



Entrelazamiento y fase geometrica en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo de dos atomos

Ali Martin Zynda Aiub

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2024

TEMA:	Entrelazamiento y fase geometrica en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo de dos atomos
ALUMNO:	Ali Martin Zynda Aiub
L.U. N°:	342/20
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Fernando Lombardo
CODIRECTORA:	Dra. Paula Villar
FECHA DE INICIO:	Marzo de 2024
FECHA DE FINALIZACIÓN:	Marzo de 2024
FECHA DE EXAMEN:	18 de diciembre de 2024
INFORME FINAL APROBADO POR:	

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesora de Tesis de Licenciatura

Jurado

Dedicado a mis padres, Gisela y Marcelo por darme siempre lo que necesité.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fase Geometrica	3
2.1. Régimen adiabático y fase de Berry	3
2.2. Fase de Aharonov-Anandan	4
2.2.1. Interpretación Geométrica y caso no-cíclico	5
2.3. Enfoque Cinemático	7
2.4. Ejemplo de aplicacion: Sistema de dos niveles en un campo magnético . .	8
2.5. Fases geométricas en sistemas abiertos	8
3. Modelo de Jaynes-Cummings	9
3.1. Modelo y aproximaciones	9
3.1.1. Fase geométrica en el JCM	12
3.2. Medio Kerr	13
3.3. JCM disipativo	15
3.3.1. Fase geométrica en presencia de disipación	18
4. Jaynes-Cummings de dos átomos, no lineal, medio Kerr	25
4.1. JCM de dos átomos	26
5. Fase geometrica en JCM generalizado	31
6. Conclusiones	33
A. Derivacion de las ecuaciones maestras	35

Índice de figuras

3.1.	Relación energía detuning para el modelo de Jaynes-Cummings. La diferencia de energía entre los estados de un mismo nivel para $\Delta = 0$ es $2g\sqrt{n}$.	11
3.2.	13
3.3.	Grafico de la frecuencia de Rabi $\Omega_{N,\chi}$ en funcion del detuning Δ para $N=1$ y $N=2$.	15
3.4.	Solución numérica al sistema de ecuaciones dada por la ecuación de Lindblad para el estado inicial $ e0\rangle \langle e0 $. Estos gráficos se realizaron con $\Delta = 2g$; a la izquierda se observa el regimiento de Weak Coupling con $\gamma = 0.1g$, donde el sistema átomo-cavidad esta débilmente acoplado con el entorno, y a la derecha el de Strong Coupling con $\gamma = 2g$, donde las poblaciones y coherencias decaen sin oscilar. Las lineas solidas son las poblaciones de los estados, en azul para el estado $ g0\rangle$, en rojo para $ e0\rangle$ y en amarillo $ g1\rangle$, y la linea rayada representa la coherencia entre los estados con $N=1$ ($ e0\rangle$ y $ g1\rangle$).	17
3.5.	Análisis poblacional para una cavidad con medio Kerr con $\chi = 0.5g$.	18
3.6.	Fase geométrica acumulada por un sistema con un detuning $\Delta = 0.1g$, para diferentes valores característicos del entorno. En todos los casos la tasa de bombeo es $p = 0.005g$, y se muestran diferentes valores para γ , partiendo de $\gamma = 0$ perteneciente a la linea azul oscuro que es el caso unitario, y para $\gamma = 0.01g, \gamma = 0.1g, \gamma = 0.5g$ y $\gamma = g$, correspondientes a las lineas violeta, rosa, naranja y amarilla.	19
3.7.	20
3.8.	murio el xlabel >:(Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad Δ , para $\chi = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.	20
3.9.	21
3.10.	Diferencia de fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio χ , para $\Delta = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.	22

- 3.11. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad Δ , para $\chi = g$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de pérdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. Se observa como la condición de robustez se alcanza para $\Delta/g = \chi/g = 1$ 23
- 4.1. Relación entre energía y detuning para los diferentes niveles de energía del problema. Las líneas sólidas muestran la energía de los estados del JC doble con $N=0$ (negro, sólido), $N=1$ (verde oscuro y lima, sólido) y $N=2$ (rojo, naranja, amarillo y gris; sólido). También se muestran los niveles de energía del JC de un átomo para $N=1$ (negro; rayado) y $N=2$ (rojo; rayado). Obsérvese que las energías del JC de un átomo están multiplicadas por 2. 29

Resumen

El modelo de Janyes-Cummings de un átomo es un ejemplo paradigmático en la teoría de los fundamentos e información cuántica, ya que describe de manera sencilla la interacción entre fotones y materia de manera puramente cuántica. Para extender este modelo, en el presente trabajo se consideran dos átomos interactuantes, inmersos en una cavidad que presenta no-linearidades y un medio tipo Kerr. En particular, se analizó la dinámica, la entropía y otros observables considerando el sistema aislado, y también en presencia de decoherencia. Además, se estudió la fase geométrica en ambos casos.

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Fer, porque siempre estuvo dispuesto a ayudarme y siempre se adapto a mis tiempos y mi ritmo. Gracias a el la tesis se me hizo muy llevadera y sinceramente disfrute el proceso. Tambien quiero agradecer a Pau por sus aportes, y en general a ambos por recibirme en su grupo y darme un proyecto interesante en el cual trabajar. Sin ellos no hubiese sido posible.

A mi familia, Marcelo, Gisela, Mel y Lena. A Guada. A mis amigos de la vida Nico, Gunthi, Tincho y Emi. Y a mis compañeros de la carrera, que hicieron de estos años de estudio una experiencia unica. Gracias a todos, que contribuyeron en su manera a que esta tesis se haya escrito.

INTRODUCCIÓN

FASE GEOMETRICA

Este capítulo presenta el objeto de estudio del trabajo. La fase geometrica es un observable que promete en el ambito de la información cuántica, ya que como se verá más adelante, recupera información sobre la trayectoria del sistema en el espacio de Hilbert, y en algunos casos se observa que está relacionado con el entrelazamiento. El capítulo esta estructurado de manera que en primer lugar se tratará una descripción general de las fases geométricas (FG) en el contexto de sistemas aislados, descritos consecuentemente mediante estados puros. Analizar este caso antes de centrar la atención en sistemas cuanticos abiertos permitira asimilar nociones y ganar intuición sobre las fases geométricas en el marco de una teoría formalmente más simple. A lo largo del capítulo se trabajaran expresiones validas bajo ciertas hipotesis, partiendo del caso menos general, y llegando al caso más general conocido hasta el momento, aunque la aplicación de las fases geometricas a sistemas abiertos no llego a un consenso unánime. Por lo tanto, al final del capitulo se presentará una propuesta particular, la cual se usará en los próximos capitulos.

2.1. Régimen adiabático y fase de Berry

La fase de berry ?? ludmi 1 es un fenomeno fundamental relacionado con el teorema adiabático. Esta representa la fase acumulada pot el autoestado de un Hamiltoniano $H(t)$ que varía lentamente en un ciclo, que esta relacionada con el circuito descrito por $H(t)$ en un dado espacio de parámetros.

Para ver esto, se considera un Hamiltoniano $H(R(t))$ que depende explcitamente del tiempo a travez de un parámetro $R = (R_1, R_2, \dots)$. Dado esta Hamiltoniano, formalmente se pueden encontrar los autoestados instantaneos del sistema $|\psi_n(R(t))\rangle$ que satisfacen

$$H(R(t)) |\psi_n(R(t))\rangle = E_n(R(t)) |\psi_n(R(t))\rangle \quad (2.1)$$

, suponiendo ademas que los autovalores satisfacen $E_1 < E_2 < \dots$ de forma que no hay degeneración. Se considera que la evolución temporal de un estado cualquiera $|\psi(t)\rangle$ esta dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \left| \dot{\psi}(t) \right\rangle = H(R(t)) |\psi(t)\rangle \quad (2.2)$$

Desarrollando el estado en función de los autoestados instantaneos del Hamiltoniano, se puede resolver formalmente el problema

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n(R(t))\rangle \quad (2.3)$$

los coeficientes $c_n(t)$ satisfacen:

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \left(E_n - i\hbar \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle \right) c_n(t) - i\hbar \sum_{m \neq n} \langle \psi_n | \dot{\psi}_m \rangle c_m(t).$$

En el régimen adiabático, donde el Hamiltoniano cambia lentamente en comparación con las escalas internas del sistema, se desprecia el término de acoplamiento cruzado:

$$\dot{c}_n(t) \approx -\frac{i}{\hbar} \left(E_n - i\hbar \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle \right) c_n(t).$$

El estado resultante es:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt'} e^{i\phi_n(t)} |\psi_n(R(t))\rangle,$$

donde $\phi_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(R(t')) | \nabla_R | \psi_n(R(t')) \rangle \cdot \dot{R}(t') dt'$ es la fase geométrica acumulada.

Para circuitos cerrados en el espacio de parámetros, la fase geométrica se expresa como:

$$\phi_n(C) = i \oint_C \langle \psi_n(R) | \nabla_R | \psi_n(R) \rangle \cdot dR, \quad (2.4)$$

independiente de la velocidad con que se recorre el circuito. Sin embargo, la hipótesis de este resultado es que la velocidad de la evolución sea suficientemente lenta para que se puedan despreciar las transiciones no adiabáticas a otros niveles de energía, por lo tanto este resultado no es totalmente independiente de la velocidad con la que se recorre el circuito en el espacio de parámetros.

2.2. Fase de Aharonov-Anandan

La formulación de Aharonov y Anandan permite definir una fase geométrica que es independiente de la evolución adiabática. Su propuesta se basa únicamente en la trayectoria del estado en el espacio proyectivo de rayos, sin referencia explícita al Hamiltoniano.

Considérese el espacio de Hilbert H , y dentro de este, el subespacio N_0 que contiene vectores normalizados $|\psi\rangle$. El espacio proyectivo P se define como el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación $|\psi\rangle \sim e^{i\alpha} |\psi\rangle$, estas colecciones $\xi = \{e^{i\alpha} |\psi\rangle ; 0 \leq \alpha < 2\pi\}$ denominadas rayos, agrupan en un único elemento (la clase) todos los objetos equivalentes. Cada clase de equivalencia se denomina un rayo, y el mapeo $\Pi : N_0 \rightarrow P$ proyecta un vector al rayo correspondiente.

Durante una evolución cíclica, el estado al tiempo inicial $|\psi(0)\rangle$ y al tiempo final $|\psi(T)\rangle$

pertenecen al mismo rayo, por lo que:

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\phi}|\psi(0)\rangle.$$

los estados solo pueden diferir en una fase total ϕ . Para determinar la fase geométrica, se descompone ϕ en dos contribuciones: una parte dinámica y una parte geométrica.

La relación entre el estado físico $|\psi(t)\rangle$ y su clase de equivalencia $\xi \in P$ se escribe como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{if(t)}|\xi(t)\rangle,$$

donde $f(t)$ es una función que recoge la fase acumulada. Sustituyendo esta relación en la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle,$$

se obtiene una ecuación para $f(t)$:

$$\hbar \dot{f}(t) = -\langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle + i\hbar \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle.$$

La fase total acumulada entre los tiempos 0 y T es:

$$\phi = f(T) - f(0) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle dt + \int_0^T i \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle dt.$$

Aquí, el primer término es la fase dinámica:

$$\phi_{\text{din}} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \xi(t) | H | \xi(t) \rangle dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle,$$

y el segundo término corresponde a la fase geométrica:

$$\phi_{\text{AA}} = \int_0^T i \langle \xi(t) | \dot{\xi}(t) \rangle dt. \quad (2.5)$$

Esta última expresión muestra que la fase geométrica depende únicamente de la trayectoria en el espacio proyectivo P y no del Hamiltoniano o la velocidad de evolución. Al ser independiente de estos factores, refleja una propiedad puramente geométrica de la curva trazada por el estado en P .

