Université de Bretagne Occidentale

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Bretagne

Master *MEEF*, mention *Parcours et Ingénierie de la formation*, parcours ***RED : Recherches en Didactique***

Les apports d'une initiation à l'algèbre pour introduire le sens quotient de la fraction

Aline FAHRENBERG

Année 2023-2024

MÉMOIRE

Directrice de mémoire : Laetitia BUENO-RAVEL

Consultation et diffusion du mémoire

• ***Autorisation de l'étudiant·e :***

Si le jury d'évaluation du mémoire émet un avis favorable pour la consultation de mon mémoire, j'autorise sa diffusion dans les espaces universitaires dédiés (BU, HAL, ...) :

❒ OUI ❒ NON Date : .... Signature :

SOMMAIRE

1 INTRODUCTION

Le point de départ de cette étude est lié à une expérience professionnelle d'enseignement en mathématiques dans le secondaire d'une dizaine d'années, expérience enrichie par ailleurs en étant correctrice de l'épreuve écrite de mathématiques pour le CRPE (Concours de Recrutement de Professeurs des Écoles) et également jury de mathématiques lors des oraux du concours d'entrée commun à quatre grandes écoles d'ingénieurs. À travers ces diverses expériences, moi-même et mes collègues faisons le même constat : l'apprentissage des calculs mettant en jeu les fractions (et les concepts qui y sont étroitement liés comme le rapport et la proportion) est délicat, les écueils sont nombreux dans leur utilisation dans la suite de la scolarité, et cette situation ne semble pas montrer d'évolution positive. L'enquête de 2022 (publiée en décembre 2023) du Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves (PISA) proposée par l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) fait état d'une baisse inédite généralisée des performances en culture mathématique des élèves dans tous les pays de l'OCDE par rapport à l'année 2012. Les enquêtes de 2022 et de 2012 étaient tout autant consacrées aux mathématiques, et sur cette période, la France ne fait pas exception à la baisse observée (Bernigole et al., 2023).

Les fractions occupent une place de choix dans le paysage de la culture mathématique scolaire française, en particulier depuis la réforme dite « réforme des mathématiques modernes » des programmes de mathématiques au collège de 1971. L'algèbre n'y constitue alors plus un domaine à part des programmes. Par contre, ce sont les parties « numériques » de l'algèbre qui sont conservées et mises en avant avec les fractions et les nombres relatifs. En effet, les fractions développent un jeu formel sur les écritures, dans ce sens, elles relèvent de l'algébrique et permettent de faire de « l'algèbre sans algèbre » c'est-à-dire sans utilisation de lettres (Chevallard, 1985 a).

Les difficultés dans l'apprentissage du concept de fraction sont nombreuses et documentées dans diverses études. Au-delà des difficultés pratiques liées à la notation avec la « barre de fraction » et à la nécessité de mettre en relation deux entiers tout en utilisant un nombre important de règles pour les manipuler, c'est le concept même de fraction qui offre une résistance. De fait, le concept de fraction se présente comme un concept multi-facette, formé de sous-concepts inter-reliés puisque la fraction peut être interprétée de bien des manières différentes, ces interprétations n'étant pas indépendantes les unes des autres : la fraction « partie-tout », la fraction rapport, opérateur, quotient et la fraction mesure, si l'on retient la classification proposée par les chercheurs de « the Rational number project » (Behr et al., 1983).

Notre recherche s'intéresse en particulier au sens « quotient » pris par la fraction et à la définition qui en sera donné (tant dans les programmes officiels que dans les manuels scolaires) en fin de cycle 3 au collège, en 6e, qui est la suivante : *« La fraction* $\frac{a}{b}$ *est le nombre* $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b}$ *est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b) »* que l'on peut aussi écrire ainsi : $\frac{a}{b} \times b = a$. Dans notre précédent Travail d'Étude et de Recherche (TER), nous avions effectué une étude de transposition de cet objet de savoir dans les programmes officiels et dans les manuels, tout en interrogeant le travail transpositif des enseignants par le biais d'un questionnaire (les résultats de ces recherches seront succinctement rappelés). Après avoir examiné la transposition de cet objet de savoir et les pratiques des enseignants à son sujet, nous avons ensuite cherché à étudier les apprentissages des élèves. À la lumière des pratiques enseignantes effectives, nous chercherons dans la suite de notre travail à développer une « ingénierie didactique » (Artigue, 2002) pour introduire auprès des élèves le sens « quotient » pris par la fraction, en prenant appui sur les résultats de la recherche présentés dans une revue de la littérature. Nous nous attacherons ensuite à évaluer l'impact et l'efficacité de ce dispositif mis en œuvre. Cette entreprise nous semble judicieuse puisque diverses études ont montré que la connaissance des fractions est un indicateur précoce et précis des résultats ultérieurs en mathématiques (Coetzee et Mammen, 2017).

