenológica de Lindblad

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (2L_{\alpha}\rho(t)L_{\alpha}^{\dagger} - \{L_{\alpha}^{\dagger}L_{\alpha}, \rho(t)\}), \quad (3.20)$$

despreciando otros procesos con menor influencia en la dinámica como el desfasaje puro o el bombeo de fotones del entorno en la cavidad, donde además se ha considerado que el entorno se halla a temperatura cero. Los operadores de Lindblad

$$L_{\gamma} = \sqrt{\gamma} a \quad (3.21)$$

$$L_p = \sqrt{p} \sigma_{+} \quad (3.22)$$

representan la pérdida de fotones y el bombeo continuo e incoherente del átomo, respectivamente, con los parámetros  $\gamma$  y  $p$  denominados tasa de pérdida de fotones y amplitud del bombeo.

El bombeo sobre el átomo es siempre secundario frente a la pérdida de fotones, lo cual nos da las relaciones  $\frac{p}{g}, \frac{p}{\gamma} \ll 1$ , y la relación entre  $\gamma$  y  $g$  da lugar a dos regímenes que se diferencian con claridad [7]-[11]. El régimen de acoplamiento fuerte (SC o Strong Coupling) es cuando la interacción átomo-cavidad es más fuerte que la disipación del entorno, es decir  $\gamma/g < 1$ . En el caso contrario  $\gamma/g > 1$  estamos en el régimen de acoplamiento débil (WC o Weak Coupling). Para no generar confusiones, hay que destacar que, en general, cuando en la literatura se habla de acoplamientos fuertes y débiles, se refiere a la interacción entre las partes del mismo sistema, pero en este caso, se está haciendo referencia a la interacción del sistema con el entorno *en comparación* con la interacción interna del sistema.

### 3.3.1. Solución y régimen de acoplamiento

En esta ocasión se resuelve el problema restringiéndose al subespacio donde el átomo puede estar en cualquiera de sus dos estados, y la cavidad tiene 1 o 2 fotones. En consecuencia, el problema se limita a un subespacio truncado cuya base son los estados  $\{|0\rangle = |g, 0\rangle; |1\rangle = |e, 0\rangle; |2\rangle = |-, 1\rangle\}$ . Desarrollar explícitamente el sistema de ecuaciones dadas por la ecuación de Lindblad Ec. 3.20, lleva a ecuaciones para los elementos  $\rho_{0i}$  que quedan desacoplados de los demás:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{01} &= -\frac{p}{2}\rho_{01} + i\Delta\rho_{01} + ig\rho_{02} \\ \dot{\rho}_{02} &= -\frac{p}{2}\rho_{02} - \gamma\rho_{02} + ig\rho_{01} \end{aligned} \quad (3.23)$$

con lo cual, si inicialmente los elementos de matriz  $\rho_{0i}(0) = 0$ , permanecerán así durante toda la evolución del sistema. Para hacer una analogía y comparar con el caso

unitario, se estudia la condición inicial  $\rho(0) = |e, 0\rangle\langle e, 0|$ , de modo que la matriz  $\rho(t)$  exhiba una estructura diagonal por bloques. El primer bloque de  $1\times 1$  representando al estado  $|0\rangle$ , y luego un bloque de  $2\times 2$  que describe la dinámica entre los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{00} &= -p\rho_{00} + \gamma\rho_{22} \\ \dot{\rho}_{11} &= -ig(\rho_{21} - \rho_{12}) + p\rho_{00} \\ \dot{\rho}_{22} &= -ig(\rho_{12} - \rho_{21}) - \gamma\rho_{22} \\ \dot{\rho}_{12} &= -ig(\rho_{22} - \rho_{11}) - i\Delta\rho_{12} - \frac{\gamma}{2}\rho_{12}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

que se resuelven numéricamente para acceder al estado  $\rho(t)$  a tiempo  $t > 0$ .

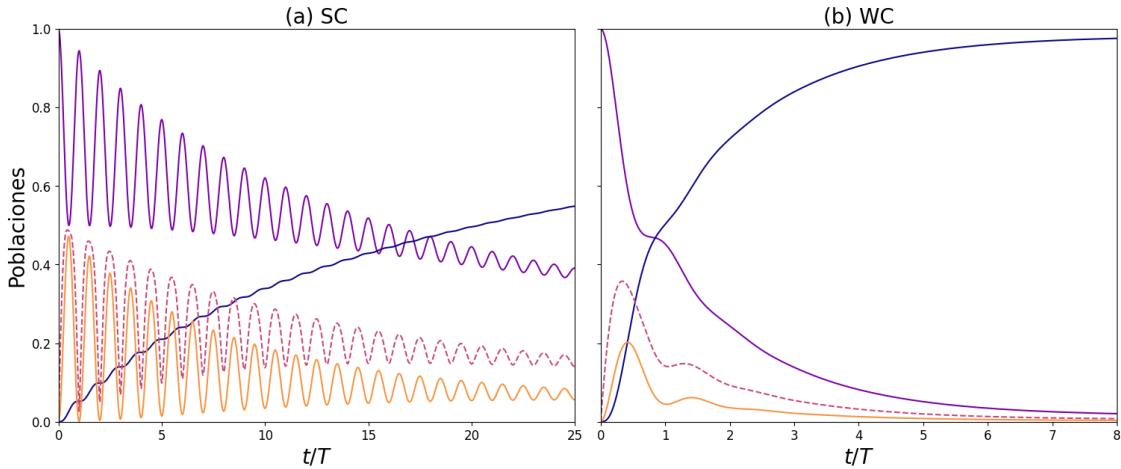


Figura 3.4. Solución numérica al sistema de ecuaciones dada por la ecuación de Lindblad para el estado inicial  $|e0\rangle\langle e0|$ . Estos gráficos se realizaron con  $\Delta = 2g$ ; a la izquierda se observa el régimen de Weak Coupling con  $\gamma = 0.1g$ , donde el sistema átomo-cavidad esta débilmente acoplado con el entorno, y a la derecha el de Strong Coupling con  $\gamma = 2g$ , donde las poblaciones y coherencias decaen sin oscilar. Las líneas sólidas son las poblaciones de los estados, en azul para el estado  $|g0\rangle$ , en morado para  $|e0\rangle$  y en amarillo  $|g1\rangle$ , y la línea rayada representa la coherencia entre los estados con  $N=1$  ( $|e0\rangle$  y  $|g1\rangle$ ).

En la Figura 3.4a, se muestra el régimen de SC, donde el acoplamiento entre el átomo y la cavidad es mayor al acoplamiento con el entorno, según la relación entre los parámetros  $\gamma/g = 0.1$ , y en el panel 3.4b, se muestra el caso del WK. En el primer caso, tanto las poblaciones como las coherencias presentan oscilaciones coherentes antes de decaer por la influencia del entorno. En cambio, para el caso de WK, estas oscilaciones coherentes no están presentes y el sistema llega a su estado asintótico en tiempos muy cortos. Las características de la dinámica de cada régimen, influyen profundamente en el estudio de la fase geométrica, haciendo posible únicamente su utilización en el caso de Strong Coupling, donde la dinámica presenta oscilaciones coherentes durante varios ciclos, antes de decaer, haciendo del régimen de SC el único escenario conveniente para su estudio. Antes de fundamentar esta afirmación, se realiza un estudio poblacional en el caso de una cavidad con medio Kerr.

Como se vio anteriormente, el efecto del medio Kerr sobre los autoestados y las au-

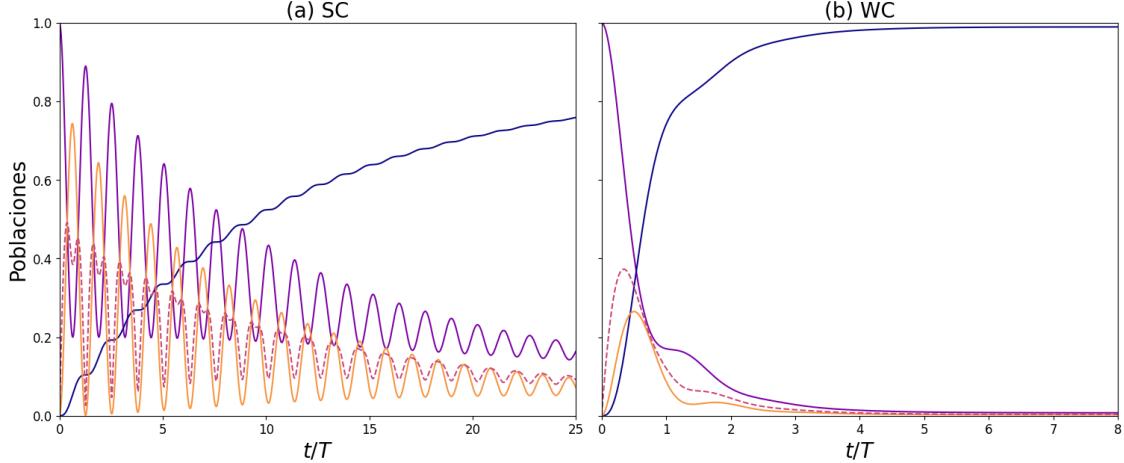


Figura 3.5. Análisis poblacional para una cavidad con medio Kerr con  $\chi = 0.5g$ . Para la simulación se utilizaron los mismos parámetros que en la Figura 3.4

to energías es, por un lado, desplazar los niveles de energía. Si se comparan las Figuras 3.4 con 3.5, entonces se pueden observar dos diferencias. La primera es lo mencionado anteriormente; en el mismo tiempo, es decir entre  $0 \leq t/T \leq 25$ , en el caso de  $\chi = 0$  se observan 25 oscilaciones, pero en el caso de  $\chi = 0.5g$  solo se observan 23 oscilaciones. Esto se debe a la condición que se encontró al final de la sección 3.2. En este caso se verifica que  $\Delta = 2g > (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} = 1 \cdot \frac{0.5g}{2}$ , entonces la diferencia de energías entre los autoestados disminuye al aumentar  $\chi$ , y por lo tanto, las oscilaciones son más lentas para el caso de  $\chi = 0.5g$  en comparación con  $\chi = 0$ .

### 3.3.2. Fase geométrica en presencia de disipación

Ahora se estudia la fase geométrica adquirida por el sistema, calculada siguiendo la definición de la Ec. 2.27, y se analiza como esta se ve modificada con respecto del valor unitario por efecto del contacto con el entorno. Como el estado inicial es puro, la definición se reduce al caso particular descrito por la Ec. 2.28.

Los autovalores y autovectores del operador densidad pueden escribirse formalmente diagonalizando el subespacio de  $2 \times 2$  de la matriz densidad:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 & \dots \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

donde se asume nuevamente una estructura diagonal por bloques, que se da cuando el estado inicial tiene un número definido de excitaciones, dando lugar a dos autovectores. El de interés para utilizar la definición de la fase geométrica Ec. 2.28, es el autoestado con mayor energía

$$|\psi_+\rangle(t) = \frac{-(\rho_{22} - \epsilon_+) |e, 0\rangle + \rho_{21} |g, 1\rangle}{((\rho_{22} - \epsilon_+)^2 + \rho_{21}\rho_{12})^{1/2}} \quad (3.26)$$

con  $\epsilon_+ = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + ((\rho_{11} - \rho_{22})^2 + 4\rho_{12}\rho_{21})^{1/2})$  el autovalor asociado. Recurriendo a este resultado, podemos escribir formalmente la fase geométrica en función de los elementos de matriz  $\rho_{ij}(t)$ :

$$\phi_g(t) = \int_0^t dt' \frac{\text{Im } \dot{\rho}_{21}\rho_{12}}{(\rho_{22} - \epsilon_+)^2 + \rho_{12}\rho_{21}} \quad (3.27)$$

En general, esta fase diferirá de aquella acumulada en una evolución unitaria de forma que puede escribirse, sin pérdida de generalidad,  $\phi_g = \phi_u + \delta\phi$ , con  $\delta\phi$  la diferencia entre la fase unitaria y aquella modificada por la presencia del entorno. Caracterizar la corrección  $\delta\phi$  permite relacionar este objeto, perteneciente a la geometría misma del espacio de Hilbert, con los efectos de disipación y decoherencia experimentados por el sistema, así como determinar bajo qué circunstancias  $\delta\phi$  resulta despreciable y se puede considerar que la fase geométrica es robusta al efecto del entorno.

### Dependencia con el régimen de acoplamiento

En la Figura 3.6 se muestra la fase geométrica acumulada en función del tiempo, para el estado inicial puro  $|e, 0\rangle$ , comparando 4 casos para la relación  $\gamma/g$  pertenecientes al régimen de SC. Como referencia, además, se muestra la fase geométrica unitaria.

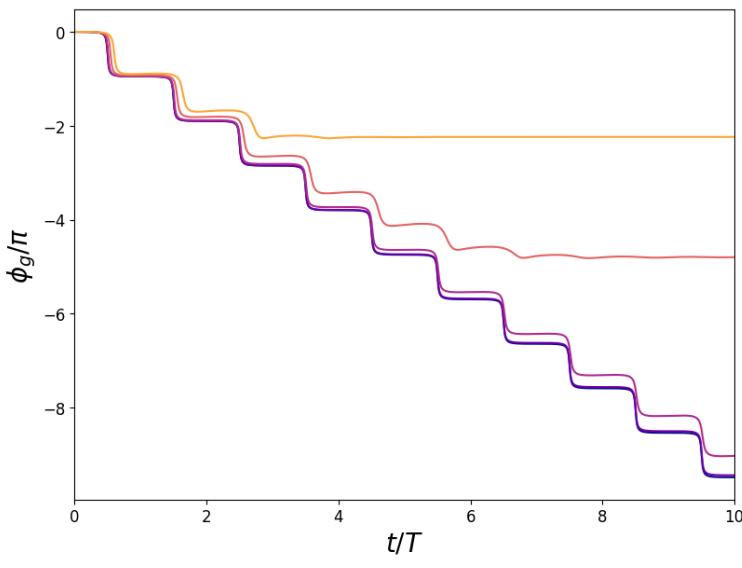


Figura 3.6. Fase geométrica acumulada por un sistema con un detuning  $\Delta = 0.1g$ , para diferentes valores característicos del entorno. En todos los casos la tasa de bombeo es  $p = 0.005g$ , y se muestran diferentes valores para  $\gamma$ , partiendo de  $\gamma = 0$  perteneciente a la línea azul oscura que es el caso unitario, y para  $\gamma = 0.01g, \gamma = 0.1g, \gamma = 0.5g$  y  $\gamma = g$ , correspondientes a las líneas violeta, rosa, naranja y amarilla.

Al aumentar la interacción con el entorno, aumenta la diferencia  $\delta\phi$  entre la fase acumulada con aquella correspondiente al caso unitario. Sin embargo, si el valor aumenta demasiado, la perdida de coherencia detiene el movimiento del estado y consecuentemente la acumulación de fase. Por esto es que el estudio sobre la fase geométrica debe ser en el régimen de SC, ya que si la relación  $\gamma/g \gg 1$ , la fase dejará de acumularse luego de un período muy corto de tiempo.

### Dependencia con el detunning

Ya que las amplitudes de los estados y las frecuencias de oscilación dependen de los parámetros del problema, entonces la curva que describe el estado en el espacio de rayos dependerá también de estos, heredando así la fase geométrica una dependencia con los parámetros. Manteniendo las características del entorno iguales, se estudia la dependencia de la fase geométrica con el detunning  $\Delta$ . En la Figura 3.7 se observa que conforme se aumenta el detunning átomo-cavidad, la fase acumulada es menor (en valor absoluto) y se suaviza.

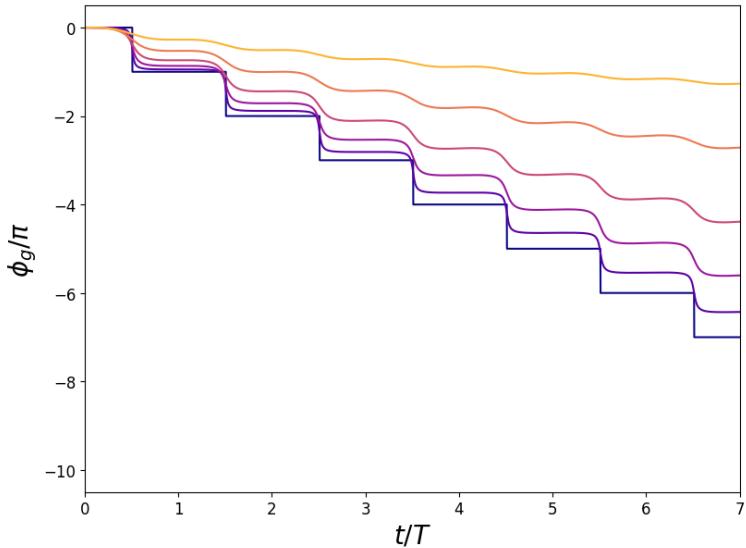


Figura 3.7. Fase geométrica acumulada por el estado inicial para diferentes valores del detunning. El entorno esta caracterizado por una tasa  $d$

Como se discutió anteriormente, la fase geométrica en presencia del entorno se puede descomponer en la parte unitaria  $\phi_u$  dada por la ecuación 2.18, más una corrección  $\delta\phi$  que refleja la desviación introducida por el entorno. La dependencia de la componente unitaria en  $\Delta/g$  esta explícita en la ecuación 3.12. Surge entonces la pregunta de la dependencia del término  $\delta\phi$  con respecto a los parámetros del problema, o si toda la dependencia se encuentra contenida en la parte unitaria  $\phi_u$ . Para tratar con esta pregunta se analiza la corrección  $\delta\phi$  en un instante dado (que se elige y se mantiene fijo), observándola como función del valor de  $\Delta/g$ . El resultado se presenta en la Figura 3.8, en el cual se contrasta además esta dependencia para tres entornos caracterizados por distintos valores de tasa de perdida de fotones  $\gamma$ .

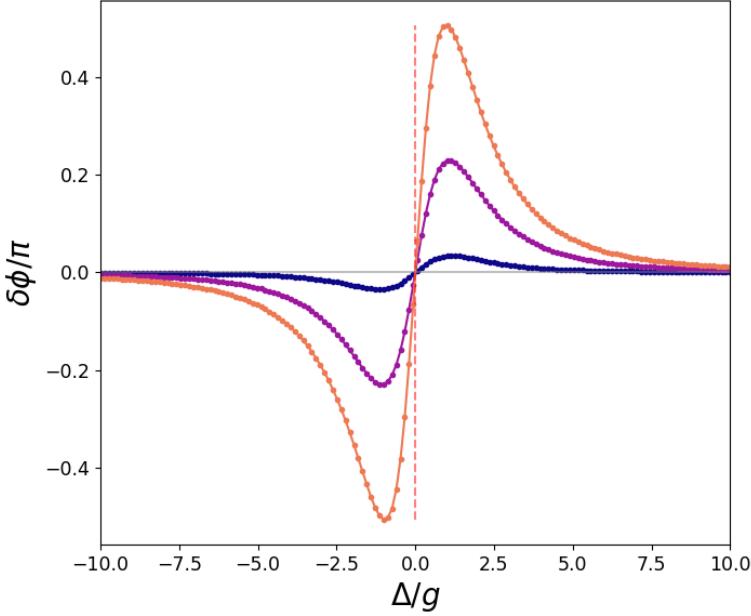


Figura 3.8. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad  $\Delta$ , para  $\chi = 0$  y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son  $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$ , asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.

Puede verse que la corrección en efecto depende del valor del detunning  $\Delta/g$ , y dos aspectos resaltan. En primer lugar, la corrección se anula, en todos los casos considerados, cuando se satisface la condición de resonancia  $\Delta = 0$ . Este hecho resulta prometedor, insinuando que en este caso la fase geométrica  $\phi_g$  resultaría robusta a los efectos de un entorno en el régimen de SC. La otra característica de la corrección  $\delta\phi$  que se revela en la Figura 3.8 es la no-monotonía de la corrección como función de  $\Delta/g$ , que exhibe un extremo para un valor  $\Delta/g$  que depende débilmente tanto en las constantes  $\gamma/g$  y  $p/g$  que caracterizan el entorno como en el instante  $t$  en el que se realiza la observación. De esta forma la Figura 3.8 despierta un interés es doble, ya que permite identificar: (i) las condiciones en las cuales el efecto del entorno sobre la fase geométrica es mayor, acercando la posibilidad de una detección experimental y, (ii) las condiciones que mitigan, permitiendo ignorarlo, este efecto o incluso que lo eliminan por completo.

### Dependencia con el medio Kerr

Ahora se considera la dependencia con el medio Kerr. Al estudiar los efectos del detunning, se consideró que la cavidad era lineal, es decir  $\chi = 0$ . Es el objeto de estudio de esta sección ver cómo se modifican la fase geométrica y los resultados obtenidos para el detunning al considerar un medio Kerr. En primer lugar, se muestra la dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores de  $\chi/g$ , considerando un entorno idéntico en todos los casos, con un valor fijo del detunning.

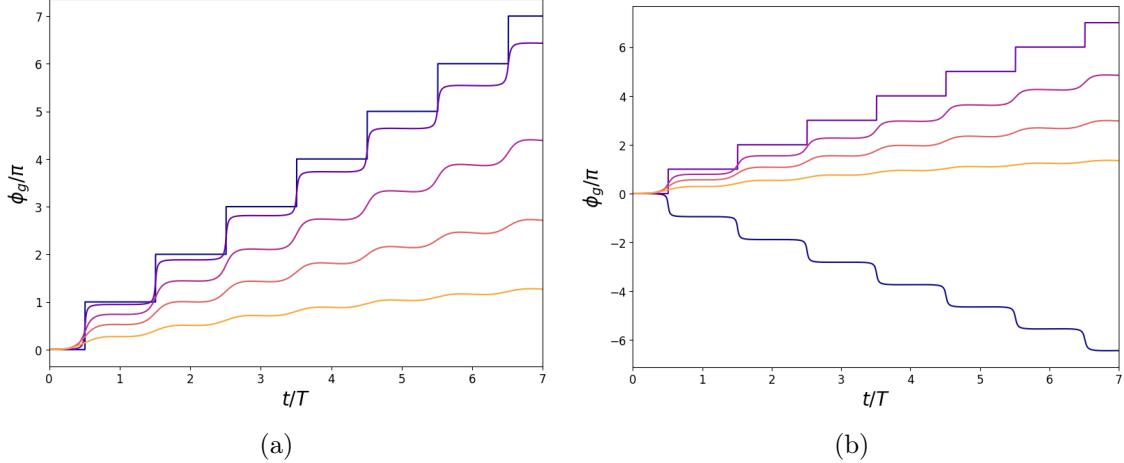


Figura 3.9. Dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores del medio Kerr dados por  $\chi = 0, 0.1g, 0.5g, g$  y  $2g$  representados por colores partiendo del mas oscuro al mas claro, y un valor fijo del detunning: (a)  $\Delta = 0$  y (b)  $\Delta = 0.1g$

En la Figura 3.9a se observa el efecto del medio sobre la fase geométrica acumulada, donde la línea azul oscuro, correspondiente al caso  $\chi = 0$  se corresponde con el caso robusto en donde tenemos una acumulación por escalones. Al comparar con la fase correspondiente a  $\Delta = \chi = 0$  de la Figura 3.7 hay una diferencia notable, y es que en esta la fase acumulada es negativa, mientras que en la Figura 3.9a es positiva. Esta discrepancia entre simulaciones para los mismos parámetros se debe a que numéricamente hay problemas con el cero; para salvar este problema se le otorga un valor numérico muy pequeño al detunning, y dependiendo del signo que se le otorga, entonces la fase acumulada es positiva o negativa.

Al aumentar el parámetro  $\chi$ , similarmente al caso del detunning, la fase acumulada es menor y se suaviza. Este comportamiento es algo esperable, ya que en la ecuación para la energía el detunning  $\Delta$  y el medio  $\chi$  están casi en igualdad de condiciones, en el sentido que la dependencia funcional de la energía en estos parámetros es igual. En la Figura 3.9b, donde se consideró un valor de  $\Delta = 0.1g$ , se aprecia como el caso de  $\chi = 0$  (línea azul oscuro), ya no pertenece al caso robusto, sino que esta situación se recupera cuando  $\chi = 0.1g = \Delta$  (línea morada). Al seguir aumentando  $\chi$  el comportamiento es igual que antes, la fase se acumula más lentamente y los escalones se suavizan. Este resultado insinúa que para la fase geométrica, el medio y el detunning también están en igualdad de condiciones. Dos preguntas son pertinentes para confirmar esta intuición. En primer lugar, para corroborar la dependencia de la fase geométrica en el parámetro  $\chi$ , hay que realizar el estudio de la dependencia de la diferencia de fases geométricas  $\delta\phi$  al igual que en el caso del detunning. En segundo lugar, se quiere ver como cambia la robustez en función del detunning, si cambiamos el medio, por lo tanto se repetirá el estudio en función del detunning, pero para diferentes valores de  $\chi$ .

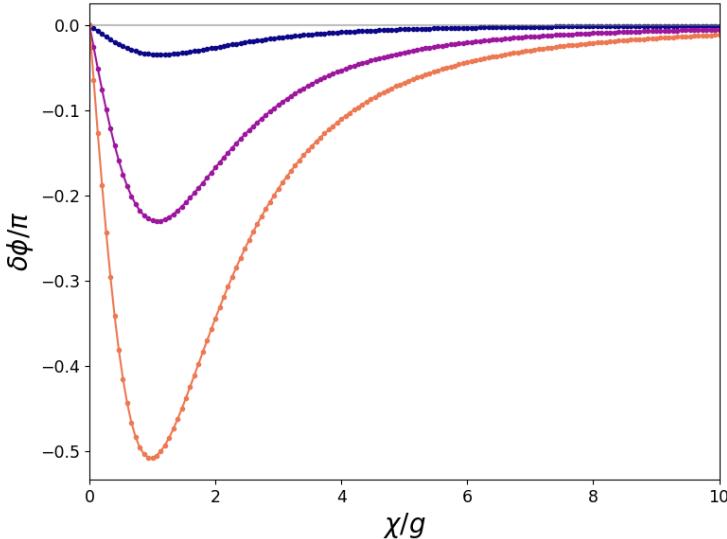


Figura 3.10. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio  $\chi$ , para  $\Delta = 0$  y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son  $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$ , asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.