2.2.1. Interpretación Geométrica y caso no-cíclico

En esta sección se mostrará la interpretación geométrica y la generalización al caso no cíclico, demostrada por Samuel y Bhandari [?]ludim 4. Esta definición no requiere de la condición de ciclo cerrado, y tampoco requiere que el estado conserve su norma, como por ejemplo en una medición y colapso de la función de onda. Para esto es necesario dotar al espacio de Hilbert de geometría donde entonces la fase surge de la estructura del espacio. Para darle estructura al espacio, lo que ya hicimos antes es considerar un fibrado, donde definimos una clase de equivalencia para estados que difieren en una fase global. Para darle mayor estructura tenemos que introducir el concepto de conexión, que nos permitirá

comparar elementos pertenecientes a fibras distintas mediante una regla de transporte paralelo. Esta regla nos dice que

$$\text{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = 0 \quad (2.6)$$

Considérese una curva $C : t \in [0, T] \rightarrow |\psi(t)\rangle$ sobre N_0 , horizontal, y su vector tangente $|\dot{\psi}(t)\rangle / \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle$. La conexión natural

$$A = \frac{\text{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}{\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}, \quad (2.7)$$

transforma, frente a transformaciones $U(1)$ de gauge $|\psi(t)\rangle \rightarrow e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle$, según

$$A \rightarrow A + \dot{\alpha}(t). \quad (2.8)$$

Dado que C es horizontal por definición, la ley de transporte paralelo de la ecuación 2.6 impone que la conexión se anule a lo largo de la trayectoria del estado que le da origen. Si el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ está, además, asociado a una evolución cíclica en el sentido de Aharonov-Anandan, entonces retorna al rayo inicial en algún instante T .

Considérese, en este escenario, la integral de la conexión A sobre el camino construido a partir de la curva $|\psi(t)\rangle ; t \in [0, T]$, cerrada uniendo $|\psi(T)\rangle$ con $|\psi(0)\rangle$ sobre el rayo. Como se ha discutido, la curva $|\psi(t)\rangle$ es horizontal por definición y, por lo tanto, la conexión se anula $A = 0$ sobre ella. Por otra parte, la integral sobre el tramo vertical que cierra el camino da como resultado la diferencia de fase entre $|\psi(T)\rangle$ y $|\psi(0)\rangle$:

$$\oint \text{Adl}_{N_0} = \int_C A + \int_{\text{rayo}} A = \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle. \quad (2.9)$$

Es decir, la integral sobre el camino total (cerrado), es la diferencia de fase total entre el estado inicial y final. Por otra parte, la integral de la conexión A sobre una curva cerrada en N_0 es invariante por efecto de la ley de transformación 2.8. La holonomía de la curva $C \subset P$ asociada a la conexión A es entonces:

$$g(C) = e^{i \oint_C A} = e^{i \phi_{AA}}. \quad (2.10)$$

En el caso de una evolución no cíclica, el vector que describe el sistema no vuelve a su rayo de partida. Para este caso se establece una manera de comparar estados de diferentes fibras. Dicha comparación se hace a travez de la fase de *Pancharatnam* 1966, definida para dos estados no-ortogonales cualesquiera como

$$\phi_P = \arg \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (2.11)$$

Para hacer la generalización al caso no-cíclico, tenemos que dar un concepto de distancia, y para esto tenemos que hablar de líneas geodesicas. No vamos a meternos en detalle en esto, pero lo importante es que la fase en el caso no cíclico consiste de la diferencia entre

la fase dinámica y la fase de Pancharatnam

$$\psi_{SB} = -\psi_P - \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle \quad (2.12)$$

Este método se puede utilizar para generalizar al caso no unitario, en el sentido de un estado puro que no conserva su norma. Este tipo de evolución puede suceder cuando estamos teniendo en cuenta mediciones en el sistema, colapsos de la función de onda no conservan la norma según la regla de colapso de la mecánica cuántica. En este caso, si consideramos el estado inicial $|\psi_0\rangle$ sobre el cual se realizan mediciones sucesivas, de forma tal que la N -ésima proyección es otra vez al estado inicial, el estado final del sistema está dado por

$$|\psi_0\rangle \langle \psi_0 | \psi_{N-1} \rangle \dots \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | \psi_0 \rangle. \quad (2.13)$$

Según el criterio de Pancharatnam los estados inicial y final tienen una diferencia de fase bien definida, dado por el argumento del número complejo que acompaña al estado $|\psi_0\rangle$.

2.3. Enfoque Cinemático

En la mayoría de las discusiones sobre la fase geométrica, el punto de partida es la ecuación de Schrödinger para algún sistema cuántico particular caracterizado por un dado Hamiltoniano. Sin embargo, la fase geométrica es consecuencia de la cinemática cuántica, esto es, independiente del detalle respecto del origen dinámico de la trayectoria descrita en el espacio de estados físicos. Mukunda y Simon [5] y [67] resaltaron la independencia de la fase geométrica respecto del origen dinámico de la evolución proponiendo un enfoque cinemático en el cual la trayectoria descrita en el espacio de estados físicos es el concepto fundamental para la fase geométrica. En su desarrollo, se parte de la consideración de una curva uniparamétrica y suave $C \subset N_0$, conformada por una dada secuencia de estados $|\psi(t)\rangle$:

$$C = \{|\psi(t)\rangle \in N_0 \mid t \in [0, T] \subset \mathbb{R}\}, \quad (2.14)$$

donde no se hace ninguna suposición respecto de si C es una curva abierta o cerrada, ni del origen dinámico de la secuencia de estados. Se observa luego detenidamente la cantidad $\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle$ construida a partir de esta curva. La condición de unitariedad implica que esta cantidad sea imaginaria pura, lo que puede escribirse como

$$\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = i \operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle. \quad (2.15)$$

Por otra parte, aplicando una transformación $U(1)$ de gauge

$$C \rightarrow C' : |\psi'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle, \quad t \in [0, T], \quad (2.16)$$

la cantidad analizada transforma según

$$\operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \rightarrow \operatorname{Im} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle + \dot{\alpha}(t). \quad (2.17)$$

Lo que queremos conseguir es una funcional que sea invariante ante transformaciones $U(1)$??, es decir, toma mismos valores para curvas C y C'

$$\psi_u[C]\psi(T) - \text{Im} \int_0^T dt \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \quad (2.18)$$

Tenemos permitido definir este funcional de la curva C en el espacio de rayos, ya que es invariante ante reparametrizaciones. Algo importante de remarcar es que, si aplicamos una transformación unitaria arbitraria a nuestro estado, entonces al cambiar el Hamiltoniano tambien cambiará la curva que describe el estado inicial en el espacio de Hilbert, y por lo tanto se puede mostrar que la fase geometrica cambia. Por suerte, en el caso que la transformación no depende del tiempo, entonces se demuestra que la fase no cambia.

Hasta ahora solo tratamos con sistemas aislados. Antes de pasar a sistemas abiertos, vamos a analizar un ejemplo sencillo utilizando las diferentes definiciones, para ganar intuición y encontrar algunas explicaciones interesantes a comportamientos característicos de este observable.

2.4. Ejemplo de aplicacion: Sistema de dos niveles en un campo magnético

LO PONGO O NO LO PONGO?

2.5. Fases geométricas en sistemas abiertos

$$\phi_g[C] = \arg \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(0)\omega_k(T)} \langle \psi_k(0) | \psi_k(T) \rangle e^{-\int_0^T dt \langle \psi_k(t) | \dot{\psi}_k(t) \rangle} \right) \quad (2.19)$$

$$\phi_g[C] = \arg \langle \psi(0) | \psi_+(T) \rangle - \text{Im} \int_0^T dt \langle \psi_+(t) | \dot{\psi}_+(t) \rangle \quad (2.20)$$

MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

En este capítulo analizaremos en profundidad la dinámica y los aspectos teóricos más importantes del modelo de Jaynes-Cummings, abordando el problema tanto desde un lado teórico, como desde el lado computacional, necesario para resolver la dinámica en sistemas abiertos. Primero se trabajará en el modelo de un átomo en una cavidad, se analizarán los casos importantes, y se explicará la dinámica del problema. Esto es importante para comprender conceptualmente como interactúan fundamentalmente la materia y la luz, y nos sirve para conseguir buena intuición del problema de dos átomos. También se verá la influencia del entorno sobre la cavidad, permitiendo pérdida (o absorción) de fotones, y también el bombeo coherente que puede excitar espontáneamente al átomo.

3.1. Modelo y aproximaciones

Comencemos entonces por el paradigmático modelo de 1 átomo. El modelo de Jaynes-Cummings consiste en describir la interacción entre la materia y la luz de manera cuántica, y el experimento más sencillo consta de un átomo de dos niveles atrapado en una cavidad. La simpleza del modelo surge de las aproximaciones e hipótesis que se hacen, en primer lugar, el campo electromagnético dentro de la cavidad puede en principio tener infinitos modos, pero para simplificar se considera solo un modo. Entonces tenemos un Hamiltoniano ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_{int} \\ \hat{H}_A &= \omega \frac{\sigma_z}{2} \\ \hat{H}_C &= \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} = \epsilon \hat{n} \\ \hat{H}_{int} &= -ig(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde ϵ y ω son las frecuencias naturales de la cavidad y del átomo respectivamente. Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger son los operadores de aniquilación y creación fotónicos de la cavidad y $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es el operador de número de la cavidad, y $\hat{\sigma}_z$ es el operador de Pauli. Los estados del átomo de dos niveles los llamamos $|g\rangle$ y $|e\rangle$ al estado ground y excitado respectivamente, y con esta notación los operadores $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ son los operadores de subida y bajada atómicos. La interacción es complicada, y para simplificar lo que se hace es usar la representación de interacción, y uno encuentra que hay dos frecuencias, una que llamamos *rotante* y es la diferencia entre las frecuencias características $\epsilon - \omega$, y la otra frecuencia es la suma $\epsilon + \omega$. La aproximación de onda rotante vale cuando las frecuencias son similares $\epsilon \sim$

ω , y consta de despreciar la dinámica de los términos contrarrotantes, ya que oscilan muy rápidamente en comparación con los términos rotantes, y entonces podemos promediar los efectos de los términos rápidos. Entonces al aplicar esta aproximación, justificada cuando $\epsilon \sim \omega$ y $g \ll \epsilon, \omega$ se obtiene el hamiltoniano de JC [ludmi 49](#)

$$H_{JC} = \epsilon a^\dagger a + \omega \sigma_z/2 + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (3.2)$$

