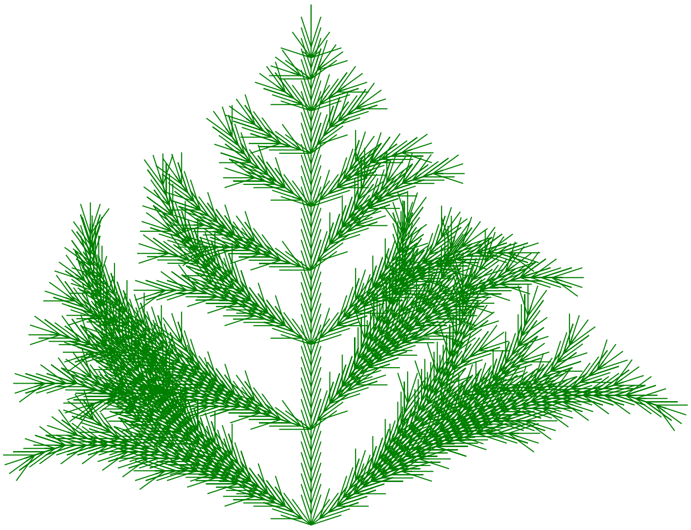
拉姆高中大学数学群第六次群测

大学组(二)
8.6



Contest Introduction

1. There are 4 problems.The full mark of this group test is 100.The exam will begin on 8.6 21:00.
2. After the test,you can send your answer to 1580560632@qq.com.
3. This time the test is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other QQ groups during the exam.

Problem 1. (30 pointts)
(1) 求

$$\iiiint_{\mathbb{R}_+^4} \frac{y^v \sin^3 x}{y^u e^x - 1 - y^u + e^x} e^{-z^{\frac{4}{3}} - t^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

其中 $\mathbb{R}_+^4 = \{(x, y, z, t) : x > 0, y > 0, z > 0, t > 0\}, u > v + 1 > 0$.
(2) 设 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 在 $|z| < 1$ 内全纯, 其中 $u(z)$ 是 f 的实部, $v(z)$ 是 f 的虚部, $0 < r < 1$. 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

证明

$$a_n = \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=r} \frac{u(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

(3) 设 $f(z)$ 在单位圆盘 $U(0, 1)$ 上全纯, (在 $|z| = 1$ 连续) $f(0) = 1$, 证明

$$|f(z) - 1| \leq |zf(z)| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|z| \quad \forall z \in U(0, 1).$$

Problem 2. (20 points)
(1) 请你判断是否存在 $E \subset [0, 1]$ 使得对任何非空开区间 $M \subset [0, 1]$, 都有 $m(E \cap M) > 0$ 同时有 $m(E^c \cap M) > 0$? 如果存在, 请你举一个例子; 如果不存在, 请证明你的结论. (这里 $m(E)$ 表示集合 E 的 Lebesgue 测度)
(2) 是否存在某个线性算子, 它是某个赋范线性空间到其自身上的一对一的不连续线性算子? 说明理由.

Problem 3. (20 points)
设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集合, $m(E) < \infty$.
(1) 证明: 对任意 $f \in L^\infty(E)$, 一定有 $f \in L^p(E), \forall p \geq 1$.
(2) 设 $1 \leq p < q < \infty$, 证明

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq (m(E))^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(E)}$$

(3) 设 $E = [0, 1]$,$M > 0$, f_n 在集合 E 上几乎处处收敛于 f, 并且对任意正整数 n

$$\int_E |f_n|^4 \mathrm{d}x \leq M$$

证明

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^1(E)} = 0$$

Problem 4. (30 points)
设 τ 是平移算子, T 是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le q < p < \infty)$ 的与平移可交换的有界线性算子. 设

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y$$

为极大函数, 其中 $B(x,r)$ 表示以 x 为球心, r 为半径的 n 维球.
(1)(i) 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 证明

$$\lim_{h\to\infty} \|f + \tau_h f\|_p = \sqrt[p]{2}\|f\|_p$$

(ii) 请你求出所有的有界线性算子 T.
(2) 设 $1 < p < \infty, f \in L^p, f \ge 0$, 证明

$$\|Mf\|_p \le \left(\frac{3^n p q_0^{1-p}}{(1-q_0)(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

其中 $q_0 = \frac{p-1}{p}$.

[备注]: 去年代数组是冰神(武汉大学尚镇冰学长)出题, 我出分析组. 今年冰神有事, 没有参与, 就暂时不提供代数组了.