Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехника и комплексная автоматизация»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Аналитические модели и имитационное моделирование»

Студент:	Караф Сармат Майк
Группа:	РК6-82б
Тип задания:	Домашнее задание №3
Название:	Теория надежности
Вариант:	34

Студент ________________ Караф С. М.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ________________ Берчун Ю. В.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Оценка: ________________

Москва, 2023

Содержание

Теория надежности **3**
1 Цель выполнения домашнего задания . . . 3
2 Задание . . . 3
3 Решение . . . 4
Функция надежности системы . . . 11
Имитационное моделирование . . . 11
4 Вывод . . . 13

Теория надежности

1 Цель выполнения домашнего задания

Цель выполнения домашнего задания – изучить систему по теории надежности

2 Задание

Система состоит из устройств типа A и типа B, интенсивности отказов λ_A и λ_B известны. Для функционирования системы требуется хотя бы одно устройство типа A и хотя бы N_B устройств типа B. Общее число устройств в системе (включая резервные) – R_A и R_B соответственно, причём в нормальном состоянии одновременно включены сразу N_A устройств типа A.

Если N – номер зачётной книжки, а G – последняя цифра в номере группы, то параметры системы определяются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\lambda_A = G + (N \bmod 3) \\
\lambda_B = G + (N \bmod 5) \\
N_A = 2 + (G \bmod 2) \\
N_B = 2 + (N \bmod 2) \\
R_A = 4 + (G \bmod 2) \\
R_B = 5 - (G \bmod 2)
\end{gathered}
$$

Требуется:

1. нарисовать граф состояний системы;
2. составить матрицу интенсивностей переходов;
3. записать дифференциальные уравнения Колмогорова;
4. аналитически решить полученную систему уравнений, исходя из того, что в начальный момент времени все устройства исправны;
5. построить графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных состояний с течением времени;
6. построить график функции надёжности системы;
7. рассчитать математическое ожидание времени безотказной работы;
8. провести имитационное моделирование системы в терминах непрерывных марковских цепей 100 раз, рассчитать среднее выборочное значение и стандартное отклонение времени безотказной работы системы.

3 Решение

Рассчитаем начальные данные для выполнения домашнего задания по номеру зачетки $N = 34$ и группы $G = 2$:

$$\begin{aligned}
\lambda_A &= G + (N \bmod 3) = 2 + (34 \bmod 3) = & 3 \\
\lambda_B &= G + (N \bmod 5) = 2 + (34 \bmod 5) = & 6 \\
N_A &= 2 + (G \bmod 2) = 2 + (2 \bmod 2) = & 2 \\
N_B &= 2 + (N \bmod 2) = 2 + (34 \bmod 2) = & 2 \\
R_A &= 4 + (G \bmod 2) = 4 + (2 \bmod 2) = & 4 \\
R_B &= 5 - (G \bmod 2) = 5 - (2 \bmod 2) = & 5
\end{aligned}$$

Предположим что S_{cd}^{ab} - состояние системы, где

- a - количество работающих устройств типа A, включая резервные,
- b - количество резервных устройств типа A,
- c - количество работающих устройств типа B, включая резервные,
- d - количество резервных устройств типа B.

На рисунке 1 изображен граф состояний системы.

