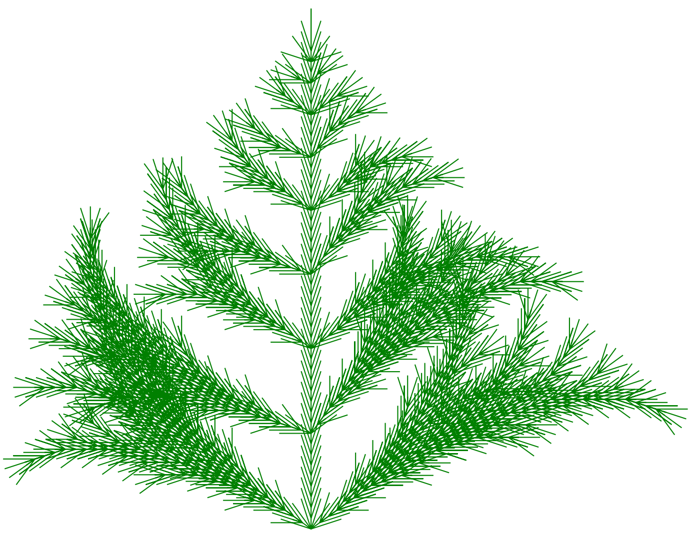
拉姆高中大学数学群第五次群测

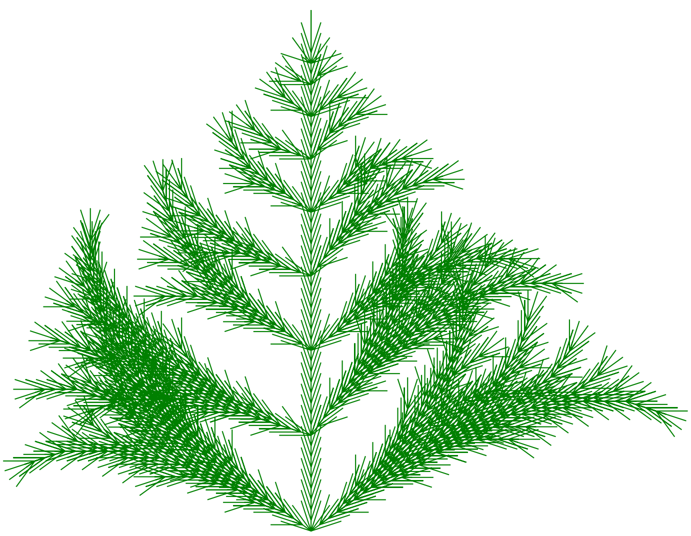
大学组(二)

7.31



Contest Introduction

1. There are 6 problems in part I and 4 problems in part II.The full mark of this group test is 180.The exam begin on 7.31 21:00.
2. The full mark of part I is 100.And the full mark of part II is 80.
3. After the test,you can send your answer to 1580560632@qq.com.
4. This time the test is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other QQ groups during the exam.
5. Part I is written by **1580560632@qq.com** ,and the part II is written by **270959836@qq.com.**



Part I

Question 1 (15 points).
(1)设多项式

$$P(z)=z^{2020}+c_{2019}z^{2019}+\cdots+c_1z+c_0$$

讨论$P(z)$在$|z|<R$内的零点个数,其中$R=\sqrt{1+\sum\limits_{n=0}^{2019}|c_n|^2}$.
(2)若f在圆盘$D_r(z_0)$及其邻域内全纯.证明对于任意 $0<s<r$,

$$\sqrt{\pi}\|f\|_{L^\infty(D_s(z_0))}\leq\frac{1}{r-s}\|f\|_{L^2(D_r(z_0))}$$

Question 2 (20 points).
(1)设$\mathbb{R}^4$中的方体$Q=\{(x,y,\varphi,\theta)|\ 0\leq x,y,\varphi,\theta\leq\pi\}$,求

$$\iiiint_Q\frac{\sin x\sin\varphi}{x\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

