НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет ПИиКТ

Отчёт по лабораторной работе на тему:

Решение СЛАУ

Метод Гаусса

Выполнил
студент

Агнистова Алина Юрьевна

Группа № P3225

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург

2024

Описание метода и расчётные формулы

Метод Гаусса – метод решения СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений), заключающийся в последовательном исключении неизвестных из уравнения с помощью элементарных преобразований строк (приведение матрицы к треугольному виду).

Прямой ход метода Гаусса – поочерёдное преобразование уравнений системы для избавления от переменных неизвестных. На этом этапе матрица системы будет приведена к треугольному виду.

Обратный ход метода Гаусса – последовательное вычисление искомых неизвестных от последнего уравнения к первому.

Метод Гаусса применим только в случае совместности системы.

СЛАУ может иметь:

- единственное решение;
- бесконечно много решений;
- 0 решений.

СЛАУ считается совместной, когда она имеет единственное решение. По теореме Кронекера-Капелли СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A системы равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$.

$$r(A) = r(\bar{A}) = n$$

Ранг матрицы – число ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Прямой ход в методе реализуется согласно формулам:

$$d_{jk}^{k} = \frac{a_{jk}^{k}}{a_{kk}^{k}}, j = k+1, \dots, n, \text{где } a_{jk}^{k} - j - \text{й элемент матрицы } a \text{ в строке } k,\ a_{kk}^{k} - \ k - \text{й элемент матрицы } a \text{ в строке } k$$

$$a_{jj}^{k+1} = a_{jj}^{k} - d_{jk}^{k} * a_{kj}^{k}, j = k+1, \dots, n; j > k$$

$$b^{k+1}{}_{j} = b_{j}^{k} - d_{jk}^{k} * b_{k}^{k}, \text{где } b_{j}^{k} \text{ и } b_{k}^{k} - \text{свободные члены системы}$$

Формулы применяются последовательно и пошагово преобразуют матрицу системы к треугольному виду.

Обратный ход реализуется по формуле:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}, \text{где } \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j - \text{сумма произведений элементов строки матрицы на уже найденные значения неизвестных}$$

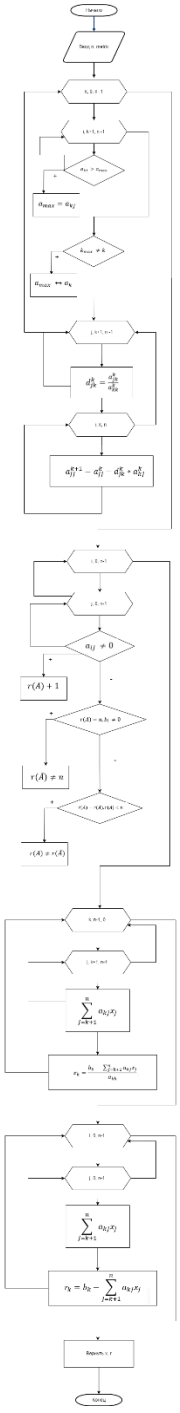
Таким образом на этом этапе будут вычислены все неизвестные.

После того, как решение найдено следует оценить его погрешность. Одна из величин, характеризующая степень отклонения полученного решения от точного – невязка.

Невязка – разность между правой и левой частями уравнений при подстановке в них полученных неизвестных. Важно учитывать, что при расчёте невязки рассматривается исходная матрица системы, а не преобразованная методом Гаусса. Определяется по формуле:

$$r_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j$$

Блок-схема реализованного метода



Код метода

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <cmath>

using namespace std;
bool isSolutionExists = true;
string errorMessage = "";

bool hasSolution(int n, vector<vector<double>> matrix) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int zeroes = 0;
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (matrix[i][j] == double(0)) {
                zeroes++;
            }
        }
        if (zeroes == n && matrix[i][n] != double(0)) {
            return false;
        }
        else if (zeroes && matrix[i][n] == double(0)) {
            return false;
        }
    }
    return true;
}

vector<double> solveByGauss(int n, vector<vector<double>> matrix) {
    vector<double> x(n);
    vector<double> r(n);
    vector<vector<double>> originalMatrix = matrix;
    double d = 0;
    //Прямой ход
    for (int k = 0; k < n; k++) {
        double maxEl = fabs(matrix[k][k]);
        int idx = k;
        for (int i = k + 1; i < n; i++){
            if (fabs(matrix[i][k]) > maxEl){
                maxEl = fabs(matrix[i][k]);
                idx = i;
            }
        }
        if (idx != k){
            swap(matrix[k], matrix[idx]);
        }
        for (int j = k + 1; j < n; j++) {
            d = matrix[j][k] / matrix[k][k];
            for (int i = k; i <= n; i++) {
                matrix[j][i] = matrix[j][i] - d * matrix[k][i];
            }
        }
    }
    if (!hasSolution(n, matrix)) {
        isSolutionExists = false;
        errorMessage = "The system has no roots of equations or has an
infinite set of them.";
        return {};
    }

    //Обратный ход
    double s;
    for (int k = n - 1; k >= 0; k--) {
```

```
            s = 0;
            for (int j = k + 1; j < n; j++) {
                s += matrix[k][j] * x[j];
            }
            x[k] = (matrix[k][n] - s) / matrix[k][k];