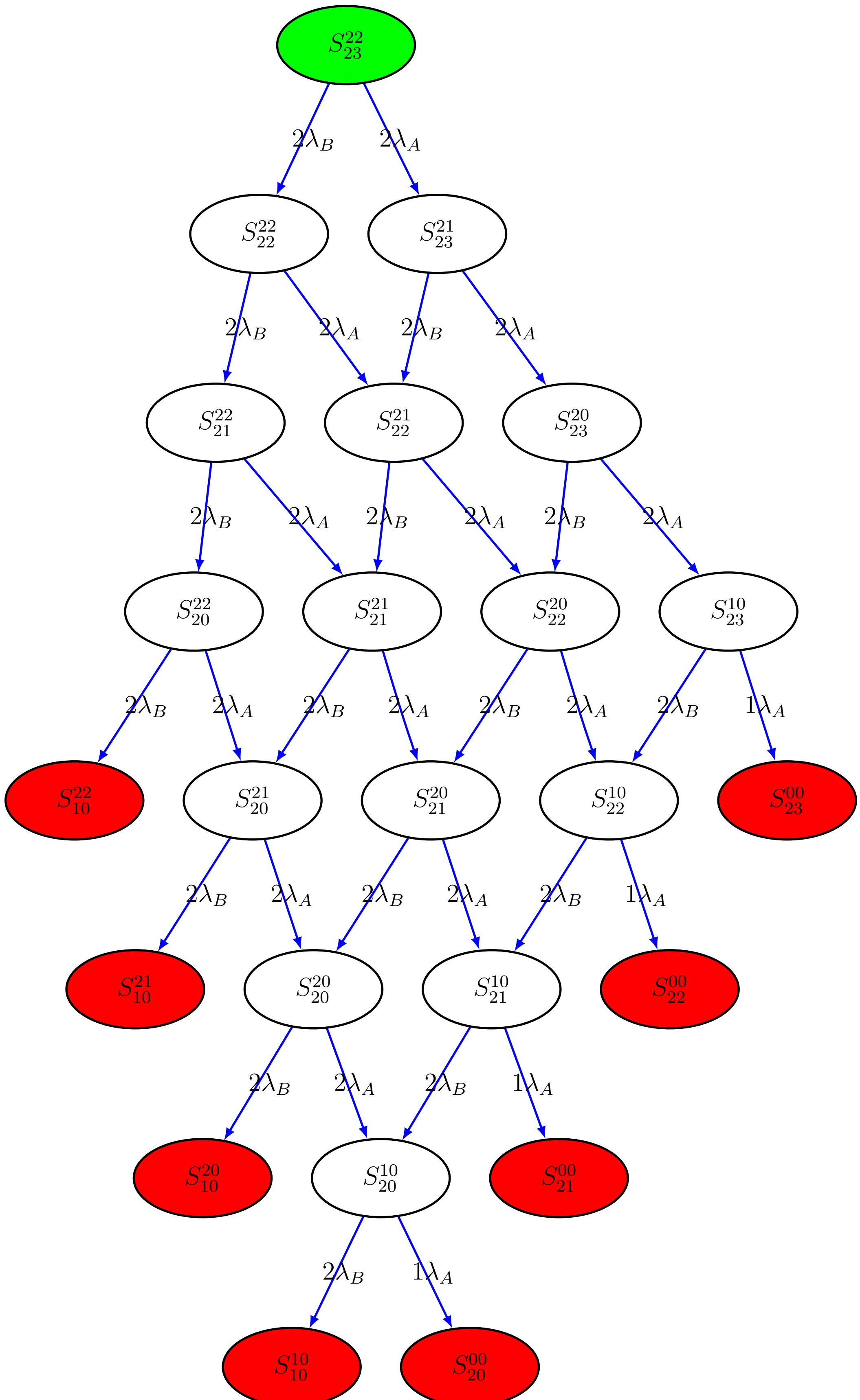

Рис. 1. Граф состояний системы

Переобозначим состояния следующим образом: $S_0 = S_{23}^{22}$, $S_1 = S_{22}^{22}$, $S_2 = S_{23}^{21}$, $S_3 = S_{21}^{22}$, $S_4 = S_{22}^{21}$, $S_5 = S_{23}^{20}$, $S_6 = S_{20}^{22}$, $S_7 = S_{21}^{21}$, $S_8 = S_{22}^{20}$, $S_9 = S_{23}^{10}$, $S_{10} = S_{10}^{22}$, $S_{11} = S_{20}^{21}$, $S_{12} = S_{21}^{20}$, $S_{13} = S_{22}^{10}$, $S_{14} = S_{23}^{00}$, $S_{15} = S_{10}^{21}$, $S_{16} = S_{20}^{20}$, $S_{17} = S_{21}^{10}$, $S_{18} = S_{22}^{00}$, $S_{19} = S_{10}^{20}$, $S_{20} = S_{20}^{10}$, $S_{21} = S_{21}^{00}$, $S_{22} = S_{10}^{10}$, $S_{23} = S_{20}^{00}$.