La interpretación de la interacción en este caso es clara, las dos opciones son que el átomo suba un nivel de energía y en consecuencia la cavidad pierda un fotón, o que el átomo baje un nivel, y la cavidad gane una excitación. Este Hamiltoniano conserva el número total de excitaciones $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}$. En este momento es usual aplicar una transformación unitaria $K = \exp\{-i\omega t(a^\dagger a + \sigma_z/2)\}$ sobre el Hamiltoniano que queda

$$H = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (3.3)$$

donde $\Delta = \epsilon - \omega$ es el *detunning* entre las frecuencias de la cavidad y el átomo. Un ejemplo de esto es un átomo de Rydberg metido en una cavidad [??](#), o ... [BUSCAR EJEMPLOS](#). Como el Hamiltoniano conserva la cantidad de excitaciones es oportuno agrupar los estados en función de la cantidad de excitaciones: $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$. En esta base el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques, ya que las interacciones conservan la cantidad total de excitaciones, entonces los elementos de matriz entre estados con diferente cantidad de excitaciones se corresponde

$$\begin{aligned} [H, \hat{N}] = 0 &\implies \langle N' | H \hat{N} | N \rangle = \langle N' | \hat{N} H | N \rangle \\ N \langle N' | H | N \rangle &= N' \langle N' | H | N \rangle \\ \implies \langle N' | H | N \rangle &= \begin{cases} 0, & \text{si } N' \neq N \\ \langle N | H | N \rangle, & \text{si } N' = N \end{cases} \end{aligned}$$

donde $|N\rangle$ es un estado con N excitaciones totales. Entonces para resolver el problema solo tenemos que mirar el subespacio de 2x2 de n excitaciones, cuyo Hamiltoniano es

$$H_n = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Resolvemos el problema de autovalores y autovectores y obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi_-^n\rangle &= \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n\rangle - \sin \frac{\theta_n}{2} |e, n-1\rangle \\ |\psi_+^n\rangle &= \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $E_\pm^n = \pm \frac{\Omega_n}{2}$ las autoenergías y $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}$ la frecuencia de Rabi del sistema, $\cos \theta_n = \frac{\Delta}{\Omega_n}$ modulando la superposición de estados. En la figura [3.1](#) se observan las curvas de energía en función del detunning para diferentes niveles. Lo primero que tenemos que observar es que en el caso resonante, es decir $\Delta = 0$, los autoestados del sistema son los

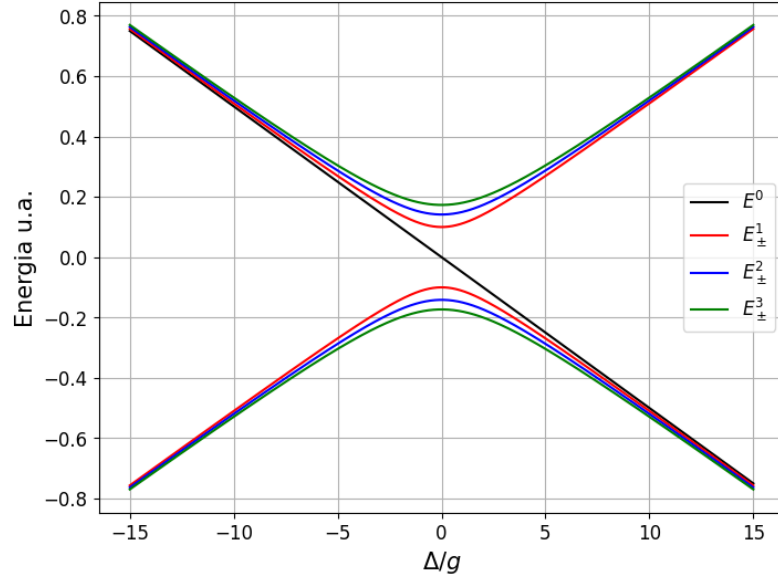


Figura 3.1. Relación energía detuning para el modelo de Jaynes-Cummings. La diferencia de energía entre los estados de un mismo nivel para $\Delta = 0$ es $2g\sqrt{n}$.

estados máximamente entrelazados de Bell

$$|\psi_{\pm}^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gn\rangle \pm |e, n-1\rangle) \quad (3.6)$$

y la diferencia de energía entre los autoestados es $\Delta E^n = E_+^n - E_-^n = 2g\sqrt{n}$. En el caso muy lejos de resonancia podemos asumir que $\Delta \gg g$, y entonces los autoestados coinciden en este límite con los estados de la base,

$$\begin{aligned} |\psi_+^n\rangle &= |e, n-1\rangle \\ |\psi_-^n\rangle &= |g, n\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

Acá hay una sutileza, y es que si $\Delta > 0$, entonces $|e, n-1\rangle$ es el estado de mayor energía y la notación coincide con la energía, pero si $\Delta < 0$ entonces el estado $|\psi_+^n\rangle$ es el estado de menor energía. Un efecto interesante es que en el caso de alta desintonía, podemos calcular la diferencia entre la energía del autoestado exacto del Hamiltoniano $|\psi_{\pm}^n\rangle$ y la energía asintótica a la que tiende, que es la energía de los estados de la base $|g, n\rangle, |e, n-1\rangle$. Esta diferencia ... **VOLVER A ESTO Y VER SI DEJARLO O SACARLO. EVENTUALMENTE COMPLETAR.**

$$\Delta E_{e,n-1} = E_+^n - E_{e,n-1}^{(0)} = \frac{g^2}{\Delta} n \Delta E_{g,n} = E_-^n - E_{g,n}^{(0)} = -\frac{g^2}{\Delta} n \quad (3.8)$$

El resultado importante de esta diferencia de energías es que aun en ausencia de fotones en la cavidad $n = 0$, hay una diferencia entre las energías entre el Hamiltoniano del átomo, y del H_{JC} . Este efecto es el *Lamb Shift* y nos dice que el vacío electromagnético induce un corrimiento en la energía de los estados. Esto es importante notarlo, porque para el caso de dos átomos también está manifestado.

3.1.1. Fase geométrica en el JCM

Vamos a analizar la fase de Berry y la fase geométrica en la aproximación cinemática.

Fase de Berry

Para ver la fase de berry tenemos que tener un parámetro de control en el Hamiltoniano, el cual varía lentamente. Para esto necesitamos aplicar una transformación unitaria de corrimiento de fase al Hamiltoniano original 3.3 $R = \exp\{-i\Omega a^\dagger a\}$, que queda

$$H = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + g(a^\dagger\sigma_e^{-i\Omega} - +a\sigma_+e^{i\Omega}) \quad (3.9)$$

que ahora depende explícitamente del parámetro externo de control Ω . Los autoestados de este nuevo Hamiltoniano se obtienen aplicando esta misma transformación sobre los autoestados del Hamiltoniano original. Si el parámetro de control varia lentamente entre 0 y 2π , entonces estamos dentro de las hipótesis propuestas por Berry, y podemos calcular la fase de Berry mediante la ecuación 2.4:

$$\psi_a^n = i \oint_C d\Omega \langle \psi_\pm^n | R(\Omega)^\dagger \frac{d}{d\Omega} | \psi_\pm^n \rangle = \pi(1 \pm \cos(\theta_n)) \quad (3.10)$$

que es no trivial incluso para $n = 0$, lo que nos dice que incluso el vacío electromagnetico introduce una corrección en la fase de Berry.

Aproximación Cinemática

Para comparar ambos métodos, ahora vamos a calcular la fase geométrica utilizando la aproximación cinemática aunque este abordaje es más general de lo necesario en este caso. Si se considera que el estado inicial es un atuoestado del Hamiltoniano, como los estados $|\psi_\pm^n\rangle$, entonces la fase geométrica en este caso se anula. Pero si se considera un estado inicial, por ejemplo $|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle$, entonces el estado a tiempo t resulta

$$|\psi(t)\rangle = (\cos^2 \theta_n e^{-iE_+^n t} + \sin^2 \theta_n e^{iE_+^n t}) |e, n\rangle - i \sin \theta_n \sin(E_+^n t) |g, n+1\rangle \quad (3.11)$$

La fase geométrica acumulada 2.18 es

$$\phi_u[C] = -\pi(1 - \cos \theta_n) \frac{t}{T} + \arg \left\{ 1 + e^{2\pi i \frac{t}{T}} \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n + \Delta} \right\} \quad (3.12)$$

con $T = \frac{2\pi}{\Omega_n}$ es un período correspondiente a la frecuencia de Rabi Ω_n . Esta expresión y la anterior 3.11, deberían coincidir cuando $t = T$, que se corresponde con un ciclo cerrado. En este caso ($t = T$) se obtiene

$$\phi_u = -\pi(1 - \cos \theta_n) \quad (3.13)$$

La diferencia de signos se puede explicar comparando las curvas descritas por la esfera de Bloch para cada evolución.

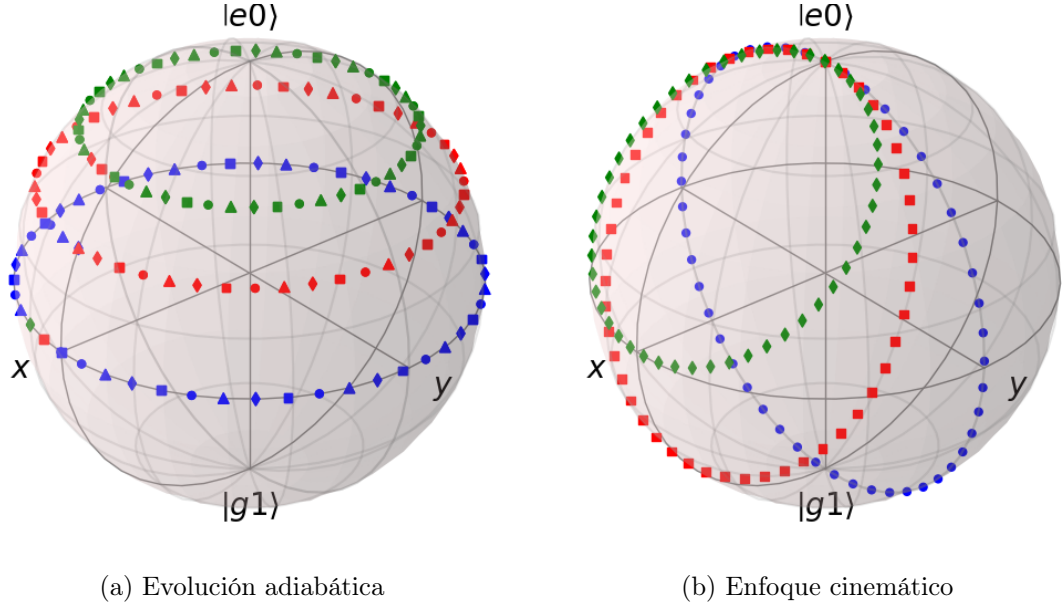


Figura 3.2

En el caso 3.11, correspondiente a la figura 3.2a, los autoestados son los autoestados $R(\Omega) |\psi_{\pm}^n\rangle = e^{-i\Omega\hat{n}} |\psi_{\pm}^n\rangle$, entonces al variar $\Omega \in [0, 2\pi]$ la trayectoria es simplemente un círculo en la esfera de Bloch. En cambio, en el segundo caso, si preparamos el sistema inicialmente en el estado $|e, n\rangle$ y lo dejamos evolucionar por la acción de H durante un tiempo, la trayectoria ahora no son círculos horizontales en la esfera, sino que parten del polo norte, que es el estado $|e, n\rangle$, y luego hace una trayectoria ovalada, para finalmente volver al punto inicial de partida a un tiempo $t = T$. La diferencia en el signo se explica a través de la transformación que nos lleva de una curva a la otra. Para esto, necesitamos de una rotación rígida, y una inversión de la parametrización, por su parte, esta ultima, introduce un signo negativo, cosa que se ve claramente en la ecuación 3.12 al cambiar $t \rightarrow -t$.

