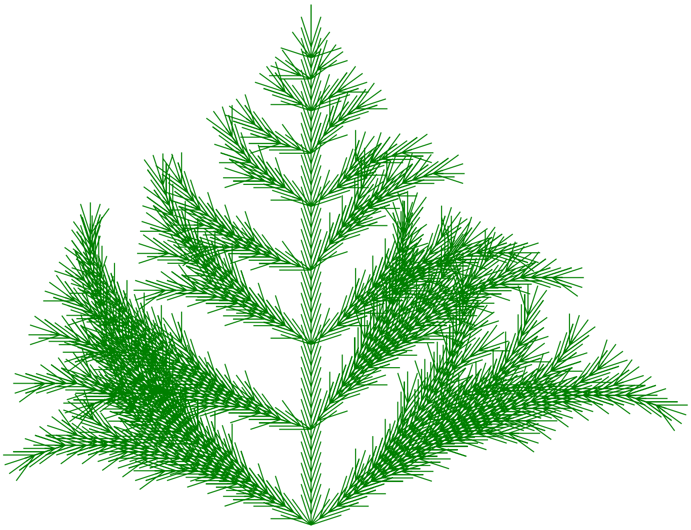
拉姆高中大学数学群第六次群测

大学组(一)

8.6



Contest Introduction

1.填空题一共4个小题, 解答题一共四个题目.试卷满分100分, 考试会在8月6日21:00正式开始.(此试卷为非数学组)
2.填空题请直接在答题卡填写最终答案.
3.在考试结束以后, 你需要尽快把你的答案发送到1580560632@qq.com.
4.这次考试是闭卷考试, 请不要在考试期间互相讨论.
5.此试卷由1580560632@qq.com编写.

一.填空题

1. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$$

2. 求

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cos x\cos 2x\mathrm{d}x}{e^x-1}$$

3. 设无穷级数

$$S=\sum_{1\leq a,b,c}\frac{1}{ac(a+b)(a+b+c)}$$

求 S 的值.
4. 设 $\mathbb{R}_+^4=\{(x,y,z,t)|\ x>0,y>0,z>0,t>0\}$, 曲线 Γ 满足方程

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=1-z^4-t^4\\ x^2+y^2-z^4=t^4\\ x=t^2\\ y=z^2 \end{cases}$$

Γ 在 $\mathbb{R}_+^4$ 中的起点为 $(0,1,1,0)$, 终点为 $(1,0,0,1)$, 试计算

$$\int_{\Gamma}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z+t^2\mathrm{d}t$$

二.解答题

(1) 令

$$I(x,y)=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\theta^y}{1+\theta^x}\mathrm{d}\theta\ ,\ x>y+1>1$$

求 $I(x,y)$ 初等函数表达式.

(2) 设 $Q=\{(x,y,z,t)|\ 0<x,y,z,t<\pi\}\subset\mathbb{R}^4$, 计算

$$\iiiint_Q\frac{\log_2\Gamma(t)}{1-\cos x\cos y\cos z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

备注: 结果保留 Γ 函数值.

(1) 设 $p>0,q>0,x>0,y>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 请用 Riemann 积分几何意义说明如下不等式

$$xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

成立的合理性, 并给出不等式的严格证明.

(2) 利用(1)问的结论, 从 $(a),(b)$ 中选一个你最喜欢的不等式进行证明. 其中 $f(x)\ge0,g(x)\ge0,f_n(x)\ge0,f(x),g(x),f_n(x)\in C^0$ $(\forall n\in\mathbb{N}_+)$, 并且 $f(x),g(x),f_n(x)$ 都是有界函数.

