

Seminar 5

(S5.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulțimile de formule:

- (i) $\Gamma = \{v_n \rightarrow v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- (ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \rightarrow v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstrație:

- (i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \models v_n \rightarrow v_{n+1}$ dacă și numai dacă $e^+(v_n \rightarrow v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e^+(v_n) \rightarrow e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e(v_n) \rightarrow e(v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{aligned}
 e \models \Gamma \quad & \text{dacă și numai dacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad e(v_0) \leq e(v_1) \leq \dots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \dots \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad (e(v) = 0 \text{ pentru orice } v \in V) \\
 & \quad \text{sau } (e(v) = 1 \text{ pentru orice } v \in V) \\
 & \quad \text{sau (există } k \geq 1 \text{ a.î. } e(v_i) = 0 \text{ pentru orice } i < k \text{ și} \\
 & \quad e(v_i) = 1 \text{ pentru orice } i \geq k).
 \end{aligned}$$

Definim $e^0 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^1(v) = 1$ și, pentru orice $k \geq 1$,

$$e_k : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.$$

- (ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Atunci

$$\begin{aligned}
 e \models \Gamma \quad & \text{dacă și numai dacă} \quad e \models v_0 \text{ și } e \models v_n \rightarrow v_{n+1} \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 7 \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad e(v_0) = 1 \text{ și } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \dots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } n \in \{0, 1, \dots, 8\}.
 \end{aligned}$$

Așadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \rightarrow \{0, 1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S5.2) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Demonstrație:

- (i) Fie e un model al lui Γ . Vrem să arătăm că e este model al lui ψ . Cum $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, avem $e \models \varphi$ și $e \models \varphi \rightarrow \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ și $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = 1 \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \models \psi$.
- (ii) “ \Rightarrow ” Fie e un model al lui Γ . Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \rightarrow \psi$. Avem două cazuri:
 - (a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \rightarrow e^+(\psi) = 1$, deci $e \models \varphi \rightarrow \psi$.
 - (b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \models \varphi$. Atunci $e \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, și prin urmare, $e \models \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \rightarrow 1 = 1$, deci $e \models \varphi \rightarrow \psi$.
- “ \Leftarrow ” Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ și $e \models \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Obținem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \models \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ , avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ , avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ , avem $e \models \varphi$ și $e \models \psi \iff \Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

□

Notăție. Pentru orice mulțime Γ de formule și orice formulă φ , notăm cu $\Gamma \models_{fin} \varphi$ faptul că există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

(S5.3) Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ avem că $\Gamma \models_{fin} \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstrație:

Avem întâi că $\Gamma \models_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi \iff$ (din Propoziția 2.31.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).

Apoi, cum o mulțime finit satisfiabilă înseamnă o mulțime pentru care orice submulțime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă \iff există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).

Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).

Pentru “(*) implică (**)”, luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulțime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Pentru “(**) implică (*)”, luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulțime finită a lui Γ . Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că și $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. □

(S5.4) Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.
- (V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.
- (V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models_{fin} \varphi$.

Demonstrație:

Echivalența între (V1) și (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) \Rightarrow (V3):

$$\begin{aligned} \Gamma \models \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziției 2.31.(i))} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\ &\iff \Gamma \models_{fin} \varphi \text{ (conform (S5.3)).} \end{aligned}$$

Demonstrăm că (V3) \Rightarrow (V2):

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \Gamma \models \perp \text{ (conform Propoziției 2.30)} \\ &\iff \Gamma \models_{fin} \perp \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ și } \perp) \\ &\iff \text{există o submulțime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \models \perp \\ &\iff \text{există o submulțime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\ &\quad \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziției 2.30)} \\ &\iff \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.} \end{aligned}$$

□