3.2. Medio Kerr

Ahora que ya se trabajó el caso mas sencillo, se comienza a estudiar casos mas generales. La primera generalización que se hará es agregar un medio no lineal. Este medio se lo conoce como medio Kerr, y lo que hace es agregar un término en el Hamiltoniano de la cavidad, que pasa de ser 3.1

$$H_C = \epsilon\hat{n} \rightarrow H_C^{\text{Kerr}} = \epsilon\hat{n}\left(1 - \frac{\chi}{\epsilon}\right) \quad (3.14)$$

donde χ es el parámetro que caracteriza al medio de la cavidad Kerr. Si se realizan nuevamente los mismos pasos, se arriba a las mismas conclusiones sobre la forma del Hamiltoniano, y se tiene que

$$H = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \chi\hat{n}^2 + g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- - \hat{a}\hat{\sigma}_+) \quad (3.15)$$

y en forma matricial, en el subespacio de n excitaciones $\{|gn\rangle, |e, n-1\rangle\}$

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} + \chi n^2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \frac{\Delta}{2} + \chi(n-1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Resolviendo, se obtiene que ahora los autovectores son

$$|\psi_{\pm}^n\rangle = \frac{1}{N_{\pm}} \left(\left(-\frac{\Delta}{2} + \chi(n-1/2) \mp \frac{\Omega_{n,\chi}}{2} \right) |gn\rangle + g\sqrt{n} |e, n-1\rangle \right) \quad (3.17)$$

donde $\Omega_{n,\chi} = \sqrt{(\chi(n-1/2) - \Delta)^2 + 4g^2n}$, $N_{\pm} = \sqrt{(-\frac{\Delta}{2} + \chi(n-1/2) \mp \Omega_{n,\chi}/2)^2 + g^2n}$, y las autoenergías son

$$E_{\pm}^n = \chi(n - \frac{1}{2})^2 + \frac{\chi}{4} \pm \frac{\Omega_{n,\chi}}{2} \quad (3.18)$$

Se puede ver que el resultado con $\chi = 0$ se reduce al caso visto anteriormente, que representa una cavidad con un medio lineal.

Si uno quiere resolver la dinámica de este problema para un estado inicial cualquiera, lo que tenemos que hacer es desarrollar este estado inicial en función de los autoestados del problema, entonces tendríamos para un estado arbitrario con un numero total de excitaciones definido, que suponemos igual a 1 por simplificación (la generalización es inmediata):

$$|\psi\rangle(t) = U(t)(\langle\psi_+^1|\psi(0)\rangle|\psi_+^1\rangle + \langle\psi_-^1|\psi(0)\rangle|\psi_-^1\rangle) = c_+e^{-iE_+t}|\psi_+\rangle + c_-e^{-iE_-t}|\psi_-\rangle \quad (3.19)$$

Lo interesante de esto es que podemos sacar de factor común alguna de las dos energías, y entonces lo importante para la evolución temporal del sistema es la diferencia entre las energías, por lo tanto, la cantidad relevante sigue siendo $\Omega_{n,\chi}$, que es la frecuencia de Rabi para medios tipo Kerr. Por otro lado, el producto interno que da lugar a los coeficientes c_{\pm} depende de χ , por lo tanto las amplitudes de probabilidad de encontrar al estado temporalmente evolucionado en algún otro estado haciendo una medición proyectiva, depende de χ . Por lo tanto, se puede decir que el medio Kerr modifica las amplitudes de oscilación de las poblaciones del estado.

Entonces se analiza la relación entre $\pm\Omega_{n,\chi}/2$ y el detuning, teniendo en cuenta que ahora el medio puede tener $\chi \neq 0$.

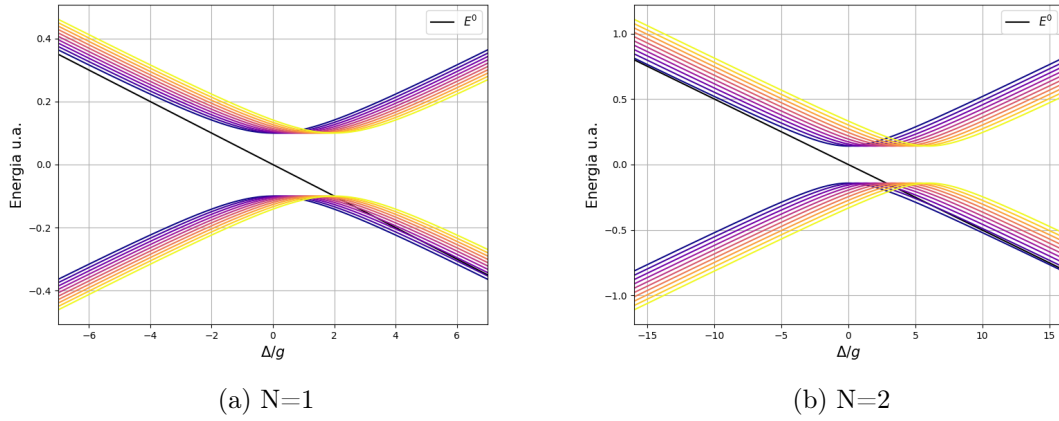


Figura 3.3. Grafico de la frecuencia de Rabi $\Omega_{N,\chi}$ en funcion del detuning Δ para $N=1$ y $N=2$.

Se observa en la figura 3.3 las diferencias entre autoenergías van cambiando para diferentes valores de χ , donde en el panel 3.3a se observa las energías para $N=1$ y en 3.3b para $N=2$, en función del detuning, y en colores se ve de mas oscuro a mas claro, como el aumento de $\chi \in [0, 2g]$ afecta a las curvas. Lo que se observa es que, al aumentar χ , las curvas se desplazan hacia la derecha en una cantidad $\chi(n - 1/2)$.

Este comportamiento se puede predecir mirando la forma de la autoenergía 3.18, ya que lo que estamos haciendo es desplazando la raíz haciendo un cambio de variables $\Delta \rightarrow \Delta - \chi(n - 1/2)$. Este desplazamiento depende del número de excitaciones N . Dados dos valores diferentes de χ nos interesa saber si al aumentar Δ , aumenta o disminuye las energías de los estados, para esto buscamos la intersección entre dos curvas con diferentes χ , que llamamos χ_1 y χ_2 , con $\chi_1 < \chi_2$. Haciendo el calculo obtenemos que la intersección es para $\Delta = (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$, es decir, si $\Delta < (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ entonces la frecuencia de χ_2 es mayor que la de χ_1 y por lo tanto oscila mas rápidamente, y viceversa si $\Delta > (2n - 1)\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$.

Ahora, habiendo entendido esto, podemos ver que el efecto del medio es modificar la frecuencia y también la amplitud de la oscilación, haciendo que la primera sea menor, y para ver que pasa con las amplitudes tengo que hacer algunas cuentas

3.3. JCM disipativo

Habiendo desarrollado el análisis de la fase geométrica acumulada por el sistema átomo-cavidad en la situación ideal de completo aislamiento, se aborda ahora el estudio para el escenario más realista en el que el mismo sistema se encuentra en interacción con un entorno. El problema se trata para la implementación específica en estructuras semiconductoras, en las que un punto cuántico (al cual se sigue, sin embargo, refiriendo como átomo o sistema de dos niveles) se ubica en una nano o micro-cavidad.

Siguiendo [?], en este capítulo se estudia en detalle la fase geométrica acumulada en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo, como caso paradigmático dentro del campo de la electrodinámica en cavidades. Se considera que los principales mecanismos por los cuales el sistema “átomo + modo” interactúa con el entorno son el flujo de fotones a través de

las paredes de la cavidad y el continuo e incoherente bombeo del sistema de dos niveles, lo que conforma un escenario frecuente en electrodinámica de cavidades semiconductoras [?, ?, ?].

Para poder modelar estos mecanismos, se emplea la ecuación maestra fenomenológica de Lindblad

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (2L_{\alpha}\rho(t)L_{\alpha}^{\dagger} - \{L_{\alpha}^{\dagger}L_{\alpha}, \rho(t)\}), \quad (3.20)$$

, despreciando otros procesos con menor influencia en la dinámica como el desfase puro o el bombeo de fotones del entorno en la cavidad, considerando además que el entorno se halla a temperatura cero. Los operadores de Lindblad

$$L_{\gamma} = \sqrt{\gamma} a \quad (3.21)$$

$$L_p = \sqrt{p} \sigma_{+} \quad (3.22)$$

, representan la pérdida de fotones y el bombeo continuo e incoherente del átomo, respectivamente, con los parámetros γ y p denominados tasa de pérdida de fotones y amplitud del bombeo.

El bombeo sobre el átomo es siempre secundario frente a la pérdida de fotones, lo cual nos da las relaciones $\frac{p}{g}, \frac{p}{\gamma} \ll 1$, y la relación entre γ y g da lugar a dos regímenes que se diferencian con claridad [?]-[?]. El régimen de acoplamiento fuerte (SC o Strong Coupling) es cuando la interacción átomo-cavidad es mas fuerte que la disipación del entorno, es decir $\gamma/g < 1$. En el caso contrario $\gamma/g > 1$ estamos en el régimen de acoplamiento débil (WC o Weak Coupling). Para no generar confusiones, hay que destacar que en general, cuando en la literatura se habla de acoplamientos fuertes y débiles, se refiere a la interacción entre las partes del mismo sistema, pero en este caso, se esta haciendo referencia a la interacción del sistema con el entorno EN COMPARACIÓN con la interacción interna del sistema.

En esta ocasión nos interesa resolver el problema restringiendonos al subespacio donde el átomo puede estar en cualquiera de sus dos estados, y nos restringimos al caso en donde la cavidad tiene 1 o 2 fotones, en consecuencia, se restringe el estudio a un subespacio truncado cuya base son los estados $\{|0\rangle = |g, 0\rangle; |1\rangle = |e, 0\rangle; |2\rangle = |- , 1\rangle\}$. Desarrollando explícitamente el sistema de ecuaciones dadas por la ecuación de Lindblad 3.20, obtenemos que los elementos ρ_{0i} quedan desacoplados de los demás:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{01} &= -\frac{p}{2}\rho_{01} + i\Delta\rho_{01} + ig\rho_{02} \\ \dot{\rho}_{02} &= -\frac{p}{2}\rho_{02} - \gamma\rho_{02} + ig\rho_{01} \end{aligned} \quad (3.23)$$

,con lo cual, si inicialmente los elementos de matriz $\rho_{0i}(0) = 0$, permanecerán así durante toda la evolución del sistema. Para hacer una analogía y realizar una comparación con el caso unitario, se estudia la condición inicial $\rho(0) = |e, 0\rangle\langle e, 0|$, que satisface esta condición, de manera que se espera que el estado $\rho(t)$ exciba una estructura diagonal por bloques. El primer bloque de 1x1 representando al estado $|0\rangle$, y luego un bloque de 2x2 que describe la dinámica entre los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{00} &= -p\rho_{00} + \gamma\rho_{22}, \\
 \dot{\rho}_{11} &= -ig(\rho_{21} - \rho_{12}) + p\rho_{00}, \\
 \dot{\rho}_{22} &= -ig(\rho_{12} - \rho_{21}) - \gamma\rho_{22}, \\
 \dot{\rho}_{12} &= -ig(\rho_{22} - \rho_{11}) - i\Delta\rho_{12} - \frac{\gamma}{2}\rho_{12}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

que se resuelven numéricamente para acceder al estado $\rho(t)$ a tiempo $t > 0$.

