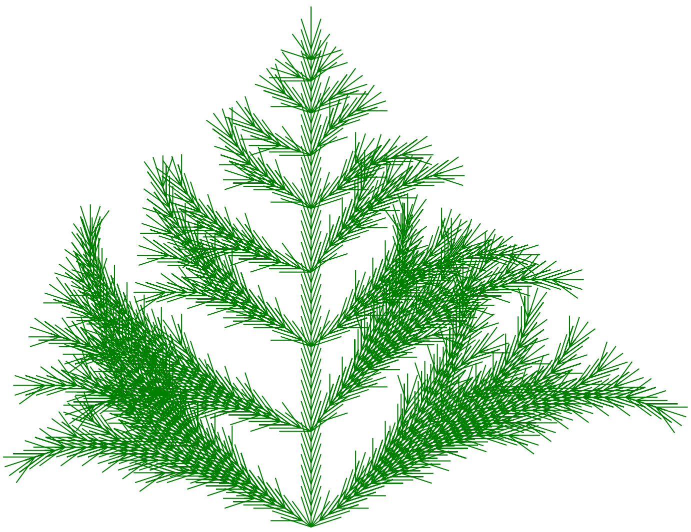
拉姆高中大学数学群第五次群测

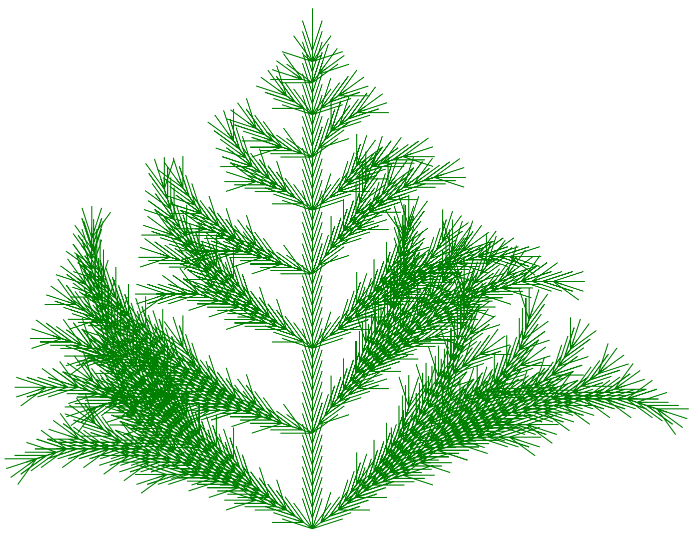
大学组(一)

7.31



Contest Introduction

1.填空题一共10个小题，解答题一共五个题目.试卷满分120分，
考试会在7月31日21:00正式开始.
2.填空题请直接在答题卡填写最终答案.
3.在考试结束以后，你需要尽快把你的答案发送到1580560632@qq.com.
4.这次考试是闭卷考试，请不要在考试期间互相讨论.
5.此试卷由**1580560632@qq.com**编写.



一.填空题(第一题10分,第2题到第7题每小题3分,第8题到第10题每小题4分)

1.(1)求

$$\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\sum_{m=1}^{n}x_m^2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

(2)求

$$\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(y^2+xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中S为以$(0,0,0),(a,a,a)$ 为对角顶点的正方体的表面,取内侧.
(3)计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n-k}\right)$$

(4)计算

$$\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos^2 x)(1+x\sin x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

(5)求

$$\iint_{x\geq 0,y\geq 0}y^{-1/3}\exp(-x^3-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.求

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\Gamma\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\sqrt{\sin(\pi\sin^2 x)}\right)\mathrm{d}x$$

3.设$n\in\mathbb{N}_+$,$F(x)=x^n(1-x)^n$,求$F^{(n)}(0)$.
4.求由曲线

$$x^{2020}(x^{2021}-y^{2020})+y^{4041}=0$$

围成的面积.
5.计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\mathrm{d}x-en}{\ln n}$$

6.设$x>0,a_n>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$发散,求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{n}\frac{a_m}{a_{m+1}+x}$$

7.求

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos 2020x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

8.设 $a_n(x)=(1-x)^{5n-5}-(1-x)^{5n-2}\mathrm{d}x$, 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 a_n(x)\mathrm{d}x$$

9.设$\mathbb{R}^4$中的方体$Q=\{(x,y,\varphi,\theta)|\ 0\leq x,y,\varphi,\theta\leq\pi\}$,求

$$\iiiint_Q\frac{\sin x\sin\varphi}{x\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

10.设

$$M=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{2^n+2020}\cos\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