На основании построенного графа состояний можно составить матрицу интенсивностей переходов (матрица 1). Необходимо заметить, что диоганальные элементы матрицы равны отрицательной сумме всех остальных элементов строки.

$$\Lambda = \begin{pmatrix}
-18 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -18 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -18 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 12 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 12 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{1}$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases}
P_0' = -12P_0(t) - 6P_0(t) \\
P_1' = 12P_0(t) - 12P_1(t) - 6P_1(t) \\
P_2' = 6P_0(t) - 12P_2(t) - 6P_2(t) \\
P_3' = 12P_1(t) - 12P_3(t) - 6P_3(t) \\
P_4' = 6P_1(t) + 12P_2(t) - 12P_4(t) - 6P_4(t) \\
P_5' = 6P_2(t) - 12P_5(t) - 6P_5(t) \\
P_6' = 12P_3(t) - 12P_6(t) - 6P_6(t) \\
P_7' = 6P_3(t) + 12P_4(t) - 12P_7(t) - 6P_7(t) \\
P_8' = 6P_4(t) + 12P_5(t) - 12P_8(t) - 6P_8(t) \\
P_9' = 6P_5(t) - 12P_9(t) - 3P_9(t) \\
P_{10}' = 12P_6(t) \\
P_{11}' = 6P_6(t) + 12P_7(t) - 12P_{11}(t) - 6P_{11}(t) \\
P_{12}' = 6P_7(t) + 12P_8(t) - 12P_{12}(t) - 6P_{12}(t) \\
P_{13}' = 6P_8(t) + 12P_9(t) - 12P_{13}(t) - 3P_{13}(t) \\
P_{14}' = 3P_9(t) \\
P_{15}' = 12P_{11}(t) \\
P_{16}' = 6P_{11}(t) + 12P_{12}(t) - 12P_{16}(t) - 6P_{16}(t) \\
P_{17}' = 6P_{12}(t) + 12P_{13}(t) - 12P_{17}(t) - 3P_{17}(t) \\
P_{18}' = 3P_{13}(t) \\
P_{19}' = 12P_{16}(t) \\
P_{20}' = 6P_{16}(t) + 12P_{17}(t) - 12P_{20}(t) - 3P_{20}(t) \\
P_{21}' = 3P_{17}(t) \\
P_{22}' = 12P_{20}(t) \\
P_{23}' = 3P_{20}(t)
\end{cases}$$

Начальные условия:

$$P_0(t=0) = 1$$

$$P_i(t=0) = 0 \quad \forall i \in [1, 24]$$

Найдем функцию $P_0(t)$.

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -18P_0(t)$$

$$\int \frac{1}{P_0(t)} dP_0(t) = \int -18dt$$

$$\int d\ln P_0(t) = \int -18dt$$

$$\ln P_0(t) = -18t + c$$

$$P_0(t) = e^{-18t+c}$$
$$P_0(t=0) = 1 => e^{-18t+c} = 1 => c = 0$$
$$P_0(t) = e^{-18t}$$

Теперь найдем функцию $P_1(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 12e^{-18t} - 18P_1(t)$$
$$\frac{dP_1(t)}{dt} + 18P_1(t) = 12e^{-18t} \quad | \cdot e^{18t}$$
$$e^{18t}\frac{dP_1(t)}{dt} + e^{18t}18P_1(t) = 12$$
$$\frac{dP_1(t)\cdot e^{18t}}{dt} = 12$$
$$\int \frac{dP_1(t)\cdot e^{18t}}{dt}dt = \int 12dt$$
$$P_1(t)e^{18t} = 12t + c => P_1(t) = (12t + c)e^{-18t}$$
$$P_1(t=0) = 0 => (0 + c)e^{-18t} = 0 => c = 0$$
$$P_1(t) = 12e^{-18t}t$$

