



Entrelazamiento y fase geometrica en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo de dos atomos

Ali Martin Zynda Aiub

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2024

TEMA:	Entrelazamiento y fase geometrica en un modelo de Jaynes-Cummings disipativo de dos atomos
ALUMNO:	Ali Martin Zynda Aiub
L.U. N°:	342/20
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Fernando Lombardo
CODIRECTORA:	Dra. Paula Villar
FECHA DE INICIO:	Marzo de 2024
FECHA DE FINALIZACIÓN:	Marzo de 2024
FECHA DE EXAMEN:	18 de diciembre de 2024
INFORME FINAL APROBADO POR:	

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesora de Tesis de Licenciatura

Jurado

Dedicado a mis padres, Gisela y Marcelo por darme siempre lo que necesité.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fase Geometrica	3
3. Modelo de Jaynes-Cummings	5
3.1. JCM de un atomo	5
4. Jaynes-Cummings de dos atomos, no lineal, medio Kerr	7
4.1. JCM de dos atomos	7
5. Fase geometrica en JCM generalizado	13
A. Derivacion de las ecuaciones maestras	15

Índice de figuras

- 4.1. Relacion entre energia y detunning para los diferentes niveles de energia del problema. Las lineas solidas muestran la energia de los estados del JC doble con $N=0$ (negro, solido), $N=1$ (verde oscuro y lima, solido) y $N=2$ (rojo, naranja, amarillo y gris; solido). Tambien se muestran los niveles de energia del JC de un atomo para $N=1$ (negro; rayado) y $N=2$ (rojo; rayado). Observe que las energias del JC de un atomo estan multiplicadas por 2.

Resumen

El modelo de Janyes-Cummings de un átomo es un ejemplo paradigmático en la teoría de los fundamentos e información cuántica, ya que describe de manera sencilla la interacción entre fotones y materia de manera puramente cuántica. Para extender este modelo, en el presente trabajo se consideran dos átomos interactuantes, inmersos en una cavidad que presenta no-linearidades y un medio tipo Kerr. En particular, se analizó la dinámica, la entropía y otros observables considerando el sistema aislado, y también en presencia de decoherencia. Además, se estudió la fase geométrica en ambos casos.

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Fer, porque siempre estuvo dispuesto a ayudarme y siempre se adapto a mis tiempos y mi ritmo. Gracias a el la tesis se me hizo muy llevadera y sinceramente disfrute el proceso. Tambien quiero agradecer a Pau por sus aportes, y en general a ambos por recibirme en su grupo y darme un proyecto interesante en el cual trabajar. Sin ellos no hubiese sido posible.

INTRODUCCIÓN

FASE GEOMETRICA

MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

En este capítulo analizaremos en profundidad la dinámica y los aspectos teóricos más importantes del modelo de Jaynes-Cummings, abordando el problema tanto desde un lado teórico, como desde el lado computacional, necesario para resolver la dinámica en sistemas abiertos. Primero se trabajará en el modelo de un átomo en una cavidad, se analizarán los casos importantes, y se explicará la dinámica del problema. Esto es importante para comprender conceptualmente como interactúan fundamentalmente la materia y la luz, y nos sirve para conseguir buena intuición del problema de dos átomos. También se verá la influencia del entorno sobre la cavidad, permitiendo pérdida (o absorción) de fotones, y también el bombeo coherente que puede excitar espontáneamente al átomo. Luego, se analizará el problema para dos átomos, primero en el caso que estos no interactúan directamente entre sí, sino que lo hace indirectamente a través de la cavidad. La comparativa entre esta situación y la más común, donde los átomos interactúan mediante sus espines o sus momentos dipolares, es muy rica porque nos permite discernir con claridad cuál es el efecto de la cavidad y cuál de la interacción entre los átomos a la hora de entrelazarse e intercambiar energía. El problema de dos átomos tiene una peculiaridad al elegir las condiciones iniciales, ya que la dinámica depende de esta elección, y hay muchas diferentes configuraciones interesantes, por un lado por la gran dimensión del espacio, y por otro lado, esta la posibilidad de jugar con las simetrías. Surge así la pregunta de si es importante, o si tiene sentido, teniendo dos átomos indistinguibles en una cavidad, que la condición inicial sea asimétrica ante intercambio.

3.1. JCM de un átomo

Comencemos entonces por el paradigmático modelo de 1 átomo.