En la Figura 3.10 se observa la dependencia de la diferencia en la fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio  $\chi$ . El comportamiento es el mismo que en el detuning: la diferencia se anula para  $\chi = 0$ , que coincide con el caso de robustez  $\Delta = 0$ . La diferencia es que ahora la fase acumulada es negativa, pero solo es una reflexión con respecto al caso anterior. Esto se debe a que el detuning  $\Delta$  y el parámetro del medio  $\chi$ , tienen signos diferentes en todas las expresiones vistas anteriormente y la fase hereda este signo, conservando los demás comportamientos; en este caso también hay un máximo no trivial que depende suavemente de los parámetros  $\gamma/g$  y  $p/g$ , consecuentemente la dependencia en la fase geométrica en este parámetro no es trivial, y al igual que en el caso del detuning, es no-monótona, por lo tanto tiene las mismas implicancias que en el caso anterior. Resulta interesante intentar de ver como se comportan ambos parámetros en conjunto. Se espera que, por los comportamiento observados hasta ahora, en realidad la dependencia general sea en  $\Delta - \chi(2n - 1)$ , por lo tanto, se realiza nuevamente el estudio de robustez en función del detuning, para un valor  $\chi/g = 1$ , que se observa en la Figura 3.11.

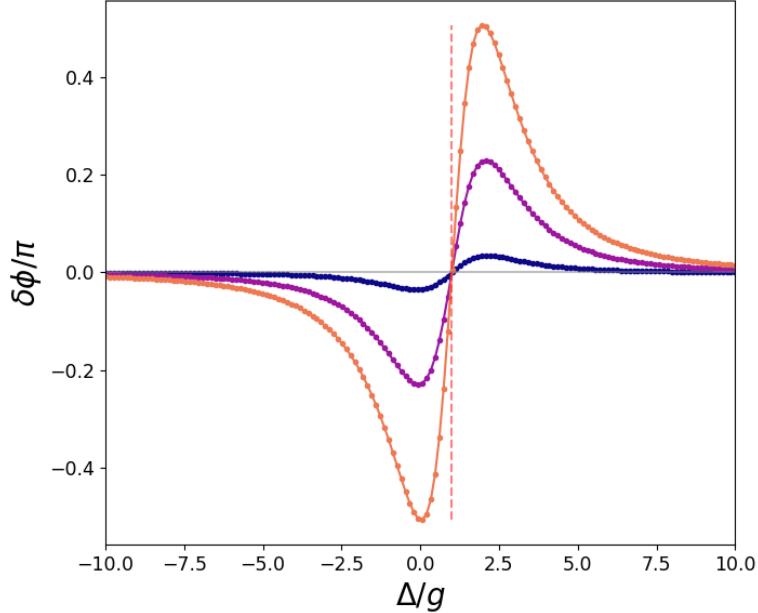


Figura 3.11. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad  $\Delta$ , para  $\chi = g$  y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son  $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$ , asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. Se observa como la condición de robustez se alcanza para  $\Delta/g = \chi/g = 1$ .

Se observa ahora una simetría al rededor de  $\Delta = \chi = g$ , donde se encuentra el cero de esta relación. Esto es lo que se esperaba, ya que en este caso de  $n = 1$ , la dependencia será en  $\Delta - \chi(2n - 1) \implies \Delta - \chi$ , es decir, si en el caso de  $\chi = 0$  la robustez se da para  $\Delta = 0$ , la predicción es que los demás casos robustos se den en general cuando se cumple la relación

$$\Delta - \chi(2n - 1) = 0 \quad (3.28)$$

comportamiento que se observa en la Figura 3.11.

### Robustez de la fase geométrica en el caso resonante

En esta sección se discute la razón detrás de la robustez en los casos estudiados anteriormente.

Como se ha mencionado, las Figuras 3.8, 3.10 y 3.11, muestran el resultado notable de que la diferencia  $\delta\phi$  entre la fase geométrica acumulada en una hipotética evolución unitaria y la fase geométrica acumulada por el sistema abierto se anula cuando se satisface la condición de resonancia  $\Delta = 0$  cuando el medio es lineal, y una segunda condición que llamaremos **condición de robustez**:  $\Delta - \chi(2n - 1) = 0$  en el caso de considerar un medio tipo Kerr. La condición de robustez claramente incluye a la primera y es más general. El resultado sugiere que la fase geométrica es robusta a los efectos del entorno en este caso. Esta robustez puede estudiarse y explicarse en términos geométricos analizando la evolución del estado  $\rho(t)$  del sistema átomo-modo y se vincula con el salto en  $\pi$  que exhibe la fase geométrica unitaria  $\phi_u$  del sistema resonante, cuyo estado describe un círculo máximo de la esfera de Bloch.

Para explicar el salto en  $\pi$  de la fase unitaria es necesario recordar, como fue desarrollado en las secciones 2.1 y 2.1, que la fase geométrica asociada a una trayectoria unitaria no-cíclica puede entenderse como la fase geométrica asociada a una curva cerrada específica: aquella construida a partir de la trayectoria abierta original, luego cerrada mediante

una curva geodésica que conecte sus extremos. Esta interpretación permite explicar un salto abrupto en  $\pi$  que muestra la fase geométrica acumulada en la evolución del sistema cuando el estado recorre un meridiano de la esfera de Bloch. Debido a que las geodésicas de la esfera de Bloch son, precisamente, sus círculos máximos, cuando la evolución recorre uno de éstos sin alcanzar a transitar la mitad de su longitud, la curva geodésica que debe considerarse coincide con la trayectoria de forma que la curva cerrada retorna sobre si misma acumulando fase geométrica nula. Por el contrario, si la trayectoria descrita por el estado supera la mitad del círculo máximo, la geodésica que une sus extremos lo completa encerrando un área de  $2\pi$  que corresponde a una fase geométrica  $\phi_u = \pi$ .

Para el caso de un sistema en interacción con el entorno, la identidad formal entre la ecuación 2.28 y la fase geométrica unitaria para el autoestado  $|\psi_+(t)\rangle$  de la matriz densidad demanda el estudio de la curva descrita en la esfera de Bloch por (la proyección de)  $|\psi_+(t)\rangle$ . Lo que se observa es que para el caso robusto  $|\psi_+(t)\rangle$  recorre una trayectoria que se superpone con aquella descrita por su análogo unitario pero que por efecto del entorno resulta de menor longitud (para un intervalo temporal idéntico). En un período  $t \in [0, T]$  de evolución, entonces, el rayo asociado al estado  $|\psi(t)\rangle$  retorna al punto inicial describiendo una trayectoria cíclica, mientras que aquél asociado a  $|\psi_+(t)\rangle$  describe una curva abierta. Sin embargo, esto no afecta el valor obtenido para la fase geométrica que resulta  $\phi_g = \pi$  siempre que el rayo recorra más de la mitad del círculo máximo. En consecuencia, siempre y cuando los efectos disipativos no sean lo suficientemente destructivos como para impedir que el autoestado supere el polo opuesto en un intervalo  $t' \in [0, T]$ , la fase geométrica acumulada en un período no se verá afectada. En este sentido, el caso robusto resulta entonces la situación ideal para realizar detecciones experimentales o implementar aplicaciones tecnológicas que requieran un escenario en que se puedan despreciar los efectos del entorno.

### 3.4. Resumen capítulo 3

En este capítulo se estudió en detalle la dinámica, y los efectos del medio Kerr sobre el modelo de JC de 1 átomo, también se consideró el efecto del entorno sobre las poblaciones y en particular, el efecto que este tiene sobre la fase geométrica. Se logró extender el entendimiento de la condición de robustez de la fase geométrica [3] para englobar el caso mas general de un medio no lineal de tipo Kerr, donde el resultado importante es que en general, la robustez se da para  $\Delta - \chi(2n - 1) = 0$ .



# JAYNES-CUMMINGS DE DOS ÁTOMOS, NO LINEAL, MEDIO KERR

---

En este capítulo se extiende el modelo de Jaynes-Cummings presentado en el capítulo 3. Lo más importante es que ahora se tienen dos átomos dentro de una misma cavidad. En la literatura en general, el JCM fue extendido para considerar dos cavidades donde cada una tiene su propio átomo, y usando una condición inicial entrelazada se puede hacer interactuar ambas cavidades REFS. El camino que se tomó en este trabajo, es un tanto fuera de lo convencional ya que no hay muchos estudios sobre este sistema. El principal obstáculo que presenta este problema, es que el espacio de Hilbert crece mucho y se torna inmanejable analíticamente; como bien ya sabemos, el JCM tiene subespacios de 2 dimensiones que no se mezclan, y utilizando esta estrategia se tendrán subespacios de 4x4 que tampoco se mezclan en el caso unitario. Esto permite encontrar algunas expresiones analíticas, pero en general se utilizaran métodos numéricos para analizar la dinámica. Este capítulo entonces seguirá un hilo conductor, partiendo desde el caso más sencillo hasta llegar a analizar cuales son los efectos de los diferentes parámetros en el problema, y particularmente se consideraran los efectos que estos tienen sobre la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos. Primero se resolverá el problema unitario de manera exacta, y se analizan las energías. Luego, para comprender las partes del problema, se aislará uno de los dos átomos, haciéndolo invisible a las interacciones con el otro átomo y con la cavidad. El objetivo de esto será recuperar numéricamente los resultados del capítulo 3. Al terminar este análisis, se seguirá por recuperar las interacciones del átomo que se aisló del sistema teniendo el problema completo, y se estudiará la dinámica poblacional y principalmente la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos. El efecto que tienen las interacciones del problema sobre el entrelazamiento será la ultima parte del capítulo.

## 4.1. Modelo de dos átomos y solución unitaria

En este trabajo, nos vamos a concentrar en una extensión del modelo, donde vamos a ubicar dos átomos dentro de la cavidad. Estos átomos pueden interactuar entre si, y con la cavidad, y ademas agregaremos no-linealidades en el acoplamiento y en el medio. Vamos a usar un modelo de Jaynes-Cummings para describir la interacción entre el campo electromagnético y los átomos. Además supondremos que el acoplamiento depende de la cantidad de fotones y los átomos podrán interactuar entre si mediante un termino tipo Ising y otro tipo dipolo-dipolo. Recordemos que para estamos asumiendo que vale

la aproximación de onda rotante ( $\omega_0 \sim \omega$ ) y  $g \ll \omega, \omega_0$ . Entonces, el Hamiltoniano que describe este problema es el siguiente:

$$\hat{H} = \underbrace{\hbar\omega_0 h(\hat{n})\hat{n}}_{\hat{H}_F} + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)})}_{\hat{H}_A} + \underbrace{\hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger)}_{H_{FA}} + \underbrace{2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)}}_{H_{AA}} \quad (4.1)$$

donde  $\hat{a}$  es el operador de aniquilación del fotón,  $\omega_0$  y  $\omega$  son las frecuencias del fotón y del átomo respectivamente,  $g$  es la constante de acoplamiento, las constantes  $J$  y  $\kappa$  son los parámetros de Ising y de dipolo-dipolo para las interacciones átomo-átomo, y los operadores  $\sigma^{(i)}$  son las matrices de Pauli que actúan sobre el átomo  $i$ -ésimo. Finalmente, las funciones  $h(\hat{n})$  y  $f(\hat{n})$  son las que van a dar cuenta de la no linealidad dependiente del numero de fotones de la cavidad  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ .

Tomando un medio tipo Kerr la función  $h(\hat{n}) = 1 + \frac{\chi}{\omega_0}\hat{n}$  [?](CITA), y la función  $f(\hat{n}) = 1$  si tomamos un acoplamiento lineal, y  $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$  si consideramos un acoplamiento tipo Buck-Sukumar [?](CITA)

En este punto es normal hacer una transformación unitaria  $K = \exp\{-i\omega t(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\sigma}_z/2)\}$  para dejar el Hamiltoniano en función del Detuning  $\Delta(\sim 0)$ .

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hbar\chi\hat{n}^2 + \frac{\hbar\Delta}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)}) \\ &+ \hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger) \\ &+ 2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este es el Hamiltoniano con el que vamos a trabajar, así que a partir de ahora vamos a olvidarnos del subíndice I. Obsérvese que el caso de  $\chi = 0$  es el caso de un medio lineal.

Este Hamiltoniano se puede resolver analíticamente para el caso de una cavidad sin perdidas. En analogía con el caso de 1 átomo, vamos a elegir la base de  $N$  excitaciones, donde esperamos que estos subespacios queden invariantes, es decir, que el Hamiltoniano sea diagonal por bloques, pero como ahora tenemos 2 átomos, tenemos que elegir una base que respete simetrías, para  $N$  excitaciones los estados de la base son  $\{|ggn\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg,n-1\rangle + |ge,n-1\rangle), |ee,n-2\rangle, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg,n-1\rangle - |ge,n-1\rangle)\}$ . En esta base, el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques y el bloque de  $N$  excitaciones queda El problema unitario se puede resolver analíticamente. Esto esta hecho en el paper de los autores *O de los Santos-Sánchez, C González-Gutiérrez and J Récamier*, titulado *Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms* [?](CITA). Acá tengo que pasar las cuentas a latex, pero las hice en papel para ver si entendía todo. Para resolver el problema lo primero que hacemos es notar que el Hamiltoniano conserva el numero de

excitaciones, es decir  $[H, \hat{N}] = 0$ , y en esta situación es sabido que el Hamiltoniano de JC es diagonal por bloques si elegimos convenientemente la base, esta es la que agrupa los estados con misma cantidad de excitaciones  $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{\sigma}_-^{(2)}$ :

$$\begin{cases} |\Phi_1^{(n)}\rangle = |ggn\rangle, |\Phi_2^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle + |gen-1\rangle), |\Phi_3^{(n)}\rangle = |een-2\rangle, \\ |\Phi_4^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle - |gen-1\rangle) \end{cases} \quad (4.3)$$

donde se eligió esta combinación particular porque el ultimo estado de la base, que es impar ante intercambio, queda desacoplado de los otros, simplificando el problema. Esto se ve al evaluar los elementos de matriz del Hamiltoniano  $H_{i,j} = \langle \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j \rangle$ , este queda en bloques, y el subespacio correspondiente a  $n$  excitaciones  $\hat{H}^{(n)}$  es una matriz de 4x4

$$\frac{\hat{H}^{(n)}}{\hbar} = \begin{pmatrix} \chi n^2 - \Delta + J & \sqrt{2}gf(n)\sqrt{n} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}gf(n)\sqrt{n} & \chi(n-1)^2 - J + 2k & \sqrt{2}gf(n-1)\sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}gf(n-1)\sqrt{n-1} & \chi(n-2)^2 + \Delta + J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi(n-1)^2 - J - 2k \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Vemos claramente que el estados impar ante intercambio esta aislado, y entonces es auto-estado del problema, y por lo tanto evoluciona solo y no se mezcla con los otros estados. Esto nos sirve porque ahora, para terminar de resolver el problema, tenemos que diagonalizar la matriz de 3x3. Cabe aclarar que esta matriz solo es valida para  $n \geq 2$ , ya que los subespacios con  $N = 0, 1$  no tienen 4 estados. En estos casos la solución del problema de autovalores es mas sencilla aun, así que solo dejaremos los resultados. A partir de ahora se usará como convención  $\hbar = 1$ .

Para resolver el problema de autovalores de la matriz de 3x3 utilizamos la fórmula de Cardano para conseguir las raíces triples que nos aparecen en el polinomio característico, y entonces encontramos que los autovalores son

$$E_j^{(n)} = -\frac{1}{3}\beta_n + 2\sqrt{-Q_n} \cos\left(\frac{\theta_n + 2(j-1)\pi}{3}\right) \quad (4.5)$$

para  $j = 1, 2, 3$ , y donde

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{R_n}{\sqrt{-Q_n^3}}\right) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \frac{3\gamma_n - \beta_n^2}{9} \\
 R_n &= \frac{9\beta_n\gamma_n - 27\eta_n - 2\beta_n^3}{54} \\
 \beta_n &= -(\chi(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2) + J + 2k) \\
 \gamma_n &= (\chi(n-1)^2 - J + 2k)(x(n-2)^2 + \chi n^2 + 2J) \\
 &\quad + (\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(xn^2 - \Delta + J) - 2g^2(n^{2a} + (n-1)^{2a}) \\
 \eta_n &= -(\chi n^2 - \Delta + J)(\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(\chi(n-1)^2 - J + 2k) \\
 &\quad + 2g^2 [\chi(n-2)^2 n^{2a} + \chi n^2 (n-1)^{2a} + \Delta(n^{2a} - (n-1)^{2a}) + J(n^{2a} - (n-1)^{2a})]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde  $a = \frac{1}{2}$  se corresponde con acoplamiento lineal, es decir,  $f(n) = 1$ , y  $a = 1$  a Buck-Sukumar  $f(n) = \sqrt{n}$ . Los autovalores serán reales si  $Q_n^3 + R_n^2 < 0$ . Con esto podemos escribir los autovectores:

$$\begin{aligned}
 |u_j^{(n)}\rangle &= \frac{1}{N_j^{(n)}} \left[ \left( (E_j^{(n)} - H_{22}^{(n)}) (E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) - H_{23}^{(n)2} \right) |\Phi_1^{(n)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + H_{21}^{(n)} (E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) |\Phi_2^{(n)}\rangle + H_{23}^{(n)} H_{12}^{(n)} |\Phi_3^{(n)}\rangle \right]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Obviamente no nos olvidemos del estado  $|\Phi_4^{(n)}\rangle$ , que también es autoestado, con autovalor  $E_4^{(n)} = \chi(n-1)^2 - J - 2k$ . Para el subespacio de  $N = 0$  solo tenemos un vector  $|\Phi_1^{(0)}\rangle = |gg0\rangle$  y su autovalor es  $E_1^{(0)} = -\Delta + J$ . Para  $N = 1$  tenemos 3 vectores en el subespacio, y las autoenergías son

$$E_{1,2}^{(1)} = \frac{\chi - \Delta}{2} + k \pm \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \tag{4.9}$$

$$E_3^{(1)} = -2k - J \tag{4.10}$$

y sus autovectores

$$\begin{aligned}
 |u_{1,2}^{(1)}\rangle &= \frac{1}{N_{1,2}^{(1)}} (-\sqrt{2}g|gg1\rangle + \left( \frac{\chi - \Delta}{2} + J - k \mp \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \right) \frac{|eg0\rangle + |ge0\rangle}{\sqrt{2}}) \\
 |u_3^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg0\rangle - |ge0\rangle)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Con esto, se resuelve analíticamente la evolución temporal de cualquier estado inicial. Para esto solo es necesario desarrollar el estado inicial en términos de los autovectores, y la evolución temporal esta dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \sum_{j,n} c_j^{(n)} e^{-iE_j^{(n)}t} |u_j^{(n)}\rangle \tag{4.12}$$

donde  $c_j^{(n)} = \langle u_j^{(n)} | \psi(0) \rangle$ . La complejidad de estas expresiones hace complicado conseguir conclusiones interesantes, aún así, algo que se puede notar, es la diferencia fundamental

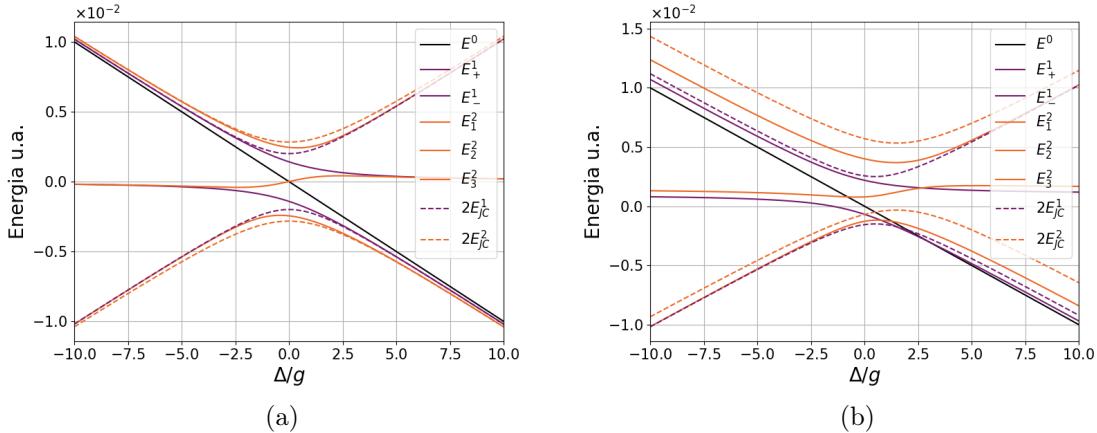


Figura 4.1. Relación entre energía y detuning para los diferentes niveles de energía del problema. Las líneas sólidas muestran la energía de los estados del JC doble con  $N = 0$  (negro, sólido),  $N = 1$  (violeta sólido) y  $N = 2$  (naranja sólido). También se muestran los niveles de energía del JC de un átomo para  $N = 1$  (negro; rayado) y  $N = 2$  (naranja; rayado). Obsérvese que las energías del JC de un átomo están multiplicadas por 2. (a)  $\chi = k - J = 0$ ; (b)  $\chi = k - J = 0.5g$

entre las energías con un número total de excitaciones  $N = 1$  y  $N > 1$ . El factor que está antes de la raíz cuadrada, para el caso en que  $N \geq 2$  hay un  $\frac{1}{3}\beta_n$  que solo depende de  $\chi$ ,  $J$ ,  $k$  y  $n$ . Mientras que en el caso de  $N = 1$ , este factor depende del detuning  $\Delta$ . Esto es interesante, ya que uno podría pensar que la formula para  $N$  excitaciones se puede generalizar para incluir  $N = 0, 1$ , pero la fundamental diferencia de tener más o menos estados que interactúan entre si, da lugar a efectos fundamentalmente diferentes. Si se mira en detalle las cuentas, en el caso de  $N = 1$  este factor  $\Delta$  aparece, ya que en la matriz Hamiltoniana el único estado con  $N = 1$  que tiene un término que incluye al detuning, es el estado  $|gg1\rangle$ . Por lo tanto, este termino con  $\Delta$  sobrevive, al contrario que en todos los demás subespacios, ya que por un lado el termino del  $|ggn\rangle$  que aporta un  $\Delta$ , y el termino de  $|ee,n-2\rangle$  aporta otro  $\Delta$  pero con el signo cambiado, y elimina la contribución del primer estado a la energía. La consecuencia de esto es que para  $N = 1$ , si se aumenta el detuning, no solo se separan los niveles de energía, sino que también hay una asimetría por el termino independiente. Para analizar esto en detalle, en la figura 4.1 se observan las energías de los diferentes niveles en función del detuning.

En la figura 4.1a se observan las energías de los primeros niveles para el modelo de un átomo (líneas rayadas), y de dos átomos (líneas sólidas); para esta figura se tomaron átomos que no interactúan ( $k = J = 0$ ) y una cavidad lineal ( $\chi = 0$ ). Se puede ver que, si bien el modelo de dos átomos tiene estructuras más complicadas, son similares a las de 1 átomo. En primer lugar, los estados con  $N = 2$  (rojo y naranja; sólido) tienen una forma igual a la de JC de 1 átomo, si bien esta un poco desfasada, es interesante ver como las líneas tienen una coincidencia muy grande, recordando que en el gráfico las líneas rayadas están multiplicadas por 2, esto tiene una interpretación bastante buena, y es que la energía de dos átomos no interactuantes en una cavidad es igual (o muy parecida) a dos veces la energía de 1 átomo en una cavidad. **Esto tengo que chequear con cuentas: Creo que esto se**

debe al corrimiento Lamb, ya que ahora tenemos dos átomos que interactúan con el vacío, entonces el corrimiento es 1 unidad mas grande en los extremos, que es justamente lo que se ve en el gráfico, cuando el detuning es muy negativo, la energía tiende a ser igual a la de un JC simple con 2 excitaciones, y cuando el detuning es muy positivo, entonces tiende a la de 1 excitación; esta asimetría para  $\Delta > 0$  y  $\Delta < 0$  se observará en resultados posteriores. Por otro lado, la energía de los estados con  $N = 1$  tienen un término fuera de la raíz, que hace que sea mas asimétrico aún. Normalmente, en el JC de 1 átomo, ya que todos los niveles de energía tienen una forma funcional igual, este término de afuera de la raíz se le puede agregar o quitar como un offset en la energía del estado fundamental, la diferencia con este caso es que, no todos los niveles de energía presentan esto, entonces si se agrega un offset, igualmente habría una diferencia.

Una observación menor es que si la cavidad es lineal, entonces los estados antisimétricos de diferentes excitaciones  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n\rangle - |ge, n\rangle)$  y  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n'\rangle - |ge, n'\rangle)$ , están degenerados en energía. Esto solo tiene importancia al considerar una cavidad con perdidas.

Una vez estudiados los niveles de energía y comparados con el caso de 1 átomo, se prosigue con la dinámica del problema, que en el caso unitario puede resolverse analíticamente, pero aún así, la herramienta principal de análisis son las simulaciones numéricas. Para comenzar se quiere recuperar el caso de un átomo. Para esto se trabaja con  $k = J = 0$  y se agrega un parámetro adimensional  $\alpha$  que solamente actúa sobre el átomo B, y sirve de apantallamiento. Este parámetro  $\alpha$  acompañara a las constantes de acoplamiento  $g \rightarrow g\alpha$ , tal que si  $\alpha \rightarrow 0$  entonces el átomo se desacopla de la cavidad.

## 4.2. Dinámica con apantallamiento

Lo primero que se tiene que hacer es recuperar los resultados anteriores. Para aclarar, en la figura 4.2 se muestra un esquema de como es el problema que se está trabajando, con los nombres que se le darán a las partes del sistema. Llamaremos átomo B al que está apantallado mediante el parámetro adimensional  $\alpha$ , el índice A se referirá al otro átomo, y C a la cavidad. Entonces, para recuperar los resultados anteriores, se propone que  $\alpha = 0$  y la interacción entre los átomos  $k = J = 0$ . De esta manera, se elige en analogía con el caso de 1 átomo, como estado inicial cualquier estado donde el átomo A sea excitado, y la cavidad C no tenga ningún fotón; por lo tanto se elige el estado inicial más sencillo posible que cumple estas condiciones  $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$ . Si bien este apantallamiento no tiene un significado físico, y experimentalmente es imposible lograr estas condiciones, realizar este estudio sirve para entender cualitativamente los efectos de cada parámetro del problema, y también entender que el entrelazamiento entre los dos átomos, lleva a efectos impredecibles. La complejización del problema de 1 átomo al de 2 átomos es muy grande, y por eso es necesario ir de a poco.