Аналогично вычисляется $P_2(t)$:

$$P_2(t) = 6e^{-18t}t$$

На основе $P_1(t)$ и $P_2(t)$ найдем $P_4(t)$:

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = 12P_1(t) + 6P_2(t) - 18P_4(t)$$
$$\frac{dP_4(t)}{dt} + 18P_4(t) = 144e^{-18t}t$$
$$\frac{d}{dt}(e^{18t}P_4(t)) = 144t$$
$$\int \frac{d}{dt}(e^{18t}P_4(t))dt = \int 144tdt$$
$$e^{18t}P_4(t) = 72t^2 + c$$
$$y(0) = 0 => P_4(t) = e^{-18t}(72t^2 + c), c = 0$$
$$P_4(t) = 72e^{-18t}t^2$$

По аналогии с $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_4(t)$ вычислим функции вероятностей для всех нетерминальных состояний:

$$P_1(t) = 12e^{-18t}t^1$$
$$P_2(t) = 6e^{-18t}t^1$$
$$P_3(t) = 72e^{-18t}t^2$$
$$P_4(t) = 72e^{-18t}t^2$$
$$P_5(t) = 18e^{-18t}t^2$$
$$P_6(t) = 288e^{-18t}t^3$$
$$P_7(t) = 432e^{-18t}t^3$$
$$P_8(t) = 216e^{-18t}t^3$$
$$P_9(t) = 36e^{-18t}t^3$$
$$P_{11}(t) = 1728e^{-18t}t^4$$
$$P_{12}(t) = 1296e^{-18t}t^4$$
$$P_{13}(t) = 432e^{-18t}t^4$$
$$P_{16}(t) = 5184e^{-18t}t^5$$
$$P_{17}(t) = 2592e^{-18t}t^5$$
$$P_{20}(t) = 10368e^{-18t}t^6$$

По вычисленным функциям были построены графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных «рабочих» состояний с течением времени (рис. 2 и 3).

