拉姆高中大学数学第四届群测

大学组

二试

July,27,19:00-21:30

Explanation*: After the exam, you have 30 minutes to send to the mailbox given by the website(1580560632@qq.com)*

Group website:http://lamumathematics.icoc.bz/

Because of the problem with the formula editor, the collection symbol in this paper no longer uses "double writing"(LaTeX typesetting is not used this time)

必做题

（6 problems）

Problem 1(第一小题10分，第二小题10分)

(1)求共形映射$f:E\to\triangle$.其中$\triangle=\{z:|z|<1\},E=\{z:0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$.

(2)求共形映射$f:E\to\triangle$.其中$\triangle=\{z:|z|<1\},E=\{z:|z|<1且|z-1|<1\}$.

Problem 2 (第一小题10分，第二小题10分，第三小题20分)

(1)计算

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{e^{ax}+e^{-ax}}dx.$$

其中$a>0, m>0.$

(2)计算

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p-1}}{e^x-1}dx.\left(p\in N_+\right)$$

(3)计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\arctan\frac{j}{n}\arctan\frac{k^2}{n^2}m^3\left(\ln m-\ln n\right)^3[\ln(n+j)-\ln n]}{kn^5+kj^2n^3}.$$

Problem 3 (第一小题10分，第二小题20分)

(1)证明:如果$\lim\limits_{r\to 1^-}\sum r^n x_n=\sigma, x_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$,则

$$\sum x_n=\sigma.$$

(2)所有的实数分为代数数和超越数，代数数是指次数为某一有理系数多项式的根，反之超越数是指它不是任何一个有理系数多项式的根.

证明:e是超越数.

Problem 4 (第一小题10分，第二小题20分)

(1)证明:

$$\sum_{-N\le n\le N} sign(n)e^{inx}=\frac{i[\cos\frac{x}{2}-\cos\left(Nx+\frac{x}{2}\right)]}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(2)证明:对于每一点$t\in[-\pi,\pi]$，存在函数$f\in C[-\pi,\pi]$使得f的傅里叶级数在t发散.

Problem 5 (第一小题10分，第二小题20分)

(1)设$g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，$f(x)$是R上的强绝对连续函数.证明：$f[g(x)]$是$[a.b]$上的绝对连续函数.

(2)$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$是绝对连续的,证明：$f$把零测集合映射为零测集合.

Problem 6（第一小题8分，第二小题8分，第三小题14分）

(1)设$f(x)\in C[0,\pi]$,对任何$n\geq 2019$,成立

$$\int_0^{\pi}\sin^n x f(x)\ln[x(\pi-x)]dx=0.$$

求$f(x)$.

(2)设$f(x), xf(x)\in L^2(0,\infty)$,证明：

$$\left(\int_0^{\infty}f(x)dx\right)^4\leq \pi^2\left(\int_0^{\infty}f^2(x)dx\right)\left(\int_0^{\infty}x^2f^2(x)dx\right).$$

(3)(i)设$p\in(1,\infty), f\in L^p((0,\infty))$, 记

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, x>0$$

证明：

$$\|F\|_p\leq\frac{p}{p-1}\|f\|_p\ .$$

(ii)证明：不存在$C<\dfrac{p}{p-1}$,使得

$$\|F\|_p\leq C\|f\|_p\ .$$

成立.

选做题

The question is 20 points in total.

Please choose one question or do both.

The score is included in the total score but the total score must not exceed 180 points.

Please black the box on the answer card.

[A]

设环R的每个理想都是有限生成的，请证明R是诺特环.

[B]

证明：一个环R是阿廷环当且仅当它是有限长的.阿廷环必定是诺特环且只有有限多个素理想，这些理想都是极大的.