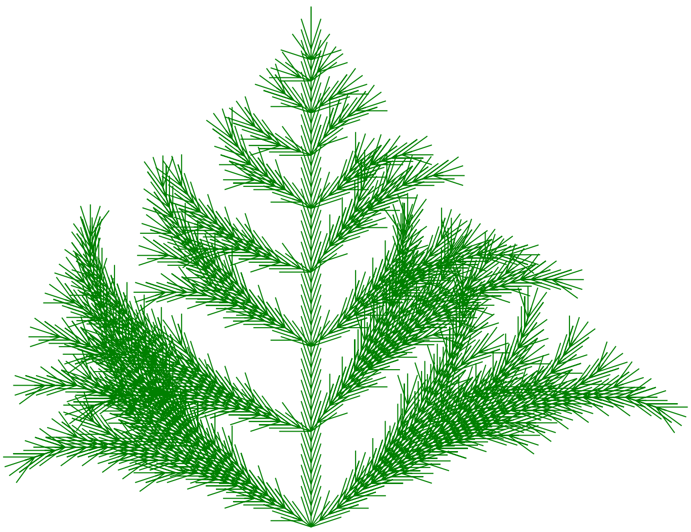
拉姆高中大学数学群第七次群测

大学组(一)

7.29



Contest Introduction

1.填空题一共4个小题, 解答题一共四个题目.试卷满分100分, 考试会在7月29日21:00正式开始.(此试卷为非数学组)
2.填空题请直接在答题卡填写最终答案.
3.在考试结束以后, 你需要尽快打开链接 **http://lamumathematics.m.icoc.bz/**
按照网页中的提示完成答卷上传. 如果您完全不会操作, 也可以发给我的个人网站E-mail:
alinalagrange.cn@gmail.com
4.这次考试是闭卷考试, 请不要在考试期间互相讨论.
5.此试卷由Alina Lagrange编写. (我的个人网站**http://alinalagrange.cn**)

一.填空题

1. 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin(x\sin(x\sin\ \cdots)))\mathrm{d}x$$

2. 设 $f(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f^2(x)+f(x)-2 \qquad f(1)=10$$

求 $f(x)$.
3. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{n^2(n+i)}\cdot\arctan\frac{i}{n}\cdot\ln(1+e^{\frac{k}{n}})$$

4. 设

$$I_1 = \int_0^{\infty}\left(\frac{x-1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} x\csc x\mathrm{d}x$$

求 $\frac{I_1}{I_2}$.

二.解答题

设 $\partial B = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=2022\}, v(x,y,z)=ax+by+cz+1, (a,b,c\in\mathbb{R})$, 并且

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2$$

计算

$$\iint_{\partial B}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 ∂B 的单位外法向量.

(1) 计算

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(2) 计算

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ax}}{1+e^{-bx}}\mathrm{d}x$$

其中 $a>0, b>0, \frac{a}{b}\notin\mathbb{Z}$.

仲夏的黄昏, 摩乐乐、丫丽、布多多、布少少一行四人在神秘湖旁边散步. 忽然, 他们在沙滩上发现了一个奇怪的沙画, 只见上面写着

$$e^{i\pi}+1=0$$

(1) 布少少表示他不明白这是什么东西, 丫丽解释说 i 是虚数单位, 可以使用 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$ 来得到沙画的式子.
请你证明丫丽所说的公式.
(2) 众人在搞清楚第一个问题以后便回家了. 第二天夜晚, 众人再次齐聚神秘湖码头西南广场.

摩乐乐表示他回忆起 Fourier 级数表达式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad x\in(-\pi,\pi)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

他认为这可以写成

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_ne^{inx}$$

其中

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

请你证明摩乐乐想法的合理性.
(3) 历经几个晚上的互相交流讨论以及证明推理，他们每一个人都得出了小结论. 请你通过证明判断这些结论是否正确.
布少少:

$$\sum_{-N\le n\le N}e^{int}=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

布多多:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{-m\le n\le m}e^{int}=\frac{1}{N}\frac{\sin^2\frac{Nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

摩乐乐:

$$\sum_{-N\le n\le N}\mathrm{sign}(n)e^{int}=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

丫丽: 假设黎曼可积函数 f 有 Fourier 级数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{inx}$$

并且 a_n 满足

$$|na_n|\le C\qquad C>0$$

则对任意正整数 N 均有

$$\left|\sum_{|n|\le N}a_ne^{inx}\right|\le\sup|f|+(2-\ln(N+2)+\ln(N+1))\,C$$

其中 $\sup|f|$ 表示 $|f|$ 的最大值.

我们定义下调和函数 $v(x,y)$, 是指 $v(x,y)$ 满足

$$\Delta v(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

设 $u(x,y)$ 满足

$$\Delta u(x,y) = u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(1) 设

$$h(r) = e^{-2r} \iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} u^2 + |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

讨论 $h(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上的单调性.
(2) 证明: 对于下调和函数 v

$$v(a,b) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2} v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3) 求所有的有界函数 u.