2 Résultats antérieurs

2.1 Résultats

Dans un précédent Travail d'Étude et de Recherche, nous avons pu examiner la transposition didactique du sens « quotient » pris par la fraction, en France et dans quelques pays européens, en utilisant les concepts de la théorie de la transposition didactique et des praxéologies, issus du cadre théorique anthropologique des faits didactiques (TAD) développé par Yves Chevallard (1985 b, 1989 b, 1992).

Dans un premier temps, nous avons interrogé les choix de transposition faits par rapport à la fraction-division dans les programmes scolaires français en fin de cycle 3. Dans les documents officiels, c'est en fin de cycle 3 (en 6e) que « les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b) », d'après le programme du cycle 3 publié au B.O. n°31 du 30 juillet 2020 (2020 a, p. 92).

Nous avons exploré ensuite l'apprêtage didactique de ce savoir à enseigner tel que mis en évidence par Bueno-Ravel (2005), et qui prend en considération le travail transpositif des auteurs de manuels et des enseignants. Aussi nous avons cherché à examiner comment, à partir du savoir défini comme étant à enseigner, ce savoir est-il apprêté dans les manuels scolaires et comment ensuite les enseignants s'emparent du savoir à enseigner et du savoir apprêté pour construire leur projet de cours.

En ce qui concerne les manuels français, à travers une analyse praxéologique, nous avons pu observer, entre autres, que la définition du sens quotient de la fraction qui y est proposée est bien celle prescrite par la documentation officielle, et que celle-ci est alors introduite dans le chapitre traitant des fractions. Parallèlement, dans une comparaison synchronique de transpositions avec quelques autres pays européens, nous avons pu mettre en évidence que la définition française du sens quotient de la fraction n'avait pas d'équivalent dans les pays étudiés, le sens quotient étant défini en associant simplement la barre de fraction avec le signe « diviser » : $\frac{a}{b} = a \div b$. De plus, cette définition est écrite à l'aide d'exemples numériques, et donc sans faire usage des lettres (sauf en Italie), ce qui est en adéquation avec l'âge des élèves étant donné que cette interprétation de la fraction est souvent abordée avant l'âge de la 6e. Nous avons alors émis l'hypothèse que les différences de transposition observées dans la définition du sens « quotient » pourraient être liées à notre définition française des nombres décimaux.

Dans nos travaux sur le savoir enseigné dans les classes, le travail transpositif des enseignants a été examiné par le biais d'un questionnaire en ligne. En particulier, nous avons pu relever à travers les réponses données à ce questionnaire que le tiers des professeurs avait renoncé à utiliser la définition officiellement prescrite : *« La fraction* $\frac{a}{b}$ *est le nombre* $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b} \times b = a$ ». Au lieu de cela, ils utilisent la définition qui est celle adoptée par les quelques pays européens étudiés : « $\frac{a}{b} = a \div b$ », voir Figure 1. Les difficultés soulignées par les enseignants quant à l'introduction de la définition (dans les deux cas) sont liées à l'utilisation des lettres, certaines équipes de mathématiques choisissant même de reporter cet objet de savoir à la classe de 5e, où le calcul littéral sera alors travaillé avec les élèves. D'autres difficultés rapportées par les enseignants résident dans le fait que la définition officielle est perçue comme étant abstraite par les élèves, trop complexe et difficile à comprendre, et la formulation « le nombre qui multiplié par… donne… » difficile d'accès pour des élèves de 6e.

