绝密★启用前

拉姆高中大学数学群第四届群测

大学组

（一试）

试卷说明：

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共 5 页。考生交卷时，应将本试卷答案誊写在答题卡上，并拍照或扫描在考试截止前发至邮箱 1580560632@qq.com.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上.

2. 必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带. 不按以上要求作答的答案无效.

3. 填空题直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

参考公式：

1.$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} s^{x-1}e^{-s}ds.$

2.$[x]$表示不超过x的最大整数,$\{x\}=x-[x]$.

3.卡塔兰常数$G=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

第Ⅰ卷（共 50 分）

一、填空题：本大题共 15 小题，第 1 题至第 10 题，每小题 3 分，第 11 题至第 15 题，每题 4 分，共 50 分.

1.① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos px}=$ ______ .$(p\in N, p>0)$ ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin mx}=$ ______ .$(m>0)$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\arctan x}=$ ______ .

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{p^{k-1}}=$ ______ .$(p>1)$

3. $\int \arctan x dx=$ ______ .

4.质量是m，半径是r的均匀实心球对其一条直径为轴的转动惯量$I=$ ______ .

5.已知函数$f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}\bullet\sqrt{\dfrac{\ln(2019+e^x)}{\ln(2+e^x)}}$,求$f'(0)=$ ______ .

6.计算$\iiint_Q f(x,y,z)dv=$ ______ .

其中$f=x^3y^2z^6, Q=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1$且$x,y,z>0\}$

7求$\int_0^{\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx=$ ______ .

8. $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{p=0}^{5}\left(\dfrac{x^p}{p!}\right)^n}$,u满足:$0<u<1$,

求$g(u)+g\left(\dfrac{3}{2}\right)+g\left(\dfrac{5}{2}\right)+g\left(\dfrac{7}{2}\right)+g\left(\dfrac{9}{2}\right)=$ ______ .

9.求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^{2019}x}{\cos^{2019}x+\sin^{2019}x}dx=$ ______ .

10.级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^m}\sin\dfrac{1}{n^m}$收敛,$m$取值范围是 ______ .

11. N是一个确定的正整数, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{Nn}\sum\limits_{k=1}^{Nn}\left(\dfrac{k}{nN}\right)^{\frac{1}{N}}=$ ______ .

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)=$ ______ .

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-k)}-x=$ ______ .

14.曲面$x^2+y^2=z, x^2-y^2=\pm 1, xy=\pm 1, z=0$围成的体积是 ______ .

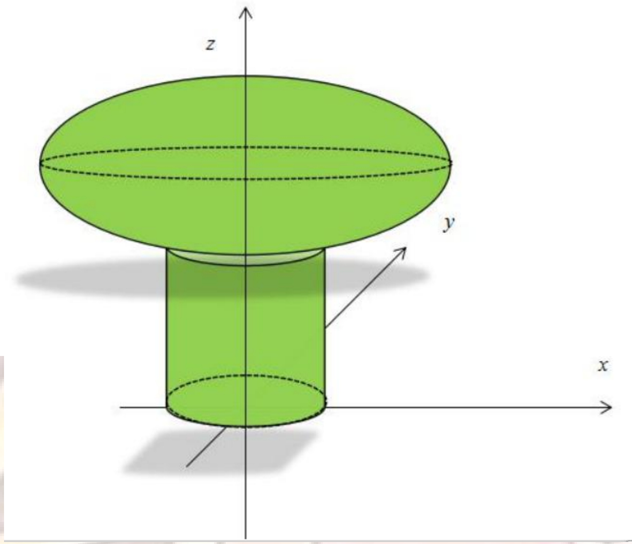
15.求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^{2002}(n-k)^{16}\arctan\dfrac{j}{n}}{n^{2019}j}=$ ______ .

第Ⅱ卷（共 70 分）

二．解答题.