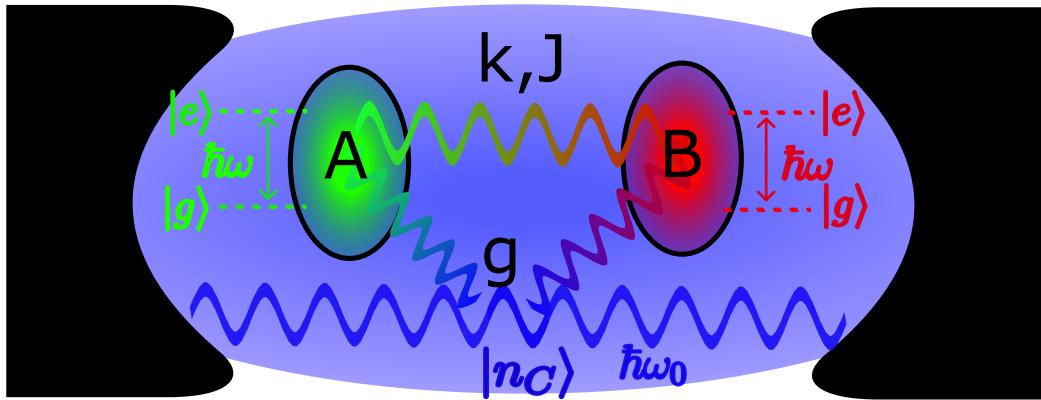


Figura 4.2. Esquema del problema de estudio. Se nombran a las partes para referenciarlas fácilmente: los átomos se identifican por las letras A y B, y la cavidad por la C, esta puede contener una cantidad arbitraria de excitaciones, pero se trabajará principalmente en 0,1 y 2 excitaciones. Ambos átomos son de dos niveles, son idénticos e indistinguibles y su frecuencia natural es  $\omega$ , mientras que la frecuencia natural de la cavidad es  $\omega_0$ . El acoplamiento entre la cavidad y el átomo es  $g$ , y las interacciones átomo-átomo son  $k$  (interacción dipolar) y  $J$  (interacción tipo Ising).

Utilizando esta condición inicial se realiza una simulación numérica y se observan las poblaciones, y se espera recuperar la misma dinámica que en el caso de 1 átomo, ya que el átomo B no interactúa con ninguna de las otras partes del sistema A y C. Para poder representar el estado del sistema sobre una esfera de Bloch, se realiza una traza parcial sobre el átomo B, y así se obtiene la figura ??, donde se muestran 3 trayectorias correspondientes a diferentes valores del detuning, la linea azul es el caso resonante  $\Delta = 0$ , y las trayectorias morada y naranja se corresponde con  $\Delta = 0.5g$  y  $\Delta = 2g$  respectivamente.

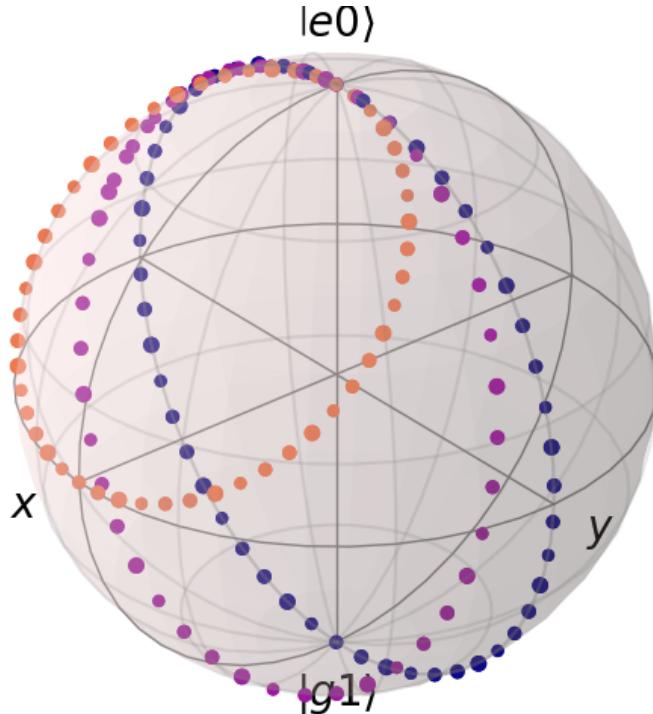


Figura 4.3. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es  $|e_A g_b 0_C\rangle$  para diferentes valores del detuning, apantallando el átomo B. Los valores son  $\Delta = 0$  (azul),  $\Delta = 0.5g$  (morada) y  $\Delta = 2g$  (naranja).

Se observa como la dinámica entre estos dos estados es exactamente igual que la observada en la figura 3.2b, además, como todos los puntos están sobre la superficie de la esfera, los estados son puros y entonces el estado global es separable. Haber trazado sobre el átomo B no tuvo efecto sobre la dinámica entre el átomo A y la cavidad. Para corroborar esto se realiza un análisis poblacional más profundo. Lo siguiente que se puede analizar, que no se tenía la posibilidad cuando se tiene 1 átomo, es considerar una condición inicial entrelazada. Si bien los átomos no interactúan (el átomo B está aislado del universo) se puede pensar que en algún momento los átomos se entrelazaron y luego se apagan las interacciones del átomo B. Por ejemplo, si se considera el estado inicial entrelazado  $|\psi_0\rangle = (|eg0\rangle + |ge0\rangle)/\sqrt{2}$ , se obtiene

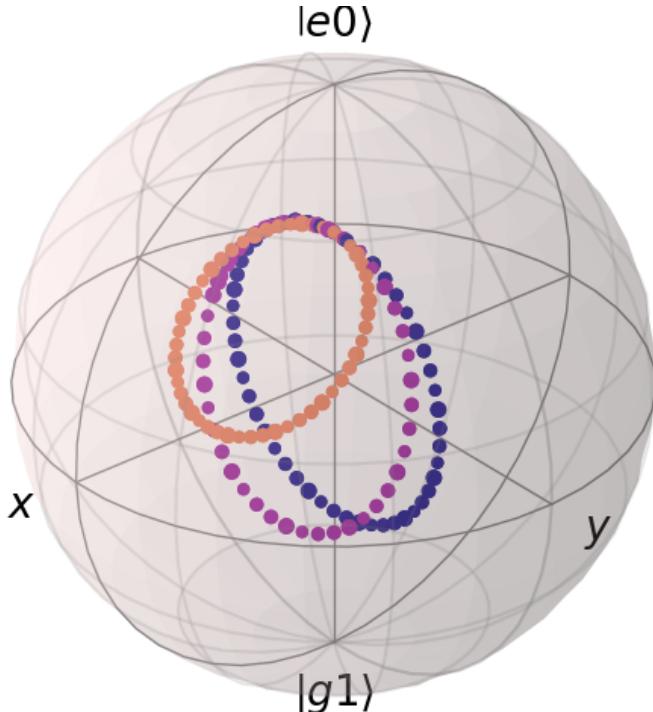


Figura 4.4. Trayectorias sobre la esfera de Bloch cuya condición inicial es  $(|e_A g_B 0_C\rangle + |g_A e_B 0_C\rangle)/\sqrt{2}$  para diferentes valores del detuning, apantallando el átomo B. Los valores son  $\Delta = 0$  (azul),  $\Delta = 0.5g$  (morada) y  $\Delta = 2g$  (naranja).

Ahora, los estados no están sobre la superficie, lo que se interpreta como que estamos en presencia de un estado mixto. Al trazar sobre el átomo B, efectivamente se considera como si este fuese parte de un entorno. Al olvidarse de la dinámica del segundo átomo, se puede interpretar como que este se lleva un 50% de probabilidad de estar excitado, ya que no sabemos si inicialmente el átomo A o el átomo B es el que tiene la excitación. Entonces efectivamente tenemos un 50% de probabilidad de que el estado de la cavidad sea  $|g0\rangle$ , y no evoluciona, y un 50% de probabilidad de que la excitación este dentro de la cavidad, y por lo tanto vemos que la dinámica es la misma que en el caso anterior, pero con amplitudes menores.

Para analizar mas en detalle la dinámica, y para poder realizar comparaciones cuando se complejiza el problema, se puede realizar un estudio poblacional, y también podemos mirar las entropías relativas y otros observables importantes. En primer lugar, el caso separable  $\psi_0 = |eg0\rangle$ , es idéntico al caso de 1 átomo, ya que el átomo B no evoluciona por estar totalmente aislado del sistema. Lo único que se puede resaltar es que- si se traza sobre la cavidad, que es algo que es útil para observar el entrelazamiento entre los átomos- es que el estado es mixto, ya que la evolución temporal del sistema átomo A-átomo B consta del átomo B en el estado fundamental  $|g\rangle$ , y el átomo A oscila entre el estado excitado y fundamental. La amplitud de oscilación y el grado de *mixing* entre los estados depende del detuning, siendo el caso  $\Delta = 0$  el de oscilaciones coherentes entre estados, y al aumentar  $\Delta$  se atenúa este comportamiento. En segundo lugar, cuando el estado inicial de los átomos no es separable por estar entrelazados  $|\psi_0\rangle = (|eg0\rangle + |ge0\rangle)/\sqrt{2}$ , entonces la dinámica es un poco diferente. La figura ?? muestra el caso de  $\Delta = 0$ , donde se observan las evoluciones de las diferentes partes del sistema.

En la figura 4.5a se muestran las poblaciones y las coherencias correspondientes a la

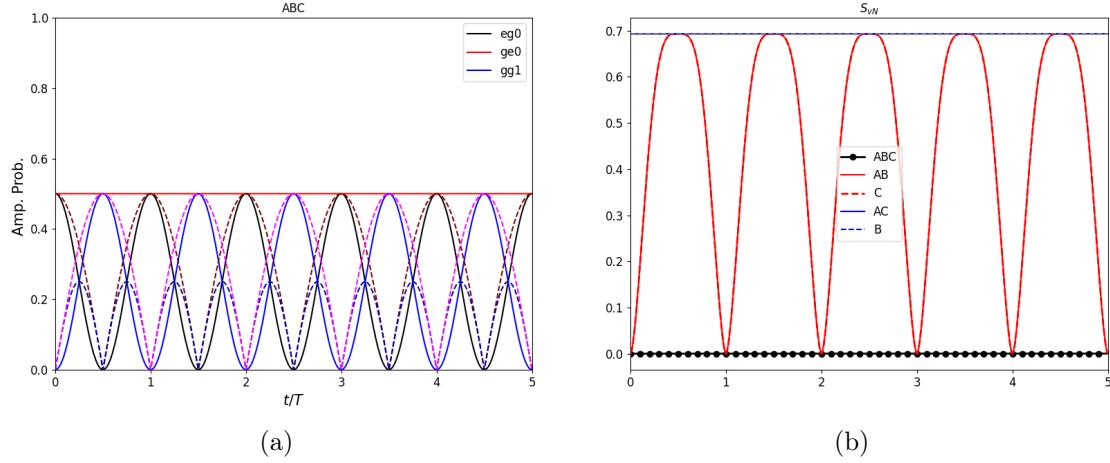


Figura 4.5. labels, ticks y legens chiquitos. unificar colores (a):Dinámica poblacional para el caso resonante  $\Delta = 0$  con el estado inicial entrelazado  $|\psi_0\rangle = (|eg0\rangle + |ge0\rangle)/\sqrt{2}$ . (b):Entropía de von Neuman del sistema total (negro con puntos), y de diferentes subsistemas. En rojo se muestra la entropía del sistema habiendo trazado parcialmente sobre la cavidad, y en azul habiendo trazado parcialmente sobre el átomo B.

condición inicial  $|\psi_0\rangle = (|eg0\rangle + |ge0\rangle)/\sqrt{2}$  en el caso resonante, y en la figura 4.5b se muestra la entropía de Von Neuman, en función del tiempo  $t/T$  con  $T = 2\pi\Omega(n, j)$ . La entropía de von Neuman es una cantidad que está definida según:

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_j \lambda_j \ln \lambda_j \quad (4.13)$$

donde  $\rho$  es la matriz densidad del sistema, y  $\lambda_j$  son los autovalores de la matriz densidad. La entropía de Von Neuman sirve para determinar si un estado es puro o mixto, ya que  $S(\rho) = 0$  representa un estado puro, y  $S(\rho) = \ln(N)$  representa un estado máximamente mixto, donde  $N$  es la dimensión del espacio de Hilbert. Vemos como el estado  $|ge0\rangle$  no evoluciona, ya que en este caso, el átomo B contiene la única excitación y esta aislado. Pero la otra parte, si que evoluciona. Vemos la presencia de las mismas oscilaciones coherentes entre los estados  $|eg0\rangle$  y  $|gg1\rangle$ . La diferencia principal es que en esta caso, el estado de los subsistemas es mixto. Esto se observa claramente en el gráfico de la entropía, pero también se puede deducir este comportamiento desde la figura 4.5a, ya que a  $t/T = 0.5$ , tenemos el estado  $|\psi(T/2)\rangle = |g\rangle_A \otimes (|e_B 0_C\rangle + |g_B 1_C\rangle)/\sqrt{2}$ , que es separable solo en el átomo A, y los otros dos están totalmente entrelazados, y por lo tanto al tomar traza parcial tal que el átomo B y la cavidad estén separadas, este estado es máximamente mixto. Vemos como el entrelazamiento entre la cavidad y el átomo B, que están totalmente aislados, evoluciona indirectamente por medio del átomo A, y paradójicamente este queda desentrelazado del sistema para tiempos  $t = (k-1/2)T$ ;  $k \in \mathbb{N}$ . En este punto notamos algo muy importante, y es que la entropía de von Neuman solo sirve para estados puros. Cuando  $t = 0$ , la entropía del subsistema AB es 0, porque es un estado puro, y esta máximamente entrelazado. Pero al evolucionar, el subsistema AB se hace mixto, y como se observa en la linea azul, la entropía del átomo B es siempre  $\log 2$ , que según la interpretación de la entropía de von Neuman es que esta siempre máximamente entrelazado. Este no es al caso, y la descripción

falla porque el estado AB no es puro.

Entonces, ya que el entrelazamiento es un recurso muy importante y estudiado para la información cuántica, es necesario introducir una medida de entrelazamiento, para poder estudiarlo en este tipo de situaciones. Si bien la entropía de Von Neuman es útil en el caso de estados puros, cuando se tienen estados mixtos como se vio recién, o en el caso de tener un sistema abierto, esta medida ya no sirve. Una de las medidas mas utilizadas y con mayor aplicación es el *Entanglement of Formation* ( $E_F$ ) [?], que coincide con la entropía de von Neuman para estados puros, y sirve para estados mixtos. La  $E_F$  esta definido como

$$E_F(\rho) = \inf \left( \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) : \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \quad (4.14)$$

Esta medida representa el entrelazamiento promedio mínimo entre todas las posibles descomposiciones puras de  $\rho$ , donde  $E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = S(\text{tr}_B |\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$  es la entropía de von Neuman, que es la medida que se utiliza para estados puros. Esta definición es general, pero en el caso presente, una simplificación de esta medida que se obtiene si se estudia el entrelazamiento entre dos qu-bits, como lo son los átomos A y B. Esta medida es la concurrencia, y esta definida como

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (4.15)$$

donde los  $\lambda_i$  son las raíces de los autovalores, en orden decreciente, de la matriz  $\rho\sigma_y \otimes \sigma_y\rho^*\sigma_y \otimes \sigma_y$ , donde  $\rho^*$  es el conjugado (sin transponer) de  $\rho$ . La concurrencia y la entropía de formación  $E_F$  están relacionadas, y la concurrencia obtiene su interpretación a través de esta. Un estado máximamente entrelazado tiene  $C(\rho) = 1$  y un estado separable  $C(\rho) = 0$ .

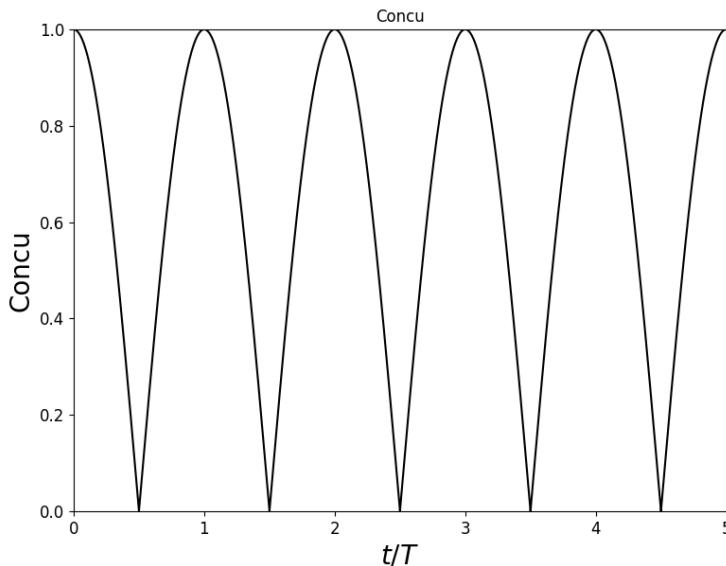


Figura 4.6. Concurrencia en el caso resonante para estado inicial  $|eg0\rangle + |ge0\rangle$

En la figura 4.6 se observa la concurrencia entre los átomos AB, para el caso estudiado anteriormente. Como era de esperar, a  $t = 0$  el estado es máximamente entrelazado, y luego el entrelazamiento se pierde a  $t = T/2$ , donde el átomo B esta entrelazada con la cavidad.

### 4.2.1. Interacción átomo-átomo

El siguiente paso es analizar el rol de las interacciones entre los átomos, aún manteniendo el apantallamiento  $\alpha = 0$ . Para esto, se sigue utilizando las mismas condiciones iniciales y el átomo B seguirá sin interactuar con la cavidad, pero se considera ahora que la interacción entre átomos dadas por los parámetros  $k$  y  $J$  ahora serán distintos de cero. Para comenzar, en la figura 4.7 se observa la evolución temporal para el estado inicial  $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$ , con  $\Delta = 0$ ,  $J = 0$  pero  $k = 0.1g$ . Recordar que  $k$  es la intensidad de la interacción  $\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + \text{c.c.}$  (ver Ec. 4.1).

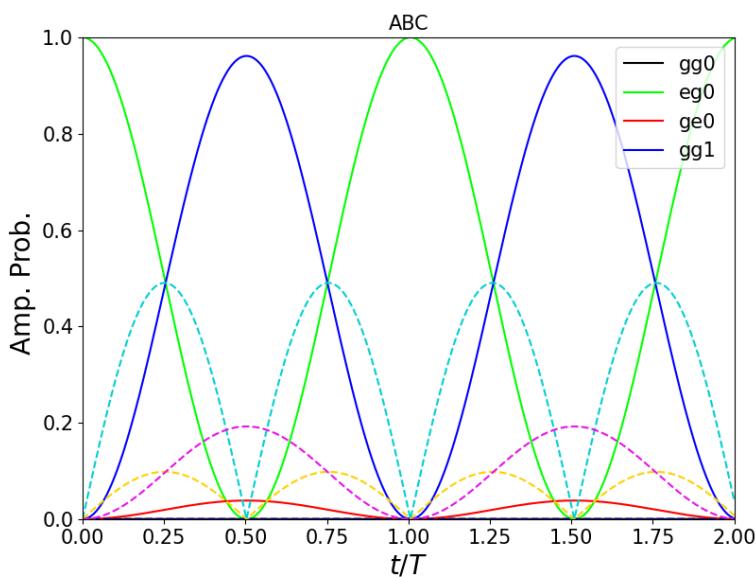


Figura 4.7. Dinámica poblacional para la condición inicial  $|\psi_0\rangle = |eg0\rangle$ , para los parámetros  $\Delta = 0$ ,  $J = 0$  y  $k = 0.1g$ . Las líneas sólidas se corresponden con las poblaciones de la matriz densidad total del sistema; en azul la probabilidad de encontrar al estado en el estado  $|gg1\rangle$ , en verde en  $|eg0\rangle$ , en rojo  $|ge0\rangle$ , y en negro  $|gg0\rangle$ . Las líneas rayadas son las coherencias entre estas poblaciones, la violeta entre  $|gg1\rangle$  y  $|ge0\rangle$ , la celeste entre  $|eg0\rangle$  y  $|gg1\rangle$  y la amarilla entre  $|eg0\rangle$  y  $|gg1\rangle$ .

Lo que sucede es que la excitación está inicialmente en el átomo A, y como siempre, se observan oscilaciones entre los estados  $|eg0\rangle$  y  $|gg1\rangle$ , la diferencia es que al haber interacciones entre los átomos, ahora la excitación inicial que está en el átomo A, sufre dos procesos diferentes, primero la oscilación, y además, la interacción con el átomo B. Al tener la excitación en el átomo A, una parte de esta se va hacia la cavidad, y la otra hacia el átomo B, excitándolo parcialmente. La amplitud de la oscilación depende de la intensidad de la interacción  $k$ . Mediante la curva roja, se contempla que su pendiente crece mientras que la probabilidad de  $|eg0\rangle$  es mayor a la de  $|gg1\rangle$ . Cuando las probabilidades cambian, la amplitud crece, pero de manera desacelerada, hasta que la probabilidad del estado  $|eg0\rangle$  es nula. En ese momento, ya no hay excitación que pasar del átomo A al B, y el proceso se revierte. Antes de analizar el entrelazamiento entre los átomos, se observa en la figura 4.8 la dinámica para los mismos parámetros, pero para la condición inicial entrelazada  $|\psi_0\rangle = (|eg0\rangle + |ge0\rangle)/\sqrt{2}$ : La dinámica en este caso presenta oscilaciones en la población de  $|ge0\rangle$  con un periodo dos veces más grande. Esto se debe a una *pelea* entre los estados  $|eg0\rangle$  y  $|ge0\rangle$ , ya que tienen las excitaciones en diferentes átomos. Inicialmente, como los estados están entrelazados, no está bien definido en cual de los dos átomos está la excita-

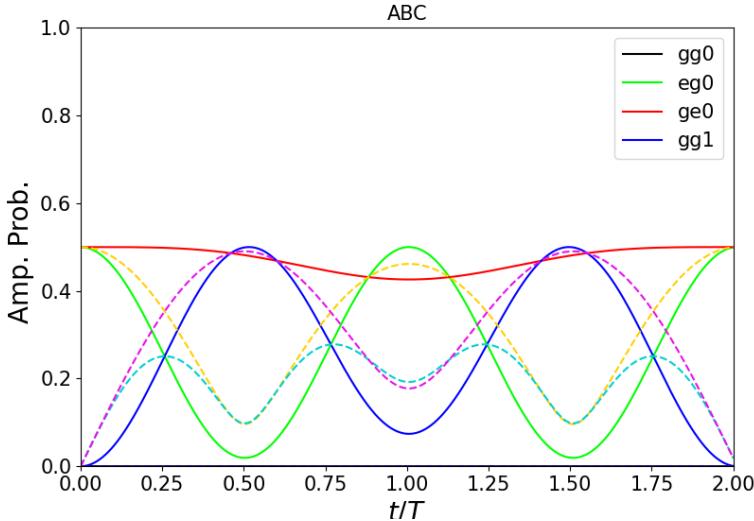


Figura 4.8. Dinámica poblacional para la condición inicial  $|\psi_0\rangle = |eg_0 + ge_0\rangle$ , para los parámetros  $\Delta = 0$ ,  $J = 0$  y  $k = 0.1g$ . Las coherencias y poblaciones tienen los mismos colores que la Figura anterior 4.7

ción, entonces la interacción  $k$  se anula y la curva tiene pendiente 0. Entonces la dinámica inicial es igual que para  $k = 0$  y comienza a oscilar. Al decrecer la curva verde, la probabilidad de encontrar la excitación en el átomo B es mayor que la del átomo A, entonces el átomo B comienza a perder esta excitación y se la da lentamente al átomo A, y por lo tanto la oscilación del estado  $|eg_0\rangle$  no llega a tener amplitud nula en  $t/T = 0.5$ . Luego, la evolución sigue su curso oscilante, y al llegar a  $t = T$ , la probabilidad de encontrar la excitación en el átomo A es mayor que en el átomo B, y por lo tanto comienza a revertirse la situación, hasta completar el ciclo para  $t = 2T$ .

El entrelazamiento entre los átomos se analiza utilizando la concurrencia, como se muestra en la figura 4.9, donde 4.9a muestra la condición inicial separable  $|eg_0\rangle$ , y 4.9b el entrelazamiento para la condición inicial entrelazada  $|eg_0 + ge_0\rangle$ .

