

# Лабораторная работа # 1

## Численное дифференцирование и интегрирование

Предполагаемый язык выполнения лабораторных работ Python 3. Лабораторные работы выполняются студентами индивидуально или в группах по 2-3 человека (по желанию). По результатам выполнения лабораторной работы необходимо подготовить отчет. Отчет должен содержать описание реализованных вами алгоритмов, ссылку на реализацию, необходимые тесты и таблицы.

### Теория

Пусть задана функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Выберем на этом отрезке шаг сетки  $h$ . В таком случае количество узлов сетки будет

$$n = \frac{b - a}{h},$$

а сами значения  $x$  можно задать как  $x_i = a + hi, i = 0, \dots, n$ .

Для вычисления производной в каждой точке  $x_i$  могут применяться различные методы, которые преимущественно отличаются количеством узлов, задействованных в вычислении, а также их расположением относительно точки, в которой находится производная. Степень, с которой  $h$  входит в оценку погрешности вычисления, называется порядком точности метода. К методам первого порядка точности можно отнести:

1. Правая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Левая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

В целях повышения точности можно задействовать три узла таким образом, что

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

а значение производной в крайних точках можно определить следующим образом

$$y_1 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$$
$$y_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}$$

Данный подход называется центральной разностной производной и имеет второй порядок точности.

Для нахождения приближенного значения определенного интеграла могут использоваться так называемые квадратурные формулы

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \sum_0^n A_i f(\bar{x}_i),$$

где  $\bar{x}_i$  - некоторые точки из отрезка  $[a, b]$ .

Введем также сетку узлов на отрезке таким же образом.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Тогда интеграл  $I$  разобьется в сумму элементарных интегралов

$$I = \sum_1^n I_i,$$

где каждый  $I_i$  вычисляется на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ . Геометрически это будет означать, что вся криволинейная трапеция разбивается на  $n$  элементарных криволинейных трапеций. Методы численного интегрирования отличаются способом вычисления площадей этих элементарных криволинейных трапеций.

1. Формула прямоугольников. Площадь каждой элементарной криволинейной трапеции можно приближать площадью прямоугольников. Причем в зависимости от той точки, которая определяет высоту прямоугольника можно получить либо метод левых прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_{i-1}$$

либо правых прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_i$$

либо средних прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_{i-1/2}$$

2. Формула трапеций. Используя оба конца отрезка элементарной криволинейной трапеции, можно приближать ее площадь как площадь трапеции

$$I_i \simeq \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$$

3. Формула Симпсона. Также криволинейную трапецию можно приближать параболой, которая проходит соответственно через точки  $x_{i-1}$ ,  $x_{i-1/2}$  и  $x_i$ . Таким образом

$$I_i = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$$

### Постановка задачи

1. Реализуйте перечисленные выше методы нахождения производной при фиксированном значении шага.
2. Возьмите 2 произвольные функции. Вычислите аналитически производные этих функций. Постройте их графики, а также вычисленные значения численной производной в узлах сетки.
3. Найдите среднеквадратичные отклонения численных от истинных значений производной.
4. Выполните предыдущий пункт при уменьшении шага (увеличения количества узлов) в 2, 4, 8 и 16. Как изменяется среднеквадратичное отклонение при изменении шага? Постройте график зависимости среднеквадратичного отклонения от величины шага.
5. Реализуйте методы численного интегрирования.
6. Выберите 2 функции и вычислите для них определенный интеграл на отрезке. Сравните полученное значение с ответом, полученным аналитически.
7. Проанализируйте зависимость отклонения численного ответа от аналитического в зависимости от шага при уменьшении его в 2, 4, 8 и 16 раз. Постройте график зависимости отклонения от величины шага.

### Критерии оценивания

1. Работоспособность и качество кода.
2. Полнота отчета: наличие постановки задачи, описания методов, промежуточных выводов, результатов, а также графиков и таблиц, которые их демонстрируют.
3. Анализ результатов, преимуществ и ограничений методов.

Каждый критерий оценивается максимально в 5 баллов.

Итого максимальный балл за лабораторную работу: 15 баллов.