Сжатие изображений с помощью сингулярного разложения матриц

Сагайдак Алина, гр. 22341

1 Постановка задачи

Настоящая работа посвящена сжатию черно-белых и цветных изображений с помощью сингулярного разложения матриц (SVD-разложения).

2 Краткая теория

2.1 Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы

Пусть A – комплексная $m \times n$-матрица. Неотрицательные вещественные скаляры σ, которые являются решениями системы матричных уравнений

$$\begin{cases} A\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u} \\ A^\dagger\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v} \end{cases}$$

называются сингулярными числами матрицы A. Удовлетворяющие этой системе векторы $\mathbf{v}$ называются *правыми сингулярными векторами* матрицы A, а векторы $\mathbf{u}$ - *левыми сингулярными векторами* матрицы A

Лемма Сингулярные числа матрицы A суть неотрицательные квадратные корни из совпадающих собственных чисел матриц $A^\dagger A$ и $AA^\dagger$.

2.2 Сингулярное разложение матриц

Теорема Для любой комплексной $m \times n$-матрицы A существуют унитарные $m \times m$-матрицы U и $n \times n$-матрица V, такие что

$$A = U\Sigma V^{\dagger}$$

с диагональной $m \times n$-матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{min\{m,n\}}$ - сингулярные числа матрицы A, а столбцы матриц U и V являются соответственно левыми и правыми сингулярными векторами матрицы A.

Такое представление называется *сингулярным разложением матрицы* A. Если A - вещественная матрица, то U и V также являются вещественными ортогональными матрицами и сингулярное разложение принимает вид

$$A = U\Sigma V^T$$

Полный обзор сингулярных чисел, сингулярных векторов и сингулярного разложения представлен, например, в [4].

2.3 Степенной метод

Степенной метод применяется для получения наибольшего по модулю собственного значения матрицы. Пусть $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots$ - собственные числа матрицы A. Построим такой итерационный процесс:

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = A\mathbf{u}^{(s)}$$

В качестве начального приближения для итерационного процесса выберем произвольным образом вектор

$$\mathbf{u}^{(0)} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + a_3\mathbf{u_3} + \ldots,$$

где $\mathbf{u_j}$ - j-й собственный вектор матрицы:$A\mathbf{u_j} = \lambda_j\mathbf{u_j}$. Можно показать, что такой итерационный процесс сходится к собственному вектору $\mathbf{u_1}$, соответствующему наибольшему по модулю собственному значению λ_1. Подробнее степенной метод описан в [2, 3].

2.4 Процесс Грама-Шмидта

Процесс Грама-Шмидта преобразует последовательность линейно независимых векторов $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ в ортонормированную систему векторов $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$, причём так, что каждый вектор $\mathbf{e_j}$ есть линейная комбинация $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_j}$.

Пусть имеются линейно независимые векторы $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ и пусть $\mathbf{proj_b\, a}$ - оператор проекции вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, определенный как

$$\mathbf{proj_b\, a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}\mathbf{b}$$

Тогда классический процесс Грама — Шмидта выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b_1} = \mathbf{a_1} \\
&\mathbf{b_2} = \mathbf{a_2} - \mathbf{proj_{b_1}\, a_2} \\
&\mathbf{b_3} = \mathbf{a_3} - \mathbf{proj_{b_1}\, a_3} - \mathbf{proj_{b_2}\, a_3} \\
&\quad\vdots \\
&\mathbf{b_n} = \mathbf{a_n} - \mathbf{proj_{b_1}\, a_n} - \mathbf{proj_{b_2}\, a_n} \ldots \mathbf{proj_{b_{n-1}}\, a_n}
\end{aligned}$$

В результате $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}$ - ортогональная система векторов.

3 Техническая реализация SVD-разложения

Исходный код программы можно найти по ссылке [1]. Основная идея алгоритма SVD-разложения: выбирая произвольным образом вектора $\mathbf{v}_i$, т.е. строки матрицы V^T, с помощью степенного метода находятся $\mathbf{u}_i$ - столбцы матрицы

U. Произвольный выбор векторов $\mathbf{v}_i$ позволяет относительно быстро найти приближенные значения матриц U и V^T. Далее процессом Грама-Шмидта матрицы U и V^T ортогонализируются и находится матрица сингулярного разложения

$$\Sigma = U^T A V$$

Для того, чтобы степенной метод находил разные сингулярные векторы, а не один и тот же, каждый найденный вектор вычитается из исходной матрицы

$$A = A - \sigma \cdot \text{внешнее произведение}(u, v)$$

Чтобы степенной метод сходился к направлению максимальной вариации, а не к среднему изначальную матрицу центрируем, то есть $A \to A - \mathrm{mean}(A)$. К сжатому изображению обратно добавляется $\mathrm{mean}(A)$, чтобы сжатое изображение сохраняло яркость начального изображения.