JAYNES-CUMMINGS DE DOS ATOMOS, NO LINEAL, MEDIO KERR

En este capítulo se extiende el modelo de Jaynes-Cummings presentado en el capítulo 3, agregándole nuevas cosas. Lo más importante es que ahora vamos a tener dos átomos dentro de una misma cavidad. En la literatura en general, el JCM fue extendido para considerar dos cavidades donde cada una tiene su propio átomo, y usando una condición inicial entrelazada se puede hacer interactuar ambas cavidades REFS. El camino que se tomó en este trabajo, es un tanto fuera de lo convencional ya que no hay muchos estudios sobre este sistema. El principal obstáculo que presenta este problema, es que el espacio de Hilbert crece mucho y se torna inmanejable analíticamente; como bien ya sabemos, el JCM tiene subespacios de 2 dimensiones que no se mezclan, y utilizando esta estrategia vamos a ver que en este caso tenemos subespacios de 4×4 que tampoco se mezclan en el caso unitario. Esto nos permite encontrar algunas expresiones analíticas, pero en general se utilizarán métodos numéricos para analizar la dinámica.

Este capítulo entonces seguirá un hilo conductor, partiendo desde el caso más sencillo hasta llegar a analizar cuáles son los efectos de los diferentes parámetros en el problema. Primero vamos a considerar una cavidad perfecta, es decir sin disipación, agregándole el segundo átomo, vamos a intentar de entender cuál es el efecto de este sobre el modelo de un solo átomo. Para esto haremos un análisis poblacional, y de observables como la entropía reducida, la concurrencia, las matrices de Pauli. Una vez agregado el segundo átomo, vamos a prender las interacciones de a una y vamos a analizar cuáles son sus efectos. Luego, vamos a comparar esto con el caso en donde la cavidad presenta pérdidas. Principalmente, nos centraremos en un análisis del entrelazamiento, ya que esta es la cualidad más interesante que tenemos en el ámbito de la información cuántica.

4.1. JCM de dos átomos

En este trabajo, nos vamos a concentrar en una extensión del modelo, donde vamos a ubicar dos átomos dentro de la cavidad. Estos átomos pueden interactuar entre sí, y con la cavidad, y además agregaremos no-linealidades en el acoplamiento y en el medio. Vamos a usar un modelo de Jaynes-Cummings para describir la interacción entre el campo electromagnético y los átomos. Además supondremos que el acoplamiento depende de la cantidad de fotones y los átomos podrán interactuar entre sí mediante un término tipo Ising y otro tipo dipolo-dipolo. Recordemos que para estamos asumiendo que vale

la aproximación de onda rotante ($\omega_0 \sim \omega$) y $g \ll \omega, \omega_0$. Entonces, el Hamiltoniano que describe este problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \underbrace{\hbar\omega_0 h(\hat{n})\hat{n}}_{\hat{H}_F} + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)})}_{\hat{H}_A} \\ & + \underbrace{\hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger)}_{H_{FA}} + \\ & \underbrace{2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)}}_{H_{AA}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde \hat{a} es el operador de aniquilación del fotón, ω_0 y ω son las frecuencias del fotón y del átomo respectivamente, g es la constante de acoplamiento, las constantes J y κ son los parámetros de Ising y de dipolo-dipolo para las interacciones átomo-átomo, y los operadores $\sigma^{(i)}$ son las matrices de Pauli que actúan sobre el átomo i -ésimo. Finalmente, las funciones $h(\hat{n})$ y $f(\hat{n})$ son las que van a dar cuenta de la no linealidad dependiente del número de fotones de la cavidad $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

Tomando un medio tipo Kerr la función $h(\hat{n}) = 1 + \frac{\chi}{\omega_0}\hat{n}$ [?](CITA), y la función $f(\hat{n}) = 1$ si tomamos un acoplamiento lineal, y $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$ si consideramos un acoplamiento tipo Buck-Sukumar [?](CITA)

En este punto es normal hacer una transformación unitaria $K = \exp\{-i\omega t(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sigma_z/2)\}$ para dejar el Hamiltoniano en función del Detuning $\Delta(\sim 0)$.

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \hbar\chi\hat{n}^2 + \frac{\hbar\Delta}{2}(\hat{\sigma}_Z^{(1)} + \hat{\sigma}_Z^{(2)}) \\ & + \hbar g(\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(1)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{a}f(\hat{n}) + \hat{\sigma}_-^{(2)}f(\hat{n})\hat{a}^\dagger) \\ & + 2\hbar\kappa(\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)}) + \hbar J\hat{\sigma}_Z^{(1)}\hat{\sigma}_Z^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este es el Hamiltoniano con el que vamos a trabajar, así que a partir de ahora vamos a olvidarnos del subíndice I. Obsérvese que el caso de $\chi = 0$ es el caso de un medio lineal. ACA PUEDO AGREGAR UN ESQUEMA DE COMO SERIA. En este esquema se ve como sería el experimento planteado.