(a) 设 $p\ge1$

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^n f_k(x)\right)^p\mathrm{d}x\le\left(\sum_{k=1}^n\left(\int_0^1(f_k(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right)^p$$

(b) 设 $p,q,r>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$,

$$\left(\int_0^1(f(x)g(x))^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}\le\left(\int_0^1(f(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^1(g(x))^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

Figure 1: 摩尔拉雅雪山山顶原本的景象

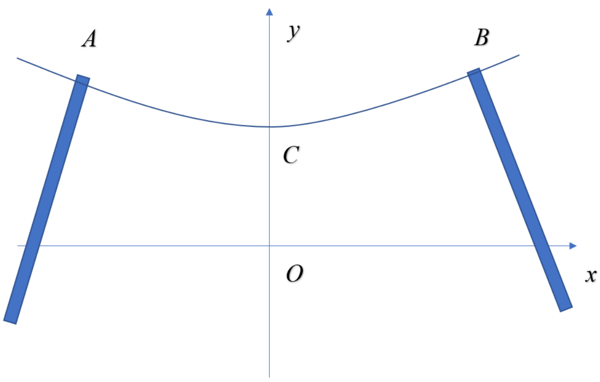


Figure 2: 示意图

今年自然灾害频繁, 摩尔拉雅雪山雪山山顶和神秘湖都遭受了比较严重的自然灾害.
(1) 摩尔拉雅雪山山顶的缆车受到了暴风雪的袭击, 部分缆车吊索以及绳索杆子受损, 如图1和图2.在正常情况下, 缆车绳索是几乎平行于水平面的, 由于暴风雪的影响(如图2), 缆车吊索的支撑杆子倾斜, 绳索在重力作用下向下弯曲. 默认缆车绳索是一根密度均匀的绳子, 两端固定在受损倾斜的支撑杆上, 受重力的作用(不考虑其他空气作用力的影响)自然下垂. 以缆车绳索曲线最低点向下5个单位建立平面直角坐标系. 缆车绳索曲线最低点 C 距离地面5个长度单位, 所以 $C(0,5)$, x 轴在地面上, 并且默认曲线始终在 xOy 平面内. y 轴竖直向上.(即平面直角坐标系 xOy 平面与水平地面垂直) 设最低点 C 处受水平向左的拉力 H, 右悬挂点处表示为 B 点, 设 CB 受一个斜向上的拉力 T , 设 T 和水平方向夹角为 θ, 缆车绳索的质量为 m, 线密度 ρ, g 是重力加速度, l是 CB 这段缆车绳索曲线长度. 求该缆车绳索曲线的方程.
(2) 远处的神秘湖近日遭受了暴雨的袭击, 神秘湖码头的道路上积水已经达到一米, 甚至有湖里的鱼儿游上岸来. 为了尽可能快排水, 城堡大厅的洛克行政官决心紧急调用5台抽水机, 去神秘湖码头抽水. 设抽水机抽水管横截面 S 是一个半径为 R 的圆形, $S=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$. 平面不可压缩定常水流由速度向量

$$\boldsymbol{V}=xu(x.y)\boldsymbol{i}+yu(x,y)\boldsymbol{j}$$

其中 $u(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ |u(x,y)|\le 2+\arctan(x^2+y^2)\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ u(0,0)=2\end{cases}$$

求经过区域 S 边界 ∂S 流出的水流体的量 M.

我们知道, 变量替换在积分计算里有重要作用. 我们记 $m(E)$ 表示集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的 n 维体积, 并且默认集合 E 是可以测量体积的.
(1) 请用两种不同的积分变量替换方式, 计算

$$\iiiint_E \sqrt{\frac{xy}{x+y}}z^{2021}(1-t)^{2021}\cdot\sum_{k=1}^{n}C_n^k t^k(1-t)^{n-k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

其中, $E=\{(x,y,z,t)|x+y\le 1,x>0,y\ge 0,0\le z\le 1,0\le t\le 1\}$.
(2) 设 D 和 G 是逐段简单光滑闭曲线所围成的区域(从而是可求面积的).设变换

$$\mathscr{T}:\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(u,v)\\ y=f(u,v)\end{array}\right.\ (u,v)\in D$$

是 D 到 G 的一个一一对应, 并且在 D 上有连续二阶偏导数. 令

$$J(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}$$

并且在 D 内 $J(u,v)\neq 0$, 请你证明

$$m(G)=\iint\limits_D |J(u,v)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$