16.(本小题满分15分)
如图一所示，
摩尔历4707年摩乐乐和菩提大伯搬进了新家：天空树.请你帮助摩乐乐和菩提大伯解决问题.
如图1是天空树，图2是天空树的简化抽象图(一个椭球椭圆柱组合体).
以椭圆面几何中心点O(底面)形为坐标原点，
底面椭圆右边顶点为A，上顶点B，以O为坐标原点，OAx轴，OBy轴，过O并且垂直于xOy平面(向上)为z轴建立空间直角坐标系.因此椭圆柱Ψ方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, 3a \geq z \geq 0. a>b$
椭球面Γ方程：$\frac{x^2}{16a^2}+\frac{y^2}{16b^2}+\frac{(z-h-c)^2}{c^2}=1$，其中$h$为椭圆柱体的高$h=3a$.
(1)已知菩提大伯想要做一个室内遮阳透明板.(在椭圆柱主房体)，已知透明遮阳板的三个支点$(0,0,h)(a,0,0)(0,b,0)$.求室内遮阳透明板所在平面$\hbar$方程.
并且菩提大伯想把太阳能电池板建造在树冠(椭球)的相切平面上，切点为$\left(a,b,\sqrt{\frac{7}{8}}c+3a+c\right)$.
请你用a,b,c表示太阳能电池板ψ所在平面和地面(xOy)平面所成夹角.
(2)当天空树顶椭球面Γ方程：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}+\frac{(z-11)^2}{16}=1$，求下雨时经过房顶上的点$(1,3,11+\sqrt{11})$的雨水留下的路线方程.(不考虑摩擦阻力)
(3)已知$a=2, b=1, h$比较大，摩乐乐有一个心愿：在天空树的主房体内，设置一个装饰品这个装饰品是在xOz平面内，以$z=kx(k>0)$与$z=x^2$在xOz平面第一象限内围成的图形绕该直线所成的旋转体，它的体积是V，求V.(不考虑房子体(椭圆柱)对装饰物的体积限制)

图一



图二

17.(本小题满分10分)

已知函数$f(x)=e^{x}.n$是正整数.

(1)请你计算$\int_{0}^{+\infty} f\left(-x^{3}\right)dx.$

(2)证明:$2\iint\limits_{D}\frac{\sqrt[n]{f\left(-y^{2}\right)}}{\sqrt[n]{f\left(-x^{2}\right)}}d\varsigma>(b-a)^{2}\left(\ln 4+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^{2}+k}\right).$

其中区域$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,a\le y\le b\}.$

18.(本小题满分15分)

计算:

(1)$\int_{0}^{\infty}\frac{\ln\left(a^{2}+x^{2}\right)}{1+x^{2}}dx.(a\in R)$

(2)设方程$2[xf(y)+g(y)]dx+[x^{2}g(y)+2xy^{2}-2xf(y)]dy=0$是全微分方程，

$f(0)=e-2,g(0)=0,$求$f(x),g(x).$

(3)$\int\frac{2019\sec^{2}x+\tan^{2}x}{\sec x+2019\tan x}dx.$

(4)对任意整数$m,n>2019,$计算$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{dxdy}{1+x^{n}+y^{m}+x^{n}y^{m}}.$

19.(本小题满分15分)

设$a_n > 0, b_n > 0, u_n = b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}, M$是一个常数,$N$是一个正整数，

(1)证明：当$n > N$时，有$u_n \geq M > 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(2)证明：当$n > N$时，有$u_n \leq 0, \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n} = \infty$,则级$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

(3)设数列x_n满足：$x_1 = 1, 2x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}} - 1\right)\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}} + 1\right)$的敛散性.

20.(本小题满分15分)

(1)设$f(x, y)$是具有二阶连续偏导的二次齐次函数，对任意x, y, t成立$f(tx, ty)$
$= t^2 f(x, y), D$是由L：$x^2 + y^2 = 4$围成的区域，证明：

$$\oint_L f(x, y) ds = \iint_D div(gradf(x, y)) dxdy.$$

(2)(i)请你计算$\int_0^1 [px] dx$.

(ii)设$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,

$F(x, y, z) = \iiint\limits_E \left(\{\frac{1}{z}\}[\frac{1}{z}]z\right)\left(e^{x^2+y^2} - 2\sin(x^2)e^{y^2} - 2\sin(y^2)e^{x^2} + 4\sin(x^2)\sin(y^2)\right) dxdydz.$

证明：

$$F(x, y, z) \geq \frac{(\pi^2 - 6 - \pi^2 \ln 2 + \ln 64)}{6}\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{3}\ln\frac{3}{e}}{2}\right).$$