Este Hamiltoniano se puede resolver analíticamente para el caso de una cavidad sin pérdidas. En analogía con el caso de 1 átomo, vamos a elegir la base de N excitaciones, donde esperamos que estos subespacios queden invariantes, es decir, que el Hamiltoniano sea diagonal por bloques, pero como ahora tenemos 2 átomos, tenemos que elegir una base que respete simetrías, para N excitaciones los estados de la base son $\left\{ |gg\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n-1\rangle + |ge, n-1\rangle), |ee, n-2\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg, n-1\rangle - |ge, n-1\rangle) \right\}$. En esta base, el Hamiltoniano se diagonaliza por bloques y el bloque de N excitaciones queda. El problema unitario se puede resolver analíticamente. Esto está hecho en el paper de los autores *O de los Santos-Sánchez, C González-Gutiérrez and J Récamier*, titulado *Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms* [?](CITA). **Acá tengo que**

pasar las cuentas a latex, pero las hice en papel para ver si entendía todo. Para resolver el problema lo primero que hacemos es notar que el Hamiltoniano conserva el número de excitaciones, es decir $[H, \hat{N}] = 0$, y en esta situación es sabido que el Hamiltoniano de JC es diagonal por bloques si elegimos convenientemente la base, esta es la que agrupa los estados con misma cantidad de excitaciones $\hat{N} = \hat{n} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)}$:

$$\left\{ \begin{aligned} |\Phi_1^{(n)}\rangle &= |ggn\rangle, |\Phi_2^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn - 1\rangle + |gen - 1\rangle), |\Phi_3^{(n)}\rangle = |een - 2\rangle, \\ |\Phi_4^{(n)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|egn - 1\rangle - |gen - 1\rangle) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

,donde se eligió esta combinación particular porque el último estado de la base, que es impar ante intercambio, queda desacoplado de los otros, simplificando el problema. Esto se ve al evaluar los elementos de matriz del Hamiltoniano $H_{i,j} = \langle \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j \rangle$, este queda en bloques, y el subespacio correspondiente a n excitaciones $\hat{H}^{(n)}$ es una matriz de 4x4

$$\hat{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} \hbar\chi n^2 - \hbar\Delta + \hbar J & \sqrt{2}\hbar g f(n)\sqrt{n} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar g f(n)\sqrt{n} & \hbar\chi(n-1)^2 - \hbar J + 2\hbar k & \sqrt{2}\hbar g f(n-1)\sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar g f(n-1)\sqrt{n-1} & \hbar\chi(n-2)^2 + \hbar\Delta + \hbar J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\chi(n-1)^2 - \hbar\Delta - 2\hbar k \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Vemos claramente que el estado impar ante intercambio está aislado, y entonces es autoestado del problema, y por lo tanto evoluciona solo y no se mezcla con los otros estados. Esto nos sirve porque ahora, para terminar de resolver el problema, tenemos que diagonalizar la matriz de 3x3. Cabe aclarar que esta matriz solo es válida para $n \geq 2$, ya que los subespacios con $N = 0, 1$ no tienen 4 estados. En estos casos la solución del problema de autovalores es más sencilla aún, así que solo dejaremos los resultados. A partir de ahora se usará como convención $\hbar = 1$.

Para resolver el problema de autovalores de la matriz de 3x3 utilizamos la fórmula de Cardano para conseguir las raíces triples que nos aparecen en el polinomio característico, y entonces encontramos que los autovalores son

$$E_j^{(n)} = -\frac{1}{3}\beta_n + 2\sqrt{-Q_n} \cos\left(\frac{\theta_n + 2(j-1)\pi}{3}\right) \quad (4.5)$$

para $j = 1, 2, 3$, y donde

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{R_n}{\sqrt{-Q_n^3}}\right) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \frac{3\gamma_n - \beta_n^2}{9} \\
 R_n &= \frac{9\beta_n\gamma_n - 27\eta_n - 2\beta_n^3}{54} \\
 \beta_n &= -(\chi(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2) + J + 2k) \\
 \gamma_n &= (\chi(n-1)^2 - J + 2k)(x(n-2)^2 + \chi n^2 + 2J) \\
 &\quad + (\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(xn^2 - \Delta + J) - 2g^2(n^{2a} + (n-1)^{2a}) \\
 \eta_n &= -(\chi n^2 - \Delta + J)(\chi(n-2)^2 + \Delta + J)(\chi(n-1)^2 - J + 2k) \\
 &\quad + 2g^2[\chi(n-2)^2 n^{2a} + \chi n^2(n-1)^{2a} + \Delta(n^{2a} - (n-1)^{2a}) + J(n^{2a} - (n-1)^{2a})]
 \end{aligned}$$