        }
        //Расчёт невязок
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            double a = 0.0;
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                a = a + originalMatrix[i][j] * x[j];
            }
            r[i] = originalMatrix[i][n] - a;
        }


        x.insert(x.end(), r.begin(), r.end());
        return x;
    }
```

Примеры и результаты работы программы

Во всех примерах расчёт невязок не входит в сравнение результатов, так как в нашем случае невязки зависят от написанного программного кода.

Пример 1

Выбранный случай: Матрица, имеющая единственное решение.

Предполагаемый результат:

2
3
-1

Входные данные:

a			b	n
2	1	-1	8	3
-3	-1	2	-11	
-2	1	2	-3	

Выходные данные:

2
3
-1

Пример 2

Выбранный случай: Несовместная матрица.

Предполагаемый результат: Сообщение о невозможности вычисления.

Входные данные:

a			b	n
1	1	1	3	3
2	2	2	6	
1	-1	1	2	

Выходные данные: Сообщение о невозможности вычисления.

```
3
1 1 1 3
2 2 2 6
1 -1 1 2
The system has no roots of equations or has an infinite set of them.

Process finished with exit code 0
```

Пример 3

Выбранный случай: Матрица с бесконечным числом решений.

Предполагаемый результат: Сообщение о невозможности вычисления.

Входные данные:

a		b	n
1	2	3	2
2	4	6	

Выходные данные: Сообщение о невозможности вычисления.

```
2
1 2 3
2 4 6
The system has no roots of equations or has an infinite set of them.

Process finished with exit code 0
```

Пример 4

Выбранный случай: Матрица, где в каждом строке только один ненулевой элемент.

Предполагаемый результат:

4
3
2

Входные данные:

a			b	n
0	0	1	2	3
0	1	0	3	
1	0	0	4	

Выходные данные:

4
3
2

Пример 5

Выбранный случай: Матрица с нулевым коэффициентом при ведущем элементе.

Предполагаемый результат:

0
-1
2

Входные данные:

a			b	n
0	2	3	4	3
5	6	7	8	
9	10	11	12	

Выходные данные:

2.1711e-15
-1
2

Проанализировав результаты запуска реализованного метода, можно сделать вывод, что код некорректно работает при случае матрицы с нулевым коэффициентом при ведущем элементе (пример 5), что вызвано точности вычислений с помощью программы, так как полученный результат можно считать числом равным нулю.

Для оценки метода приведена таблица сравнения метода Гаусса с методом Гаусса с выбором главного элемента и методом Гаусса-Зейделя:

	Метод Гаусса	Метод Гаусса с выбором главного элемента	Метод Гаусса-Зейделя
Описание	Прямой метод, приводящий матрицу к треугольному виду и последующим обратным ходом для нахождения решений.	Отличен от метода Гаусса тем, что на каждом шаге выбирается максимальный (абсолютно) элемент в столбце для повышения численной стабильности.	Итерационный метод, использующий предыдущие приближения для вычисления новых значений.
Вычислительная сложность	Средняя (эффективен для небольших и средних систем, возможны ошибки округления)	Средняя (численно более стабилен, но требует дополнительных вычислений)	Высокая (требует хорошего начального приближения)
Применимость	Системы с точными данными.	Системы, где требуется высокая численная стабильность.	Системы, где допустимы приближённые решения.
Численная стабильность	Возможны проблемы округления.	Высокая	Может быть нестабильным для некоторых типов матриц.

Таким образом, метод Гаусса будет оптимальным в случаях, когда допускается численная нестабильность и расчёты ведутся на системах маленького и среднего размеров. В случаях, когда численная стабильность должна быть высокой лучше отдать предпочтение методу Гаусса с выбором главного элемента. Метод Гаусса-Зейделя же чаще всего применяется для больших и разреженных систем, где использование итерационных методов и приближённых решений является допустимым.

Метод Гаусса – классический метод решения СЛАУ. Метод сохраняет высокий уровень эффективности для небольших и средних систем, однако может стать численно нестабильным из-за возможного деления на малые числа, что может привести к аккумуляции ошибок округления и неточного итоговому результату.

Временная алгоритмическая сложность складывается из нескольких действий: прямой ход метода, обратный ход метода, расчёт невязок, проверка матрицы на совместность. При прямом ходе используется цикл, в который вложен вложенный цикл, внутри каждого цикла мы проходим по всем элемента матрицы размера n, что даёт нам алгоритмическую сложность $O(n^3)$. При обратном ходе для каждого вычисления переменной x_i мы суммируем произведения найденных решений и получаем результат, это реализовано за счёт вложенного цикла, количество операций внутри каждого из вложенных n, тогда алгоритмическая сложность составляет $O(n^2)$. Расчёт невязок также имеет алгоритмическую сложность $O(n^2)$, так как для каждого из n уравнений мы работаем с n переменными. Проверка матрицы на совместность также имеет квадратичную алгоритмическую сложность. Таким образом, общая алгоритмическая сложность реализованного программного метода = $O(n^3)$.

Что касается численных ошибок численного метода, то основным источником ошибок являются ошибки округления.

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы была реализовано решение СЛАУ методом Гаусса на языке программирования C++. Программа разделяется на 3 основных аспекта: проверка матрицы на совместность, решение методом Гаусса (этот этап разделяется на прямой и обратный ход) и расчёт невязок. Алгоритмическая сложность метода составила $O(n^3)$.

Метод Гаусса – метод решения СЛАУ, отличающийся высокой эффективностью и точностью для небольших и средних систем, однако возможна численная нестабильность из-за ошибок округления.