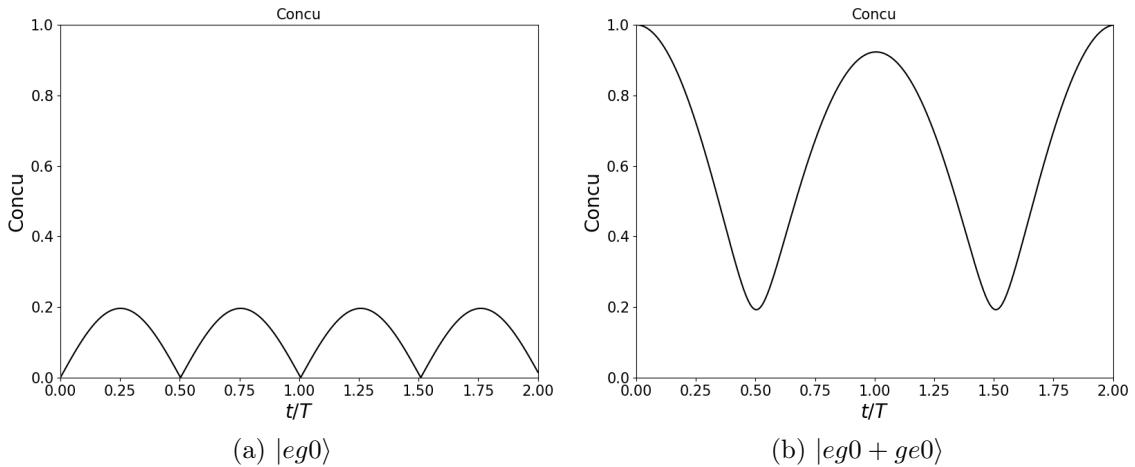
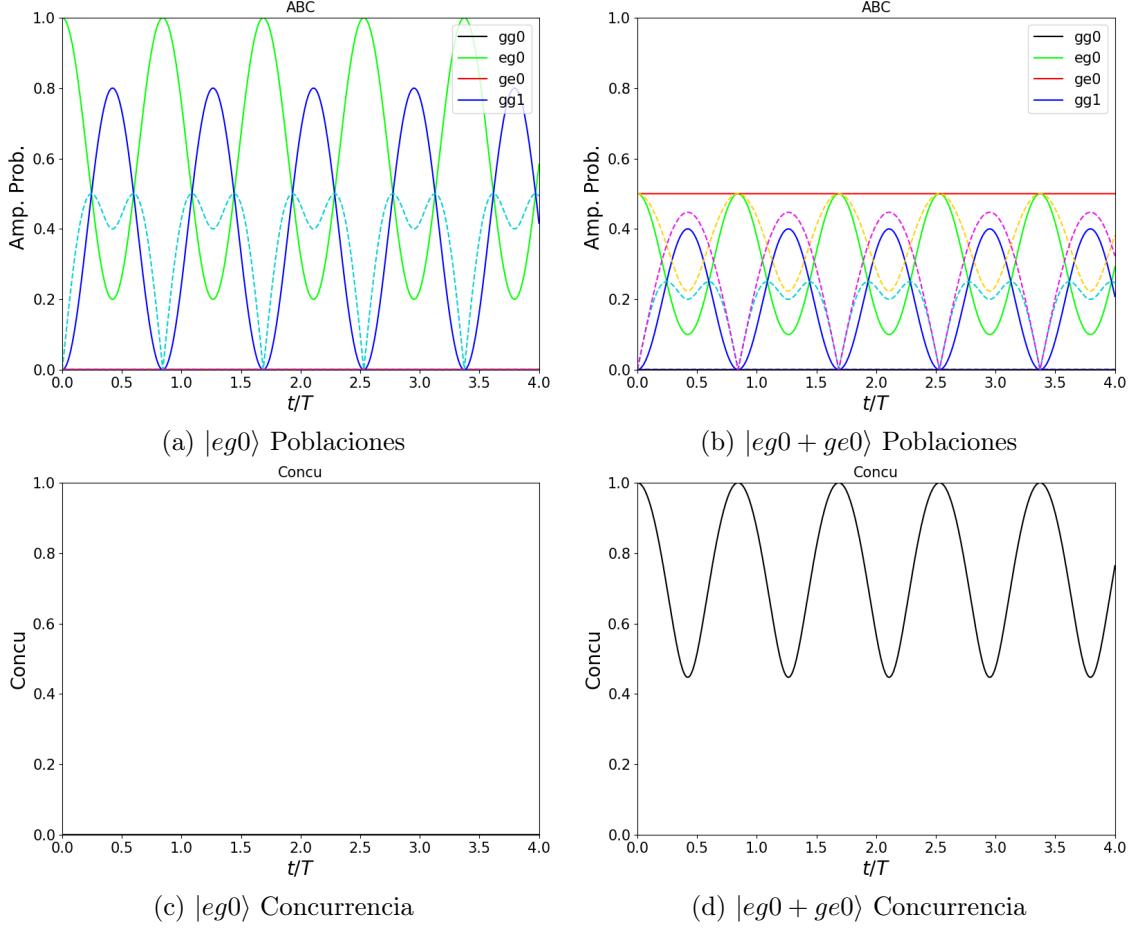


Figura 4.9. Dinámica de entrelazamiento para  $\Delta = 0$ ,  $J = 0$  y  $k = 0.1g$

Ahora se analiza la interacción tipo Ising, para eso se utilizan parámetros  $k = 0$  y  $J \neq 0$ . En la figura 4.10 se observa que, si bien la dinámica es similar, los átomos no se entrelazan.


 Figura 4.10.  $\Delta = 0$ ,  $J = 0.5g$  y  $k = 0$ 

La diferencia principal entre la interacción tipo Isign ( $J\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$ ) y la dipolar ( $k\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + \text{c.c.}$ ), es que el segundo parece entrelazar los átomos, ya que en el primer caso, el efecto es separar los niveles de energía, pero en el segundo no solo eso, sino que también pasa excitaciones de un átomo al otro. Si bien esto sirve para entender intuitivamente el efecto, el problema de este análisis es que se asumen cosas no físicas mediante el apantallamiento y la asimetría que se impone entre los dos átomos. Esto, lleva a estos análisis que en realidad no son correctos, ya que en el Hamiltoniano del sistema sin apantallamiento (Ec. 4.1), donde se utiliza la base con estados simétricos y antisimétricos (Ec. 4.3), el efecto de ambos parámetros debería ser el mismo, ya que solo aparecen en la diagonal principal. Si bien la interacción  $J$  actúa sobre todos los estados, y el  $k$  solamente solo sobre los  $|egn \pm gen\rangle$ , su principal función es separar las energías de los estados de la base. Entonces será necesario retomar este análisis sin apantallamiento y con la base adecuada de la Ec. 4.3.

### 4.2.2. Medio Kerr

Ahora se enfoca el estudio del efecto del medio Kerr. Para esto, se apagan las interacciones interatómicas  $k = J = 0$ , y se modifica la no linealidad medio a través del parámetro  $\chi$ .

Al igual que en el caso de 1 átomo, se puede observar en las Ec. 4.5 y Ec. 4.7 que

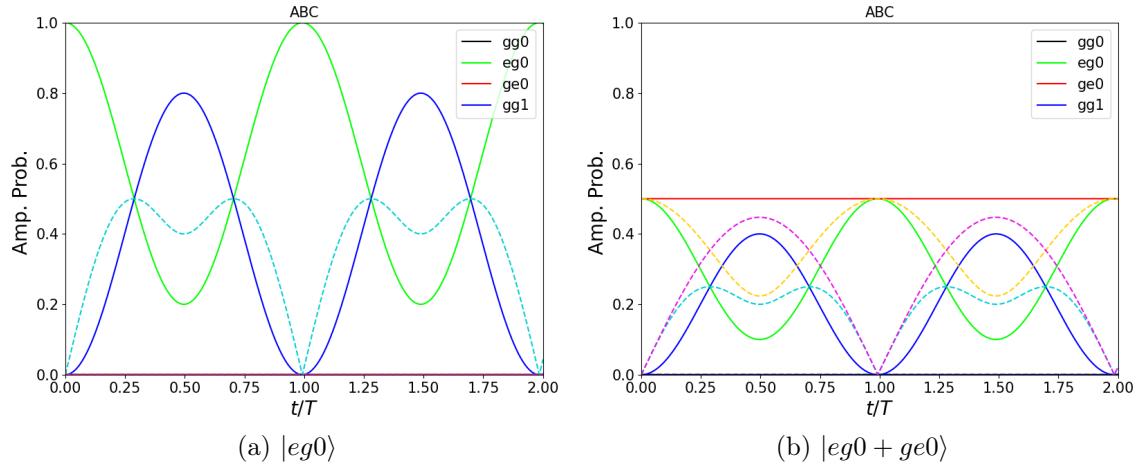


Figura 4.11. Dinámica de poblaciones para  $x = g$

la frecuencia depende del medio. En la figura 4.11 el tiempo esta normalizado con la frecuencia, entonces no se nota el cambio. Pero lo que es necesario analizar, es como las oscilaciones no son totalmente coherentes, en el sentido de que la amplitud de probabilidad no es 1, como en el caso de  $\chi = 0$ . Esto se debe a que el aumento de  $\chi$  hace que las energías de ambos estados se separen, y por lo tanto hace que las transiciones entre los estados sea menos probable. Este comportamiento también se observa si el estado inicial se toma como  $|gg1\rangle$ . Es lógico estudiar el entrelazamiento en este caso. En la figura 4.12 se muestran las concurrencias para ambas condiciones iniciales. Es interesante comparar la figura 4.12b con la figura en el caso de  $\chi = 0$  para esta misma condición inicial representada en la figura 4.6. En principio se puede pensar que el medio no lineal rompe con el entrelazamiento del sistema, pero como se ve al comparar estas figuras, la interpretación correcta es que el medio no hace mas que ralentizar el comportamiento preexistente de la cavidad, ya que en este caso, no destruye el entrelazamiento, sino que lo conserva por virtud de haber ralentizado las amplitudes de oscilación entre los dos estados dinámicos. También se puede

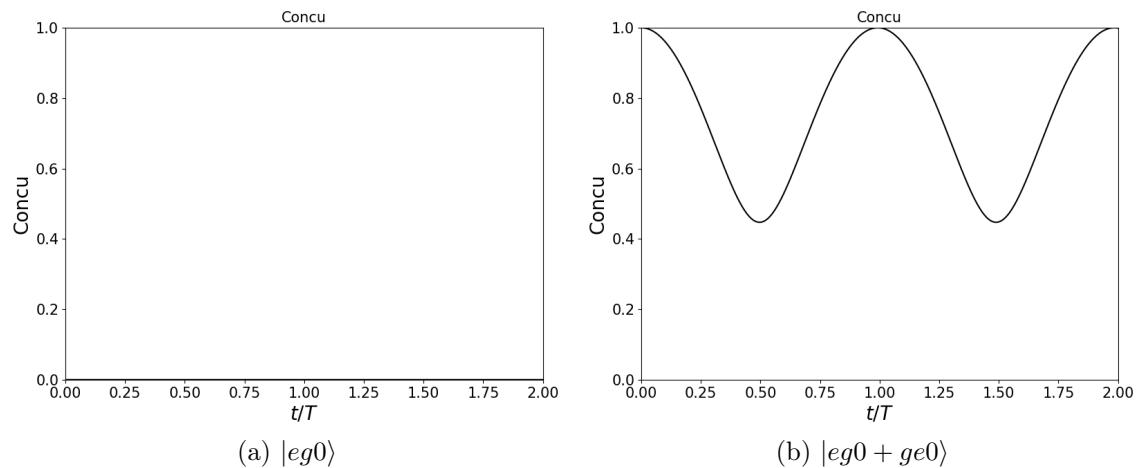


Figura 4.12. Dinámica de entrelazamiento para  $x = g$

recuperar el comportamiento visto en el modelo de 1 átomo, que el medio Kerr no es más que un desplazamiento lateral en las frecuencias, además de modificar las amplitudes. Para

esto se realiza otra evolución para  $\chi = \Delta = \frac{g}{2}$ , y se compara con el caso en que  $\chi = \Delta = 0$ . Se observa como se anula el efecto del medio, y la dinámica es la misma pero con un

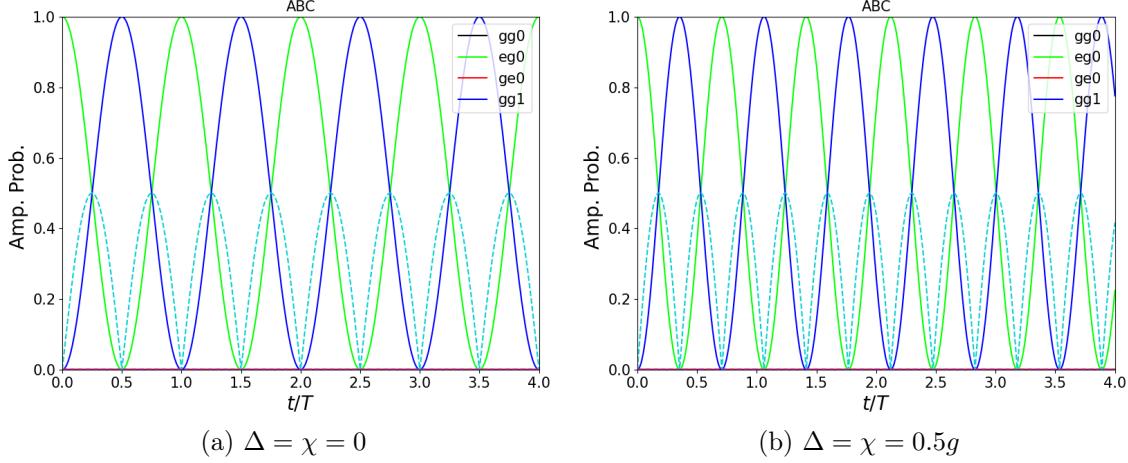


Figura 4.13. Dinámica de entrelazamiento para  $x = g$

cambio en la frecuencia. Al igual que antes, aumenta la frecuencia.

### 4.2.3. Batidos

Al complejizar el problema, la dinámica comienza a presentar batidos entre las amplitudes de probabilidad de las poblaciones y en las coherencias, comportamiento que se atribuye a la modulación de dos procesos simultáneos. Por ejemplo, en la evolución temporal con  $\chi \neq 0$  y  $k \neq 0$ , entonces el primero disminuye la amplitud de oscilación de los estados con mayor cantidad de fotones en la cavidad, que dentro del subespacio  $N$  la jerarquía del medio sera favorecer a los estados  $|eg, N - 1\rangle$  y  $|ge, N - 1\rangle$  por sobre el  $|ggN\rangle$ . Por el contrario, se observó que en esta situación, el término de interacción entre los átomos disminuye la amplitud del estado  $|ggN\rangle$  como se vio en la sección anterior. Por lo tanto, si dos procesos están en juego y sus efectos son similares, entonces es esperable que se observen oscilaciones moduladas. No vale la pena mostrar la dinámica de las poblaciones, porque no se pueden sacar conclusiones muy importantes, pero si podemos observar la trayectoria en la esfera de Bloch, para dar una idea de la complejidad de la evolución. [tengo unos gráficos de esferas de bloch en este caso y algunas estan lindas, pero no se si vale la pena ponerlas, solo son lindas. Pero por las dudas lo pongo para que quede y de ultima lo saco](#) En la Figura 4.14 se representa la trayectoria en el espacio de estados cuyo estado inicial es  $|eg0\rangle$ , habiendo trazado parcialmente sobre el átomo B que esta apantallado. Es evidente por la curva descrita en la bola de Bloch, que la dinámica es complicada y los análisis poblacionales carecen de sentido, ya que se pierde la periodicidad y se complejizan las interpretaciones. En este gráfico, el color representa el tiempo comenzando por el color negro, y aclarándose hasta llegar a  $t = 7T$  representado por el color amarillo.

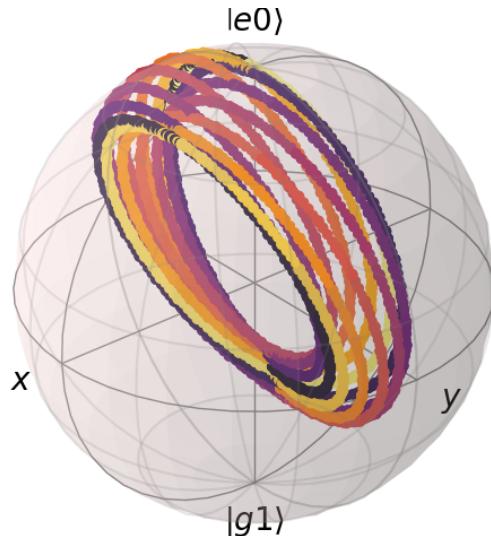


Figura 4.14. Trayectoria sobre la esfera de Bloch para el estado inicial  $|eg0\rangle$ , trazando parcialmente sobre el átomo B, y los parámetros utilizados son  $\Delta = 0, \chi = 0.5g, k = 0.5g$  y  $J = 0$ .

### 4.3. Dinámica sin apantallamiento

Al sacar el apantallamiento, es necesario utilizar la base de la Ec. 4.3, ya que los átomos son indistinguibles y esta base es más apropiada. Además, el Hamiltoniano desacopla los estados antisimétricos, facilitando la solución. Por lo tanto, se procede a estudiar la dinámica sacando el apantallamiento. Resulta de interés estudiar el entrelazamiento entre los átomos, y su dependencia con los parámetros.

#### 4.3.1. Dinámica con disipación

Lo primero que hay que considerar es la dependencia de la dinámica con el régimen de acoplamiento, se espera un comportamiento igual al del caso de un átomo (sección 3.3.1). Recordar que el régimen de acoplamiento fuerte (SC) es el caso en donde la interacción entre cavidad y átomos es mayor a la interacción entre sistema y entorno. En la figura 4.15 se muestran las coherencias y las poblaciones, como se esperaba, estas tienen el mismo comportamiento que en el caso de 1 átomo. Notablemente, se puede ver el efecto de la interacción entre los átomos, como se separan las energías inicialmente las oscilaciones no logran la inversión total de población, solo una inversión parcial, y a tiempos largos la disipación hace que se tenga una mayor probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|eg0 + ge0\rangle$  ya que tiene menor energía. Eventualmente alcanza su estado estacionario. Lo que se recupera, ahora que ya no hay apantallamiento, es que ambos tipos de interacción ( $J$  y  $k$ ) generan entrelazamiento, consecuentemente la concurrencia para ambas interacciones es oscilante.

Nuevamente, nos concentraremos en el régimen SC. Si bien hasta ahora se estudió principalmente estados con 1 excitación, interesantes por sus implicancias y similitudes al modelo de 1 átomo, considerar estados con mayor cantidad de excitaciones hace a la

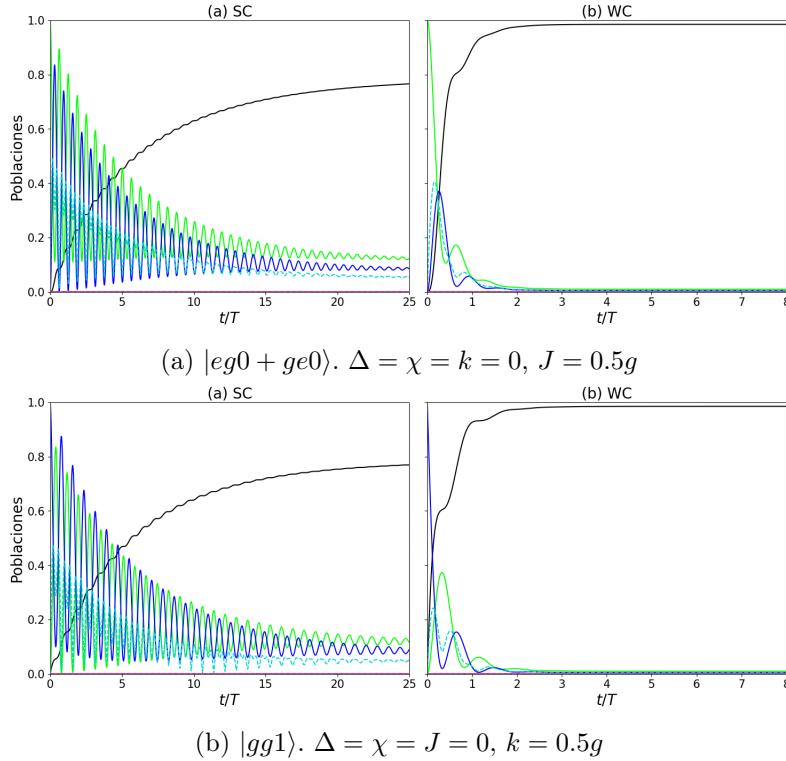


Figura 4.15. Dependencia de las poblaciones con el régimen de acoplamiento, para  $\Delta = J = \chi = 0$  y  $k = 0.5g$ , y para dos condiciones iniciales diferentes.

riqueza del problema. Si solo consideramos  $N = 1$ , el subespacio del problema tiene 3 estados, de los cuales uno es el estado antisimétrico  $|eg0 - ge0\rangle$  que está desconectado de los otros estados, y por lo tanto efectivamente se tiene un modelo de Jaynes-Cummings de 1 atomo con 2 estados dinámicamente relevantes. Si se permiten  $N = 2$  excitaciones, ahora hay 4 estados en el subespacio, de los cuales 3 son relevantes. Primero veremos cuáles son los efectos de las interacciones y la dinámica para estados iniciales en el subespacio de  $N = 2$ . Para mantener el paralelismo, comenzaremos con el estado  $|eg1 + ge1\rangle$ , pero como se verá, las condiciones iniciales cambian totalmente la dinámica de entrelazamiento del sistema. La enorme cantidad de posibilidades para elegir condiciones iniciales, hace que estudiar todos sea imposible, así que se concentrarán los esfuerzos en algunos de ellos. Al tener 3 estados dinámicamente relevantes, se tienen 3 autoestados con sus respectivas autoenergías, y por lo tanto 3 frecuencias que compiten entre sí, y son las 3 frecuencias de Rabi del sistema:

$$\begin{aligned}\Omega_{12}^{(n)} &= E_2^{(n)} - E_1^{(n)} \\ \Omega_{23}^{(n)} &= E_3^{(n)} - E_2^{(n)} \\ \Omega_{31}^{(n)} &= E_1^{(n)} - E_3^{(n)}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Estas frecuencias se muestran en función del detuning  $\Delta$  y para diferentes valores de  $\chi$  y de  $k - J$  en la figura 4.16.

Al cambiar las no linealidades del medio  $\chi$  (Figura 4.16a y b), la frecuencia  $\Omega_{12}^{(2)}$  se comporta de manera similar a la frecuencia de Rabi del JC de 1 átomo, que es también igual a la  $\Omega^{(1)}$ ; en ambos casos la diferencia de energía tiene un máximo que se desplaza

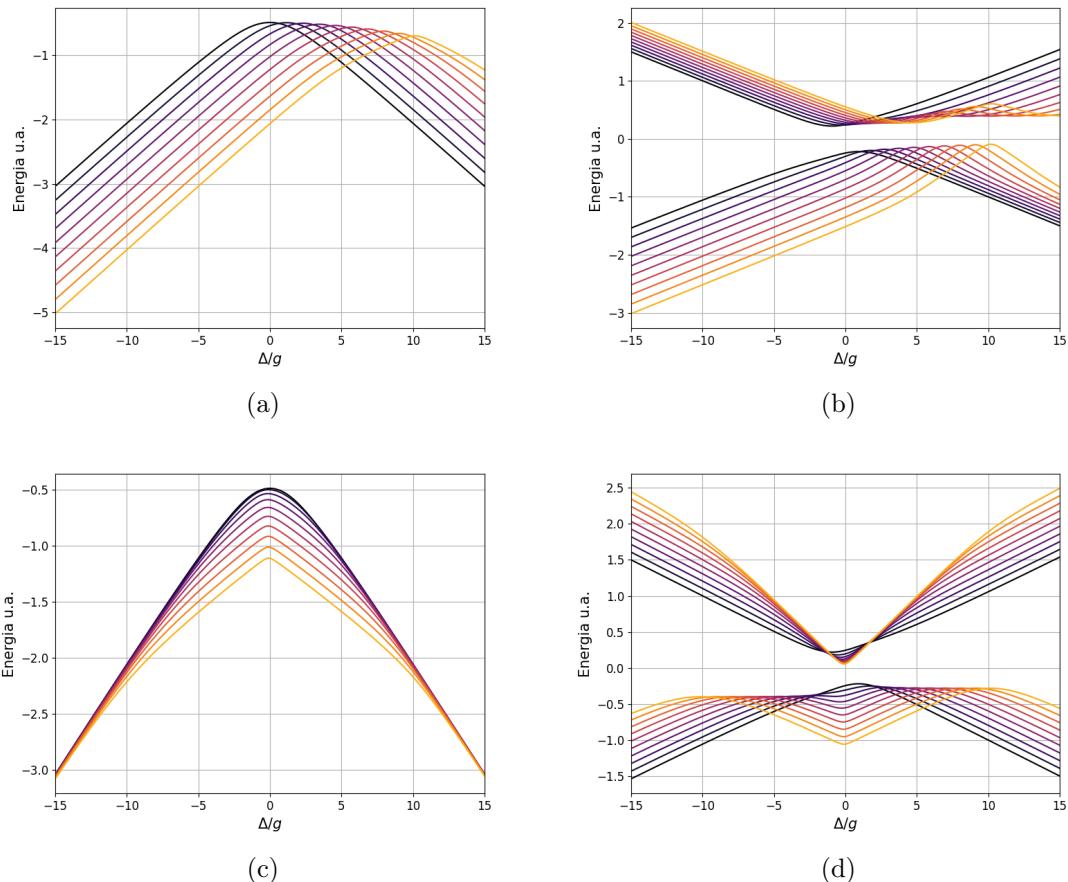


Figura 4.16. Frecuencias de Rabi en función del detuning  $\Delta$  para diferentes valores de  $\chi$ , y  $|k - J|$ , donde las frecuencias de Rabi son  $\Omega_{ij}^{(2)} = E_j^{(2)} - E_i^{(2)}$ . (a)  $\Omega_{12}$  con  $\chi \in [0, 5g]$ ; (b)  $\Omega_{23}$  y  $\Omega_{31}$  con  $\chi \in [0, 5g]$  ;(c)  $\Omega_{12}$  con  $k - J \in [0, 5g]$  ; (d)  $\Omega_{23}$  y  $\Omega_{31}$  con  $k - J \in [0, 5g]$

lateralmente al aumentar el parámetro  $\chi \in [0, 5g]$ , pero presenta una sutil diferencia, ya que también el máximo aumenta en valor absoluto. En la figura 4.16c y d se explora el efecto de modificar  $k - J \in [0, 5g]$ , donde el máximo ya no se desplaza lateralmente, sino que aumenta en valor absoluto. Por otro lado, en los paneles derechos, se puede analizar que sucede con las frecuencias  $\Omega_{23}^{(2)}$  y  $\Omega_{31}^{(2)}$  al aumentar  $\chi$  (Fig. 4.16b) y  $k - J$  (Fig. 4.16d). Es interesante notar como al aumentar  $\chi$ , se comienza a observar un máximo y mínimo local para la frecuencia  $\Omega_{23}^{(2)}$  (rama superior). Similarmente, pero en la rama inferior, se observa este mismo comportamiento al aumentar  $k - J$ .

