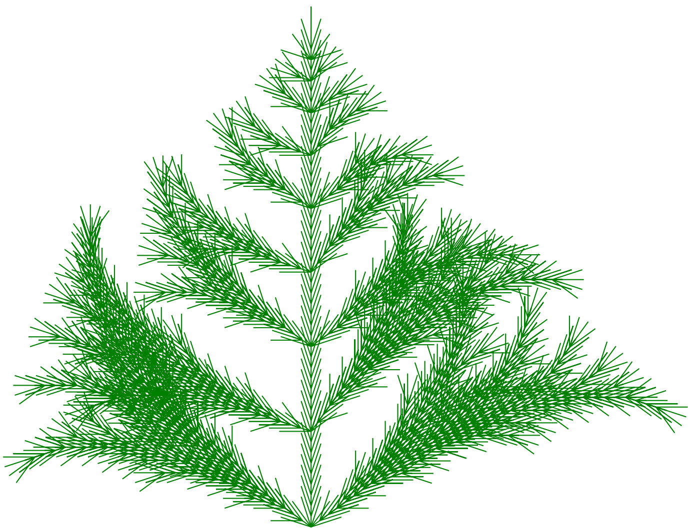
拉姆高中大学数学群第七次群测

大学组(二)

7.29



Contest Introduction

1. There are 6 problems.The full mark of this group contest is 100.The exam will begin on 7.29 21:00.
2. After the exam, you need to open the link **http://lamumathematics.m.icoc.bz/** as soon as possible.
Follow the prompts on the webpage to complete the upload of the answer sheet. If you do not know how to operate it, you can also send it to my personal website E-mail:
alinalagrange.cn@gmail.com
3. This time the contest is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other groups during the exam.
4. This contest is written and edited by Alina Lagrange.
(My personal website **http://alinalagrange.cn**)

Problem 1. 黎曼映射定理是复分析最深刻的定理之一, 它定义了 $\mathbb{C}$ 上单连通开集 U 到单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 的双全纯同构.
(1) 是否存在整个复平面 $\mathbb{C}$ 到 D 的双全纯映射? 如果存在, 求出此映射; 如果不存在, 请你予以证明.
(2) 是否存在 $U=\{z:|z-1|<1$ 并且 $|z-i|<1\}$ 到 D 的双全纯映射? 如果存在, 求出此映射; 如果不存在, 请你予以证明.
(3) 是否存在 $D-\{0\}$ 到 $D_1=\{z:1<|z|<2\}$ 的双全纯映射? 如果存在, 求出此映射; 如果不存在, 请你予以证明.

Problem 2.
(1) 设 f 是右半平面 $\mathbb{C}^+=\{z\in\mathbb{C}:\Re z>0\}$ 上的全纯函数, $\forall z\in\mathbb{C}^+, |f(z)|<1$. 并且 $f(1)=0$. 证明

$$\sum_{n=1}^{2022}|f(n)|<\frac{4037}{2}-2\ln 202$$

(2) 已知

$$f(z)=e^{z^2}-\frac{z^2}{\sqrt[2022]{\ln(e^{2022}+1)-2022}}$$

试确定 $f(z)$ 在单位开圆盘内的零点个数.

Problem 3.
(1) 计算

$$\iiiint_{\mathbb{R}^4}\sin(x^2+y^4+z^6+t^8)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

计算结果保留 Γ 函数值.
(2) 计算

$$\int_{\mathbb{R}+}\left(\frac{e}{x}\right)^x\Gamma(x)\sin 2\pi x\mathrm{d}x$$

Problem 4. 请类比 Cantor 集的构造过程, 构造一个 Lebesgue 测度为 $\mathfrak{m} \in (0, \frac{1}{2})$ 的集合 E 使得 E 满足如下的两个性质:
(i) E 不包含任何开区间.
(ii) 对于任何开区间 I, $I \subset [0,1]$, 如果 $I \cap E \neq \varnothing$, 则有 $0 < m(E \cap I) < m(I)$.

Problem 5. 设 $R > 0$, $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ 表示球心在原点, 半径为 R 的 n 维球. $f \in H_0^1(B^1(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap H^2(B^1(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$, 其中 $H^1(B^1) = W^{1,2}(B^1), H^2(B^1) = W^{2,2}(B^1)$ 表示 Sobolev 空间, $B^1(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 表示一维球, 也就是区间 $(0, \pi)$.
(1) 设 $u \geq 0$, u 在 $B(0, \frac{R}{4})$ 内调和. 证明

$$\sup_{x \in B(0, \frac{R}{4})} u(x) \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n \inf_{x \in B(0, \frac{R}{4})} u(x)$$

(2) 设

$$f_m(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m} a_n \sin(nt)$$

其中 $a_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t$. 证明

$$\|f_m - f\|_{H^1((0,\pi))} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1+\pi}{m} \|\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\|_2$$

Problem 6. 设 $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), Q \subset \mathbb{R}^n$ 是中心在原点, 边平行于坐标轴的方体, 用

$$A_Q^* f = \frac{1}{m(Q)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f_Q| \mathrm{d}y$$

表示 f 在 Q 上的平均振动, 其中 f_Q 表示 f 在 Q 上的平均值

$$f_Q = \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y$$

定义

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} A_Q^* f$$

(1) 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $f \in C^\infty$, $\mathrm{supp} f \subset B$, $\forall x \in B$, 证明

$$|f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) \mathrm{d}y| \leq \frac{2^n}{n} \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y$$

(2) 证明: 对所有 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 以及所有方体 Q 以及 $\theta < 1/(2^n e)$, 有

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q \exp\left(\frac{\theta |f(x) - f_Q|}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}} \right) \mathrm{d}x < 1 + \frac{2^n e^2 \theta}{1 - 2^n e \theta}$$