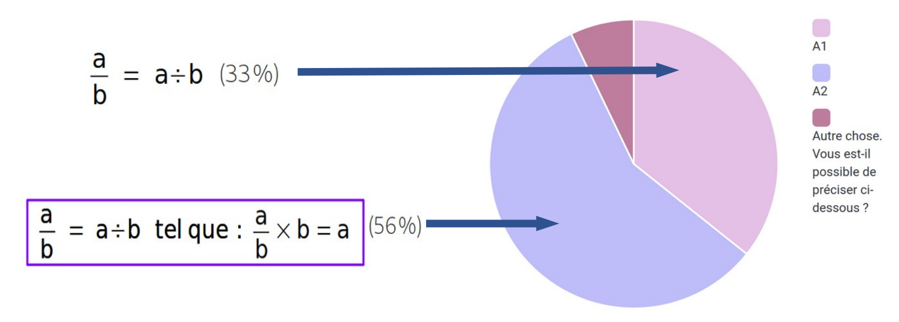


Figure 1: Définition utilisée par les enseignants

Dans la suite de ce travail, nous chercherons à adresser un premier versant des difficultés rencontrées : l'utilisation des lettres en mathématiques en classe de 6e, pour pouvoir donner la définition attendue par les programmes officiels *« La fraction* $\frac{a}{b}$ *est le nombre* $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b} \times b = a$ ». Pour ce faire, nous souhaitons tester une nouvelle trace de cours où une courte introduction au calcul littéral sera faite de manière ludique, et où diverses stratégies seront proposées aux enseignants afin de stabiliser le statut de la lettre avant d'aborder la définition, du sens « quotient » pris par la fraction. À cet effet, nous soumettrons de petits exercices sous forme de rituels et nous soulignerons le lien qui peut être établi lorsque d'autres parties du programme faisant intervenir le calcul littéral sont abordées : essentiellement dans les chapitres de calcul de périmètres, d'aires, de volumes.

Dans une autre partie de ce mémoire, nous chercherons à rendre la définition du sens quotient pris par la fraction moins abstraite pour les élèves en proposant aux enseignants de la présenter dans le chapitre qui traite de la division plutôt qu'au niveau du chapitre sur les fractions, ceci en prenant appui sur la vérification de la division. Cette définition pourra être réactivée dans le chapitre sur les écritures fractionnaires, et utilisée pour résoudre des problèmes faisant intervenir tous les sous-types de tâches relatifs au type de tâche Q « résoudre un problème faisant intervenir le sens « quotient » de la fraction ». Au cours du déroulé de ces propositions, nous escomptons pouvoir prendre appui sur l'introduction au calcul littéral faite en amont de sorte à faire appel une image mentale forte de la place de la lettre en mathématiques.

Dans une dernière partie, nous chercherons à déterminer si la démarche adoptée a pu se montrer efficace du point de vue des apprentissages réalisés par les élèves, en particulier, il s'agira de déterminer si les élèves se sont appropriés cet objet de savoir de manière pérenne.

2.2 Questionnement initial

Après avoir questionné la transposition didactique (dans les programmes et les manuels) puis le travail transpositif mis en place par les enseignants de manière effective dans les classes, nous souhaitons à présent nous interroger sur les apprentissages du point de vue de l'élève, ceci en lien avec les propositions formulées précédemment.

Questionnement initial :

1. Une introduction au calcul littéral avant d'aborder la définition du sens quotient est-elle susceptible de faciliter l'apprentissage de cette définition ? Comment serait-il possible de mettre en œuvre une telle introduction qui soit accessible à des élèves de 6e ? Quel serait l'impact de ces apprentissages au moment de la définition du sens « quotient », puis dans d'autres champs de la progression (chapitre périmètre et aire) ?

2. L'introduction du sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division (plutôt que dans le chapitre sur les fractions) permet-elle aux élèves de donner plus de sens à cette définition ? Cet aménagement de la progression permet-il aux élèves de mieux s'approprier la définition ? La résolution de problèmes en est-elle facilitée ?

3. L'acquisition de la définition du sens quotient de la fraction est-elle davantage pérenne de cette manière, plutôt qu'en utilisant une progression plus attendue comme celle proposée dans les manuels actuels ? (Nous chercherons alors à effectuer une comparaison grâce à un post test).

