



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Пролыгина Алина Максимовна
Группа:	РК6-51Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Использование аппроксимаций для численной оптимизации

Студент

подпись, дата

Пролыгина А.М.

Фамилия, И.О.

Преподаватель

подпись, дата

Соколов А.П.

Фамилия, И.О.

Москва, 2021

Содержание

Использование аппроксимаций для численной оптимизации	3
1 Задание	3
2 Цель выполнения лабораторной работы	4
3 Выполненные задачи	4
4 Базовая часть	5
4.1 Разработка функции для численного интегрирования по формуле Симпсона	5
4.2 Разработка функции для численного интегрирования по формуле трапеции	6
4.3 Построение графика зависимости абсолютной погрешности числен- ного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул	6
4.4 Определение порядка точности	9
4.5 Сравнение порядка с аналитическим порядком точности	9
4.6 Выяснение наличия оптимального шага интегрирования	10
5 Заключение	10

Использование аппроксимаций для численной оптимизации

1 Задание

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки $(x, y) = (0, 0)$ достигнет точки $(x, y) = (b, y_b)$ под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось y направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая $y(x)$, которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$F[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx, \quad (1)$$

где g обозначает ускорение свободного падения, и $y'(x) = dy/dx$. Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $t \in [0; T]$ и C, T являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается $b = 2$ и $y_b = 1$. Константы циклоиды для этого граничного условия равны $C = 1.03439984$, $T = 1.75418438$

Базовая часть:

1. Написать функцию `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию `composite_trapezoid(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы трапеции.
3. Рассчитать интеграл (1) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеции для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.

4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.
5. Для обеих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

2 Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – рассмотреть задачу о брахистохроне, найти полное время движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска с помощью численного интегрирования (базовая часть).

3 Выполненные задачи

1. Написана функция $composite_simpson(a, b, n, f)$ численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написана функция $composite_trapezoid(a, b, n, f)$ численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитан интеграл (1) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений $n \in [3; 9999]$. Построен log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. По полученному графику определен порядок точности формулы.
5. Произведено сравнение порядков, полученных с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Выяснено существование оптимального шага интегрирования для данной формулы, минимизирующего достижимую погрешность.

4 Базовая часть

Все вычисления ниже были реализованы на языке Python, используя библиотеки `numpy`, `math`, `scipy` и `matplotlib`.

4.1 Разработка функции для численного интегрирования по формуле Симпсона

Пусть $x_i = a + (i-1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$ и $i = 1, \dots, n+1$, где n – четное число. Тогда существует такое $\xi \in (a; b)$ для $f(x) \in C^4[a; b]$, что составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) + f(x_{n+1}) \right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad (3)$$

Функция `composite_simpson(a, b, n, f)`, разработанная для нахождения интеграла функции f на интервале $[a, b]$ по n узлам по формуле Симпсона, представлена в Листинге 1 на языке Python.

Листинг 1. Реализация функции `composite_simpson(a, b, n, f)`

```
1 def composite_simpson(a, b, n, f):
2     if n % 2 != 0:
3         n += 1
4     x = np.linspace(a, b, n + 1)
5     h = (b - a) / n
6     sum_odd_ = []
7     for x_ in x[2:-1:2]:
8         tso = tx(x_)
9         sum_odd_.append(f(tso))
10    sum_odd = np.sum(sum_odd_)
11    sum_even_ = []
12    for x_ in x[1::2]:
13        tse = tx(x_)
14        sum_even_.append(f(tse))
15    sum_even = np.sum(sum_even_)
16    return h / 3. * (f(tx(x[0])) + 2 * sum_odd + 4 * sum_even + f(tx(x[-1])))
```

4.2 Разработка функции для численного интегрирования по формуле трапеции

Пусть $x_i = a + (i - 1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$ и $i = 1, \dots, n + 1$, где $n \in N$. Тогда существует такое $\xi \in (a; b)$ для $f(x) \in C^2[a; b]$, что составная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=2}^n f(x_i) + f(x_{n+1}) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \quad (4)$$

Функция `composite_trapezoid(a, b, n, f)`, разработанная для нахождения интеграла функции f на интервале $[a, b]$ по n узлам по формуле трапеции, представлена в Листинге 2 на языке Python.