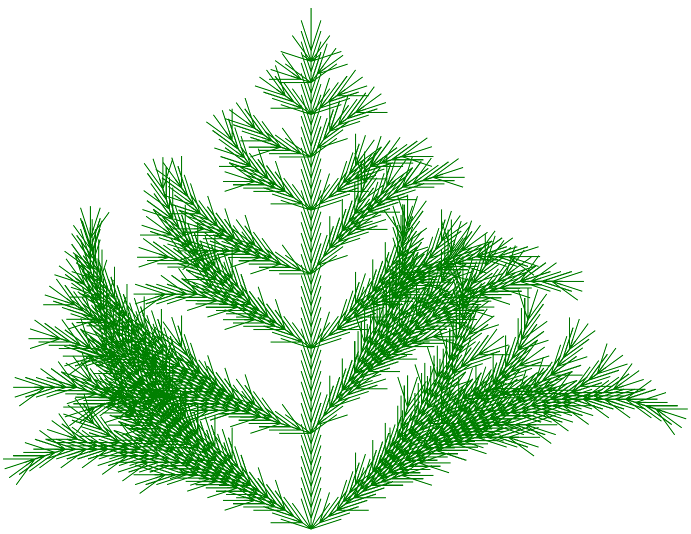
设

$$I=\frac{M}{\pi}\iint_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(1-z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ是曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$绕$z$轴旋转生成的旋转体,取下侧.设$n\in\mathbb{Z}$,

$$\frac{I}{a^2}\ge\ln(2a+1)+2na^2$$

对任意的$a>0$恒成立,求n取值集合.



二.解答题(满分80分)

11.(本小题满分16分)
(1)设$z>0, y\in\mathbb{R}$, $u(x)=x^z\ln x-y(x^z-1)$在$\mathbb{R}^+$上存在唯一不变号零点.函数

$$R(x)=x\ln x-\ln(x+1)\quad, \ x\in(0,1)$$

设p,q都是不超过10的正整数,$p\neq q$, 求所有的有序对(p,q),满足

$$R(x)>\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{e}}-\ln\frac{|p-q|}{(zy)^{p-q}}.$$

在区间(0,1)恒成立.
(2)对(1)问中所有满足题意的p,q,设$D=\{(x,y)|x^p+y^q\geq 2\}$,讨论

$$I=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$$

敛散性.

12.(本小题满分14分)
设$u=u(x,y)$在平面区域D上二阶连续可微.求证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\geq 0\quad(\forall(x,y)\in D)$$

成立当且仅当$\forall\,(x_0,y_0)\in D$

$$u\left(x_0,y_0\right)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

其中$0\leq r<d\left(x_0,y_0\right)$, $d(x_0,y_0)$是点(x_0,y_0)到D的边界∂D的距离.

13.(本小题满分16分)
如图所示,由于今年恶劣的天气,为了保证天空树周围的农作物不至于颗粒无收.菩提大伯决定修一个蔬菜大棚，蔬菜大棚的表面S是一个光滑曲面,其方程是$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy, x,y,z>0$
(1)求S的参数方程.
(2)如果$16\leq a\leq 20$,求S和底面$(z=0)$围成的蔬菜大棚的体积的最大值与最小值.

(a) 天空树远景图

(b) 大棚的外观效果图(与宠物店类似)

14.(本小题满分16分)
(1)设$a_n>0$, $\sum\limits_{m=1}^{n}a_m=A_n$,并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2$$

收敛.
(2)求

$$\lim_{n\to\infty}n^3\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\arctan\frac{m}{n}(\ln n-\ln j)(n^3-i^3)}{m\sqrt{n^2-m^2}(n^2+j^2)(n^5-i^5)}$$

15.(本小题满分18分)
回忆$\mathbb{R}^n$的微分学中，回忆一阶微分元素$\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$,我们设 $\mathrm{d}x_1=e_1$, $\mathrm{d}x_2=e_2$, $\cdots$ $\mathrm{d}x_n=e_n$.满足下面四条性质
1)

$$e_i\wedge e_i=0$$

2)

$$e_i\wedge(e_j\wedge e_k)=(e_i\wedge e_j)\wedge e_k$$

3)

$$e_1\wedge e_2\cdots\wedge e_n\neq 0$$

4)

$$e_j\wedge e_k=-e_k\wedge e_j$$

根据它的结构，我们有$\mathbb{R}^n$里面的微分形式一共有$n+1$种,分别是0次微分形式,1次微分形式,2次微分形式,$\cdots$，n次微分形式,也就是 $\Lambda^0=1$, $\Lambda^1=\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ $\Lambda^2=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2,\cdots\cdots,\mathrm{d}x_x\wedge x_n,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\cdots\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\wedge\mathrm{d}x_n,\ \cdots,\ \Lambda^n=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\cdots\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$.
在$E\subset\mathbb{R}^n$中$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在E上可微,设

$$\omega=\sum_{1\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le n}f(x)\mathrm{d}x_{t_1}\wedge\mathrm{d}x_{t_2}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{t_k}$$