3 Revue de littérature

3.1 Travaux sur l'entrée dans la pensée algébrique

Puisque la difficulté principale relevée par les enseignants concernant l'introduction de la définition du sens quotient de la fraction : *« La fraction* $\frac{a}{b}$ *est le nombre* $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b} \times b = a$ » serait liée à l'utilisation des lettres et donc en relation avec l'expression littérale proposée, nous avons dans un premier temps cherché à explorer les difficultés des élèves quant à l'entrée dans la pensée algébrique, ainsi que les raisons qui peuvent sous-tendre cette problématique.

3.1.1 Définir l'algèbre et la pensée algébrique

Reconnaître un problème lié à l'algèbre et y chercher une solution, c'est faire face à une autre complication, celle de définir ce qu'est l'« algèbre » et la « pensée algébrique » comme objet de savoir, spécifiquement au primaire et au collège (Blanton et Kaput, 2004). La pensée algébrique a été définie par exemple par Blanton et Kaput (2004) comme « une habitude de pensée qui imprègne toutes les mathématiques et qui implique la capacité des élèves à construire, justifier et exprimer des conjectures sur la structure et les relations mathématiques » (p.142). Le courant *Early Algebra* débutant dans les années 90 a voulu mettre l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Il vise à enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire pour développer la pensée algébrique, mais ne cherche en aucun cas à développer une version précoce de l'algèbre. Selon Radford (2014), trois conditions caractérisent la pensée algébrique :

— l'indétermination : le problème met en jeu des nombres qui ne sont pas connus (inconnues, variables, paramètres, etc).

— la dénotation : les nombres indéterminés impliqués dans le problème à résoudre doivent être nommés ou symbolisés. La symbolisation peut être faite de différentes manières, avec des lettres par exemple, mais pas nécessairement. La dénotation de quantités indéterminées peut aussi être symbolisée par le langage naturel, les gestes, des signes non conventionnels ou une association de ces possibilités.

— l'analyticité : les quantités indéterminées sont traitées comme si elles étaient des nombres connus. C'est-à-dire qu'en partant de ces quantités indéterminées, on effectuera des opérations sur celles-ci (en les additionnant, en les soustrayant…) comme si elles étaient connues. (Radford, 2014, p.160).

Chevallard (1985 a), pour définir l'algèbre, cite un manuel publié en 1827 : « L'algèbre est l'art d'exécuter sur des quantités quelconques, au moyen des signes généraux, toutes les opérations de l'arithmétique, et de représenter, à l'aide des mêmes signes, toutes les relations entre ces quantités » (p.62). D'après Kaput (2017), ce que l'on (par « on » il faut comprendre l'ensemble des acteurs : enseignants, chercheurs…) pense de ce qu'est l'algèbre a une influence déterminante sur la manière dont on l'approchera, et que c'est seulement en étendant notre vision de l'algèbre que nous pouvons espérer utiliser l'algèbre en l'intégrant aux mathématiques à tous les niveaux du curriculum scolaire. Dans ses recherches, Kieran (2007) fait référence à une étude de 1997 relative à la compréhension de ce qu'est l'algèbre qui a été menée sur une cohorte de mathématiciens, enseignants, étudiants, élèves et didacticiens. La question posée était la suivante : « Qu'est-ce que l'algèbre ? ». Sept thèmes ont pu être dégagés des entretiens menés sur cette question : un sujet scolaire, une arithmétique généralisée, un outil, un langage, une culture, une manière de penser et une activité. Si la recherche a produit de nombreuses classifications des différentes approches de l'algèbre, l'une très largement utilisée dans la recherche est le modèle pour conceptualiser l’activité algébrique de Kieran (2007), initialement développé en 1996. Ce modèle synthétise l’activité de l’algèbre scolaire en trois types : Générationnel, Transformationnel, et Global/Meta-niveau (voir Figure 2) ; aussi la recherche s’y réfère sous la dénomination du modèle GTG.