donde $a = \frac{1}{2}$ se corresponde con acoplamiento lineal, es decir, $f(n) = 1$, y $a = 1$ a Buck-Sukumar $f(n) = \sqrt{n}$. Los autovalores serán reales si $Q_n^3 + R_n^2 < 0$. Con esto podemos escribir los autovectores:

$$\begin{aligned}
 |u_j^{(n)}\rangle &= \frac{1}{N_j^{(n)}} \left[\left((E_j^{(n)} - H_{22}^{(n)})(E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) - H_{23}^{(n)^2} \right) |\Phi_1^{(n)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + H_{31}^{(n)}(E_j^{(n)} - H_{33}^{(n)}) |\Phi_2^{(n)}\rangle + H_{23}^{(n)} H_{12}^{(n)} |\Phi_3^{(n)}\rangle \right]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Obviamente no nos olvidemos del estado $|\Phi_4^{(n)}\rangle$, que también es autoestado, con autovalor $E_4^{(n)} = \chi(n-1)^2 - J - 2k$. Para el subespacio de $N = 0$ solo tenemos un vector $|\Phi_1^{(0)}\rangle = |gg0\rangle$ y su autovalor es $E_1^{(0)} = -\Delta + J$. Para $N = 1$ tenemos 3 vectores en el subespacio, y las autoenergías son

$$E_{1,2}^{(1)} = \frac{\chi - \Delta}{2} + k \pm \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \tag{4.8}$$

$$E_3^{(1)} = -2k - J \tag{4.9}$$

y sus autovectores

$$|u_{1,2}^{(1)}\rangle = \frac{1}{N_{1,2}^{(1)}} (-\sqrt{2}g |gg1\rangle + \left(\frac{\chi - \Delta}{2} + J - k \mp \sqrt{2g^2 + (k - J + \frac{\Delta - \chi}{2})^2} \right) \frac{|eg0\rangle + |ge0\rangle}{\sqrt{2}})$$

(4.10)

$$|u_3^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg0\rangle - |ge0\rangle)$$

(4.11)

Con esto, podemos resolver analíticamente la evolución temporal de cualquier estado inicial. Para esto solo tenemos que desarrollar el estado inicial en términos de los autovectores, y la evolución temporal está dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \sum_{j,n} c_j^{(n)} e^{-iE_j^{(n)}t} |u_j^{(n)}\rangle$$

(4.12)

donde $c_j^{(n)} = \langle u_j^{(n)} | \psi(0) \rangle$. La complejidad de estas expresiones hace complicado conseguir conclusiones interesantes, aun así, algo que se puede notar, es la diferencia fundamental

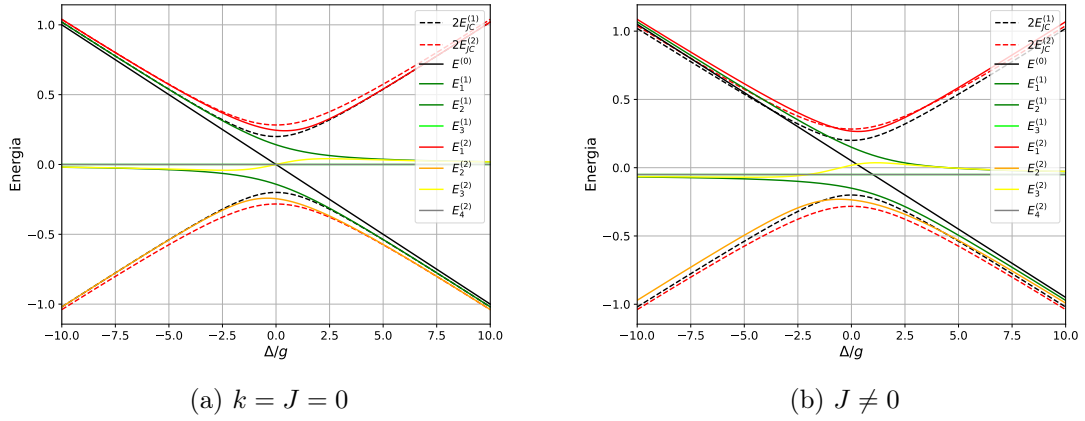


Figura 4.1. Relacion entre energia y detuning para los diferentes niveles de energia del problema. Las lineas solidas muestran la energia de los estados del JC doble con $N=0$ (negro, solido), $N=1$ (verde oscuro y lima, solido) y $N=2$ (rojo, naranja, amarillo y gris; solido). Tambien se muestran los niveles de energia del JC de un atomo para $N=1$ (negro; rayado) y $N=2$ (rojo; rayado). Observe que las energias del JC de un atomo estan multiplicadas por 2.

