

Propoziția 2.51.

(32) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$

(1) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \psi$

(2) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi$

(3) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\psi) (A_1)$

(4) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\psi$ M.P. (2)(3)

(5) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \psi) (A_3)$

(6) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \psi$ M.P. (4)(5)

(7) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$

M.P. (1)(6)

□

(38) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

T.D.

$\langle \Rightarrow \rangle \{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$

T.D.

$\langle \Rightarrow \rangle \{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$

De aici se folosește rezolvarea (32)

(39) $\vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$

T.D.

$\langle \Rightarrow \rangle \{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$

(40) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \xrightarrow{T.D.} \{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$

Abandare prin falsă ipoteză:

(1) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

(2) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$

(3) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi) (A_1)$

(4) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi$ M.P. (1)(3)

(5) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) (A_3)$

(6) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ M.P. (4)(5)

(7) $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ M.P. (2)(6)

Dim (2.50) (Am ajuns la o contradicție)

$$\Rightarrow \{ \neg \neg \varphi \} \vdash \varphi \stackrel{T.D.}{\Leftrightarrow} \vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi \quad \square$$

$$(41) \vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

$$(1) \vdash \neg \neg \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi \quad (40) \text{ Acce am substituit } \varphi \text{ cu } \neg \varphi$$

$$(4) \vdash (\neg \neg \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg \neg \varphi) \quad (A3)$$

$$(3) \vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi \quad \text{M.D. (1)(2)} \quad \square$$

$$(42) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$$

$$\stackrel{T.D.}{\Leftrightarrow} \{ \varphi \rightarrow \psi \} \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$$

$$\stackrel{T.D.}{\Leftrightarrow} \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi \} \vdash \neg \varphi$$

Abordare prin falsă ipoteză:

$$(1) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \neg \neg \varphi$$

$$(2) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi \quad (40)$$

$$(3) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \varphi \quad \text{M.D. (1)(2)}$$

$$(4) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \neg \psi$$

$$(5) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \neg \psi \rightarrow (\neg \neg (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg \psi) \quad (A1)$$

$$(6) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \neg \neg (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg \psi \quad \text{M.D. (4)(5)}$$

$$(7) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

$$(8) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \psi \quad \text{M.D. (3)(7)}$$

$$(9) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash (\neg \neg (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg (\varphi \rightarrow \varphi)) \quad (A3)$$

$$(10) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \psi \rightarrow \neg (\varphi \rightarrow \varphi) \quad \text{M.D. (9)(6)}$$

$$(11) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi, \neg \neg \varphi \} \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi) \quad \text{M.D. (8)(10) (Contradicție)}$$

$$(12) \{ \varphi \rightarrow \psi, \neg \psi \} \vdash \neg \varphi$$

$$(13) \{ \varphi \rightarrow \psi \} \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi \quad \text{T.D. (12)}$$

$$(14) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \quad \text{T.D. (13)} \quad \square$$

(43) $\{ \psi, \neg \phi \} \vdash \neg(\psi \rightarrow \phi)$

Abandare prin falsă ipoteză.

(1) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \neg \neg(\psi \rightarrow \phi)$

(2) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi) \quad (40)$

(3) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash (\psi \rightarrow \phi) \quad \text{M.P. (2) (3)}$

(4) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \psi$

(5) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \phi \quad \text{M.P. (3) (4)}$

(6) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \neg \phi \rightarrow (\neg \neg(\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg \phi) \quad (A1)$

(7) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \neg \phi$

(8) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi \rightarrow \phi) \} \vdash \neg \neg(\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg \phi \quad \text{M.P. (6) (7)}$

(9) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi, \phi) \} \vdash (\neg \neg(\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg \phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi)) \quad (A3)$

(10) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi, \phi) \} \vdash \phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi) \quad \text{M.P. (8) (9)}$

(11) $\{ \psi, \neg \phi, \neg \neg(\psi, \phi) \} \vdash \neg(\phi \rightarrow \phi) \quad \text{M.P. (5) (10) (Contradictie)}$

(12) $\{ \psi, \neg \phi \} \vdash \neg(\psi, \phi) \quad \square$

(44) $\vdash \neg \neg \phi \rightarrow (\phi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow \neg \phi$

~~$\neg \neg \phi$~~

$\vdash (\phi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow \neg \phi$

\Rightarrow $\{ \neg \neg(\phi \rightarrow \neg \phi) \} \vdash \neg \phi$

~~$\neg \neg$~~ Abandare prin falsă ipoteză.

(1) $\{ (\phi \rightarrow \neg \phi), \neg \neg \phi \} \vdash \neg \neg \phi$

(2) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \neg \neg \phi \rightarrow \phi \quad (40)$

(3) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \phi \quad \text{M.P. (1) (2)}$

(4) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \phi \rightarrow \neg \phi$

(5) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \neg \phi \quad \text{M.P. (4) (3)}$

(6) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi)) \quad (39)$

(7) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \neg \phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi) \quad \text{M.P. (6) (3)}$

(8) $\{ \phi \rightarrow \neg \phi, \neg \neg \phi \} \vdash \neg(\phi \rightarrow \phi) \quad \text{M.P. (5) (7) (Contradictie)}$

$$(9) \{ \varphi \rightarrow \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi$$

$$(10) \vdash (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \varphi \quad \text{T.D.} \quad \square$$

$$(45) \vdash (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

$$\stackrel{\text{T.D.}}{\Leftrightarrow} \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi \} \vdash \varphi$$

Tot prin falsă ipoteză

$$(1) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi, \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi \rightarrow \varphi$$

$$(2) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi, \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi$$

$$(3) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi, \neg \varphi \} \vdash \varphi \quad \text{M.P. (1)(2)}$$

$$(4) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi, \neg \varphi \} \vdash \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) \quad (39)$$

$$(5) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi, \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \quad \text{M.P. (3)(4)}$$

$$(6) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi, \neg \varphi \} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \quad \text{M.P. (2)(5)} \quad (\text{Contradicție})$$

$$(7) \{ \neg \varphi \rightarrow \varphi \} \vdash \varphi$$

$$(8) \vdash (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \quad \text{T.D.} \quad \square$$

Obs : Teorema Deducției se poate folosi oriunde, cât timp se ajunge la concluzia bună. Asta înseamnă că, cel mai des se ~~poate folosi~~^{va} folosi la început și/sau la final. Există excepții etc.