自然有$\omega\in\Lambda^k$ 定义它的外微分如下

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{1\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{t_1}\wedge\mathrm{d}x_{t_2}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{t_k}$$

有$\mathrm{d}\omega\in\Lambda^{k+1}$.
(1)设$\omega\in\Lambda^k$,证明: $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$.
(2)请你从$\mathrm{d}\omega$的角度探究$\mathbb{R}^4$中曲线积分和路径无关的充分必要条件.
(3)考虑平面上的单位圆周T.我们想给它一个坐标系,之后就可以在上面定义函数,以及微分形式,从而可以求积分.但是无论怎样做,不可能给出一个整体坐标.通常用

$$\varphi:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$$

我们不难发现 $(0,2\pi),T-\{(1,0)\}$通过映射φ建立了一个一一对应的关系,由此启发,我们可以考虑如下定义.
设$S\subset\mathbb{R}^n$,如果存在局部坐标系$\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}$，$U_\alpha$是$S$的开集,$S=\bigcup_\alpha U_\alpha,\varphi_\alpha:U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)$,
$V_\alpha=\varphi_\alpha(U_\alpha)$是$\mathbb{R}^k$中的开集,$k$不超过$n$,并且$\varphi_\alpha$是微分同胚映射(一一对应的,正向映射,逆向映射都光滑可微).我们称S为k维流形.

且$\varphi_\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$, x_k称为局部坐标函数，$\varphi^{-1}:V_\alpha\to U_\alpha$是$S$的局部坐标表示.$S$上的两个局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, (U_β,φ_β)如果相交不为空集,在$U_\alpha\cap U_\beta$上$\varphi_\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$, $\varphi_\beta=(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\cdots,\widetilde{x}_k)$,考虑复合映射

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\to\varphi_\beta\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\qquad x\mapsto\widetilde{x}\in C^1$$

逆映射

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\to\varphi_\alpha\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\qquad \widetilde{x}\mapsto x\in C^1$$

所以

$$\frac{\partial\left(\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_k\right)}{\partial\left(x_1,\cdots,x_k\right)}\neq 0$$

$$\frac{\partial\left(x_1,\cdots,x_k\right)}{\partial\left(\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_k\right)}\neq 0$$

它们的符号规定了S的定向.如果存在一组局部坐标系$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$,满足$S=\bigcup_\alpha U_\alpha$,对任意$U_\alpha\cap U_\beta$ $\varphi_\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$, $\varphi_\beta=(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\cdots,\widetilde{x}_k)$ 总有

$$\frac{\partial\left(\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_k\right)}{\partial\left(x_1,\cdots,x_k\right)}>0$$

则称S是定向的.现在我们加强条件,设S是k维可定向微分流形,$D\subset S$并且是一个紧集,在S上存在局部坐标系 $(U_i,\varphi_i), i=1,2,3,\cdots,n$使得$D\subset\bigcup_{i=1}^n U_i$,即存在$n$个函数$g_i(x)\geq 0$满足
1) $g_i\circ g_i^{-1}$在 $\varphi_i\left(U_i\right)$ 上$\in C^1, i=1,2,\cdots,n$
2) $\sum\limits_{i=1}^n g_i(x)\equiv 1, x\in D$
3) $\mathrm{supp}_i=\overline{\{x\in S|g_i(x)\neq 0\}}\subset U_i, i=1,2,3,\cdots,n$ (称为g_i的支集)
有了这些定义,随后我们就可以在流形上对微分形式进行积分.
和前面完全一样,$S\subset\mathbb{R}^n$为k维定向微分流形($k\leq n$), (U,φ)为保向局部坐标系(φ^{-1}把$\mathbb{R}^k$的正定向映为S取定的方向).若$\omega\in\Lambda_0^k(\Omega)$, 且$\omega$在$U$ 内有紧支集, 定义

$$\int_U\omega=\int_{\varphi(U)}\left(\varphi^{-1}\right)*\omega$$

D为S上的紧区域,$\{(U_i,\varphi_i)\}$ $i=1,2,\cdots,n$ 为保向且复盖 D 的局部坐标系,$\{g_i\}_{i=1}^n$为关于$\{U_i\}_{i=1}^n$的单位分解(ω是k次微分形式)

$$\int_D\omega=\sum_{i=1}^n\int_D g_i\omega=\sum_{i=1}^n\int_{D\cap U_i}g_i\omega$$

以上的两个定义不依赖于局部坐标系的选取.
最后,请你证明如下结论: 设S是一个紧的定向的n维微分流形 ,$D\subset S$是一个连通的开子集,∂D表示D的边界(默认它是一个微分流形,并且维数是$n-1$),对S上的$n-1$阶微分形式ω

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathrm{d}\omega$$