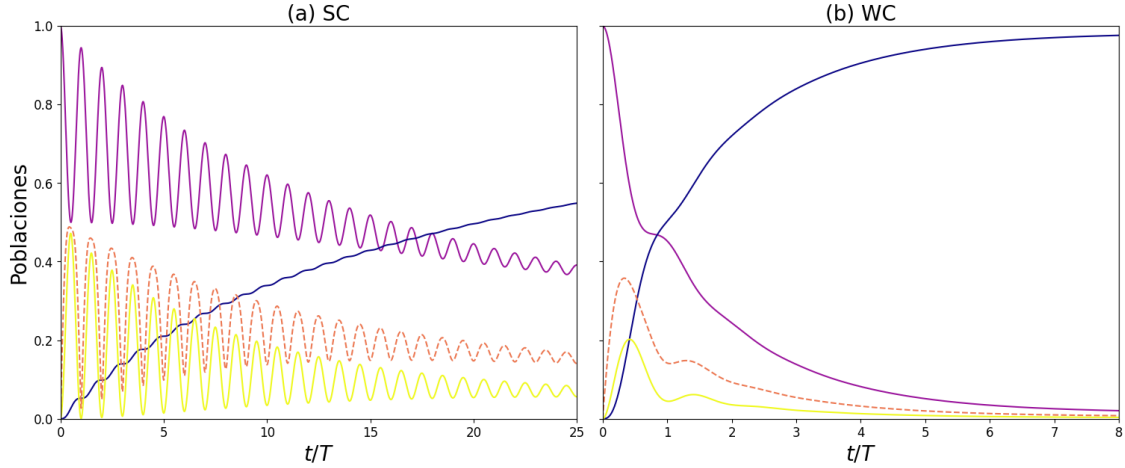


Figura 3.4. Solución numérica al sistema de ecuaciones dada por la ecuación de Lindblad para el estado inicial $|e0\rangle \langle e0|$. Estos gráficos se realizaron con $\Delta = 2g$; a la izquierda se observa el régimen de Weak Coupling con $\gamma = 0.1g$, donde el sistema átomo-cavidad está débilmente acoplado con el entorno, y a la derecha el de Strong Coupling con $\gamma = 2g$, donde las poblaciones y coherencias decaen sin oscilar. Las líneas sólidas son las poblaciones de los estados, en azul para el estado $|g0\rangle$, en morado para $|e0\rangle$ y en amarillo $|g1\rangle$, y la línea rayada representa la coherencia entre los estados con $N=1$ ($|e0\rangle$ y $|g1\rangle$).

En el panel 3.4a, se muestra el régimen de SC, donde el acoplamiento entre el átomo y la cavidad es mayor al acoplamiento con el entorno, según la relación entre los parámetros $\gamma/g = 0.1$, y en el panel 3.4b, se muestra el caso del WK. La diferencia que es interesante para el problema, es que en el primer caso, tanto las poblaciones como las coherencias presentan oscilaciones coherentes antes de decaer por la influencia del entorno. En cambio, para el caso de WK, estas oscilaciones coherentes no están presentes y el sistema llega a su estado asintótico en tiempos muy cortos. Las características de la dinámica de cada régimen, influyen profundamente en el estudio de la fase geométrica, haciendo posible únicamente su utilización en el caso de Strong Coupling, donde la dinámica presenta oscilaciones coherentes durante varios ciclos, antes de decaer, haciendo del régimen de SC el único escenario conveniente para su estudio. Antes de fundamentar esta afirmación, se realiza un estudio poblacional en el caso de una cavidad con medio Kerr.

Como se vio anteriormente, el efecto del medio Kerr sobre los autoestados y las autoenergías es, por un lado, desplazar los niveles de energía. Si se comparan las figuras 3.4 con 3.5, entonces se pueden observar dos diferencias. La primera es lo mencionado anteriormente; en el mismo tiempo, es decir entre $0 \leq t/T \leq 25$, en el caso de $\chi = 0$ se observan 25 oscilaciones, pero en el caso de $\chi = 0.5g$ solo se observan 23 oscilaciones. Esto

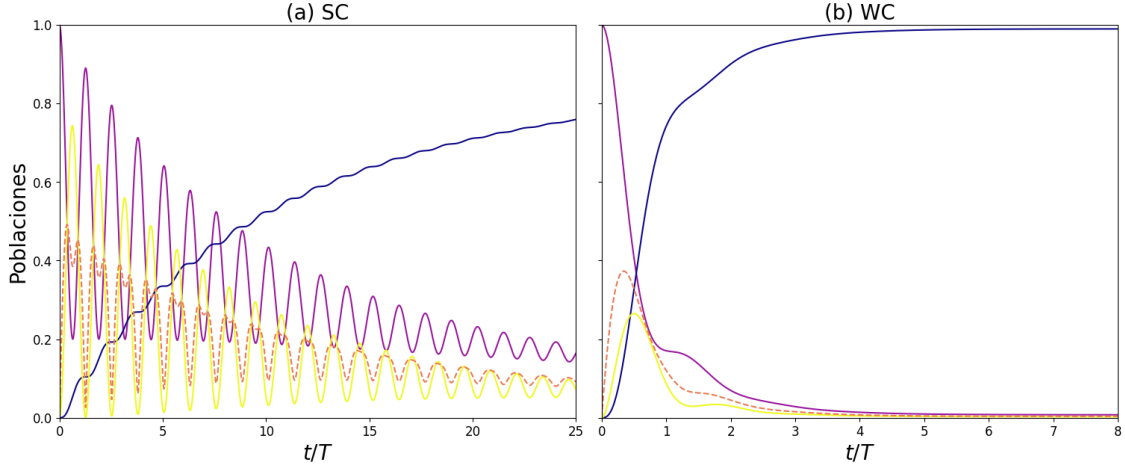


Figura 3.5. Análisis poblacional para una cavidad con medio Kerr con $\chi = 0.5g$.

se debe a la condición que se encontró al final de la sección 3.2, en este caso se cumple que $\Delta = 2g > (2n - 1) \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} = 1 \cdot \frac{0.5g}{2}$, entonces la diferencia de energías entre los autoestados disminuye al aumentar χ , y por lo tanto las oscilaciones son mas lentas para el caso de $\chi = 0.5g$ en comparación con $\chi = 0$.

3.3.1. Fase geométrica en presencia de disipación

Ahora se estudia la fase geométrica adquirida por el sistema, calculada siguiendo la definición ??, y como esta se ve modificada con respecto del valor unitario por efecto del contacto con el entorno. Como el estado inicial es puro, la definición se reduce al caso particular descrito por la ecuación ??.

Los autovalores y autovectores del operador densidad pueden escribirse formalmente diagonalizando el subespacio de 2x2 de la matriz densidad:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 & \dots \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

donde estamos nuevamente asumiendo una estructura diagonal por bloques, que se da cuando el estado inicial tiene un numero definido de excitaciones, dando lugar a dos autovectores. El de interés para utilizar la definición de la fase geométrica ??, es el autoestado

$$|\psi_+\rangle(t) = \frac{-(\rho_{22} - \epsilon_+) |e, 0\rangle + \rho_{21} |g, 1\rangle}{((\rho_{22} - \epsilon_+)^2 + \rho_{21}\rho_{12})^{1/2}} \quad (3.26)$$

con $\epsilon_+ = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + ((\rho_{11} - \rho_{22})^2 + 4\rho_{12}\rho_{21})^{1/2})$ el autovalor asociado. Recurriendo a este resultado, podemos escribir formalmente la fase geométrica en función de los elementos de matriz $\rho_{ij}(t)$:

$$\phi_g(t) = \int_0^t dt' \frac{\text{Im } \dot{\rho}_{21}\rho_{12}}{(\rho_{22} - \epsilon_+)^2 + \rho_{12}\rho_{21}} \quad (3.27)$$

En general, esta fase diferirá de aquella acumulada en una evolución unitaria de forma que puede escribirse, sin pérdida de generalidad, $\phi_g = \phi_u + \delta\phi$, con $\delta\phi$ la diferencia entre la fase unitaria y aquella modificada por la presencia del entorno. Caracterizar la corrección $\delta\phi$ permite relacionar este objeto, perteneciente a la geometría misma del espacio de Hilbert, con los efectos de disipación y decoherencia experimentados por el sistema, así como determinar bajo qué circunstancias $\delta\phi$ resulta despreciable y se puede considerar que la fase geométrica es robusta al efecto del entorno.

Dependencia con el régimen de acoplamiento

En la figura 3.6 se muestra la fase geométrica acumulada en función del tiempo, para el estado inicial puro $|e, 0\rangle$, comparando 4 casos para la relación $\gamma|g$ pertenecientes al régimen de SC, además como referencia se muestra la fase geométrica unitaria.

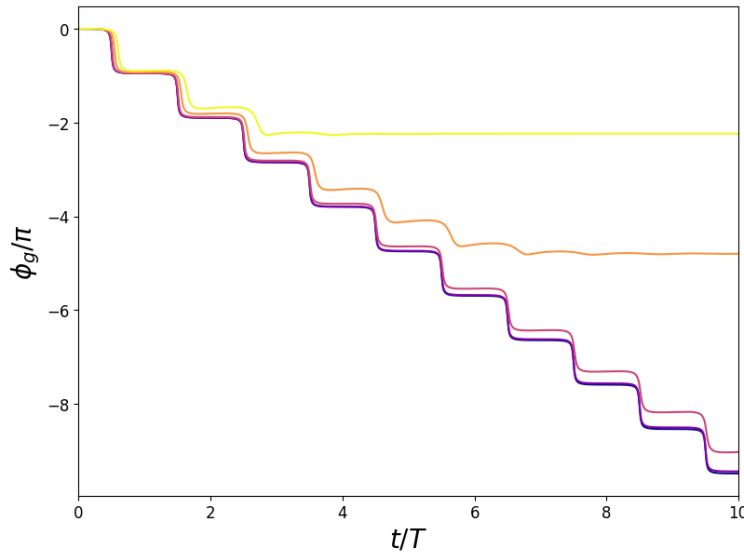


Figura 3.6. Fase geométrica acumulada por un sistema con un detuning $\Delta = 0.1g$, para diferentes valores característicos del entorno. En todos los casos la tasa de bombeo es $p = 0.005g$, y se muestran diferentes valores para γ , partiendo de $\gamma = 0$ perteneciente a la línea azul oscuro que es el caso unitario, y para $\gamma = 0.01g, \gamma = 0.1g, \gamma = 0.5g$ y $\gamma = g$, correspondientes a las líneas violeta, rosa, naranja y amarilla.

Al aumentar la interacción con el entorno, aumenta la diferencia $\delta\phi$ entre la fase acumulada con aquella correspondiente al caso unitario. Sin embargo, si el valor aumenta demasiado, la pérdida de coherencia detiene el movimiento del estado y consecuentemente la acumulación de fase. Por esto es que el estudio sobre la fase geométrica debe ser en el régimen de SC, ya que si la relación $\gamma|g \gg 1$, la fase dejara de acumularse luego de un periodo muy corto de tiempo.

Dependencia con el detuning

Ya que las amplitudes de los estados y las frecuencias de oscilación dependen de los parámetros del problema, entonces la curva que describe el estado en el espacio de rayos dependerá también de estos, heredando así la fase geométrica una dependencia con los parámetros. Manteniendo las características del entorno iguales, se estudia la dependencia de la fase geométrica con el detuning Δ . En la figura 3.7 se observa que conforme se

aumenta el detuning átomo-cavidad, la fase acumulada es menor (en valor absoluto) y se suaviza.