(2)对$n\in\mathbb{N}_+,n\geq3$,求

$$\int_{\mathbb{R}_+^{2n-2}}\exp\left(-\sum_{m=1}^{n}x_m^m-\sum_{m=n+1}^{2n-2}x_m\right)\prod_{m=1}^{n-2}x_{m+n}^{-1/(m+2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\cdots\mathrm{d}x_{2n-2}$$

其中$\mathbb{R}_+^{2n-2}=\{(x_1,x_2\cdots,x_{2n-2})\mid x_1,x_2\cdots,x_{2n-2}\geq0\}$
(3)求

$$\lim_{n\to\infty}n^3\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\arctan\dfrac{m}{n}(\ln n-\ln j)(n^3-i^3)}{m\sqrt{n^2-m^2}(n^2+j^2)(n^5-i^5)}$$

Question 3 (15 points). 我们用$\hat{f}(\boldsymbol{x})$表示$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$的Fourier变换.
(1)为了刻画$L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<2)$上的Fourier变换,定义和空间

$$L=L^1+L^2=\{f\mid f=f_1+f_2,f_1\in L^1(\mathbb{R}^n),f_2\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

从而

$$\hat{f}=\hat{f}_1+\hat{f}_2$$

请你说明上述构造的合理性.
(2)(i)定义在$\mathbb{R}$上的函数$f(x)=e^{-\pi|x|^2}$, 证明: $\hat{f}(x)=f(x)$.
(ii)定义在$\mathbb{R}^n$上的函数$f(\boldsymbol{x})=\exp(-2\pi|\boldsymbol{x}|)$,求$\hat{f}(\boldsymbol{x})$.

Question 4 (15 points).
(1)回忆Cantor集合的构造: 首先从区间 [0,1] 中去掉中间的三分之一 $I_1^1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,然后留下两条线段:$[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. 然后, 把剩下的两条线段的中间三分之一 $I_2^1=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),I_2^2=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ 都去掉, 留下四条线段$[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$. 在每个区间中挖掉中间三分之一,把这个过程一直进行下去,2^{n-1}个第n次三等分的时候去掉 $I_n^1=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),I_n^2=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\ldots,I_n^{2^{n-1}}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$. 最后剩下的数所组成的集合就叫作Cantor集.
请你运用上述集合,构造一个在$[0,1]$单调递增,并且导函数几乎处处为0的函数.
(2)设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调递增函数,证明$f(x)$在$[a,b]$几乎处处可微并且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\le f(b)-f(a)$$

Question 5 (15 points).
(1)设f是赋予范线性空间X上非零的有界线性泛函 ,$H=\{x\mid x\in X,f(x)=1\}$,$d$为$X$中的零元到$H$的距离,即$d=\inf\{\|x\|\mid x\in H\}$,求$\|f\|$.
(2)设$1<p<\infty$,考虑度量空间ℓ^p的定义

$$\ell^p=\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty\}$$

给出范数和度量

$$\|\boldsymbol{a}\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}\quad,\ 1\le p<\infty$$

$$d_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|_p$$

证明:ℓ^p是完备的度量空间.

Question 6 (20 points). 设$f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$,$Q\subset\mathbb{R}^n$是中心在原点,边平行于坐标轴的方体,我们用

$$f_Q^*=\frac{1}{m(Q)}\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{y})-f_Q|\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

表示f在Q上的平均振动,其中f_Q表示f在Q上的平均值.定义

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}f_Q^*$$

(1)设$1<p<\infty$,证明:

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(\boldsymbol{x})-f_Q|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\le\|f\|_{\mathrm{BMO}_p}$$

(2)设$f\in\mathrm{BMO}$,$Q_k=Q(0,2^k)$(表示边长2^k),$S_k=Q_k-Q_{k-1}$.求证:

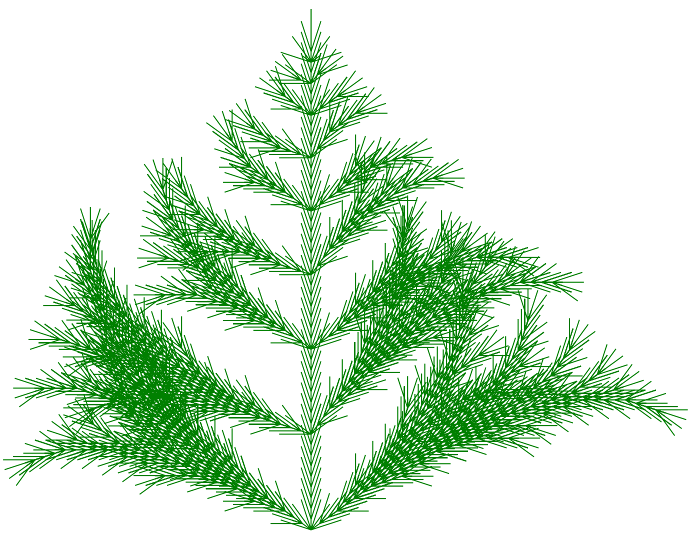
$$\int_{Q_0}\frac{|f(\boldsymbol{x})-f_Q|}{1+|\boldsymbol{x}|^{n+1}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\bigcup_{k\ge1}S_k}\frac{|f(\boldsymbol{x})-f_Q|}{1+|\boldsymbol{x}|^{n+1}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\le M\|f\|_{\mathrm{BMO}}$$

其中

$$M=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{nk}(1+2^nk)}{1+2^{nk+k-2n-2}}$$

(3)设$q>1$,证明存在仅依赖于n的常数B和b,对任意的$f(x)\in \mathrm{BMO}$,任意的方体$Q\subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(\boldsymbol{x})-f_Q|^q \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \frac{Bq}{b^q}\Gamma(q)\|f\|_{\mathrm{BMO}}^q$$



Part II

Question 7 (20 poibts)**.** 令 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$使得$f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.证明$f(x)$ 能够表为两个$\mathbb{R}(x)$中元素的平方和.

Question 8 (20 poibts)**.** 设k是一个域，K/k是一个n维的有限代数扩张.
(1)证明K能够嵌入$\mathcal{M}_n(k)$,即k系数n阶矩阵代数.
(2)假设K/k是一个单扩张，证明:
$n=\min\{m\in\mathbb{Z}^+|K$能够嵌入$\mathcal{M}_m(k)\}$.
(3)现对任意的有限扩域K，证明上一问的结论.

Question 9 (20 poibts)**.** 令A 是一个整环.我们的目标是证明下面两条等价:
(i) A_P是一个赋值环，对任意极大理想P.
(ii)任意A-模 M平坦当且仅当它无挠.
Hint :
(1)直接由(i)推出(ii).
(2)证明一个局部整环是赋值环当且仅当其任意有限生成的理想是主理想.
(3)假设(ii)成立，证明，对任意A的极大理想P，A_P的任意有限生成理想是主理想，从而由(ii)推得(i).

Question 10 (20 poibts)**.**
令$X=(\{a,b,c,d\},\tau)$是拓扑空间，其中 $\tau=\{\{\emptyset\},\{X\},\{a,b,c\},\{a,d,c\},\{a\},\{c\}\}$是$X$的拓扑.
(1)证明$\pi_1(X)=\mathbb{Z}$.
(2)证明存在连续映射: $f:\mathbb{S}^1\to X$,使得其诱导出的基本群同态: $f^*:\pi_1(\mathbb{S}^1)\to\pi_1(X)$是同构.
(3)证明不存在从X到$\mathbb{S}^1$的连续映射，使得其诱导出的基本群同态为同构。事实上，这个例子告诉我们拓扑空间范畴的弱同伦等价并不是一个等价关系.