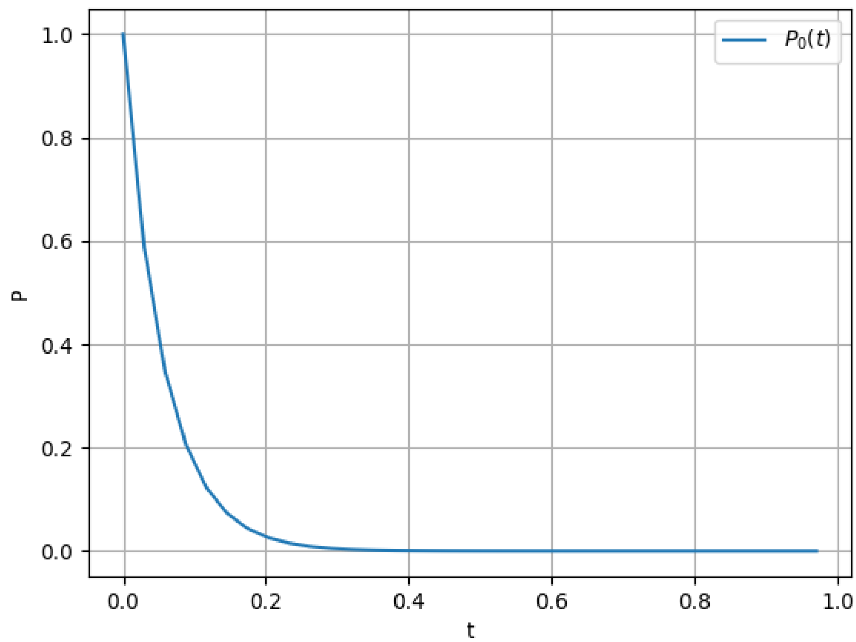

Рис. 2. Функция вероятности для начального состояния

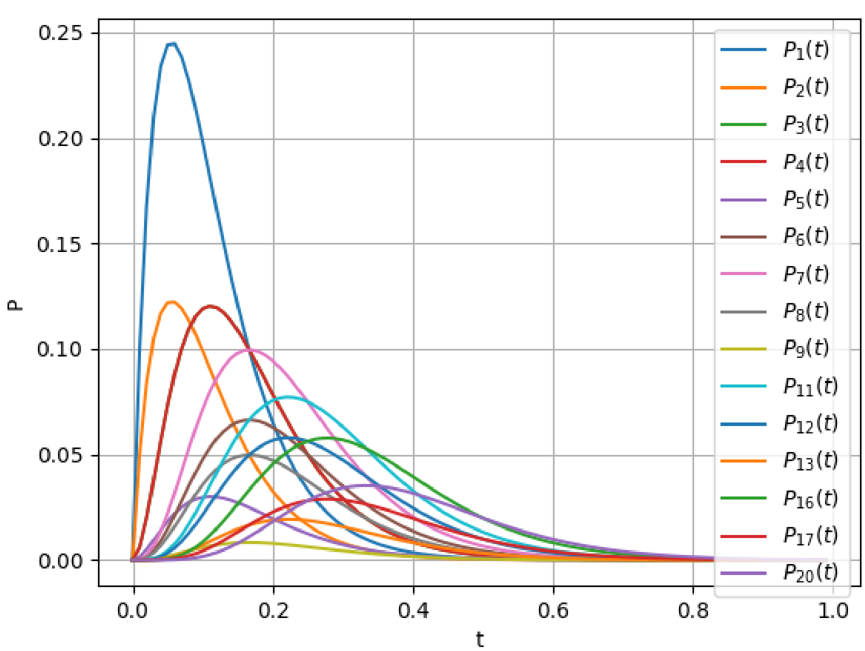

Рис. 3. Функции вероятностей для нетерминальных состояний

Найдем функцию вероятности системы для терминального состояния.

$$P_{term} = 1 - \sum P_{not\_trem}$$

$$P_{term} = 1 - e^{-9t}(10368t^6 + 7776t^5 + 3456t^4 + 972t^3 + 162t^2 + 18t^1 + 1) \quad (1)$$

Функция надежности системы

Функция надежности может быть определена следующим образом:

$$R(t) = 1 - P_{term}(t)$$

График функции надежности $R(t)$ представлен на рисунке 4.

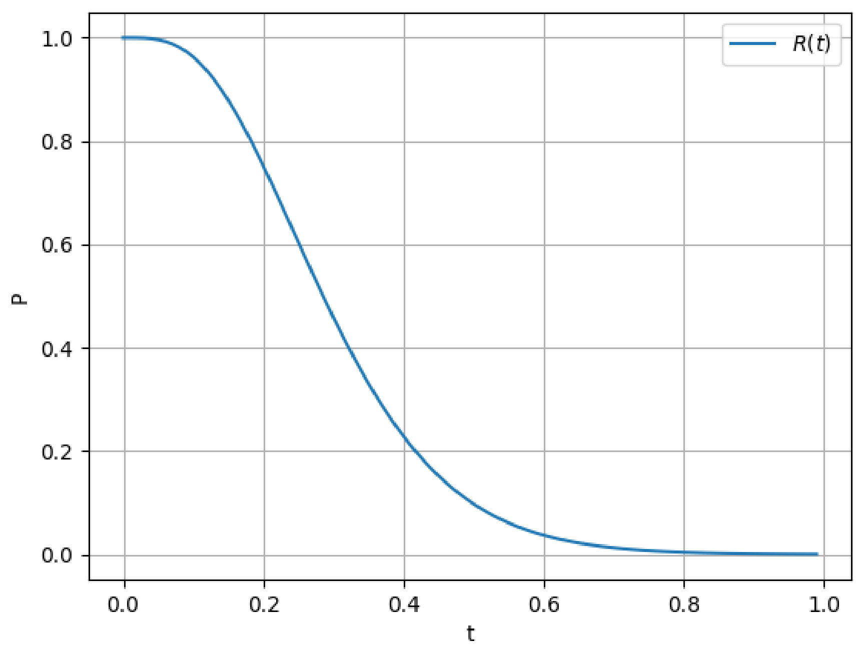

Рис. 4. Функция надежности системы

Математическое ожидание может быть вычислено по следующей формуле:

$$\mu = \int_0^{+\infty} R(t)dt = 0.305746075293400$$

Имитационное моделирование

Для системы с непрерывным временем была реализована функция, осуществляющая переходы по состояниям.

Листинг 1. *реализация марковского процесса*

```
# моделирование одного эпизода с непрерывным временем
def MD(m):
    current_s = 0
    current_t = 0
    states_tr = [current_s]
    t_tr=[current_t]

    while np.max(m[current_s]) != 0: # пока не упали в терминальное
        lb, la = find_lambda(m[current_s])

        # t = -log(1-y)/lambda
        t_a = F_t(la,np.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=None))
        t_b = F_t(lb, np.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=None))

        # переход по "минимальному"времени
        current_t += min(t_a, t_b)
        current_s = m[current_s].index(la)*(t_a<t_b) +
            m[current_s].index(lb)*(t_a>=t_b)

        # для дальнейшей отрисовки
        states_tr.append(current_s)
        t_tr.append(current_t)

    return current_t, states_tr, t_tr
```

На рисунке 5 представлен график переключению состояний системы для 15 прогонов ($N = 15$).

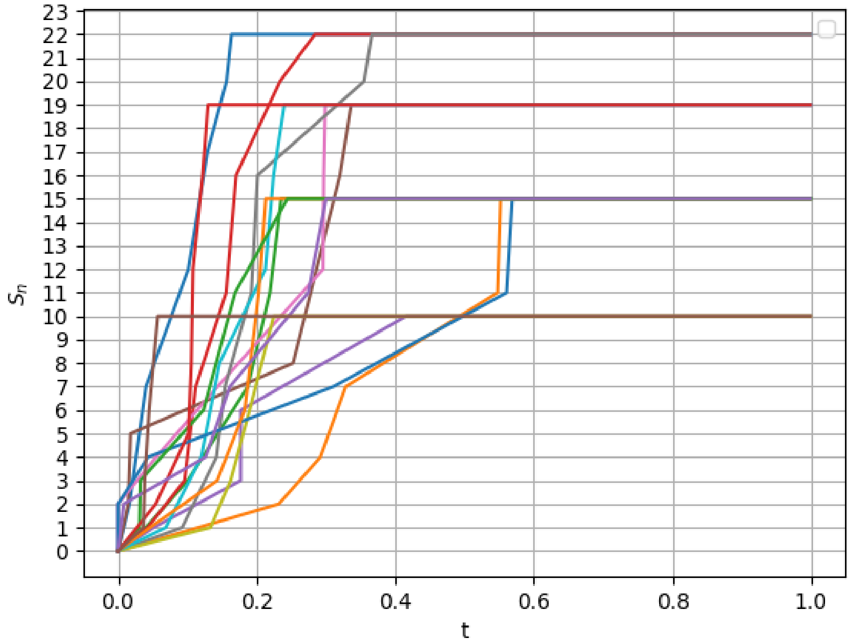

Рис. 5. График переключению состояний системы

Для $N = 100$

$$S = \sqrt{D\frac{N}{N-1}} = 0.144,$$

$$\hat{t} = 0.3150162361146376,$$

где S - стандартное, $\hat{t}$ - среднее отклонение.

4 Вывод

В ходе выполнения домашнего задания была промоделирована работа СМО в терминах непрерывных марковских цепей, а также выполнен анализ ее работы.

Постановка: © *старший преподаватель кафедры РК-6, Берчун Ю.В.*
Решение и вёрстка: © *студент группы РК6-82б, Караф С. М.*

2023, зимний семестр