que se encuentra para las energias con un numero total de excitaciones $N = 1$ y $N > 1$. Si se observa el factor que esta antes de la raiz cuadrada, se ve que para el caso en que $N \geq 2$ tenemos un $\frac{1}{3}\beta_n$ que solo depende de χ , J , k y n . Mientras tanto, en el caso de $N = 1$, este factor depende del detuning Δ . Esto es interesante, ya que uno podria pensar que la formula para N excitaciones se puede generalizar para incluir $N = 0, 1$, pero la fundamental diferencia de tener mas o menos estados que interactuan entre si, da lugar a efectos fundamentalmente diferentes. Si uno mira en detalle las cuentas, se percata de que en el caso de $N = 1$ este factor Δ aparece, ya que en la matriz Hamiltoniana el unico estado con $N = 1$ que tiene un termino que incluye al detuning, es el estado $|gg1\rangle$, y los otros dos estados al ser un atomo excitado y otro no, el termino de detuning se cancela. Por lo tanto, este termino con Δ sobrevive, al contrario que en todos los demas subespacios, ya que tenemos por un lado el termino del $|ggn\rangle$ que nos aporta un Δ , y el termino de $|ee, n-2\rangle$ que nos aporta otro Δ pero con el signo cambiado, y elimina la contribucion del primer estado a la energia. Esto es super interesante, ya que para $N = 1$, si aumentamos el detuning, no solo se separan los niveles de energia, sino que tambien hay una asimetria por el termino independiente. Para analizar esto en detalle, en la figura 4.1 se observan las energias de los diferentes niveles en funcion del detuning.

En esta figura 4.1a se observan las energias de los primeros niveles para el modelo de un atomo, mostrados con lineas rayadas, y de dos atomos, con lineas solidas; para esta figura se tomaron atomos que no interactuan ($k = J = 0$) y una cavidad lineal ($\chi = 0$). Se puede ver que, si bien el modelo de dos atomos tiene estructuras mas complicadas, son similares a las de 1 atomo. En primer lugar, los estados con $N=2$ (rojo y naranja; solido) tienen una forma igual a la de JC de 1 atomo, si bien esta un poco desfasada, es interesante ver como las lineas tienen una coincidencia muy grande, recordando que en el grafico las lineas rayadas estan multiplicadas por 2, esto nos da una interpretacion

bastante buena, y es que la energía de dos átomos no interactuantes en una cavidad es igual (o muy parecida) a dos veces la energía de 1 átomo en una cavidad. **Esto tengo que chequear con cuentas** Creo que esto se debe al corrimiento Lamb, ya que ahora tenemos dos átomos que interactúan con el vacío, entonces el corrimiento es 1 unidad más grande en los extremos, que es justamente lo que vemos en el gráfico, cuando el detuning es muy negativo, la energía tiende a ser igual a la de un JC simple con 2 excitaciones, y cuando el detuning es muy positivo, entonces tiende a la de 1 excitación; esta asimetría para $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$ se observará en resultados posteriores. Por otro lado, se puede observar lo que se había comentado anteriormente, que la energía de los estados con $N = 1$ tienen un término fuera de la raíz, que hace que sea más asimétrico aún. Normalmente, en el JC de 1 átomo, ya que todos los niveles de energía tienen una forma funcional igual, este término de afuera de la raíz se le puede agregar o quitar como un offset en la energía del estado fundamental, la diferencia con este caso es que, no todos los niveles de energía presentan esto, entonces si agregamos un offset, igualmente habría una diferencia.

Otra cosa interesante de notar es que si la cavidad es lineal, entonces los estados antisimétricos están degenerados en energía. Para comenzar, vamos a intentar de recuperar el caso de un átomo, asimetrizando el acoplamiento uno de los dos átomos que tenemos en la cavidad, y haciendo tender este a cero, es decir, vamos a trabajar con $k = J = 0$ y vamos a agregar un parámetro adimensional α que solamente actúa sobre el átomo 2, y sirve de apantallamiento.

FASE GEOMETRICA EN JCM GENERALIZADO

DERIVACION DE LAS ECUACIONES MAESTRAS

Referencias



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2023