Для оценки качества сжатия изображений использовалась метрика PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio) - Пиковое отношение сигнал/шум. PSNR измеряется децибелах (dB) и показывает насколько сигнал громче шума.

$$\mathrm{PSNR} = 20 \cdot log_{10}(255/\sqrt{\mathrm{MSE}}),$$

где MSE - среднеквадратичная ошибка, 255 - максимально возможное значение пикселя. Человеческое восприятие яркости/громкости логарифмическое, поэтому ошибка переводится в dB.

Как интерпретировать PSNR?

- PSNR $>$ 40 dB - отличное качество, различия невидимы
- PSNR $=$ 30-40 dB - хорошее качество, различия едва заметны
- PSNR $=$ 20-30 dB - приемлемое качество, различия заметны
- PSNR $<$ 20 dB - плохое качество, сильные искажения

4 Результаты

Проверка корректности работы программы проводилась при различном числе сингулярных чисел k. Очевидно, что для черно-белых изображений алгоритм SVD-разложения сразу применим, так как черно-белые изображения представимы в виде двумерных массивов, в которых каждый элемент соответствуют цвету пикселя от 0 (черный) до 255 (белый). Так как цветные изображения в кодировке RGB представляют из себя три слоя двумерных матриц, то нетрудно применить реализованный алгоритм, разбив цветное изображение по слоям.

4.1 Черно-белые изображения

Рис. 1: **k = 10**: Коэффициент сжатия: 117.83. PSNR: 28.9 dB

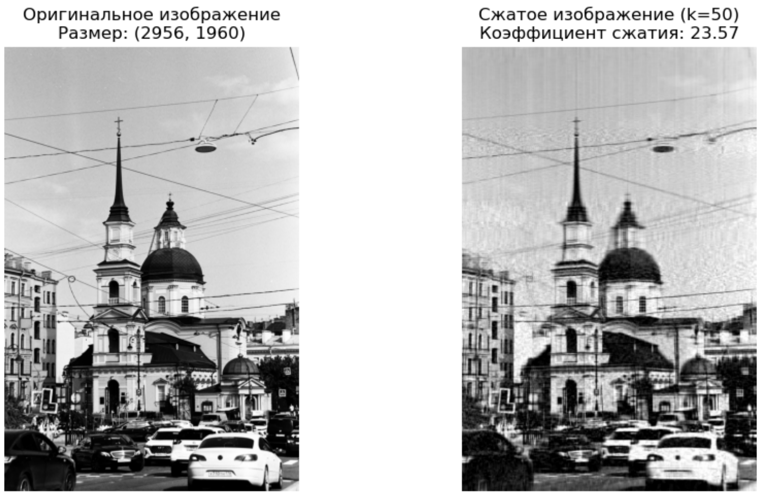

Рис. 2: **k = 50**: Коэффициент сжатия: 23.57. PSNR: 29.7 dB

Рис. 3: **k = 100**: Коэффициент сжатия: 11.78. PSNR: 30.3 dB

4.2 Цветные изображения

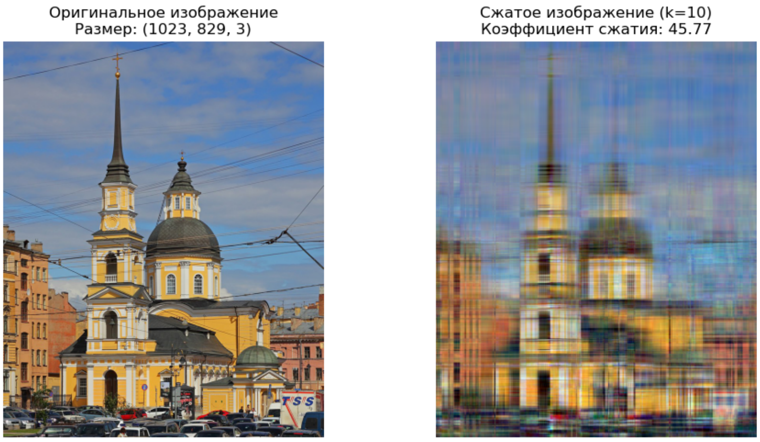

Рис. 4: **k = 10**: Коэффициент сжатия: 45.77. PSNR: 29.5 dB

Рис. 5: **k = 50**: Коэффициент сжатия: 9.15. PSNR: 30.6 dB

Рис. 6: **k = 100**: Коэффициент сжатия: 4.58. PSNR: 31.1 dB

Список литературы

[1] *Исходный код.* URL: `https://github.com/alinasagaydak/OVF/tree/main/coursework`.

[2] Н. Н. Калиткин. *Численные методы.*

[3] С. В. Смирнов. *Основы вычислительной физики. Часть II.*

[4] С. П. Шарый. *Курс вычислительных методов.*