La dinámica para el caso de  $N \geq 2$  es muy complicada, ya que ahora se tienen 3 frecuencias diferentes, y predecir que sucede para cada combinación de parámetros y para cada condición inicial se hace muy complicado, por lo tanto, el análisis para estos casos no puede ser muy profundo. Lo que se puede distinguir es que cuando  $\chi, k - J > g$ , se comienzan a observar estos mínimos y máximos locales en las frecuencias, y se puede estudiar cual es el efecto que tiene esto en el entrelazamiento de los átomos, y también si hay alguna relación entre los parámetros, por ejemplo como se encontró para el caso de 1 átomo (y para el subespacio de  $N=1$ ) que hay una clara relación entre el detuning  $\Delta$  y el medio  $\chi$ . En particular, es de interés encontrar una condición de robustez, similar a la Ec. 3.28.

## 4.4. Dinámica de entrelazamiento

Para estudiar la dinámica de entrelazamiento entre los dos átomos  $\rho_{AB} = \text{tr}_C\{\rho\}$ , se utilizará la concurrencia medida de entrelazamiento definida por la Ec. 4.15 ( $0 \leq C_{AB} \leq 1$ ).

Lo primero que se analiza son los efectos de las interacciones entre los átomos, se diferencian dos regímenes, el de Strong Interacting (SI) y Weak Interacting (WI), refiriéndose a la interacción entre los átomos con respecto a la cavidad. El SI será cuando la interacción entre los átomos es fuerte en comparación con la cavidad, es decir  $k - J > g$ , y WI con  $k, J < g$ . Ya que no se encontró un límite muy claro, se utilizará un valor representativo de cada régimen,  $k - J = 0.5g$  y  $k - J = 2.5g$  respectivamente, además de utilizar un parámetro del entorno  $\gamma = 0.25g$ . Para ilustrar las diferencias entre condiciones iniciales, y para seguir con el paralelismo con el caso de 1 átomo, se considerarán únicamente las siguientes condiciones iniciales:

- $|eg0 + ge0\rangle$  para seguir el paralelismo con el JCM de 1 átomo
- $|eg1 + ge1\rangle$  para comparar con el anterior y explorar el subespacio  $N = 2$

Para comparar el efecto de los parámetros entre sí, todos los gráficos que se muestran en el resto del capítulo estarán caracterizados por un acoplamiento con el entorno de  $\gamma = 0.25g$ , y todos los tiempos estarán normalizados según un periodo  $T_0 = 2\pi/\Omega_0$  ( $\Omega_0 = \Omega^{(1)}(\Delta = 0, \chi = 0, k - J = 0)$ ).

#### 4.4.1. Dependencia con el detunning

**Condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$**

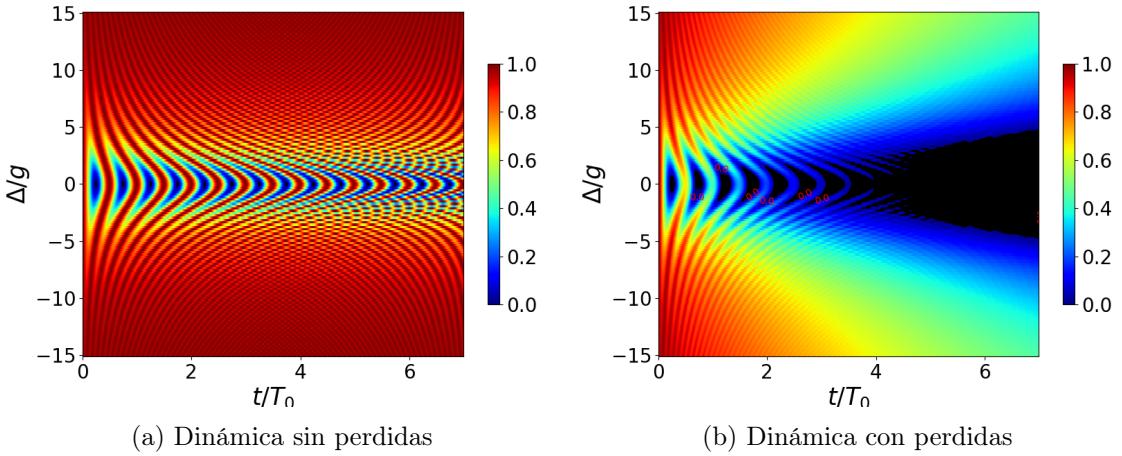


Figura 4.17. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ , en función del detunning, y para  $\chi = k - J = 0$ .

En la figura 4.17 se observa la evolución de la concurrencia para la condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ , cuyo entrelazamiento entre los átomos es máximo. El eje x es el tiempo, y el eje y es el detunning  $\Delta/g$ . En el panel 4.17a el caso sin pérdidas; lo primero que se aprecia es que la figura es simétrica sobre  $\Delta = 0$  (caso resonante), y las oscilaciones son de menor frecuencia pero de mayor amplitud. A medida que se aumenta el valor absoluto del detunning, entonces las oscilaciones son de mayor frecuencia y menor amplitud. Consecuentemente, al tomar la dinámica disipativa, en el panel b, las oscilaciones siguen estando, pero ahora su máximo disminuye con el tiempo. Esto es de esperarse, ya que la cavidad deja escapar fotones y el estado del sistema se hace mixto. Un estado mixto ya no es entrelazado, porque no hay coherencias, entonces se observa el deterioro del entrelazamiento a medida que el tiempo avanza. Hay otros dos comportamientos notables. Por un lado, se observa como el máximo del entrelazamiento decae mas lentamente para valores mas altos del detunning, esto se debe a la naturaleza da la dinámica poblacional; al aumentar el detunning, como se vio anteriormente, uno de los efectos principales es que las oscilaciones entre los estados tienen poca amplitud, y en este caso, esto implica que si bien el estado  $|gg1\rangle$  tienen amplitudes no nula, principalmente la probabilidad esta concentrada en el estado inicial, que no sufre decoherencia por perdida de fotones, ya que no tiene fotones en la cavidad. Entonces, mientras mayor el detunning, menor la probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|gg1\rangle$ , y por lo tanto tiene pocas probabilidades de perder fotones. Por otro lado, un efecto frecuente en este tipo de sistemas, es la muerte y reanimación súbita del entrelazamiento, que se nombran SDE (Sudden Death Effect) y SBE (Sudden Birth Effect) por sus siglas en inglés. En el caso disipativo, se marcaron zonas en negro, estas muestran como el entrelazamiento *muere* durante un tiempo finito y *revive* luego. Este efecto es sorprendente, ya que se espera que las coherencias, responsables en gran medida del entrelazamiento entre átomos, decaigan asintóticamente. Este efecto muestra que esto

no es así para algunos sistemas, y aún cuando las coherencias son distintas de cero, el entrelazamiento puede ser nulo durante un tiempo, y luego reaparecer súbitamente.[duda: La razón por la que aparece este fenómeno es que se está tomando traza parcial sobre la cavidad, lo que hace que algunas coherencias desaparezcan. Aun así, no se entiende bien el porque de este efecto.](#)

La pregunta natural que sigue es si cambiar los parámetros  $\chi$  y  $k - J$ , cambian la forma de la figura 4.17. En la figura 4.18 se muestra nuevamente la dinámica de entrelazamiento en función del detunning, donde se modificó alguno de los parámetros:

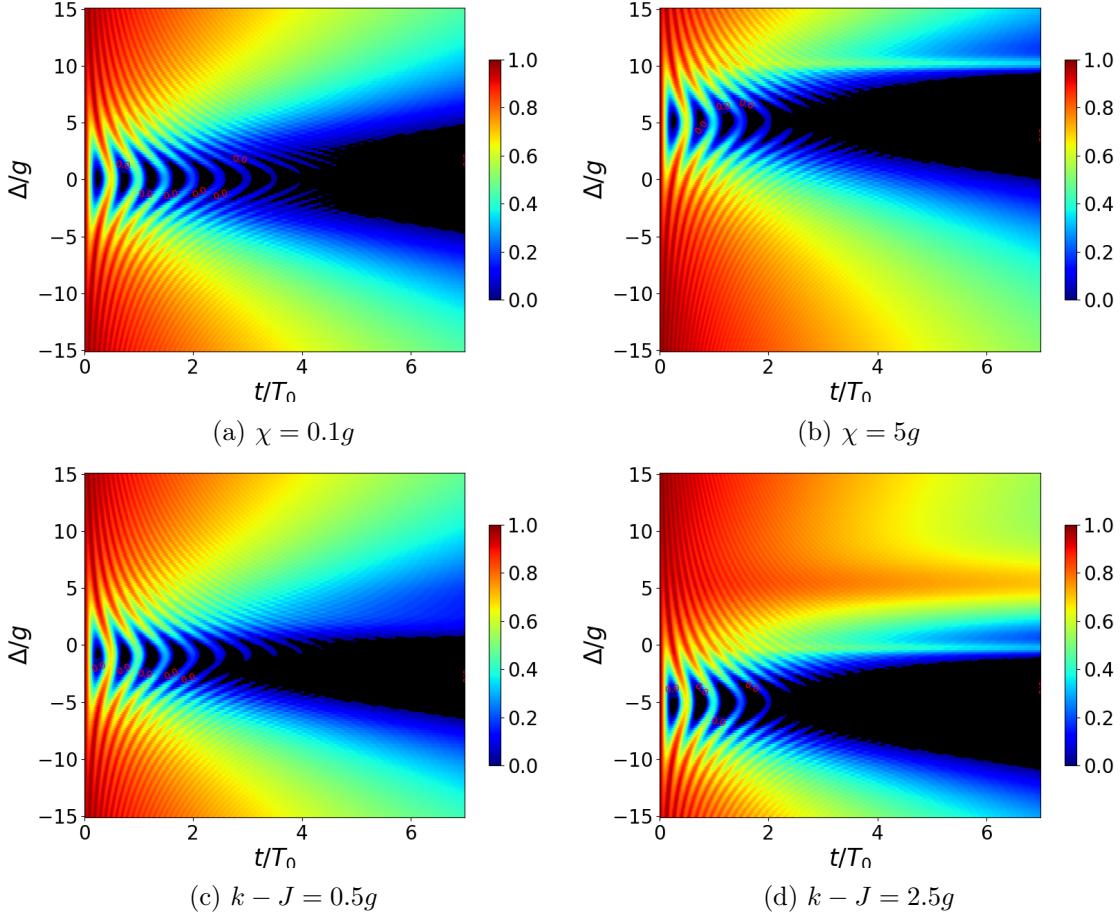


Figura 4.18. Concurrencia en función del tiempo (eje x) y el detunning  $\Delta$  (eje y) para diferentes parámetros (los que no están nombrados son cero).

En las Figuras 4.18a y 4.18b se muestran dos casos en donde se puso de manifiesto la no linealidad del medio, cuyos parámetros son  $\chi = 0.1g$  y  $\chi = 5g$  respectivamente, ambos casos en presencia del entorno. Al comparar con la figura 4.17b, la forma cambia al aumentar las no linealidades, y la figura ya no es simétrica. De todas formas, cerca del centro ( $\Delta/g = 5$ ) el comportamiento es similar, y por lo tanto podría esperarse que este eje será el caso coherente, que en analogía con la sección 3.3.2, puede ser una posible condición de robustez para la fase geométrica. Esto se analizará más tarde. En los paneles 4.18c y 4.18d se muestra el cambio al considerar acoplamiento entre los átomos, dados por una intensidad de  $k - J = 0.5g$  y  $k - J = 2.5g$  respectivamente. Nuevamente hay un desplazamiento, que se comporta igual que en el caso anterior, pero ahora el desplazamiento

del eje es el doble que el aumento del parámetro de estudio, por ejemplo, si  $k - J = 2.5g$ , entonces la figura se desplaza y su *centro* esta en  $\Delta_0 = -2(k - J) = -5g$ . Esto no es tan sorprendente si se observa la expresión de la energía 4.9, donde los parámetros  $\chi$  y  $\Delta$  aparecen con un factor  $1/2$ , mientras que  $k - J$  no.

La simetría de la figura se rompe en una dirección, y se ve como hay, en ambos casos, una franja donde el entrelazamiento parece mantenerse durante un periodo más largo de tiempo. Además, se observa como en el panel 4.18d que se corresponde con el caso  $k - J = 2.5g$ , en la parte superior de la imagen, el entrelazamiento persiste mayor tiempo que su contraparte de menor interacción (panel 4.18c) con  $k - J = 0.5g$ .

Básicamente, el subespacio de  $N = 1$  se comporta igual que el Jaynes-Cummings de 1 átomo, pero donde se tiene un estado *inerte*, el estado  $|eg0 - ge0\rangle$  que no interactúa con los otros dos. Esto puede servir para, usando como condición inicial el estado  $|\psi_0\rangle = \cos\theta|eg0\rangle + \sin\theta|ge0\rangle$  que es combinación lineal de los estados  $|eg0 \pm ge0\rangle$ , donde el estado simétrico evoluciona como siempre, y el antisimétrico no evoluciona, teniendo así una manera de mantener el entrelazamiento siempre por arriba de un cierto valor, que depende del valor de  $\theta$ , aun en presencia de decoherencia, ya que el estado  $|eg0 - ge0\rangle$  es un estado que no sufre perdidas.

### Condición inicial $|eg1 + ge1\rangle$

Ahora se estudia la dinámica para el estado simétrico en el subespacio de  $N = 2$ . Igual que en el caso anterior, la figura 4.19 muestra la evolución unitaria a la izquierda, y la disipativa a la derecha. En este subespacio hay mas estructura, y si bien sigue siendo simétrico con respecto al eje  $\Delta = 0$ , la forma es más complicada, y en el caso unitario también se observan regiones que presentan SDE, cosa que para  $N = 1$  no. Al igual que antes, al aumentar el detunning las oscilaciones son de mayor frecuencia y menor amplitud, conservando mejor el entrelazamiento. La razón es la misma: si bien ahora el estado  $|eg1 + ge1\rangle$  si puede perder fotones, al hacerlo cae al estado  $|eg0 + ge0\rangle$ , que tiene el mismo entrelazamiento, y los otros dos estados del subespacio  $|gg2\rangle$  decae al  $|gg1\rangle$ , y  $|ee0\rangle$  no tiene fotones así que no pierde excitaciones. Por lo tanto, en el caso de alta desintonía, el comportamiento es similar al de anterior: las oscilaciones no tienen mucha amplitud y por lo tanto la probabilidad esta concentrada casi toda en el estado  $|eg1 + ge1\rangle$ , que al perder un fotón decae al estado  $|eg0 + ge0\rangle$  cuyo entrelazamiento es el mismo.

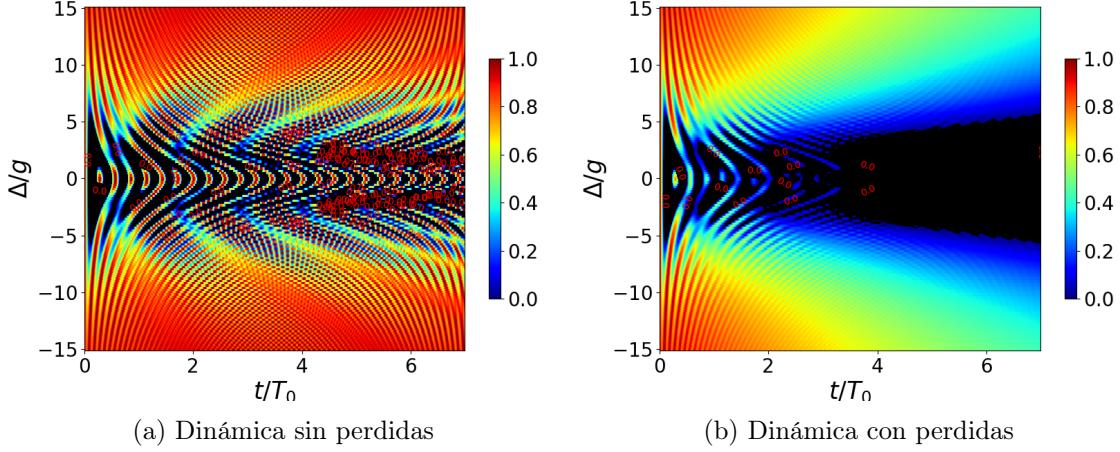


Figura 4.19. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ , en función del detuning, y para  $\chi = k - J = 0$ .

Es de interés en este subespacio de mayor excitación, ya que las energías presentan máximos y mínimos locales (figuras 4.16); se espera que esto haga cambiar drásticamente la estructura al modificar los valores de los parámetros. En la figura 4.20 se muestran

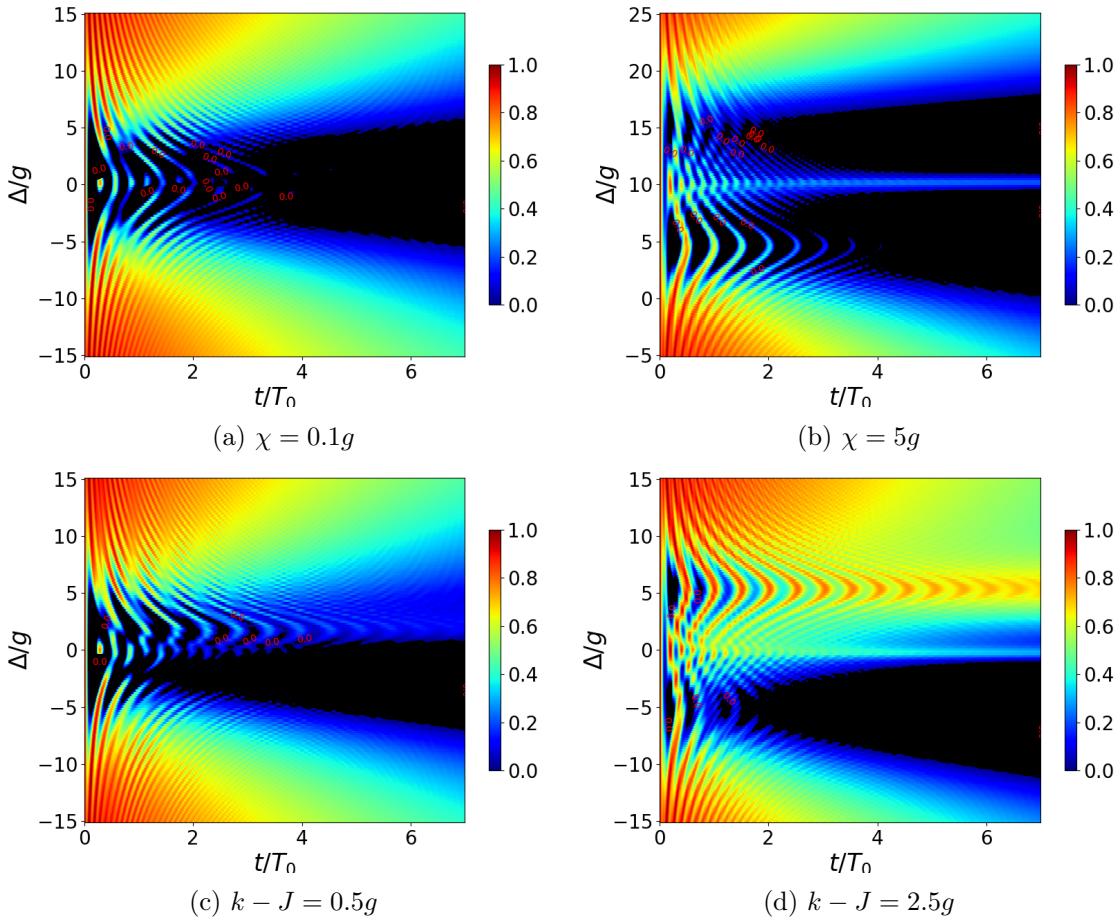


Figura 4.20

diferentes casos; en la primera fila los casos con medio Kerr cuyos parámetros son  $\chi = 0.1g$  y  $\chi = 5g$  respectivamente. En la figura 4.18a correspondiente a  $\chi = 0.1g$ , no se

observa ningún cambio significativo con respecto al caso  $\chi = 0$ , es muy pequeño para ser notado y la estructura queda igual. Pero al aumentar mucho la no linealidad del medio, se comienza a observar el desdoblamiento en las energías, y los máximos y mínimos locales comienzan a tomar importancia. En la figura 4.20b se ve como hay dos zonas en donde las oscilaciones tienen gran amplitud y poca frecuencia, similar al caso *resonante*. Esto se puede explicar con el desdoblamiento de energías, hay dos mínimos en las frecuencias de Rabi que participan en este proceso, que están cerca de  $\Delta_1 = 5g$  y  $\Delta_2 = 15g$  aproximadamente. Haciendo una analogía con el caso de 1 átomo, donde se vio que la condición de robustez se daba para  $\Delta = \chi(2n_c - 1)$  (ver 3.2) y recordando que esta condición se obtiene de la diferencia entre las contribuciones diagonales del Hamiltoniano, entonces en este caso, se puede hacer lo mismo y obtener dos condiciones, la primera con  $\chi n_c^2 - \chi(n_c - 1)^2 = \chi(2n_c - 1)$  que es igual a la del caso de  $N = 1$ , y la segunda con  $\chi(n_c - 1)^2 - \chi(n_c - 2)^2 = \chi(2n_c - 3)$ . Sustituyendo  $n = 2$ , la condición se da para  $\Delta = \chi$  y  $\Delta = 3\chi$ , que es justo donde se aprecian los mínimos. Si bien el segundo mínimo de  $3\chi$  parece ser menos pronunciado, esta analogía funciona bien.

Si se hace esta resta pero ahora con  $\chi = 0$  y nos concentraremos en  $k - J$ , la condición se da cuando  $\Delta = \pm 2(k - J)$ , que es donde se observan los mínimos del entrelazamiento en la figura 4.20d. En general entonces, se puede decir que esta condición de menor frecuencia y mayor amplitud de oscilación se da cuando las energías de los estados están cerca de la degeneración, y como hay 3 estados que interactúan siempre por medio del estado del medio (el  $|egn + gen\rangle$ ), entonces puede haber una degeneración entre el primero y segundo estado, o entre el segundo y tercero, que se dan en el caso general cuando

$$\Delta - \chi(2n - 1) + 2(k - J) = 0 \quad (4.17)$$

que se corresponde con la degeneración entre las energías del estado  $|ggn\rangle$  y  $(|eg, n - 1\rangle + |ge, n - 1\rangle)/\sqrt{2}$ , y en el otro caso

$$\Delta - \chi(2n - 3) - 2(k - J) = 0 \quad (4.18)$$

que se corresponde con los estados  $(|eg, n - 1\rangle + |ge, n - 1\rangle)/\sqrt{2}$  y  $|ee, n - 2\rangle$ . Cambien, se puede dar que los tres estados están degenerados si se cumplen las dos condiciones simultáneamente.

#### 4.4.2. Dependencia con el medio $\chi$

##### Condición inicial $|eg0 + ge0\rangle$

En la figura 4.21 se muestra la dinámica de entrelazamiento en función de la no linealidad del medio. No hay diferencias mayores con la dependencia en  $\Delta$  (Figura 4.17).

Esto nos reafirma que en el espacio de  $N = 1$ , el medio Kerr es muy similar al detuning.

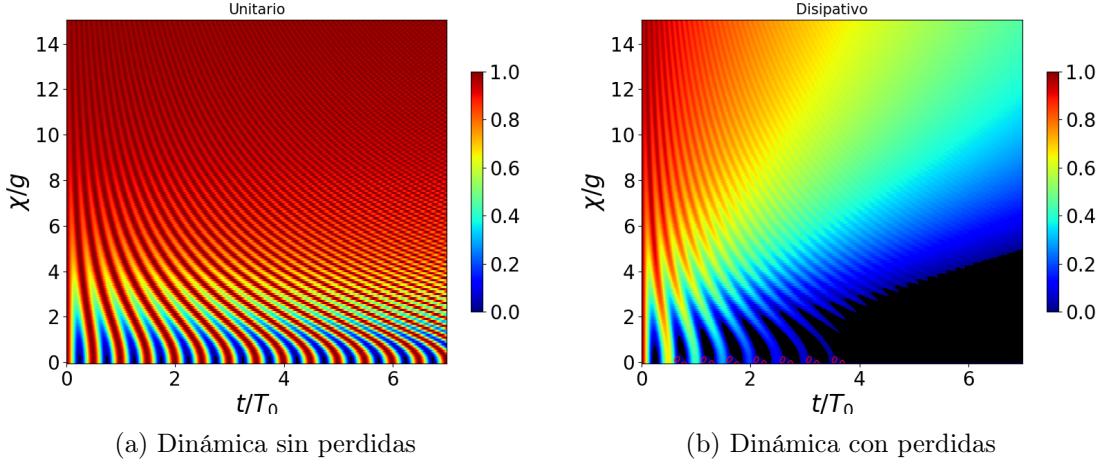


Figura 4.21. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ , en función del detunning, y para  $\chi = k - J = 0$ .