Листинг 2. Реализация функции `composite_trapezoid(a, b, n, f)`

```
1 x = np.linspace(a, b, n + 1)
2 h = (b - a) / n
3 sum_ = []
4 for x_ in x[1:-1]:
5     ts = tx(x_)
6     sum_.append(f(ts))
7 tr_sum = 2 * np.sum(sum_)
8 return h / 2 * (f(tx(x[0])) + tr_sum + f(tx(x[-1])))
```

4.3 Построение графика зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обоих формул

В формулу Симпсона передается функция подынтегрального выражения, найденная с помощью дифференцирования по t . Для нахождения $y'(x)$ используется дифференцирование x и y по t :

$$\frac{dx}{dt} = C(1 - \cos(2t))$$

$$\frac{dy}{dt} = C \sin(2t)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)} \quad (5)$$

Производная $y'(x)$ из уравнения (5), значение функции $y(x)$ в точке t из параметрически заданной циклоиды (2) и $dx = C(1 - \cos(2t))dt$ подставляются в функционал (1). После упрощения получается формула (6), которая задается функцией $func(t)$, представленной в Листинге 3. Поскольку при подстановке пределов интегрирования от $[0; T]$ в формуле (6) возникает деление на 0, а подынтегральное выражение начинает стремиться к бесконечности, в функции принято допущение, что в начальной координате $(x; y) = (0; 0)$ значение подынтегральной функции равно 0.

$$F[t] = \int_0^{t_a} \sqrt{\frac{\left(1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}\right)^2\right)}{2gC\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos(2t))\right)}} C(1 - \cos(2t)) dt = \int_0^{t_a} \sqrt{\frac{\left(1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}\right)^2\right) C^2(1 - \cos(2t))^2}{gC(1 - (\cos(2t)))}} dt$$

$$F[t] = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{t_a} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}\right)^2\right) (1 - \cos(2t))} dt \quad (6)$$

Листинг 3. Реализация функции $func(t)$

```

1 def func(t):
2     if t == 0:
3         return 0
4
5     flux = np.sin(2 * t) / (1 - np.cos(2 * t))
6     y = np.sqrt(C / g) * np.sqrt(1 + flux ** 2) * np.sqrt(1 - np.cos(2 * t))
7     return y

```

Для нахождения t из распределенного x реализованы функции $xt(t, x)$ и $tx(x)$, которые представлены в Листинге 4. Функция $xt(t, x)$ задается зависимостью $y(t)$ из параметрической системы (2), а $tx(x)$ решает уравнение относительно t с помощью `fsolve` из библиотеки `scipy.optimize`.

Листинг 4. Реализация функции $xt(t, x)$ и $tx(x)$

```

1 def xt(t, x):
2     return C*t - C * 0.5 * sin(2*t) - x
3
4
5 def tx(x):
6     return fsolve(xt, 0, x)

```

Для построения графика зависимости абсолютной погрешности методов от шага интегрирования необходимо вычислить точное значение интеграла. Для этого производится приведение выражения (6) к виду (7).

$$F[t] = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{t_a} \sqrt{(1 - \cos(2t)) + \frac{\sin(2t)^2}{1 - \cos(2t)}} dt = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{t_a} \sqrt{\frac{1 - 2\cos(2t) + \cos(2t)^2 + \sin(2t)^2}{1 - \cos(2t)}} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{t_a} \sqrt{\frac{2 - 2\cos(2t)}{1 - \cos(2t)}} dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} \int_0^{t_a} dt$$

$$F[t] = \sqrt{\frac{2C}{g}} \int_0^{t_a} dt \quad (7)$$

При подстановке полного времени интегрирования T в (7) получается точное значение интеграла (8).

$$F = \sqrt{\frac{2C}{g}} \int_0^T dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} T \quad (8)$$

В функциях $error_cs(a, b, n, f)$ и $error_ctr(a, b, n, f)$ реализовано вычисление абсолютных погрешностей составных формул Симпсона и трапеции, соответственно. Данные функции возвращают модуль разности точного значения, полученного по формуле (8), и значения, вычисленного по формулам численного интегрирования. Программный код этих функций представлен в Листинге 5.

Листинг 5. Реализация функций $error_cs(a, b, n, f)$ и $error_ctr(a, b, n, f)$

```

1 def error_cs(a, b, n, f):
2     exact_integral = np.sqrt(2 * C / g) * T
3     return np.abs(composite_simpson(a, b, n, f) - exact_integral)
4
5
6 def error_ctr(a, b, n, f):
7     exact_integral = np.sqrt(2 * C / g) * T
8     return np.abs(composite_trapezoid(a, b, n, f) - exact_integral)

```

В итоге был получен график, где $n \in [3; 9999]$, где пределы интегрирования a и b равны, соответственно, 0 и 2 (Рис. 1).

