«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6

Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Вариант: 29

Выполнил:
Агнистова Алина Юрьевна
Группа: P3125
Преподаватель:
Болдырева Елена Александрова

Санкт-Петербург
2022г.

Решение задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года

А.Л.Тоом

14 декабря 2022 г.

Условня этих задач и правила приема в заочную математическую школу при МГУ и ЛГУ были помещены в первом номере «Кванта» за этот год. Здесь мы помещаем решения и указания к некоторым из этих задач.

Новая вступительная работа во Всесоюзную заочную математическую школу будет опубликована в первом номере «Кванта» 1973 года.

1. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сто-рон. Найдите углы треугольника.

Обозначим концы той стороны,относительно которой симметричны центры, через A и C,а третью вершину - через B (см. рис. 1).Пусть O и D - центры соответсвенно вписанной и описанной окружностей. Если опустить из них перпендикуляры на AC, то они упадут в одну точку M - середину отрезка OD (это и означает, что O и D симметричны относительно AC). Нам надо найти углы треугольника: ∠BAC=α, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$.

Докажем сначала, что $\alpha \to \gamma.$, $AD = DC$

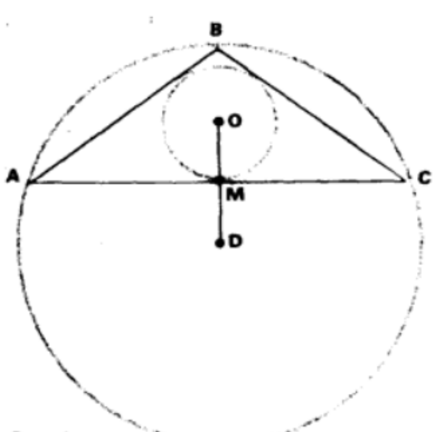

Рис. 1.

поэтому AM=MC, откуда $\triangle AMO = \triangle CMO.$,∠OAM= ∠OCM.∠OAM=$\alpha_{\overline{2}}$,$\angle OCM = \frac{\gamma}{2}$,поэтому $\alpha = \gamma$.

Отсюда следует, что AB=BC,тогда медиана BM - одновременно и высота, значит, O лежит на BM.

Поэтому точки B,O,M и D лежат на одной прямой, а так как BD=AD(как радиусы), то ∠BAD= ∠ABD= $\beta_{\overline{2}}$

С другой стороны, $\triangle AOM = \triangle ADM$.

Поэтому

$$\angle MAD = \angle MAO = \frac{\alpha}{2}$$

Тогда

$$\angle BAD = \angle BAM + \angle MAD =$$
$$= \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$$

Итак,

$$\frac{\beta}{2} = \frac{3\alpha}{2}, \beta = 3\alpha$$

Поэтому сумма углов треугольника ABC равна $5\alpha, \alpha = 36°, \beta = 108°$

Ответ: $36°, 108°, 36°$

2.*Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку написано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть, если вначале написано: а) 7 минусов; б) 8 минусов; в) k минусов?*

Выигрывает при всех n начинающий. Опишем стратегию, применяя которую, он наверняка выиграет. Первый ход надо сделать в середине, чтобы оставшиеся минусы образовали два отдельных "куска"равной длины (на рисунке 2 изображена позиция после первого хода для n=7)

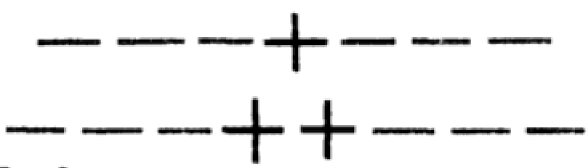

Рис. 2.

n=8).После этого начинающий каждым своих ходом должен переправлять минусы, симметричные тем, которые перед этим переправил второй.Так,если второй переправил k-й (или k-й и k+1-й) минус справа, то надо переправить k-й (или k-й и k+1-й) минус слева. Тогда после каждого хода первого будет получаться симметричная позиция.

Второй каждый ходом будет переправлять один или два минуса, симметричные которым еще не переправлены; следовательно,эти минусы не могут быть последними,и второй не может выиграть.

3.*В треугольнике ABC проводятся биссектриса AK и медиана AM. Чему может равняться отношение сторон AB и AC, если известно, что один из отрезков BM, MK, KC равен полусумме двух других?*

`Указание.`Здесь необходимо рассмотреть шесть случаев, соответсвующих клеткам таблица(см. рим. 3).

В клетках написаны ответы.

	$BM = \frac{MK*KC}{2}$	$MK = \frac{BM*KC}{2}$	$KC = \frac{MK*BM}{2}$
точка K ближе к B чем точка M	$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$	нет решений	нет решений
точка M ближе к B чем точка K	нет решений	$\frac{AB}{AC} = 5$	$\frac{AB}{AC} = 2$

Таблица 1: рис. 3

4.*Существует ли хотя бы одно число а такое, что оба числа* $\frac{1}{} - \sqrt{15}$ *и* $\frac{1}{} + \sqrt{15}$ - *целые?*

Пусть $\frac{1}{} + \sqrt{15} = m$, $\frac{1}{} - \sqrt{15} = n$.

Выразим а из первого равенства и подставим во второе:

$$\frac{1}{m - \sqrt{15}} - \sqrt{15} = n$$

Преобразуем:

$$16 - mn = (m - n)\sqrt{15}$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы было:

$$\begin{cases} 16 - mn = 0 \\ m - n = 0 \end{cases}$$

(В действительности это и необходимо, раз m, n-целые, но этого можно и не знать: ведь нам достаточно найти хоть одно значение а)

Полученная система легко решается:

$$m_1 = n_1 = 4, \quad m_2 = n_2 = -4$$

Ответ: такое а существует: например, $4 - \sqrt{15}$(в действительности таких чисел всего два).

5.*Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал:"Вы оба говорите неправду". Дима скказал:"Нет, один из них сказал правду, а другой-нет".Юра сказал:"Нет, Дима, ты неправ".Их отец, которому,конечно,можно доверять,уверен,что не менее трех братьев сказали правду.*
Кто разбил окно?

Изобразим заявления братьев в виде таблицы из 5 строк и 5 столбцов