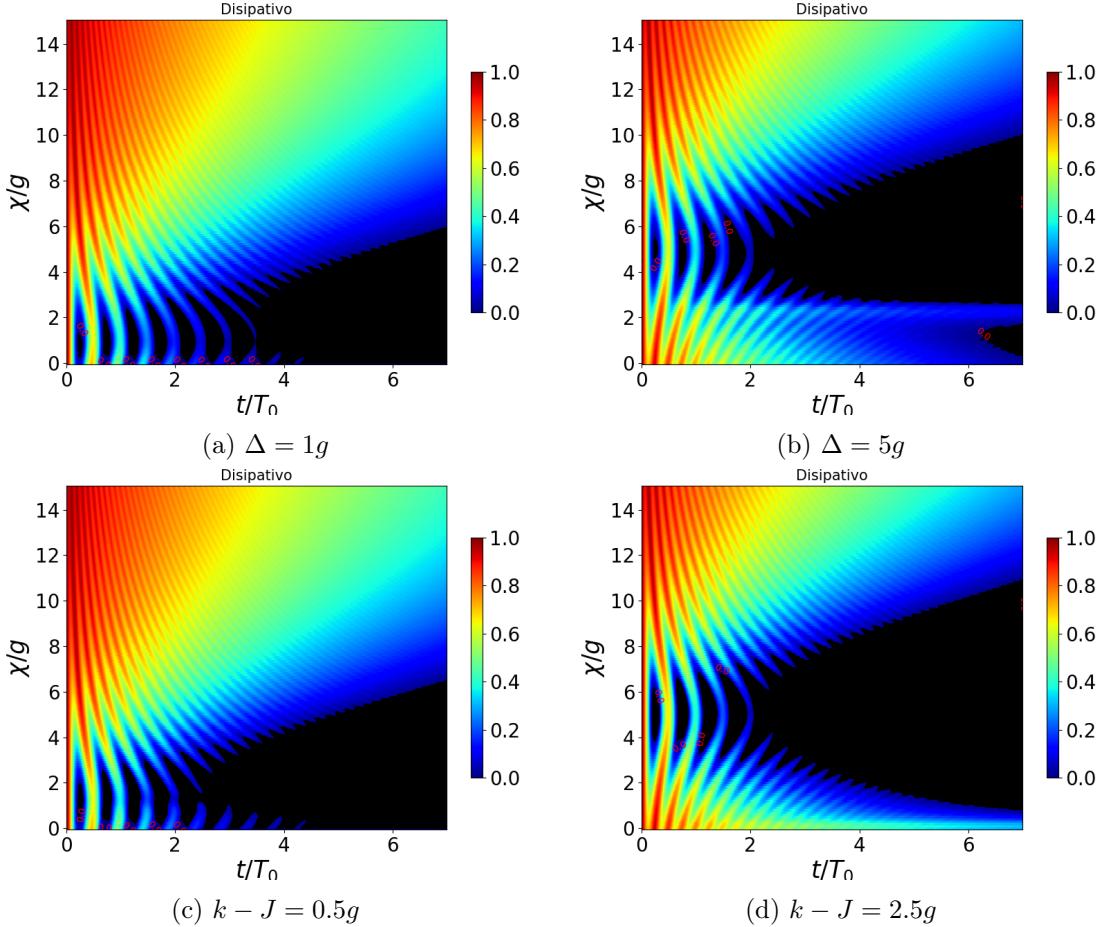


Figura 4.22. Entrelazamiento  $|eg0 + ge0\rangle$

#### Condición inicial $|eg1 + ge1\rangle$

Para la condición inicial  $|eg1 + ge1\rangle$ , vemos que hay una diferencia en comparación con el caso del detunning: comparando las imágenes 4.23 y 4.19 vemos que hay una diferencia en la estructura. Esto significa que ya no están en igualdad de condiciones el detunning y el medio, como era el caso de el subespacio de  $N = 1$ . Aparte de esto, los demás com-

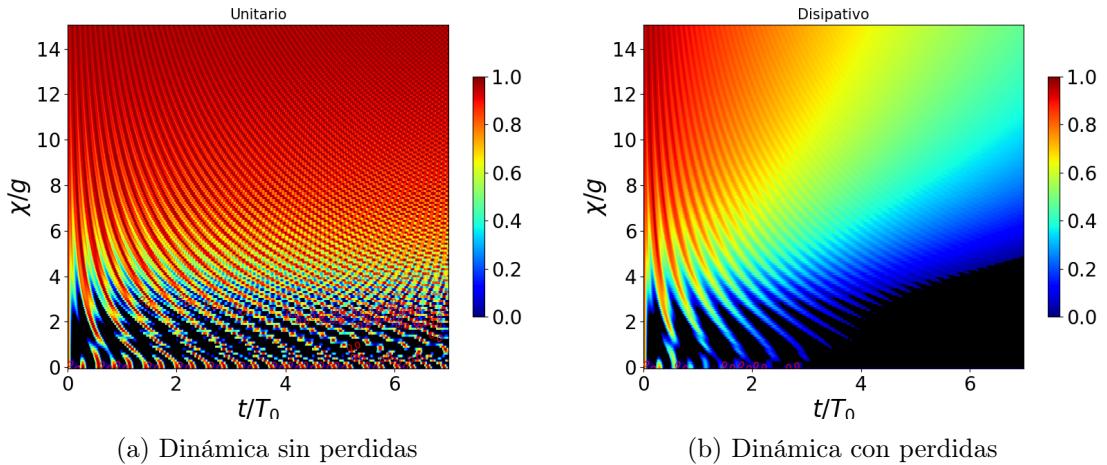


Figura 4.23. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial  $|eg1 + ge1\rangle$ , en función del medio Kerr, y para  $\Delta = k - J = 0$ .

portamientos no son inesperados. Al aumentar  $\chi$ , el entrelazamiento inicial se conserva ya que las oscilaciones son de menor amplitud; ademas, al agregar disipación, las oscilaciones decaen en amplitud y las zonas donde hay presente SDE se agrandan. Cambien, al aumentar la no linealidad del medio, la frecuencia de oscilación aumenta haciendo que el entrelazamiento sea mas robusto ante el efecto del entorno. Al cambiar algunos de los parámetros para ver como afectan el entrelazamiento en función de  $\chi$ , se muestran en las figuras 4.24a y 4.24b como afecta aumentar el detunning. En primer lugar, aumentar a  $\Delta = g$  no afecta sustancialmente la estructura (comparar con 4.23b), el efecto principal es desplazar hacia arriba la figura. Pero al aumentar mucho el detunning como en el caso de  $\Delta = 5g$ , observamos que no solo que la frecuencia cambia (poco pero cambia, en el primer caso para llegar a  $t/T_0 = 2$  se necesitan 3 oscilaciones pero para el segundo 4), como se esperaba, sino que tambien hay nuevamente una separación en dos regiones. Esto nuevamente se atribuye a que la diferencia de energías tiene máximos y mínimos locales, haciendo que en estas regiones las oscilaciones sean de mayor amplitud. Es interesante que ahora, si se observan las figuras 4.24c y 4.24d, por un lado, parece que la disipación afecta menos, y por otro lado no ocurre la separación en dos regiones al aumentar la interacción  $k - J = 2.5g$ . Esto es interesante, ya que parece que aumentar la interacción entre los tamos hace que el entrelazamiento sea mas duradero ante el efecto del entorno. A este punto se volverá mas adelante.

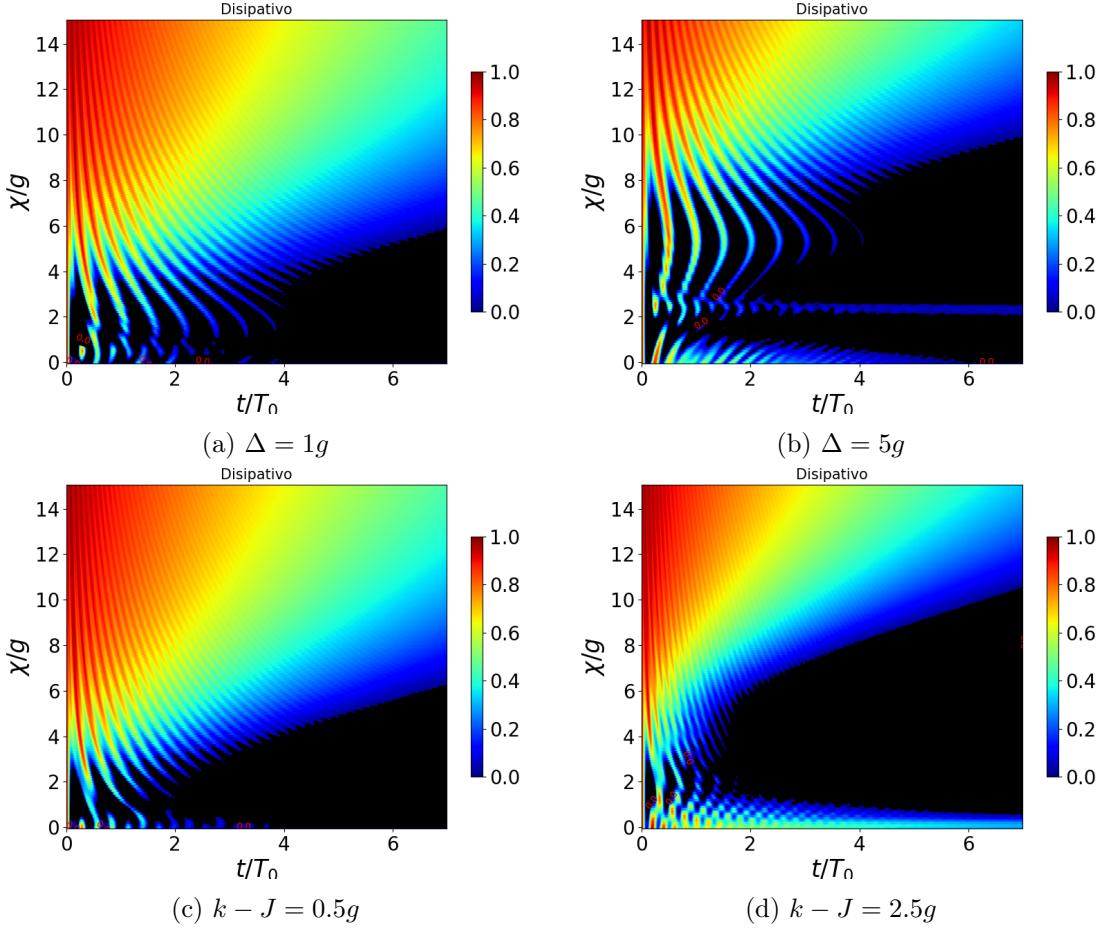


Figura 4.24. Dinámica de entrelazamiento para  $|eg1 + ge1\rangle$  en función del medio Kerr, para diferentes valores de  $\Delta$  y  $k - J$ .

#### 4.4.3. Dependencia con la interacción entre átomos $k - J$

Ahora nos concentraremos en la interacción entre los átomos. A diferencia de los otros dos parámetros, esta interacción solo depende los dos átomos y por lo tanto se esperan comportamientos diferentes.

##### Condición inicial $|eg0 + ge0\rangle$

Desde el comienzo ya se puede ver como al aumentar el valor absoluto de la interacción el comportamiento es el mismo que en los otros dos casos, donde aumenta la frecuencia y disminuye la amplitud conservando el entrelazamiento inicial, pero en este caso este comportamiento se ve acentuado.

La interacción entre los átomos conserva mejor el entrelazamiento. Esto también se observa cuando se agrega la disipación, en comparación con las otras interacciones, en la figura 4.25a se ve como se conserva mejor el entrelazamiento.

En la figura 4.26 se observan los efectos que tienen los otros dos parámetros en la dinámica. Por un lado, vemos que aumentar el detuning 4.26a desplaza el centro hacia abajo pero no parece haber mucha diferencia. Al seguir aumentando la desintonía 4.26b, el centro se sigue desplazando y podemos ver que este se desplaza la mitad que lo que

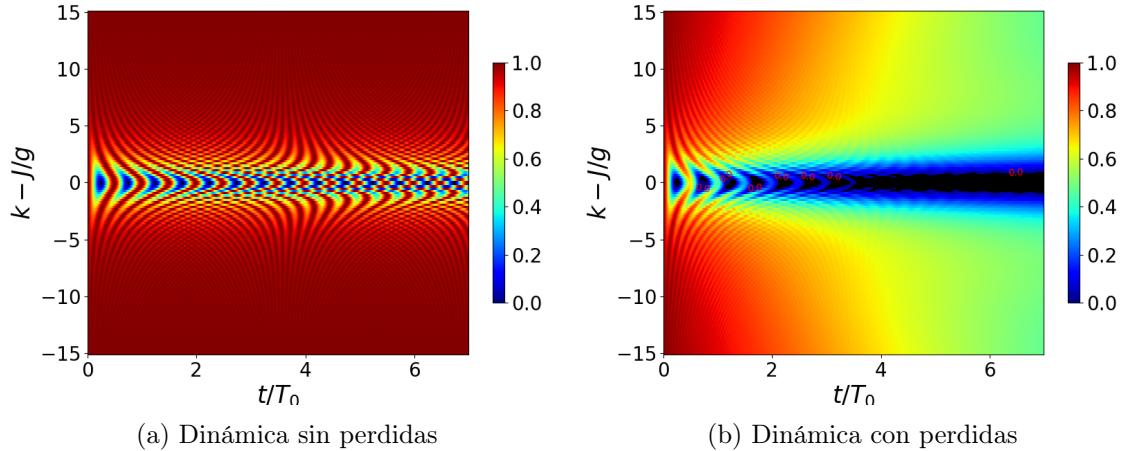


Figura 4.25. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ , en función del detuning, y para  $\chi = k - J = 0$ .

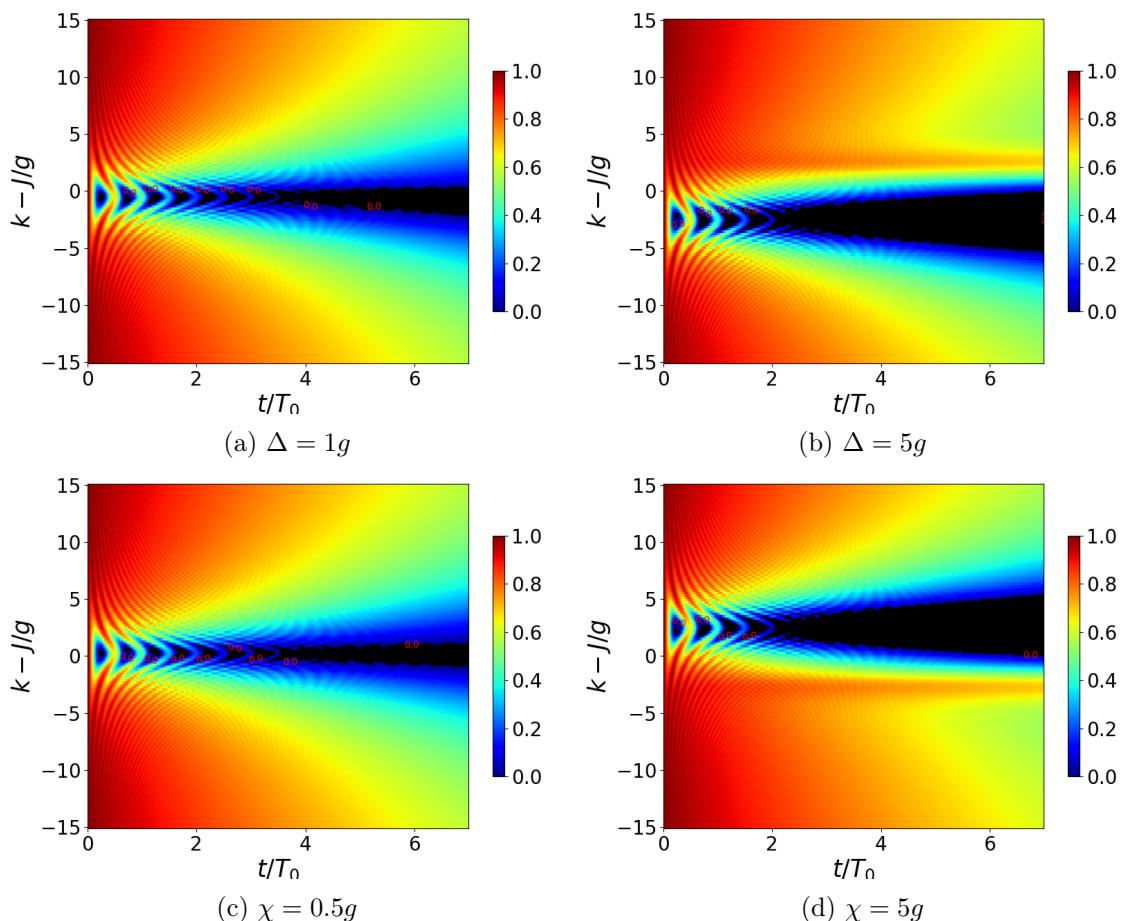


Figura 4.26. Dinámica de entrelazamiento para estado inicial  $|eg0 + ge0\rangle$  en función de la interacción entre los átomos  $k - J$  para diferentes parámetros.

aumenta  $\Delta$ . Ademas, la estructura pierde la simetria y se observa una franja en la parte superior donde el entrelazamiento se conserva mejor. Este valor parece corresponderse con  $+\Delta/2$ . Esto puede deberse a la condición que se encontró anteriormente (4.17 y 4.18) que en este caso se resume en que la condición de degeneración se de para  $k - J = \pm\Delta/2$ . Es

interesante que en este caso una de las condiciones presenta zonas de SDE, y la otra en cambio conserva mejor el entrelazamiento que las demás zonas. Por otro lado, al cambiar las no linealidades, vemos que el efecto es exactamente el mismo, pero el desplazamiento es ahora en el otro sentido, y las condiciones de degeneración siguen siendo las mismas, a menos de un signo.

#### Condición inicial $|eg1 + ge1\rangle$

Al considerar el espacio de  $N = 2$ , lo primero que resalta es que la zona central que presenta SDE ahora es mas ancha. Por otro lado, al agregar disipación, las diferencias parecen desaparecer con respecto a su contraparte de  $N = 1$ . Esto probablemente se debe a que en presencia de disipación, para tiempos largos, el estado del sistema sera similar. Mas aun considerando que se esta ignorando la dinámica de la cavidad al observar el entrelazamiento entre los átomos. La mayor diferencia entre ambos casos aparece cuando

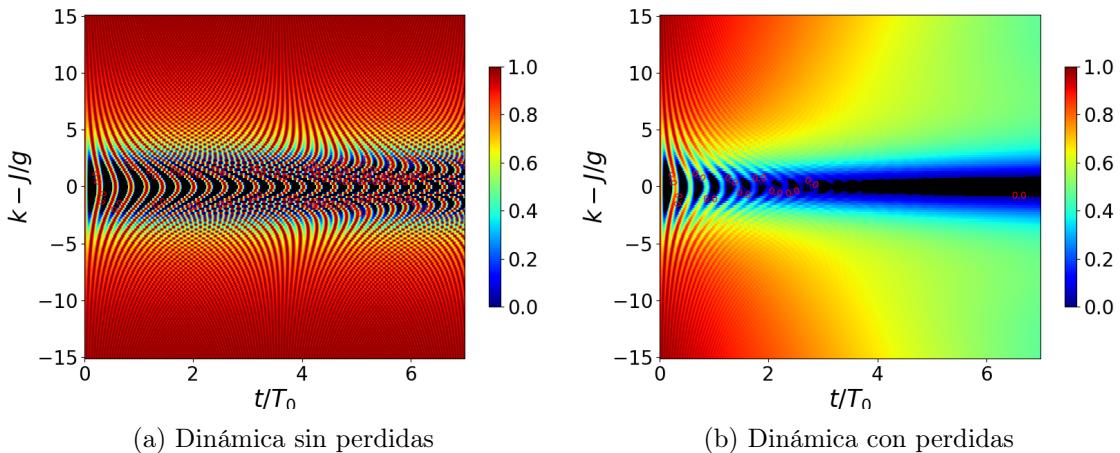


Figura 4.27. Dinámica de entrelazamiento para el estado inicial  $|eg1 + ge1\rangle$ , en función del detunning, y para  $\chi = k - J = 0$ .

observamos los efectos de los parámetros  $\Delta$  y  $\chi$ . Este caso es interesante porque nos ayuda a ver concretamente como, al tener ahora 3 estados dinámicos, el efecto del detunning y del medio son diferentes, que en el caso de 1 átomo (o en el subespacio de  $N = 1$ ) por lo que se vio antes son lo mismo. En la figura 4.28b y d muestra la clara diferencia entre estos dos efectos. Para el detunning aparecen 2 regiones, que nuevamente son correctamente predichas por las condiciones 4.17 y 4.18 (considerando  $\chi = 0$ ), y para el caso del medio (panel d) si traducimos las condiciones para  $\Delta = 0$  obtenemos que la condición de degeneración se da para  $k - J = \frac{3}{2}\chi = 7.5g$  y  $k - J = \frac{-\chi}{2} = -2.5g$ , que es justamente donde se observan las regiones con mayor estructura. Esto nos dice que fundamentalmente, la degeneración de estados lleva a una mayor coherencia entre las oscilaciones del entrelazamiento. Si bien esto es cierto, puede ser que este entrelazamiento muera súbitamente, o que sea mas robusto que otras combinaciones de parámetros. Esto se ve claramente en estas dos figuras (paneles b y d), donde se pudo predecir correctamente que había zonas mas coherentes, pero en ambos casos tenemos una de las zonas que presenta SDE y el entrelazamiento muere, y la segunda zona donde las oscilaciones perduran en el tiempo

mas que en cualquier otra combinación de parámetros.

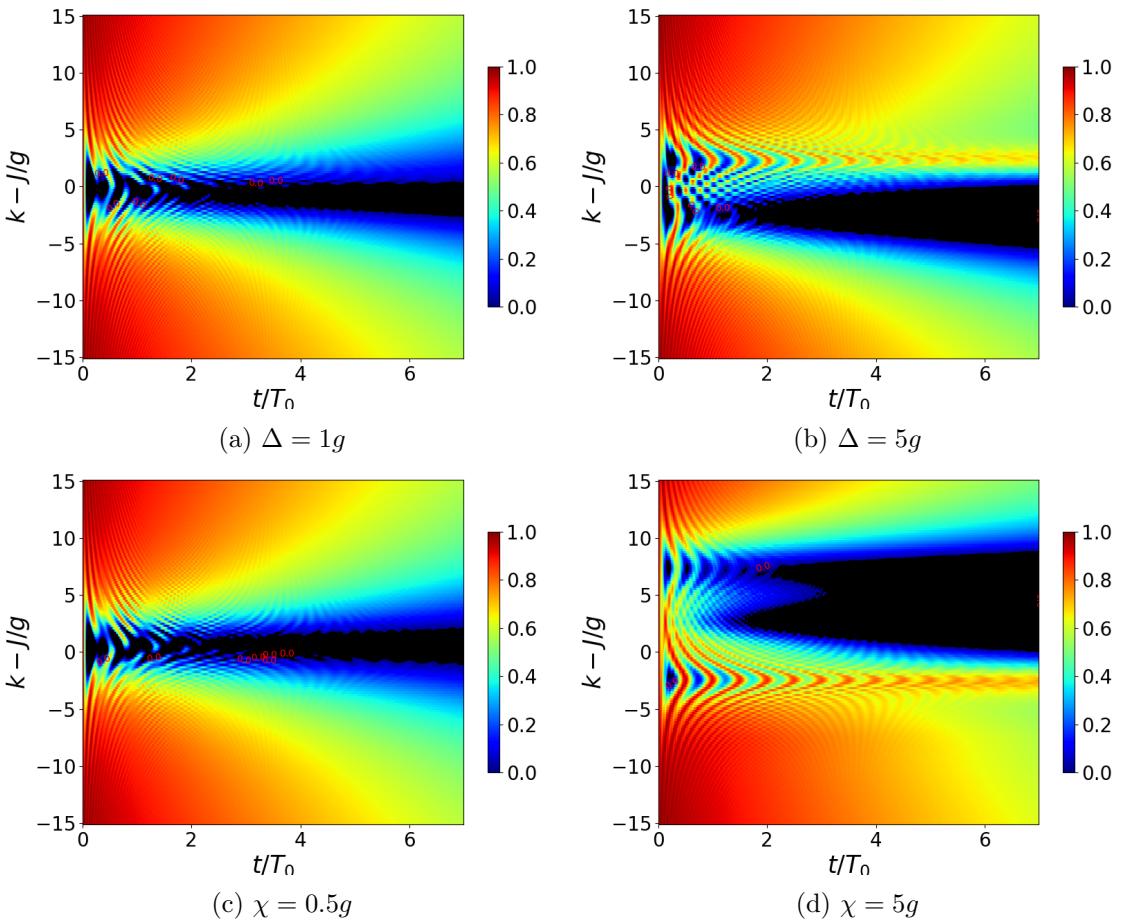


Figura 4.28. Dinámica de entrelazamiento para estado inicial  $|eg1 + ge1\rangle$  en función de la interacción entre los átomos  $k - J$  para diferentes parámetros.

#### 4.4.4. Acoplamiento Buck-Sukumar

Se repitió el estudio utilizando el acoplamiento no lineal entre la cavidad y los átomos, este acoplamiento es mayor mientras más excitaciones tenga la cavidad, concretamente la intensidad del acoplamiento se multiplica por la raíz de la cantidad de fotones de la cavidad  $\sqrt{n_C}$ . La conclusión de este estudio es que en el caso de  $N = 1$ , es todo exactamente igual. Para  $N = 2$ , hay algunas pequeñas diferencias, pero son casi insignificantes y no tienen consecuencias mayores sobre el entrelazamiento de los átomos.

Por lo tanto, no justifica mostrar nada, solo mencionar que en los casos observados no afecta significativamente.

### 4.5. Conclusiones del capítulo 4

En este capítulo se analizó la dinámica del sistema, primero se recuperó el caso de 1 átomo 4.2 apantallando uno de los dos átomos, situación que no es física pero sirve también para estudiar el efecto de los parámetros del problema 4.3. Luego la dinámica

de entrelazamiento entre los dos átomos, ignorando la cavidad. Este estudio resultó útil, ya que por un lado se concluye que el subespacio de  $N = 1$  se comporta igual que el modelo de Jaynes-Cummings de 1 átomo, y donde se observó que el detunning  $\Delta$  y la no linealidad del medio Kerr  $\chi$  juegan un mismo rol. Pero para el caso de  $N = 2$  esto ya no es cierto, y se encontró una dinámica con mucha más estructura. Además, se pudo utilizar una analogía que llevó al estudio de los casos de degeneración energética entre estados, y estas condiciones (4.17 y 4.18) sirvieron para predecir correctamente zonas de entrelazamiento particulares, donde la combinación particular de estos parámetros da lugar a oscilaciones coherentes y mayor duración del entrelazamiento frente al entorno. Si bien estas condiciones tienen un cierto poder de predicción, no se encontró una herramienta concreta para saber si esta zona presentará muerte del entrelazamiento, o robustez ante el efecto del entorno, sin mencionar que estas condiciones se encontraron por analogía y no se adjudicó a ninguna razón fundamental. Por esto mismo, hay algunos comportamientos que este análisis no logra explicar. Además, se concluye que de los parámetros del problema ( $\Delta$ ,  $\chi$  y  $k - J$ ) aumentar la interacción entre los átomos es la más efectiva para preservar el entrelazamiento, por su contrario, aumentar las no linealidades ( $\chi$ ) hace que el entrelazamiento muera más rápidamente. Esto muestra que la intuición física sobre estos sistemas es correcta. Las no linealidades del medio son perjudiciales, y aumentar la interacción entre los átomos aumenta el entrelazamiento entre estos.