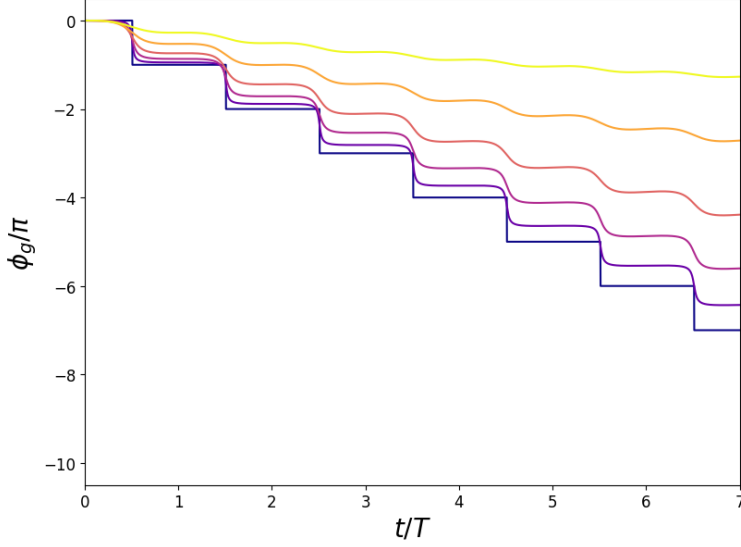


Figura 3.7

Como se discutió anteriormente, la fase geométrica en presencia del entorno se puede descomponer en la parte unitaria ϕ_u dada por la ecuación ??, más una corrección $\delta\phi$ que refleja la desviación introducida por el entorno. La dependencia de la componente unitaria en Δ/g esta explicita en la ecuación ?? ludmi eq 3.8, surge entonces la pregunta de la dependencia del termino $\delta\phi$ con respecto a los parámetros del problema, o si toda la dependencia se encuentra contenida en la parte unitaria ϕ_u . Para tratar con esta pregunta se analiza la corrección $\delta\phi$ en un instante dado (que se elije y se mantiene fijo), observándola como función del valor de Δ/g . El resultado se presenta en la figura ??, en el cual se contrasta ademas esta dependencia para tres entornos caracterizados por distintos valores de tasa de perdida de fotones γ .

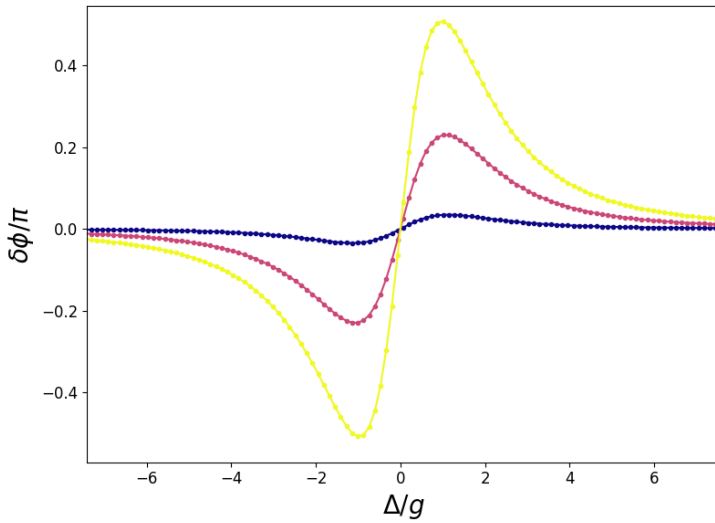


Figura 3.8. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad Δ , para $\chi = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de perdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.

Puede verse que la corrección en efecto depende del valor del detuning Δ/g , y dos aspectos resaltan. En primer lugar es que la corrección se anula, en todos los casos conside-

rados, cuando se satisface la condición de resonancia $\Delta = 0$. Este hecho resulta prometedor, insinuando que en este caso la fase geométrica ϕ_g resultaría robusta a los efectos de un entorno en el régimen de SC. La otra característica de la corrección $\delta\phi$ que se revela en la figura 3.8 es la no-monotonicidad de la corrección como función de Δ/g , que exhibe un extremo para un valor Δ/g que depende débilmente tanto en las constantes γ/g y p/g que caracterizan el entorno como en el instante t en el que se realiza la observación. De esta forma la figura 3.8 despierta un interés es doble, ya que permite identificar: (i) las condiciones en las cuales el efecto del entorno sobre la fase geométrica es mayor, acercando la posibilidad de una detección experimental y, (ii) las condiciones que mitigan, permitiendo ignorarlo, este efecto o incluso que lo eliminan por completo.

Dependencia con el medio Kerr

Ahora se considera la dependencia con el medio Kerr. Al estudiar los efectos del detuning, se considero que la cavidad era lineal, es decir $\chi = 0$. Es el objeto de estudio de esta sección ver como se modifican la fase geométrica y los resultados obtenidos para el detuning al considerar un medio Kerr. En primer lugar, se muestra la dependencia de la fase geométrica acumulada para diferentes valores de χ/g , considerando un entorno idéntico en todos los casos, y también considerando un valor fijo del detuning.

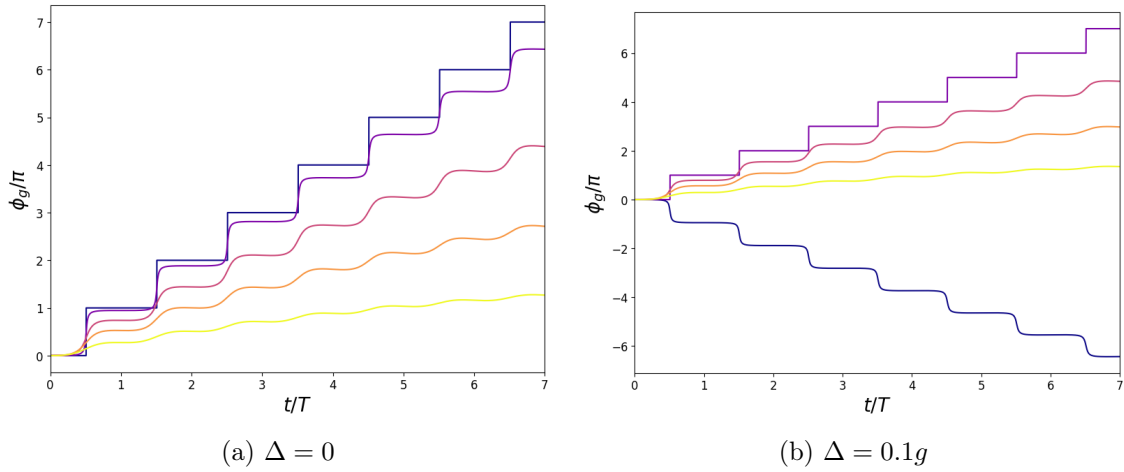


Figura 3.9

En el panel 3.9a se observa el efecto del medio sobre la fase geométrica acumulada, donde se observa que la línea azul oscuro, correspondiente al caso $\chi = 0$ se corresponde con el caso robusto en donde tenemos una acumulación por escalones. El hecho de que en este caso la fase acumulada sea positiva, se debe a que numéricamente al realizar el cálculo, hay problemas con el cero; para salvar este problema se le otorga un valor numérico muy pequeño y se ve como al tener un signo negativo en el parámetro, entonces la fase acumulada es positiva, y viceversa. Entonces se observa como al aumentar el parámetro χ , similarmente al caso del detuning, la fase acumulada es menor y se suaviza. Este comportamiento es algo esperable, ya que en la ecuación para la energía el detuning Δ y el medio χ están casi en igualdad de condiciones, en el sentido que la dependencia

funcional de la energía en estos parámetros es igual. Si se observa el panel 3.9b, donde se considero un valor de $\Delta = 0.1g$, entonces se ve como ahora el caso de $\chi = 0$ (línea azul oscuro), ya no pertenece al caso robusto, sino que esta situación se recupera cuando $\chi = 0.1g = \Delta$ (línea morada). Al seguir aumentando χ el comportamiento es igual que en el detuning. Este resultado insinúa que para la fase geométrica, el medio y el detuning también están en igualdad de condiciones. Dos preguntas son pertinentes para confirmar esta intuición. En primer lugar, hay que corroborar la dependencia de la fase geométrica en el parámetro χ , hay que realizar el estudio de la dependencia de la diferencia de fases geométricas $\delta\phi$ al igual que en el caso del detuning. En segundo lugar, queremos ver como cambia la robustez en función del detuning, si cambiamos el medio, por lo tanto se repetirá el estudio en función del detuning, pero para diferentes valores de χ .

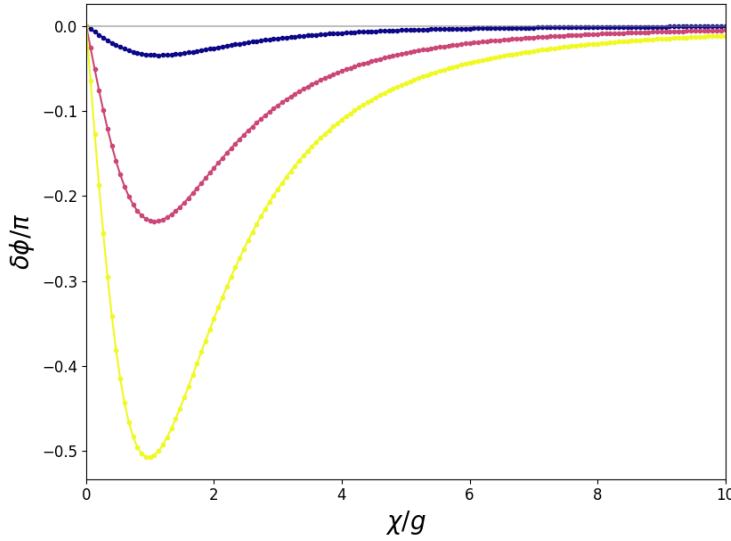


Figura 3.10. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio χ , para $\Delta = 0$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de pérdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente.

En la figura 3.10 se observa la dependencia de la diferencia en la fase geométrica acumulada en función del parámetro del medio χ . El comportamiento es el mismo que en el caso anterior, se observa que la diferencia se anula para $\chi = 0$, que coincide con el caso de robustez $\Delta = 0$. La diferencia es que ahora la fase acumulada es negativa, pero vemos que solo es una reflexión con respecto al caso anterior, esto se debe a que el detuning Δ y el parámetro del medio χ , tienen signos diferentes en todas las expresiones vistas anteriormente. Esto produce que la fase herede este signo, pero vemos que el comportamiento es el mismo; se observa también que en este caso hay un máximo no trivial que depende suavemente de los parámetros γ/g y p/g , lo cual nos dice que la dependencia en la fase geométrica en este parámetro no es trivial, y al igual que en el caso del detuning, es no-monótona, por lo tanto tiene las mismas implicancias que en el caso anterior. Lo interesante ahora es intentar de ver como se comportan ambos parámetros en conjunto. Se espera que, por los comportamiento observados hasta ahora, en realidad la dependencia general sea en $\Delta - \chi(2n - 1)$, por lo tanto, se realiza nuevamente el estudio de robustez en función del detuning, para un valor $\chi/g = 1$, que se observa en la figura 3.11.

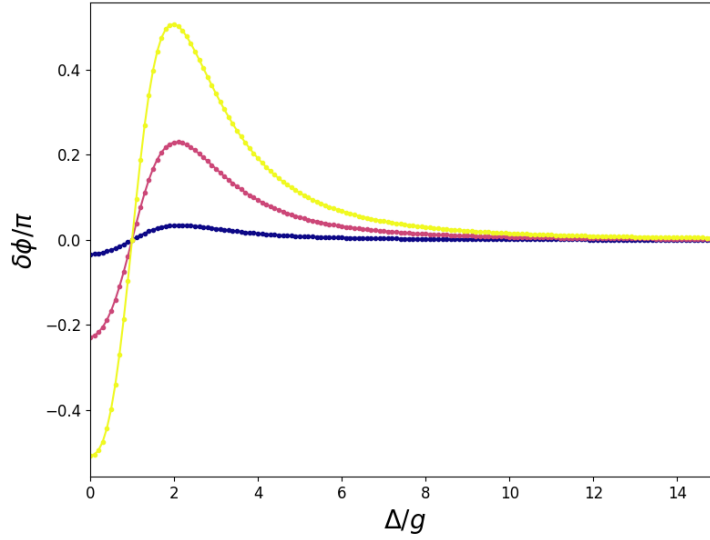


Figura 3.11. Diferencia de fase geométrica acumulada en función del detuning átomo-cavidad Δ , para $\chi = g$ y para 3 medios distintos, cuyas tasas de pérdida de fotones son $\gamma/g = 0.01g, 0.1g, 0.25g$, asignadas a los colores violeta oscuro, morado y amarillo respectivamente. Se observa como la condición de robustez se alcanza para $\Delta/g = \chi/g = 1$.