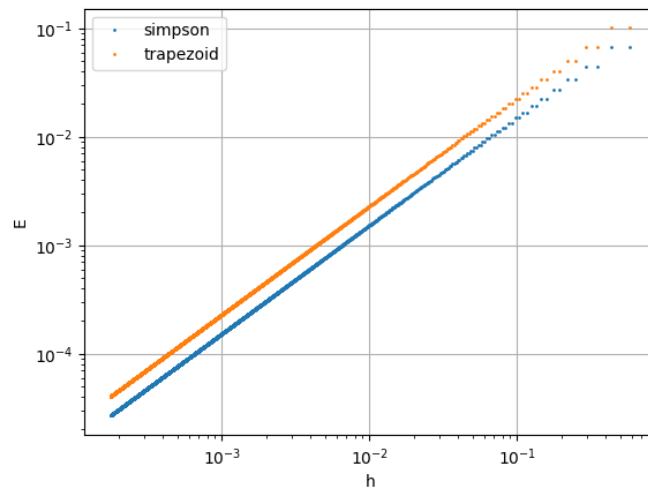


Рис. 1. График зависимости абсолютных погрешностей методов Симпсона и трапеции от шага интегрирования

4.4 Определение порядка точности

Остаточный член составной формулы Симпсона имеет следующую форму (9):

$$-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi), \quad (9)$$

где $\xi \in (a; b)$, $f(x) \in C^4[a; b]$.

Остаточный член составной формулы Симпсона пропорционален $O(h^4)$. Значит, и аналитический порядок точности пропорционален $O(h^4)$.

Остаточный член составной формулы трапеции имеет следующую форму (10):

$$-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi), \quad (10)$$

где $\xi \in (a; b)$, $f(x) \in C^2[a; b]$.

Остаточный член составной формулы трапеции пропорционален $O(h^2)$. Значит, и аналитический порядок точности пропорционален $O(h^2)$.

Для определения порядка точности выведенной погрешности на графике необходимо вывести порядки точности $O(h)$, $O(h^2)$ и $O(h^4)$, чтобы по наклону графика погрешности к оси h можно было определить приблизительный порядок точности.

4.5 Сравнение порядка с аналитическим порядком точности

На графике (Рис. 2) отображены зависимости погрешности от шага интегрирования методов Симпсона и трапеции и аналитические порядки точности $O(h)$, $O(h^2)$ и $O(h^4)$.

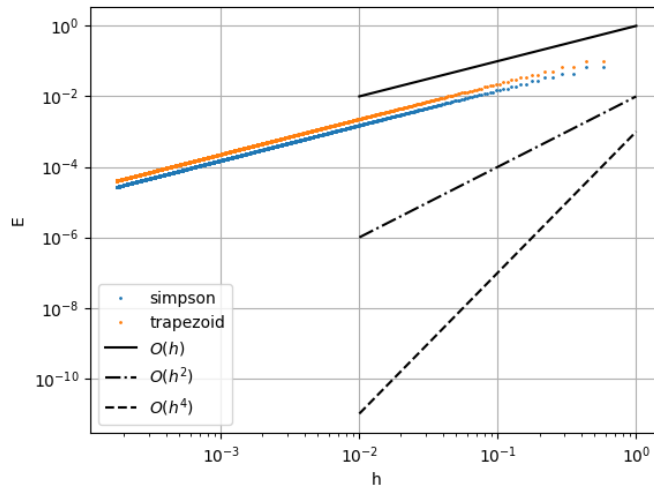


Рис. 2. График зависимости абсолютных погрешностей методов Симпсона и трапеции от шага интегрирования с выводом аналитических порядков точности

На графике (Рис. 2) видно, что полученная погрешность обоих методов наиболее приближена к порядку точности $O(h)$, что является противоречием, следовательно, функция не является достаточно гладкой.

4.6 Выяснение наличия оптимального шага интегрирования

По рассчитанному интегралу (1) с помощью формулы Симпсона и формулы трапеции и найденной полной погрешности E , включающей в себя как остаточный член, так и вычислительную погрешность, для каждого случая, получается рисунок 2. Численное интегрирование устойчиво с вычислительной точки зрения. Поскольку полная погрешность E не достигла машинного эпсилон, оптимальный шаг интегрирования определить невозможно.

5 Заключение



По завершении базовой части были изучены методы численного интегрирования по составной формуле Симпсона и составной формуле трапеции, были разработаны функции для этих методов, а также функции для вычисления абсолютных погрешностей формул. В результате получен график зависимости абсолютной погрешности методов от шага дифференцирования, и сделаны выводы о соответствии полученного порядка точности аналитическому и наличии оптимального шага интегрирования для данной формулы.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140.

Выходные данные

Пролыгина А.М.. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2021. — 10 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка:  ассистент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин
Решение и вёрстка:  студент группы РК6-51Б, Пролыгина А.М.

2021, осенний семестр