La utilidad de esta sección es que se puede predecir numéricamente que desintonía tiene que haber entre la cavidad y los átomos para lograr una mejor observación del entrelazamiento entre átomos.

# FASE GEOMÉTRICA EN JCM GENERALIZADO

---

## 5.1. FG unitaria

## 5.2. FG disipativa

VER SI PUEDO PONER LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ, Y PONER LA SOLUCION FORMAL DE AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE 3X3, PARA SACAR UNA EXPRESION FORMAL DE LA FG EN TERMINOS DE LOS ELEMENTOS DE matriz Al igual que en la sección 3.3, se estudia la dependencia de la fase geométrica en los distintos parámetros del problema. Se estudian los efectos en cada caso, y se buscan condiciones de robustez. Nuevamente, se estudiaran las condiciones iniciales  $|eg0 + ge0\rangle$ ,  $|eg1 + ge1\rangle$  y  $|3ero\rangle$ , con el objetivo de recuperar comportamientos similares al JCM de 1 átomo para el primer caso, y comparar estos con la segunda condición inicial.  $|3ero\rangle$  ???.

### 5.2.1. Dependencia con el régimen de acoplamiento

En la figura 5.1 se observa la fase geométrica acumulada para diferentes valores del acoplamiento con el entorno  $\gamma = 0, 0.01g, 0.1g, 0.5g, g$ , donde cada valor se corresponde con una curva mostrada, en orden ascendente en los colores, es decir,  $\gamma = 0$  se corresponde con el azul oscuro, y  $\gamma = g$  se corresponde con el color mas claro, el naranja. Vemos como el comportamiento para el primer caso (5.1a) es idéntico al caso del JCM de 1 átomo, donde aumentar la disipación hace que los escalones se suavicen, y dejen de acumular fase mas rápidamente.

En el caso de la condición inicial correspondiente a el subespacio de  $N = 2$ , se observa un nuevo comportamiento, y es un *rebote*. Al aumentar lo suficiente el acoplamiento con el entorno, la acumulación de fase geométrica hace un salto en la dirección contraria a la que lleva normalmente, y luego se queda en un mismo valor. Recordemos que como se vio anteriormente, los saltos que hacen aparecer los escalones, se podían interpretar en el caso de 1 átomo utilizando la esfera de Bloch; estos saltos ocurren cuando la trayectoria llega al otro lado de la esfera de Bloch, y al llegar al lado opuesto (digamos  $\phi = \pi$ ), justo al superar este punto, el camino mas corto para cerrar el ciclo según la regla de la geodésica es recorrer la esfera por el otro lado, dando así un salto de  $\pi$  en el caso resonante. Esta interpretación en el caso de un espacio de Hilbert mas extenso no es tan directa, pero se puede pensar en analogía en una esfera de mayor dimensión, en donde entonces, el

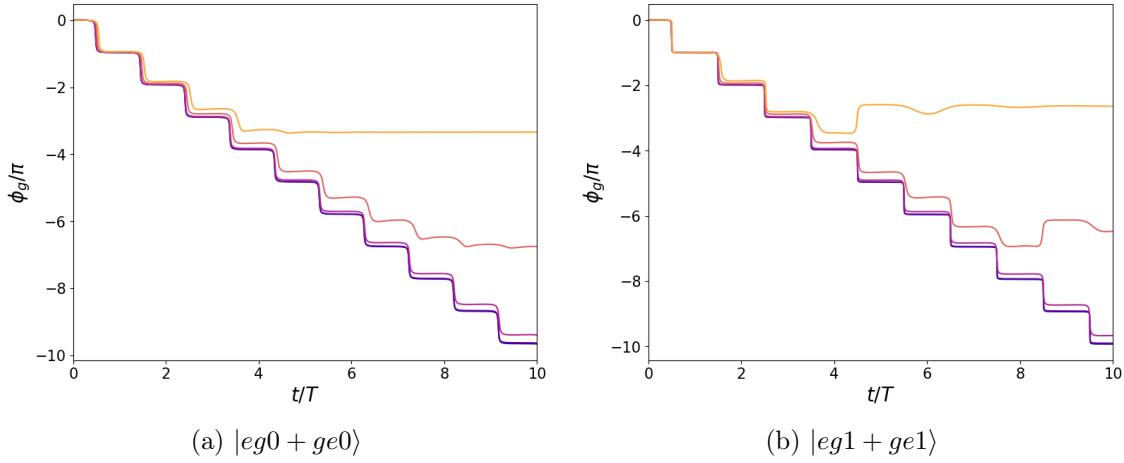


Figura 5.1. Dependencia con el acoplamiento con el entorno

rebote seria una situación similar a la descrita anteriormente, pero en otro hiperplano de la hiperesfera donde ocurre la trayectoria del estado. Mas allá de esto, el comportamiento es el esperado, e incluso vemos que ambos casos acumulan una fase geométrica muy similar en términos de su valor absoluto. No parece haber diferencias significativas en la influencia que tiene el entorno sobre estos dos estados.

### 5.2.2. Dependencia con el detunning

$$\text{delta list} = (0.00001*g, 0.1*g, 0.500001*g, 1.00001*g, 1.500001*g, 2.5*g, 5*g)$$

Para estudiar el efecto del detuning sobre la fase geométrica, se dejan fijos los otros parámetros del problema y se varía la diferencia entre las frecuencias de los átomos y la cavidad. Como el régimen de acoplamiento fuerte es el que nos interesa, se elige un acoplamiento con el entorno  $\gamma = 0.1g$  y  $p = 0.005g$ , y en un principio los demás parámetros en cero  $\chi = k - J = 0$ . En la figura 5.2 se muestran la fase acumulada para diferentes valores del detuning  $\Delta$  para las dos condiciones iniciales elegidas. En 5.2a se observa el mismo comportamiento que en el caso de 1 átomo, el detuning hace que las escalones sean más suaves y el salto menor, haciendo que en conjunto el sistema acumule poca fase geométrica. Si asociamos la fase geométrica al camino que recorre el estado en el espacio de parámetros, es evidente que a mayor detuning, la fase acumulada será menor, ya que como se mencionó en reiteradas ocasiones, al aumentar el detuning las oscilaciones entre los estados son muy pequeñas, y por lo tanto la probabilidad está concentrada en la condición inicial. Consecuentemente, en el espacio de parámetros, la curva se mantiene cerca del origen y por lo tanto la fase acumulada es menor. En el caso de la condición inicial en el subespacio de  $N = 2$ , vemos que si el detuning es muy bajo, entonces el efecto es similar al anterior y la fase acumulada tiene una forma similar y también un valor similar. Pero cuando aproximadamente en el rango de  $1g \leq \Delta \leq 5g$ , vemos que hay una gran diferencia. La fase acumulada es más errática y presenta saltos y *rebotes*, y pero al ir aumentando el detuning, estos parecen disminuir y converger al comportamiento esperado para un detuning muy grande: que la fase acumulada sea poca. Esto se debe a que entre estos valores del detuning, las poblaciones comienzan a presentar batidos. Las probabilidades

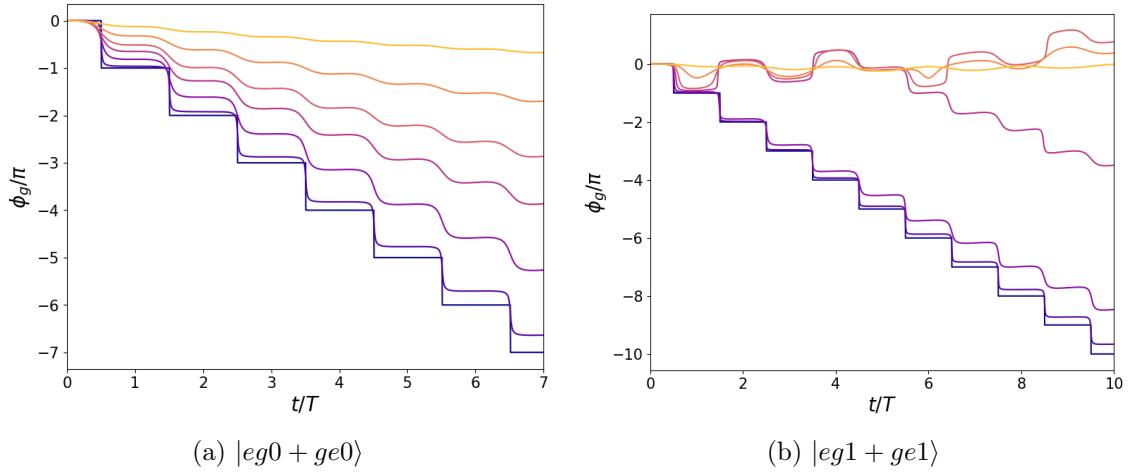


Figura 5.2. Dependencia con el detuning

de los estados  $|ee0\rangle$  y  $|gg2\rangle$  comienzan a aumentar y son comparables a la probabilidad del estado inicial. Esto hace que en el espacio de estados, las curvas sean complicadas y tengan trayectorias largas, haciendo que en algunos casos el salto sea positivo, y en otros negativo. Para valores de detunning bajos, el sistema principalmente se centra en el estado  $|eg1 + ge1\rangle$ , y para detunnings altos también. Es en este rango intermedio, donde las amplitudes de los 3 estados sin similares y oscilan de manera errática, presentando batidos, y por eso es en este rango que la fase geométrica acumulada es impredecible. No se encontró una manera esquemática y clara de representar esto en el espacio de parámetros para poder entender intuitivamente el comportamiento, ya que la esfera de Bloch no es una herramienta que se pueda utilizar en esta situación. Para seguir el estudio, se presenta la diferencia entre la fase geométrica unitaria y la disipativa en función del detunning, para esto se realizan simulaciones para diferentes valores de  $\Delta$  y se compara el valor de la fase geométrica luego de un tiempo fijo  $t = 3T$  para dos casos, el primero presentando perdidas y el segundo sin perdidas. Luego se realiza la resta de ambas cantidades y se obtiene el gráfico 5.4.

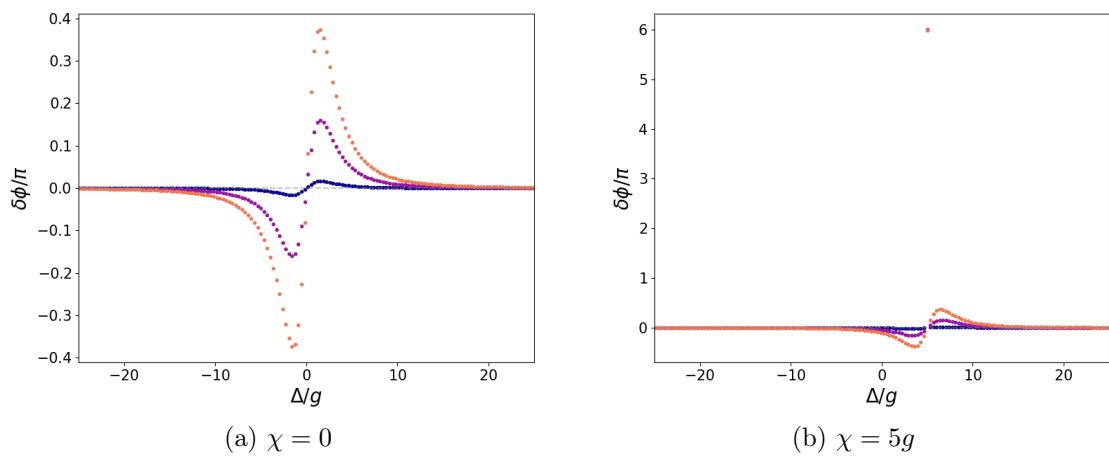


Figura 5.3. Robustez en funcion de  $\Delta$  para la condicion inicial  $|eg0 + ge0\rangle$

En este se muestran 3 curvas diferentes correspondientes a 3 valores diferentes del

acoplamiento con el entorno, respectivamente caracterizados por  $\gamma = 0.01g, 0.1g$  y  $0.25g$ , y la condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ . En primer lugar, se ve que las 3 curvas pasan por el origen, lo que nos dice que la diferencia entre la fase geométrica en ambos casos es 0, que es lo que llamamos condición de robustez, ya que el entorno no tiene efecto sobre la fase geométrica y esta se mantiene robusta ante los efectos del entorno. En el panel 5.4a, correspondiente a  $\chi = k - J = 0$ , la condición de robustez se da para  $\Delta = 0$ , como era de esperarse ya que esta es la misma que para el caso de 1 átomo. De la misma manera, al observar el caso de  $\chi = 5g$  en la figura 5.4b, vemos que esta condición se da para  $\Delta = \chi = 5g$ , que también es lo que esperamos. No hay mayores sorpresas.

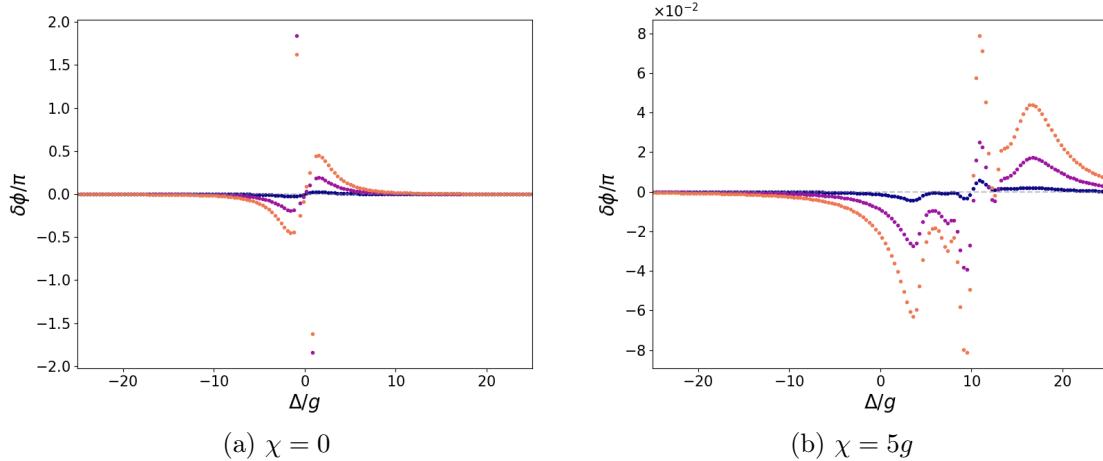


Figura 5.4. Robustez en función de  $\Delta$  para la condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$

### 5.2.3. Dependencia con el medio Kerr

```
chi list=(0.0001*g,0.1*g,0.5*g,g,2*g,5*g)
```

La dependencia en el medio Kerr es interesante, ya que en el caso de 1 átomo se observó que el efecto del medio sobre la fase es análoga al detunning, y en el caso de dos átomos, se observa en la figura 5.5a la condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$  que esto sigue siendo cierto para el subespacio de  $N = 1$ . Pero en el caso de la figura 5.5b se muestra que el efecto sobre la condición inicial  $|eg1 + ge1\rangle$ , en comparación con 5.2b, muestra diferencias en el régimen intermedio que se había definido aproximadamente para valores entre  $1g \leq \chi \leq 5g$ . Si bien la forma no es igual, es notable que el rango que se definió como *intermedio* es el mismo. Entonces, podemos decir que si bien para  $N = 2$  el medio Kerr no es simplemente un corrimiento en el detunning, el comportamiento es similar.

La pregunta que surge de todas formas es, qué sucede si realizamos un corrimiento en el detunning. En el caso de 1 átomo se había observado como la condición de robustez se cumplía cuando  $\Delta = \chi(2n - 1)$ , y la dependencia de la fase geométrica parecía no cambiar, solo presentaba un corrimiento. En este caso será igual? En la figura 5.6a se observa como en el primer caso, aumentar el detunning hace que las primeras curvas, que representan valores de  $\chi = 0$  y  $\chi = 0.1g$  (en azul oscuro y violeta oscuro respectivamente), acumulan fase negativa y los saltos son suaves. Ahora, la curva de  $\chi = \Delta = 0.5g$  es igual a la de  $\chi = \Delta = 0$ , y a partir de esta, el comportamiento es el mismo que antes. Pero para el

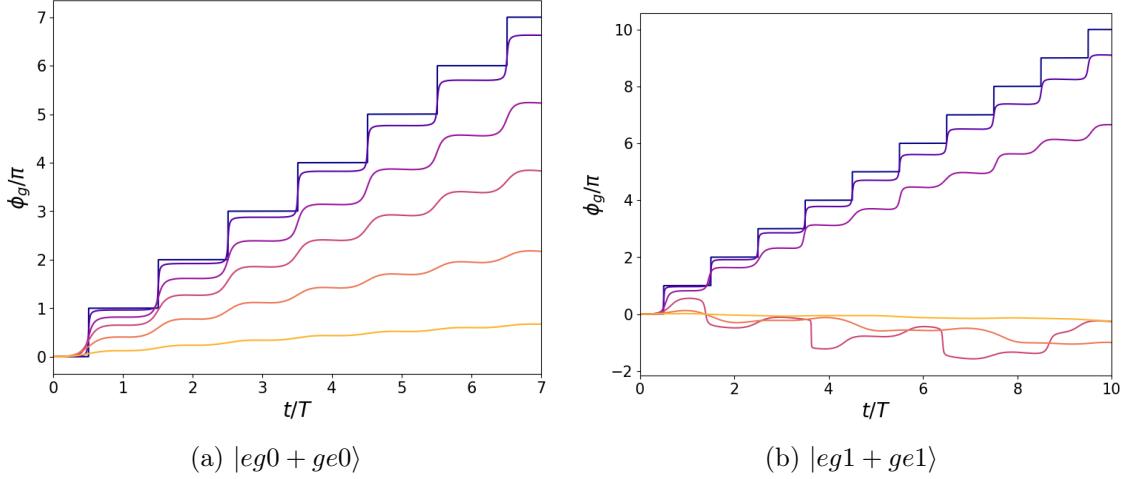
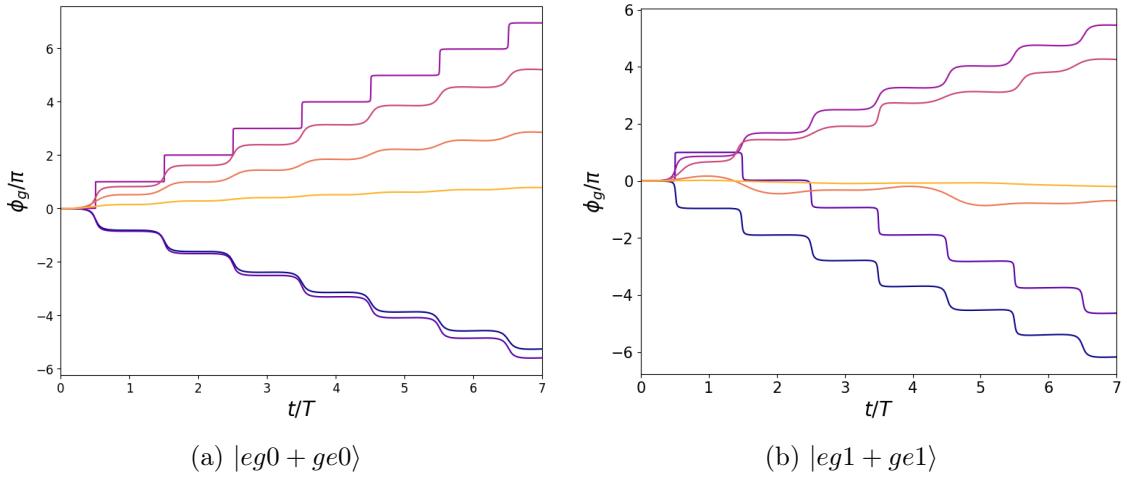


Figura 5.5. Dependencia con el medio Kerr

caso de  $N = 2$ , vemos como esto no es así. Primero, los casos de  $\chi = 0, 0.5g$  ahora tienen saltos mas abruptos, y hay un rebote. Por otro lado, el caso robusto ya no se observa para  $\chi = 0.5g$ , y en el rango intermedio, las oscilaciones de la fase parecen tener mas de una componente de frecuencia. Esto se observa claramente en la curva roja, donde se ve como hay dos saltos diferentes; uno es mas pronunciado seguido de otro mas pequeño. Esto nos indica que las condiciones 4.18/4.19 que se encontraron haciendo analogías con el caso de 1 átomo, no representan exactamente el caso de robustez.


 Figura 5.6. Dependencia con el medio Kerr con  $\Delta = 0.5g$ 

Para confirmar esto, se realiza un gráfico de diferencias entre la FG unitaria y la disipativa en función del parámetro del medio. En la figura 5.7 se muestra la diferencia  $\delta\phi = \phi_d - \phi_u$  para la condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$ . Se ve como la condición de robustez en este caso es igual que para el modelo de 1 átomo, donde la condición se da para  $\Delta = \chi$ .

A diferencia del caso de  $N = 1$ , si observamos la diferencia para el estado inicial  $|eg1 + ge1\rangle$  representada en la figura 5.8, entonces se ve como ahora no se cumple la analogía, y ademas hay mínimos y máximos locales que antes no había.

Lo primero que hay que aclarar, es que hay sitios en donde no hay puntos. En estos casos

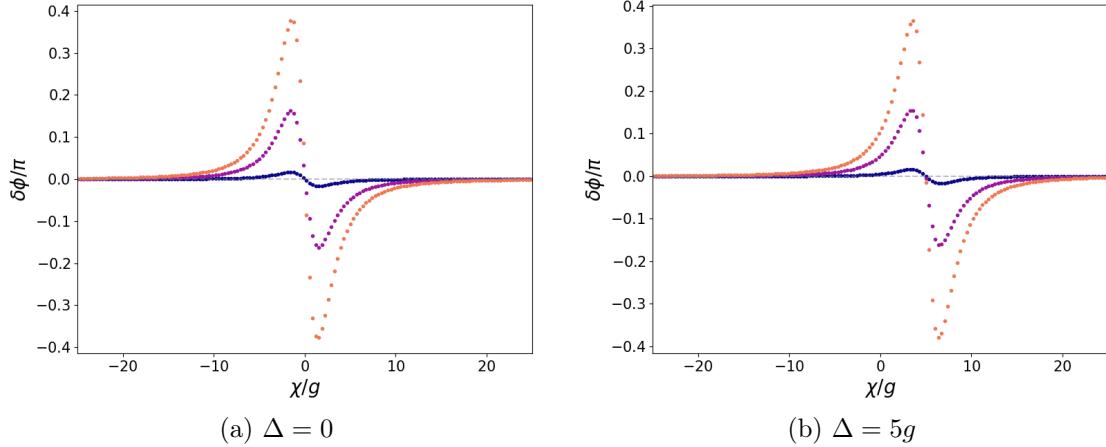


Figura 5.7. Robustez en función de  $\chi$  para la condición inicial  $|eg0 + ge0\rangle$

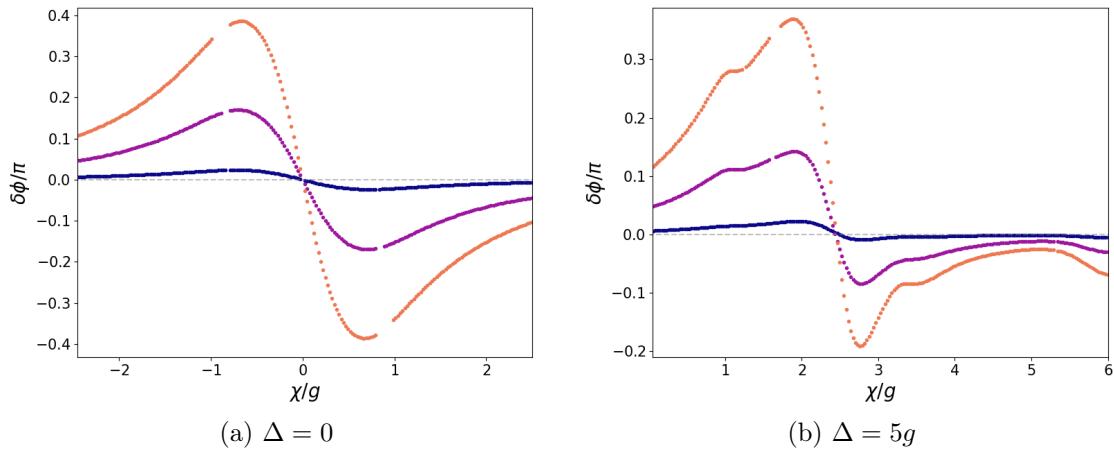


Figura 5.8. Robustez en función de  $\chi$  para la condición inicial  $|eg1 + ge1\rangle$

lo que sucede es que el medio, como es de comun conocimiento, introduce un corrimiento en las frecuencias, consecuentemente, hay un pequeño cambio entre la fase unitaria y la geometrica. En principio, esto no es un problema, ya que lo unico que hace es retrasar un poco el escalon. Pero en combinacion con la dinamica complicada del sistema, lo que ocurre en casos muy puntuales, es que la fase unitaria y la disipativa hacen un escalon en direcciones contrarias y esto hace que la diferencia entre ambas haga un salto discontinuo (o muy abrupto). En la figura 5.8a cerca de los valores  $\chi/g = \pm 1$  se observan la falta de puntos, estos estan mas arriba por el salto que se menciono. Es tambien interesante, que no es solo para un caso aislado, sino que es en un rango de valores donde se observa este comportamiento, que luego se normaliza.

Lo primero que se observa en la figura 5.8 es que hay algunos lugares donde faltan puntos. Esto se debe a que el entorno tiene un efecto interesante para algunas combinaciones de parámetros, y es que en algunos casos en particular por ejemplo la fase geométrica unitaria presenta escalones ascendentes, y en general el caso disipativo es similar, pero en algunos casos, el entorno hace que el salto sea en la dirección contraria, lo que hace que la diferencia entre las fases tenga un salto abrupto. Entonces, los puntos que faltan en

esta imagen, simplemente son regiones donde la diferencia es muy grande y no están representadas en este gráfico. En este caso, este comportamiento se da en la figura 5.8b para  $\chi/g \sim \pm 1$ . Este comportamiento se da no solo para un valor particular de los parámetros, sino para un rango, y este depende del acoplamiento con el entorno, ya que se observa que para la curva naranja perteneciente a  $\gamma = 0.25g$  el rango sin puntos es mayor a los otros dos. Esto fortalece la hipótesis que el entorno es responsable por este comportamiento.