Se observa como ahora tenemos una simetría al rededor de $\Delta = g = \chi$, donde se encuentra el cero de esta relación. Esto es lo que esperábamos, ya que en este caso de $n = 1$, esperamos que la dependencia sea en $\Delta - \chi(2n - 1) \implies \Delta - \chi$, es decir, si en el caso de $\chi = 0$ vimos robustez en el caso resonante $\Delta = 0$, lo que esperamos es que los demás casos robustos también se den cuando, en general $\Delta - \chi(2n - 1) = 0$, comportamiento que se observa en la figura 3.11.

Robustez de la fase geométrica en el caso resonante

En esta sección se discute la razón detrás de la robustez en los casos estudiados anteriormente.

Como se ha mencionado, las figuras 3.8, 3.10 y 3.11, muestran el resultado notable de que la diferencia $\delta\phi$ entre la fase geométrica acumulada en una hipotética evolución unitaria y la fase geométrica acumulada por el sistema abierto se anula cuando se satisface la condición de resonancia $\Delta = 0$. El resultado sugiere que la fase geométrica es robusta a los efectos del entorno en este caso. Esta robustez puede estudiarse y explicarse en términos geométricos analizando la evolución del estado $\rho(t)$ del sistema átomo-modo y se vincula con el salto en π que exhibe la fase geométrica unitaria ϕ_u del sistema resonante, cuyo estado describe un círculo máximo de la esfera de Bloch.

Para explicar el salto en π de la fase unitaria es necesario recordar, como fue desarrollado en las secciones ?? y ??, que la fase geométrica asociada a una trayectoria unitaria no-cíclica puede entenderse como la fase geométrica asociada a una curva cerrada específica: aquella construida a partir de la trayectoria abierta original, luego cerrada mediante una curva geodésica que conecte sus extremos. Esta interpretación permite explicar un salto abrupto en π que muestra la fase geométrica acumulada en la evolución del sistema cuando el estado recorre un meridiano de la esfera de Bloch. Debido a que las geodésicas de la esfera de Bloch son, precisamente, sus círculos máximos, cuando la evolución recorre uno de éstos sin alcanzar a transitar la mitad de su longitud, la curva geodésica que debe considerarse coincide con la trayectoria de forma que la curva cerrada retorna sobre si

misma acumulando fase geométrica nula. Por el contrario, si la trayectoria descrita por el estado supera la mitad del círculo máximo, la geodésica que une sus extremos lo completa encerrando un área de 2π que corresponde a una fase geométrica $\phi_u = \pi$.

Para el caso de un sistema en interacción con el entorno, la identidad formal entre la ecuación ??(2.71) y la fase geométrica unitaria para el autoestado $|\psi_+(t)\rangle$ de la matriz densidad demanda el estudio de la curva descrita en la esfera de Bloch por (la proyección de) $|\psi_+(t)\rangle$. Lo que se observa es que para el caso resonante $|\psi_+(t)\rangle$ recorre una trayectoria que se superpone con aquella descrita por su análogo unitario pero que por efecto del entorno resulta de menor longitud (para un intervalo temporal idéntico). En un período $t \in [0, T]$ de evolución, entonces, el rayo asociado al estado $|\psi(t)\rangle$ retorna al punto inicial describiendo una trayectoria cíclica, mientras que aquél asociado a $|\psi_+(t)\rangle$ describe una curva abierta. Sin embargo, esto no afecta el valor obtenido para la fase geométrica que resulta $\phi_g = \pi$ siempre que el rayo recorra más de la mitad del círculo máximo. En consecuencia, siempre y cuando los efectos disipativos no sean lo suficientemente destructivos como para impedir que el autoestado supere el polo opuesto en un intervalo $t' \in [0, T]$, la fase geométrica acumulada en un período no se verá afectada. En este sentido, el caso resonante resulta entonces la situación ideal para realizar detecciones experimentales o implementar aplicaciones tecnológicas que requieran un escenario en que se puedan despreciar los efectos del entorno.

JAYNES-CUMMINGS DE DOS ÁTOMOS, NO LINEAL, MEDIO KERR

En este capítulo se extiende el modelo de Jaynes-Cummings presentado en el capítulo 3, agregándole nuevas cosas. Lo más importante es que ahora vamos a tener dos átomos dentro de una misma cavidad. En la literatura en general, el JCM fue extendido para considerar dos cavidades donde cada una tiene su propio átomo, y usando una condición inicial entrelazada se puede hacer interactuar ambas cavidades REFS. El camino que se tomó en este trabajo, es un tanto fuera de lo convencional ya que no hay muchos estudios sobre este sistema. El principal obstáculo que presenta este problema, es que el espacio de Hilbert crece mucho y se torna inmanejable analíticamente; como bien ya sabemos, el JCM tiene subespacios de 2 dimensiones que no se mezclan, y utilizando esta estrategia vamos a ver que en este caso tenemos subespacios de 4×4 que tampoco se mezclan en el caso unitario. Esto nos permite encontrar algunas expresiones analíticas, pero en general se utilizarán métodos numéricos para analizar la dinámica.

Este capítulo entonces seguirá un hilo conductor, partiendo desde el caso más sencillo hasta llegar a analizar cuáles son los efectos de los diferentes parámetros en el problema. Primero vamos a considerar una cavidad perfecta, es decir sin disipación, agregándole el segundo átomo, vamos a intentar de entender cuál es el efecto de este sobre el modelo de un solo átomo. Para esto haremos un análisis poblacional, y de observables como la entropía reducida, la concurrencia, las matrices de Pauli. Una vez agregado el segundo átomo, vamos a prender las interacciones de a una y vamos a analizar cuáles son sus efectos. Luego, vamos a comparar esto con el caso en donde la cavidad presenta pérdidas. Principalmente, nos centraremos en un análisis del entrelazamiento, ya que esta es la cualidad más interesante que tenemos en el ámbito de la información cuántica.

Luego, se analizará el problema para dos átomos, primero en el caso que estos no interactúan directamente entre sí, sino que lo hace indirectamente a través de la cavidad. La comparativa entre esta situación y la más común, donde los átomos interactúan mediante sus espines o sus momentos dipolares, es muy rica porque nos permite discernir con claridad cuál es el efecto de la cavidad y cuál de la interacción entre los átomos a la hora de entrelazarse e intercambiar energía. El problema de dos átomos tiene una peculiaridad al elegir las condiciones iniciales, ya que la dinámica depende de esta elección, y hay muchas diferentes configuraciones interesantes, por un lado por la gran dimensión del espacio, y por otro lado, esta la posibilidad de jugar con las simetrías. Surge así la pregunta de si es importante, o si tiene sentido, teniendo dos átomos indistinguibles en una cavidad, que la

condición inicial sea asimetrica ante intercambio.

4.1. JCM de dos átomos

En este trabajo, nos vamos a concentrar en una extension del modelo, donde vamos a ubicar dos átomos dentro de la cavidad. Estos átomos pueden interactuar entre si, y con la cavidad, y ademas agregaremos no-linealidades en el acoplamiento y en el medio. Vamos a usar un modelo de Jaynes-Cummings para describir la interacción entre el campo electromagnético y los átomos. Además supondremos que el acoplamiento depende de la cantidad de fotones y los átomos podrán interactuar entre si mediante un termino tipo Ising y otro tipo dipolo-dipolo. Recordemos que para estamos asumiendo que vale la aproximación de onda rotante ($\omega_0 \sim \omega$) y $g \ll \omega, \omega_0$. Entonces, el Hamiltoniano que describe este problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \underbrace{\hbar\omega_0 h(\hat{n})\hat{n}}_{\hat{H}_F} + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)})}_{\hat{H}_A} \\ & + \underbrace{\hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger)}_{H_{FA}} \\ & + \underbrace{2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)}}_{H_{AA}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde \hat{a} es el operador de aniquilación del fotón, ω_0 y ω son las frecuencias del fotón y del átomo respectivamente, g es la constante de acoplamiento, las constantes J y κ son los parámetros de Ising y de dipolo-dipolo para las interacciones átomo-átomo, y los operadores $\sigma^{(i)}$ son las matrices de Pauli que actúan sobre el átomo i-esimo. Finalmente, las funciones $h(\hat{n})$ y $f(\hat{n})$ son las que van a dar cuenta de la no linealidad dependiente del numero de fotones de la cavidad $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

Tomando un medio tipo Kerr la función $h(\hat{n}) = 1 + \frac{\chi}{\omega_0}\hat{n}$ [?](CITA), y la función $f(\hat{n}) = 1$ si tomamos un acoplamiento lineal, y $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$ si consideramos un acoplamiento tipo Buck-Sukumar [?](CITA)

En este punto es normal hacer una transformación unitaria $K = \exp \{-i\omega t(\hat{a}^\dagger a + \sigma_z/2)\}$ para dejar el Hamiltoniano en función del Detuning $\Delta(\sim 0)$.

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \hbar\chi\hat{n}^2 + \frac{\hbar\Delta}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)}) \\ & + \hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger) \\ & + 2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este es el Hamiltoniano con el que vamos a trabajar, asi que a partir de ahora vamos a olvidarnos del subindice I. Obsérvese que el caso de $\chi = 0$ es el caso de un medio lineal. [ACA PUEDO AGREGAR UN ESQUEMA DE COMO SERIA](#). En este esquema se ve

como sería el experimento planteado.

Este Hamiltoniano se puede resolver analíticamente para el caso de una cavidad sin pérdidas. En analogía con el caso de 1 átomo, vamos a elegir la base de N excitaciones, donde esperamos que estos subespacios queden invariantes, es decir, que el Hamiltoniano sea diagonal por bloques, pero como ahora tenemos 2 átomos, tenemos que elegir una base que respete simetrías, para N excitaciones los estados de la base son $\left\{ |ggn\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle + |gen-1\rangle), |ee, n-2\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle - |gen-1\rangle) \right\}$. En esta base, el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques y el bloque de N excitaciones queda. El problema unitario se puede resolver analíticamente. Esto está hecho en el paper de los autores *O de los Santos-Sánchez, C González-Gutiérrez and J Récamier*, titulado *Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms* [?](CITA). **Acá tengo que pasar las cuentas a latex, pero las hice en papel para ver si entendía todo.** Para resolver el problema lo primero que hacemos es notar que el Hamiltoniano conserva el número de excitaciones, es decir $[H, \hat{N}] = 0$, y en esta situación es sabido que el Hamiltoniano de JC es diagonal por bloques si elegimos convenientemente la base, esta es la que agrupa los estados con misma cantidad de excitaciones $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{\sigma}_-^{(2)}$:

$$\left\{ \begin{aligned} |\Phi_1^{(n)}\rangle &= |ggn\rangle, |\Phi_2^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle + |gen-1\rangle), |\Phi_3^{(n)}\rangle = |een-2\rangle, \\ |\Phi_4^{(n)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn-1\rangle - |gen-1\rangle) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

,donde se eligió esta combinación particular porque el último estado de la base, que es impar ante intercambio, queda desacoplado de los otros, simplificando el problema. Esto se ve al evaluar los elementos de matriz del Hamiltoniano $H_{i,j} = \langle \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j \rangle$, este queda en bloques, y el subespacio correspondiente a n excitaciones $\hat{H}^{(n)}$ es una matriz de 4x4

$$\hat{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} \hbar\chi n^2 - \hbar\Delta + \hbar J & \sqrt{2}\hbar g f(n)\sqrt{n} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar g f(n)\sqrt{n} & \hbar\chi(n-1)^2 - \hbar J + 2\hbar k & \sqrt{2}\hbar g f(n-1)\sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar g f(n-1)\sqrt{n-1} & \hbar\chi(n-2)^2 + \hbar\Delta + \hbar J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\chi(n-1)^2 - \hbar\Delta - 2\hbar k \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Vemos claramente que el estado impar ante intercambio está aislado, y entonces es autoestado del problema, y por lo tanto evoluciona solo y no se mezcla con los otros estados. Esto nos sirve porque ahora, para terminar de resolver el problema, tenemos que diagonalizar la matriz de 3x3. Cabe aclarar que esta matriz solo es válida para $n \geq 2$, ya que los subespacios con $N = 0, 1$ no tienen 4 estados. En estos casos la solución del problema de autovalores es más sencilla aún, así que solo dejaremos los resultados. A partir de ahora se usará como convención $\hbar = 1$.