En la figura 5.8b se muestra el caso en donde se aumenta el detuning hasta  $\Delta = 5g$ . Se observan máximos y mínimos locales en valores que no se pudieron predecir. Las dos cosas interesantes que se observaron son que también se encontraron regiones en donde se encuentran saltos en la diferencia por la misma razón que en el caso anterior, y por otro lado, y más interesante aún, es que ahora la condición de robustez parece estar cercana a  $\chi = 2.5g$ ; si se acerca y se observa con detalle, se encuentra que en realidad el cero se encuentra en  $\chi \sim 2.45g$  y varía suavemente con cada valor de  $\gamma$ . Esto es muy interesante, ya que el efecto que tiene el entorno también se refleja en esta condición.

#### 5.2.4. Dependencia con la interacción entre átomos

k list=(0,0.1\*g,0.5\*g,g,2.5\*g,5\*g)

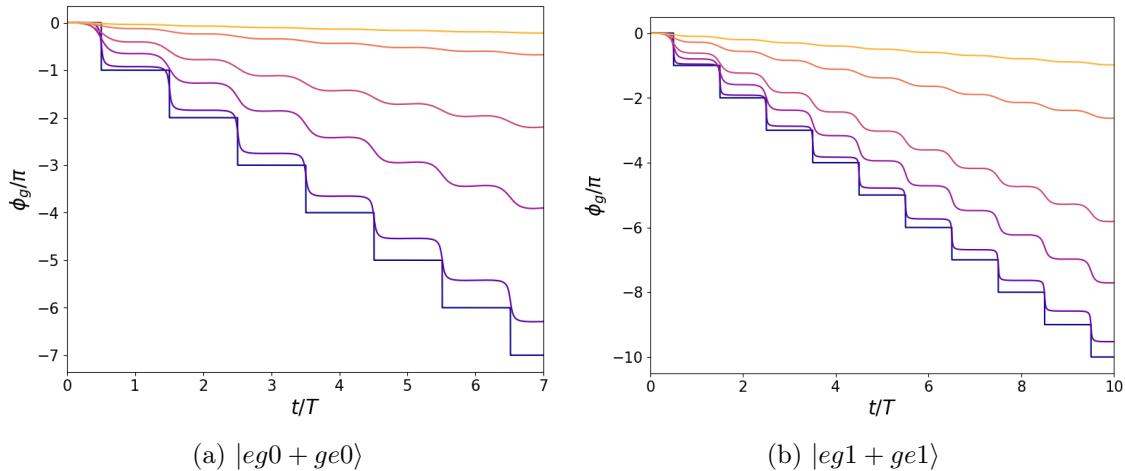


Figura 5.9. Dependencia con la interacción entre los átomos

#### 5.2.5. Robustez

Finalmente, por completitud, se explorarán más en detalle las condiciones de robustez en función del detuning. Esto es importante ya que este es en general el parámetro de control al que se tiene acceso en los experimentos, en general, cambiando la frecuencia de la cavidad.



## CONCLUSIONES

---



# DERIVACION DE LAS ECUACIONES MAESTRAS

---

En este apendice se desarrolla la derivacion de la ecuacion de Lindblad, que es la ecuacion maestra que determina la evolucion temporal de una matriz densidad  $\rho$ , que esta en contacto con un entorno del cual no se conoce la dinamica. La dinamica en conjunto esta regida por un Hamiltoniano que formalmente puede escribirse como

$$H = H_S + H_B + H_{int} \quad (\text{A.1})$$

donde los subindices se refieren a diferentes partes del problema. En primer lugar S se refiere al sistema de estudio, del cual se quiere encontrar la evolucion temporal, y esta en contacto con un entorno B, entonces  $H_B$  es el Hamiltoniano que rige la dinamica del entorno que en principio no conocemos. Finalmente, tenemos la interaccion entre las dos partes, dada por el hamiltoniano de interaccion  $H_{int}$ . El conjunto completo se puede pensar como un sistema cerrado, y por lo tanto su evolucion temporal esta formalmente dada por la ecuacion de Schrödinger, y su correspondiente operador de evolucion  $U(t)$  es

$$U(t) = \mathcal{T} \exp \left( -i \int_0^t dt' H(t') \right) \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathcal{T}$  indica la prescripcion de ordenamiento temporal, y  $U(0) = \mathbb{1}$ . Si se representa el estado del sistema total con un operador densidad  $\rho_{tot} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , entonces al aplicar la ecuacion de Schrödinger de ambos lados se obtiene que

$$\dot{\rho}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho_{tot}(t)] \quad (\text{A.3})$$

que es la ecuacion de Louiville-Von Neumann, que describe la trayectoria en el espacio de Hilbert del operador densidad del sistema total cerrado.

Va a ser util trabajar en el *picture* de interaccion, en donde reescribimos el Hamiltoniano separandolo en dos partes

$$H(t) = H_0 + \hat{H}_I(t) \quad (\text{A.4})$$

la manera de separar el sistema va a variar de problema a problema, pero en general se tiene que  $H_0$  es simplemente la energia de las dos partes del sistema si despreciamos la interaccion entre ellos, y que asumimos es independiente del tiempo; y luego tenemos  $\hat{H}_I(t)$  que es el Hamiltoniano que describe las interacciones entre los sistemas. Como

---

siempre, notamos  $U(t, t_0)$  al operador de evolucion temporal, y el valor de expectacion de un observable  $A(t)$  en la representacion de Schrödinger

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{A(t)U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)\} \quad (\text{A.5})$$

Ahora se introducen los operadores unitarios

$$U_0(t, t_0) \equiv \exp[-iH_0(t - t_0)] \quad (\text{A.6})$$

con  $U_I(t, t_0) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)$ . Entonces el valor de expectacion A.5 tambien puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= \text{tr}\{U_0^\dagger(t, t_0)A(t)U_0(t, t_0)U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0)\} \\ &\equiv \text{tr}\{A_I(t)\rho_I(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde introducimos al poerador en el *picture* de interaccion, y enontces la matriz densidad evoluciona en esta representacion segundo

$$\rho_I(t) = U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0) \quad (\text{A.8})$$

De esto lo que se debe recordar es que el Hamiltoniano en la repserentacion de interaccion, y la ecuacion de von Neumann se escriben como

$$H_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)\hat{H}_I(t)U_0(t, t_0) \quad (\text{A.9})$$

Y

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_{int,I}(t), \rho_I(t)] \quad (\text{A.10})$$

Si integramos esta ecuacion obtenemos la solucion formal

$$\rho_I(t) = \rho_I(t_0) - i \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t'), \rho_I(t')] \quad (\text{A.11})$$

. Esta ecuacion puede sustituirse nuevamente en A.10, y se toma traza parcial sobre los grados de libertad del entorno para obtener

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{1}{\hbar} \text{tr}_B[H_{int,I}(t), \rho_I(t_0)] - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_B \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t), [H_{int,I}(t'), \rho_I(t')]] \quad (\text{A.12})$$

Esta ecuacion sigue siendo exacta, ya que todavia no se aplico ninguna aproximacion, pero esta ecuacion sigue siendo formal, en el sentido que se necesita la matriz densidad TOTAL  $\rho_I(t)$  para resolver el problema. Para eliminarlo, se introduce la *aproximacion de Born*, que consiste en suponer que las correlaciones entre el sistema y el entorno son despreciables, y por lo tanto en las escalas de tiempo que se consideran, el estado del conjunto es separable  $\rho_I(t) = \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_{B,I}(t)$ . Ademas, suponemos que el entorno es muy grande, y por lo tanto su tiempo de decoherencia es muy pequeno en comparacion con los tiempos considerados,

y por lo tanto suponemos que  $\rho_B(t) \sim \rho_B(0)$ . Aplicando estas suposiciones sobre A.11

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{1}{\hbar} \text{tr}_B[H_{int,I}(t), \rho_{S,I}(t_0) \otimes \rho_B] - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_B \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t), [H_{int,I}(t'), \rho_{S,I}(t') \otimes \rho_B]] \quad (\text{A.13})$$

Para lo que incumbe en este trabajo, nos concentraremos en situaciones donde es valida la aproximacion de Markov. La caracteristica principal de los procesos de Markov se pueden resumir en que los tiempos de correlacion del entorno son muy cortos, y en palabras mas amigables, que el entorno tiene una memoria muy corta. Esto nos permite decir que la evolucion del sistema depende unicamente del estado actual de este, y no de su historia, ya que el entorno tiene una memoria muy corta y todo lo que el estado instantaneo del sistema no nos pueda decir, se pierde. Esto nos permite eliminar la dependencia en  $t'$  que tiene la matriz dentro de la integral, sustituyendola por el tiempo actual  $t$ .

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{1}{\hbar} \text{tr}_B[H_{int,I}(t), \rho_{S,I}(t_0) \otimes \rho_B] - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_B \int_{t_0}^t dt' [H_{int,I}(t), [H_{int,I}(t'), \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B]] \quad (\text{A.14})$$

Esta expresion es local en el tiempo, y permite tratamiento analitico o numerico dependiendo de la complejidad y la forma explicita de los operadores involucrados. Sin embargo, podemos todavía seguir trabajando la expresion, para llegar a la ecuacion que usaremos, que es una ecuacion de tipo Lindblad.

Para esto, se nota que el Hamiltoniano de interaccion en la representacion de Schrödinger puede escribirse en termino de un conjunto de operadores hermiticos  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  que actuan sobre el sistema y el entorno respectivamente, de manera que

$$H_{int} = g \sum_\alpha A_\alpha \otimes B_\alpha \quad (\text{A.15})$$

En la representacion de Interaccion, estos operadores evolucionan de forma que el hamiltoniano puede escribirse en esta representacion como

$$H_{int,I} = g \sum_\alpha A_{\alpha,I}(t) \otimes B_{int,I}(t) \quad (\text{A.16})$$

con  $A_{int,I}(t) = U_S^\dagger(t) A_\alpha U_S(t)$  y  $B_{int,I}(t) = U_B^\dagger(t) B_\alpha U_B(t)$ , y reemplazando en A.14

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -\frac{g^2}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \sum_{\alpha,\beta} \langle B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t') \rangle [A_{\alpha,I}(t) A_{\beta,I}(t') \rho_{S,I}(t) - A_{\beta,I}(t') \rho_{S,I}(t) A_{\alpha,I}(t) + \text{h.c.}] \quad (\text{A.17})$$

donde  $\langle B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t') \rangle = \text{tr}_B(B_{\alpha,I}(t) B_{\beta,I}(t') \rho_B)$  son las funciones de correlacion del entorno. Se supone ademas, que el primer termino de A.14 se anula, que es equivalente a pedir que los operadores que actuan sobre el entorno se anulan en valor medio  $\langle B_{\alpha,I}(t) \rangle = 0$ . Para proseguir, se realiza un cambio de variables de integracion  $t \rightarrow t - t'$  e imponiendo que el estado del entorno es estacionario mediante la condicion  $[H_B, \rho_B] = 0$ , se tiene que

---

las funciones de correlacion son homogeneas en T

$$\langle B_{\alpha,I}(t)B_{\beta,I}(t-t') \rangle = \langle B_{\alpha,I}(t')B_{\beta,I}(0) \rangle \quad (\text{A.18})$$

Como se supuso anteriormente mediante la aproximacion de Born, las correlaciones del entorno decaen en una escala temporal corta, y esto justifica tomar  $t \rightarrow \infty$  en el limite superior de la integral.

Finalmente, la ultima aproximacion que se debe hacer es la *aproximacion secular*. Esta aproximacion consiste en despreciar terminos que resulten altamente oscilantes, y se vincula estrechamente con la aproximacion de onda rotante [?]. Para justificar esta ultima aproximacion, se considera la descomposicion espectral del Hamiltoniano del sistema  $H_S$ , y denominando  $\epsilon$  a los autovalores de  $H_S$  y  $\Pi(\epsilon)$  al proyector al estoespacio asociado a  $\epsilon$ , pueden definirse operadores

$$A(\omega) = \sum_{\epsilon-\epsilon'=\omega} \Pi(\epsilon) A_\alpha \Pi(\epsilon') \quad (\text{A.19})$$

donde la suma es sobre todos los autovalores de S cuya diferencia toma el valor fijo  $\omega$ . Una consecuencia inmediata es que en la representacion de interaccion podemos escribir  $A_{\alpha,I}(\omega) = \exp(-i\omega t) A_\alpha(\omega)$ , tal que

$$A_{\alpha,I}(t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega) \quad (\text{A.20})$$

Si introducimos explicitamente la descomposicion espectral de los operadores obtenemos

$$\dot{\rho}_{S,I} = \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\omega,\omega'} \left( \Gamma_{\alpha\beta}(\omega') [A_\alpha(\omega) A_\beta(\omega') \rho_{S,I}(t) - A_\beta(\omega') \rho_{S,I}(t) A_\alpha(\omega)] e^{-i(\omega-\omega')t} + \text{h.c.} \right) \quad (\text{A.21})$$

donde se definieron las transformadas de Fourier de las funciones de correlacion

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = g^2 \int_0^\infty dt' \langle B_{\alpha,I}(t') B_{\beta,I}(0) \rangle e^{i\omega t'} \quad (\text{A.22})$$

Se denota  $\tau_S$  cada escala tipica de evolucion intrinseca del sistema, definida por  $|\omega+\omega'|^{-1}$ . Si  $\tau_S$  es chico en comparacion con la escala  $\tau_R$  de relajacion del sistema abierto, entonces los terminos no seculares presentes en la suma A.21, pueden despreciarse los terminos para los cuales  $\omega + \omega' \neq 0$  ya que oscilan rapidamente. En consecuencia

$$\dot{\rho}_{S,I} = \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\omega} \left( \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) [A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta^\dagger(\omega) \rho_{S,I}(t) - A_\beta(\omega') \rho_{S,I}(t) A_\alpha(\omega)] + \text{h.c.} \right) \quad (\text{A.23})$$

donde se uso que  $A^\dagger(\omega) = A(-\omega)$ . El factor  $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$  es el que contiene toda la informacion sobre el entorno, y es conveniente separarlo en partes imaginaria y real, segun  $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(\omega) + iS_{\alpha\beta}(\omega)$ , lo que nos permite retomando la representacion de Schrödinger

$$\dot{\rho}_S(t) = \frac{-i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] - \frac{i}{\hbar} [H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}[\rho_S(t)] \quad (\text{A.24})$$

donde el operador hermitico  $H_{LS} = \sum_{a,b} \sum_{\omega} S_{a,b}(\omega) A_a^\dagger(\omega) A_b(\omega)$  da una contribucion hamiltoniana a la ecuacion y es usualmente llamado corrimiento Lamb, puesto que describe una renormalizacion de las energias del sistema introducida por el acoplamiento al entorno. El termino  $\mathcal{D}[\rho_S(t)]$  es el *dissipador*

$$\mathcal{D}[\rho_S(t)] = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\omega} \gamma_{a,b}(\omega) \left( A_a^\dagger(\omega) A_b(\omega), \rho_S(t) - 2A_b(\omega) \rho_S(t) A_a^\dagger(\omega) \right) \quad (\text{A.25})$$

Diagonalizando las matrices  $\gamma_{ab}(\omega)$  se obtiene la ecuacion de tipo Linblad que se utiliza para estudiar la evolucion de los sistemas:

$$\dot{\rho}_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left( 2L_{\alpha} \rho_S(t) L_{\alpha}^\dagger - L_{\alpha}^\dagger L_{\alpha}, \rho_S(t) \right) \quad (\text{A.26})$$

. Particularmente, en el marco de electrodinamica de cavidades, los dos operadores de Lindblad que contribuyen a la decoherencia son  $L_{\gamma} = \sqrt{\gamma}a$  y  $L_p = \sqrt{p}\sigma_+$ , que se refieren a la perdida de fotones por las imperfecciones de la cavidad segun la tasa  $\gamma$ , y el bombeo incoherente de los atomos segun una tasa  $p$ . Estos *superoperadores* (operadores de Lindblad) no tienen una derivacion microscopica clara, son elegidos fenomenologicamente, y se comprobo en extensivas ocaciones que describen correctamente la dinamica de sistemas dentro del marco de la electrodinamica cuantica de cavidades, como lo es el caso del modelo de Jaynes-Cummings.



---

---

## Referencias

---



---

## Referencias

---

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,in Proceedings of the IEEE, vol. 51, no. 1, pp. 89-109, Jan. 1963, doi: 10.1109/PROC.1963.1664.
- [2] Haroche, Serge, and J-M. Raimond. Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons. Oxford university press, 2006.
- [3] Viotti, Ludmila, Fernando C. Lombardo, and Paula I. Villar. "Geometric phase in a dissipative Jaynes-Cummings model: Theoretical explanation for resonance robustness."Physical Review A 105.2 (2022): 022218.
- [4] Khitrova G., Gibbs H., Kira M., Koch S. W., and Scherer A. Nature physics, 2(2):81–90,2006.
- [5] Laussy F. P., Del Valle E., and Tejedor C. Physical Review B, 79(23):235325, 2009.
- [6] Del Valle E., Laussy F. P., and Tejedor C. Physical Review B, 79(23):235326, 2009.
- [7] Carmichael H., Brecha R., Raizen M., Kimble H., and Rice P. Physical Review A, 40(10):5516,1989.
- [8] Yamamoto Y., Tassone F., and Cao H. Semiconductor cavity quantum electrodynamics,volume 169. Springer, 2003.
- [9] Laussy F. P., Del Valle E., and Tejedor C. Physical review letters, 101(8):083601, 2008.
- [10] Vera C. A., Quesada N., Vinck-Posada H., and Rodríguez B. A. Journal of Physics: Condensed Matter, 21(39):395603, 2009.
- [11] Lodahl P., Mahmoodian S., and Stobbe S. Reviews of Modern Physics, 87(2):347, 2015.
- [12] O. de los Santos-Sánchez, C. González-Gutiérrez, J. Récamier. Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms. arXiv:1607.03216 [quant-ph]
- [13] Martin B. Plenio and S. Virmani. An introduction to entanglement measures. ArXiv quant-ph/0504163, 2016. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0504163>
- [14] Berry, Michael Victor. "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes."Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences 392.1802 (1984): 45-57.

## Referencias

---

- [15] Anandan, Jeeva. "The geometric phase."Nature 360.6402 (1992): 307-313.
- [16] Tomita, Akira, and Raymond Y. Chiao. .Observation of Berry's topological phase by use of an optical fiber."Physical review letters 57.8 (1986): 937.
- [17] Carollo, Angelo, et al. "Geometric phase in open systems."Physical review letters 90.16 (2003): 160402.
- [18] Sjöqvist, Erik. .<sup>A</sup> new phase in quantum computation."Physics 1 (2008): 35.
- [19] Sjöqvist, Erik, and Magnus Hedström. "Noncyclic geometric phase, coherent states, and the time-dependent variational principle: application to coupled electron-nuclear dynamics."Physical Review A 56.5 (1997): 3417.
- [20] Jain, Sudhir R., and Arun K. Pati. .<sup>A</sup>diabatic geometric phases and response functions."Physical review letters 80.4 (1998): 650.
- [21] Pati, Arun Kumar. "Quantum superposition of multiple clones and the novel cloning machine."Physical review letters 83.14 (1999): 2849.
- [22] Zanardi, Paolo, and Mario Rasetti. "Holonomic quantum computation."Physics Letters A 264.2-3 (1999): 94-99.
- [23] Pachos, Jiannis, Paolo Zanardi, and Mario Rasetti. "Non-Abelian Berry connections for quantum computation."Physical Review A 61.1 (1999): 010305.
- [24] Pachos, Jiannis, and Paolo Zanardi. "Quantum holonomies for quantum computing."International Journal of Modern Physics B 15.09 (2001): 1257-1285.
- [25] Aharonov, Yakir, and J. Anandan. "Phase change during a cyclic quantum evolution."Physical Review Letters 58.16 (1987): 1593.
- [26] Samuel, Joseph, and Rajendra Bhandari. "General setting for Berry's phase."Physical Review Letters 60.23 (1988): 2339.
- [27] Pancharatnam, Shivaramakrishnan. "Generalized theory of interference, and its applications: Part I. Coherent pencils."Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A. Vol. 44. No. 5. New Delhi: Springer India, 1956.
- [28] Mukunda, N., and R. Simon. "Quantum kinematic approach to the geometric phase. I. General formalism."Annals of Physics 228.2 (1993): 205-268.
- [29] Mostafazadeh, Ali. "Noncyclic geometric phase and its non-Abelian generalization."Journal of Physics A: Mathematical and General 32.46 (1999): 8157.
- [30] Sjöqvist, Erik, et al. "Geometric phases for mixed states in interferometry."Physical Review Letters 85.14 (2000): 2845.
- [31] Kimble, H. Jeff. "Strong interactions of single atoms and photons in cavity QED."Physica Scripta 1998.T76 (1998): 127.

- [32] Blais, Alexandre, Steven M. Girvin, and William D. Oliver. "Quantum information processing and quantum optics with circuit quantum electrodynamics." *Nature Physics* 16.3 (2020): 247-256.
- [33] Clarke, John, and Frank K. Wilhelm. "Superconducting quantum bits." *Nature* 453.7198 (2008): 1031-1042.
- [34] Krantz, Philip, et al. .<sup>A</sup> quantum engineer's guide to superconducting qubits..<sup>A</sup>pplied physics reviews 6.2 (2019): 021318.
- [35] Krantz, Philip, et al. .<sup>A</sup> quantum engineer's guide to superconducting qubits..<sup>A</sup>pplied physics reviews 6.2 (2019): 021318.
- [36] Wendin, Göran. "Quantum information processing with superconducting circuits: a review." *Reports on Progress in Physics* 80.10 (2017): 106001.
- [37] Clerk, A. A., et al. "Hybrid quantum systems with circuit quantum electrodynamics." *Nature Physics* 16.3 (2020): 257-267.
- [38] Kubo, Y., et al. "Strong coupling of a spin ensemble to a superconducting resonator." *Physical review letters* 105.14 (2010): 140502.
- [39] Aspelmeyer, Markus, Tobias J. Kippenberg, and Florian Marquardt. Cavity optomechanics. *Reviews of Modern Physics* 86.4 (2014): 1391.
- [40] Burkard, Guido, et al. "Superconductor–semiconductor hybrid-circuit quantum electrodynamics." *Nature Reviews Physics* 2.3 (2020): 129-140.
- [41] Lachance-Quirion, Dany, et al. "Hybrid quantum systems based on magnonics..<sup>A</sup>pplied Physics Express 12.7 (2019): 070101.
- [42] Wong, Hon Man, Kai Ming Cheng, and M-C. Chu. "Quantum geometric phase between orthogonal states." *Physical review letters* 94.7 (2005): 070406.
- [43] Uhlmann, Armin. "Parallel transport and “quantum holonomy” along density operators." *Reports on Mathematical Physics* 24.2 (1986): 229-240.
- [44] Nigg, Simon E., et al. "Black-box superconducting circuit quantization." *Physical Review Letters* 108.24 (2012): 240502.
- [45] Nakamura, Yasunobu, Yu A. Pashkin, and J. S. Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box." *nature* 398.6730 (1999): 786-788.
- [46] Paik, Hanhee, et al. .<sup>O</sup>bserveration of high coherence in Josephson junction qubits measured in a three-dimensional circuit QED architecture." *Physical Review Letters* 107.24 (2011): 240501.
- [47] Rigetti, Chad, et al. "Superconducting qubit in a waveguide cavity with a coherence time approaching 0.1 ms." *Physical Review B* 86.10 (2012): 100506.

## Referencias

---

- [48] Barends, Rami, et al. "Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance." *Nature* 508.7497 (2014): 500-503.
- [49] Chang, Josephine B., et al. Improved superconducting qubit coherence using titanium nitride.. *Applied Physics Letters* 103.1 (2013): 012602.
- [50] Josephson, B. D., 1962, *Physics Letters* 1(7), 251
- [51] Schoelkopf, R. J., et al. "Qubits as spectrometers of quantum noise." *Quantum noise in mesoscopic physics* (2003): 175-203.
- [52] Rempe, Gerhard, Herbert Walther, and Norbert Klein. .*Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser.*" *Physical review letters* 58.4 (1987): 353.
- [53] Koch, Jens, et al. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box." *Physical Review A* 76.4 (2007): 042319.
- [54] Jones, Jonathan A., et al. "Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance." *Nature* 403.6772 (2000): 869-871.
- [55] Krantz, Philip, et al. .<sup>A</sup> quantum engineer's guide to superconducting qubits.. *Applied physics reviews* 6.2 (2019): 021318.
- [56] Xiang, Ze-Liang, et al. "Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems." *Reviews of Modern Physics* 85.2 (2013): 623.
- [57] Lombardo, Fernando C., and Paula I. Villar. "Geometric phases in open systems: A model to study how they are corrected by decoherence." *Physical Review A* 74.4 (2006): 042311.
- [58] Tong, D. M., et al. "Kinematic approach to the mixed state geometric phase in non-unitary evolution." *Physical review letters* 93.8 (2004): 080405.
- [59] Ripoll, Juan José García. *Quantum Information and Quantum Optics with Superconducting Circuits*. Cambridge University Press, 2022.
- [60] Jaynes, Edwin T., and Frederick W. Cummings. Comparison of quantum and semi-classical radiation theories with application to the beam maser." *Proceedings of the IEEE* 51.1 (1963): 89-109.
- [61] Griffiths, David J., and Darrell Schroeter. *Instructor's Solutions Manual: Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson education, 2005.
- [62] Tang, Zhong. .<sup>A</sup>pproach to a generalized Jaynes-Cummings model and the geometric phase." *Physical Review A* 52.5 (1995): 3448.
- [63] Yu, Ge, et al. "Geometric phase in a two energy level Jaynes-Cummings model with imaginary photon process." *International Journal of Theoretical Physics* 47 (2008): 2279-2284.

- [64] Breuer, Heinz-Peter, and Francesco Petruccione. The theory of open quantum systems. Oxford University Press on Demand, 2002.



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2023