Para resolver el problema de autovalores de la matriz de 3x3 utilizamos la fórmula de Cardano para conseguir las raíces triples que nos aparecen en el polinomio característico, y entonces encontramos que los autovalores son

$$E_j^{(n)} = -\frac{1}{3}\beta_n + 2\sqrt{-Q_n} \cos\left(\frac{\theta_n + 2(j-1)\pi}{3}\right) \quad (4.5)$$

para $j = 1, 2, 3$, y donde

$$\theta_n = \cos^{-1} \left(\frac{R_n}{\sqrt{-Q_n^3}} \right) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{3\gamma_n - \beta_n^2}{9} \\ R_n &= \frac{9\beta_n\gamma_n - 27\eta_n - 2\beta_n^3}{54} \\ \beta_n &= -(\chi(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2) + J + 2k) \\ \gamma_n &= (\chi(n-1)^2 - J + 2k)(x(n-2)^2 + \chi n^2 + 2J) \\ &\quad + (\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(xn^2 - \Delta + J) - 2g^2(n^{2a} + (n-1)^{2a}) \\ \eta_n &= -(\chi n^2 - \Delta + J)(\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(\chi(n-1)^2 - J + 2k) \\ &\quad + 2g^2[\chi(n-2)^2 n^{2a} + \chi n^2(n-1)^{2a} + \Delta(n^{2a} - (n-1)^{2a}) + J(n^{2a} - (n-1)^{2a})] \end{aligned}$$

donde $a = \frac{1}{2}$ se corresponde con acoplamiento lineal, es decir, $f(n) = 1$, y $a = 1$ a Buck-Sukumar $f(n) = \sqrt{n}$. Los autovalores serán reales si $Q_n^3 + R_n^2 < 0$. Con esto podemos escribir los autovectores:

$$\begin{aligned} |u_j^{(n)}\rangle &= \frac{1}{N_j^{(n)}} \left[\left((E_j^{(n)} - H_{22}^{(n)})(E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) - H_{23}^{(n)^2} \right) |\Phi_1^{(n)}\rangle \right. \\ &\quad \left. + H_{31}^{(n)}(E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) |\Phi_2^{(n)}\rangle + H_{23}^{(n)} H_{12}^{(n)} |\Phi_3^{(n)}\rangle \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Obviamente no nos olvidemos del estado $|\Phi_4^{(n)}\rangle$, que también es autoestado, con autovalor $E_4^{(n)} = \chi(n-1)^2 - J - 2k$. Para el subespacio de $N = 0$ solo tenemos un vector $|\Phi_1^{(0)}\rangle = |gg0\rangle$ y su autovalor es $E_1^{(0)} = -\Delta + J$. Para $N = 1$ tenemos 3 vectores en el subespacio, y las autoenergías son

$$E_{1,2}^{(1)} = \frac{\chi - \Delta}{2} + k \pm \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \quad (4.8)$$

$$E_3^{(1)} = -2k - J \quad (4.9)$$

y sus autovectores

$$|u_{1,2}^{(1)}\rangle = \frac{1}{N_{1,2}^{(1)}} (-\sqrt{2}g |gg1\rangle + \left(\frac{\chi - \Delta}{2} + J - k \mp \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \right) \frac{|eg0\rangle + |ge0\rangle}{\sqrt{2}}) \quad (4.10)$$

$$|u_3^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg0\rangle - |ge0\rangle) \quad (4.11)$$

Con esto, podemos resolver analíticamente la evolución temporal de cualquier estado inicial. Para esto solo tenemos que desarrollar el estado inicial en términos de los autovectores,

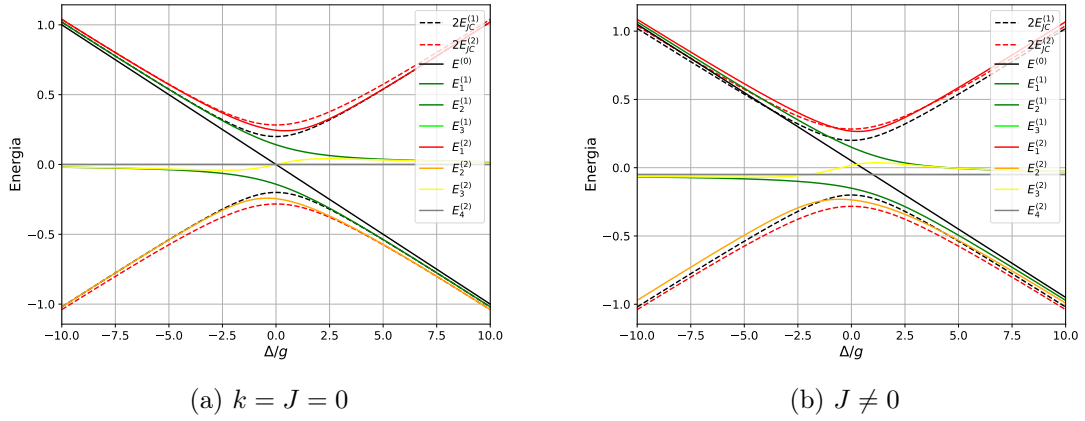


Figura 4.1. Relación entre energía y detuning para los diferentes niveles de energía del problema. Las líneas solidas muestran la energía de los estados del JC doble con $N=0$ (negro, solido), $N=1$ (verde oscuro y lima, solido) y $N=2$ (rojo, naranja, amarillo y gris; solido). También se muestran los niveles de energía del JC de un átomo para $N=1$ (negro; rayado) y $N=2$ (rojo; rayado). Obsérvese que las energías del JC de un átomo están multiplicadas por 2.

y la evolución temporal esta dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \sum_{j,n} c_j^{(n)} e^{-iE_j^{(n)}t} |u_j^{(n)}\rangle \quad (4.12)$$

donde $c_j^{(n)} = \langle u_j^{(n)} | \psi(0) \rangle$. La complejidad de estas expresiones hace complicado conseguir conclusiones interesantes, aun así, algo que se puede notar, es la diferencia fundamental que se encuentra para las energías con un número total de excitaciones $N = 1$ y $N > 1$. Si se observa el factor que esta antes de la raíz cuadrada, se ve que para el caso en que $N \geq 2$ tenemos un $\frac{1}{3}\beta_n$ que solo depende de χ , J , k y n . Mientras tanto, en el caso de $N = 1$, este factor depende del detuning Δ . Esto es interesante, ya que uno podría pensar que la formula para N excitaciones se puede generalizar para incluir $N = 0, 1$, pero la fundamental diferencia de tener mas o menos estados que interactúan entre si, da lugar a efectos fundamentalmente diferentes. Si uno mira en detalle las cuentas, se percata de que en el caso de $N = 1$ este factor Δ aparece, ya que en la matriz Hamiltoniana el unico estado con $N = 1$ que tiene un termino que incluye al detuning, es el estado $|gg1\rangle$, y los otros dos estados al ser un átomo excitado y otro no, el termino de detuning se cancela. Por lo tanto, este termino con Δ sobrevive, al contrario que en todos los demas subespacios, ya que tenemos por un lado el termino del $|ggn\rangle$ que nos aporta un Δ , y el termino de $|ee, n-2\rangle$ que nos aporta otro Δ pero con el signo cambiado, y elimina la contribución del primer estado a la energía. Esto es super interesante, ya que para $N = 1$, si aumentamos el detuning, no solo se separan los niveles de energía, sino que también hay una asimetría por el termino independiente. Para analizar esto en detalle, en la figura 4.1 se observan las energías de los diferentes niveles en función del detuning.

En esta figura 4.1a se observan las energías de los primeros niveles para el modelo de un átomo, mostrados con líneas rayadas, y de dos átomos, con líneas solidas; para esta

figura se tomaron átomos que no interactúan ($k = J = 0$) y una cavidad lineal ($\chi = 0$). Se puede ver que, si bien el modelo de dos átomos tiene estructuras mas complicadas, son similares a las de 1 átomo. En primer lugar, los estados con $N=2$ (rojo y naranja; solido) tienen una forma igual a la de JC de 1 átomo, si bien esta un poco desfasada, es interesante ver como las líneas tienen una coincidencia muy grande, recordando que en el grafico las líneas rayadas están multiplicadas por 2, esto nos da una interpretación bastante buena, y es que la energía de dos átomos no interactuantes en una cavidad es igual (o muy parecida) a dos veces la energía de 1 átomo en una cavidad. **Esto tengo que chequear con cuentas** Creo que esto se debe al corrimiento Lamb, ya que ahora tenemos dos átomos que interactúan con el vacío, entonces el corrimiento es 1 unidad mas grande en los extremos, que es justamente lo que vemos en el grafico, cuando el detuning es muy negativo, la energía tiende a ser igual a la de un JC simple con 2 excitaciones, y cuando el detuning es muy positivo, entonces tiende a la de 1 excitación; esta asimetría para $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$ se observará en resultados posteriores. Por otro lado, se puede observar lo que se había comentado anteriormente, que la energía de los estados con $N = 1$ tienen un término fuera de la raíz, que hace que sea mas asimétrico aún. Normalmente, en el JC de 1 átomo, ya que todos los niveles de energía tienen una forma funcional igual, este termino de afuera de la raíz se le puede agregar o quitar como un offset en la energía del estado fundamental, la diferencia con este caso es que, no todos los niveles de energía presentan esto, entonces si agregamos un offset, igualmente habría una diferencia.

Otra cosa interesante de notar es que si la cavidad es lineal, entonces los estados antisimétricos de diferentes excitaciones $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n\rangle - |ge, n\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n'\rangle - |ge, n'\rangle)$, están degenerados en energía.

Una vez estudiados los niveles de energía y comparados con el caso de 1 átomo, vamos a proseguir con la dinámica del problema, que en el caso unitario puede resolverse analíticamente, pero aún así, nos concentraremos en simulaciones numéricas. Para comenzar, vamos a intentar de recuperar el caso de un átomo, asimetrizando el acoplamiento uno de los dos átomos que tenemos en la cavidad, y haciendo tender este a cero, es decir, vamos a trabajar con $k = J = 0$ y vamos a agregar un parámetro adimensional α que solamente actúa sobre el átomo 2, y sirve de apantallamiento.

4.1.1. Dinámica poblacional

FASE GEOMETRICA EN JCM GENERALIZADO

CONCLUSIONES

DERIVACION DE LAS ECUACIONES MAESTRAS

Referencias



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2023