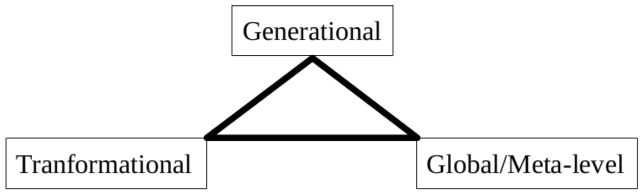


Figure 2: Modèle GTG pour conceptualiser l'activité algébrique (Kieran, 2007)

Le type d’activités générationnelles fait référence à la formation des expressions et des équations. Le type d’activités transformationnelles dénote les activités basées sur des règles, ce qui y inclut réduire, factoriser, développer, substituer par une valeur numérique, etc. Enfin, les activités de type Global/Meta-niveau sont les activités dans lesquelles l’algèbre est utilisée en tant qu’outil mais qui ne relèvent pas uniquement de l’algèbre et qui supposent des processus et des activités plus générales. Ces activités fournissent le contexte, le sens, le but pour s’engager dans les deux autres types d’activités précédents. Ces activités englobent la résolution de problèmes, la modélisation, les justifications, les conjectures, etc.

Ce modèle décrit sera par la suite repris, revisité et affiné. Selon Kaput (2017), le premier aspect essentiel de la pensée algébrique est la généralisation de régularités et de contraintes, et l’expression de cette généralisation de plus en plus systématique par des systèmes de symboles (voir : Core Aspect A Figure 3). Le second aspect essentiel de la pensée algébrique réside dans les actions et les raisonnements guidés par la syntaxe sur les symboles dans les généralisations, exprimées par des systèmes conventionnels de symboles (voir : Core Aspect B Figure 3). Ces deux aspects essentiels de l’algèbre apparaissent sous une forme ou une autre à travers chacun des trois volets (voir Figure 3) de l’algèbre définis ainsi par Kaput (2017) :

1. L’algèbre comme étude de structures et de systèmes inférée des calculs et des relations, incluant celles qui découlent de l’arithmétique (algèbre comme arithmétique généralisée), et du raisonnement quantitatif.

2. L’algèbre comme étude de fonctions, de relations, et de variations conjointes (cette partie tient plus de l’analyse mais est considérée comme relevant de l’algèbre).

3. L’algèbre en tant qu’application d’un groupe de langages de modélisation à la fois interne et externe aux mathématiques (Kaput (2017) distingue alors trois types de modélisations algébriques).

Table 1.1
Core Aspects and Strands

The Two Core Aspects
(A) Algebra as systematically symbolizing generalizations of regularities and constraints.
(B) Algebra as syntactically guided reasoning and actions on generalizations expressed in conventional symbol systems.
Core Aspects A & B Are Embodied in Three Strands
1. Algebra as the study of structures and systems astracted from computations and relations, including those arising in arithmetic (algebra as generalized arithmetic) and in quantitative reasoning.
2. Algebra as the study of functions, relations, and joint variation.
3. Algebra as the application of a cluster of modeling languages both inside and outside of mathematics.

Figure 3: Aspects essentiels et volets (Kaput, 2017)

Le premier volet est au cœur de l’algèbre comme arithmétique généralisée. Ceci induit la construction de l’aspect syntaxique de l’algèbre à partir de la structure de l’arithmétique (qui en serait l’aspect sémantique) tout comme cela implique l’idée que l’on peut remplacer une expression par une expression équivalente. L’expression arithmétique est alors examinée davantage du point de vue de sa forme plutôt que du point de vue de sa valeur après calcul. Il en résulte une étape importante et critique pour passer de l’arithmétique à l’algèbre : élargir la signification du signe « = » (mais nous nous y attarderons davantage plus loin).
Les différents aspects et volets de l’algèbre étant décrits plus haut, il s’agit ensuite de les étendre à la perspective des mathématiques scolaires, avec un focus particulier sur les petites classes (fin de primaire et début du collège). Selon Kaput (2017), le deuxième aspect essentiel (Core Aspect B) est généralement vu comme celui qui se développe après le premier aspect essentiel (Core Aspect A), puisque les actions sur les symboles sont basées sur des règles qui impliquent de savoir quelles combinaisons sont équivalentes entre elles.

3.1.2 Arithmétique et algèbre : une dialectique contrariée

Il existe une très grande diversité d’opinions sur les rôles des deux aspects essentiels (décrits plus haut) au niveau de l’entrée dans la pensée algébrique. Les points de vue des chercheurs tout comme ceux des enseignants diffèrent drastiquement quant à savoir lequel de ces deux aspects essentiels est véritablement central pour définir l'algèbre.

À ce titre, les travaux de Chevallard (1985 a, 1989 a) sont éloquents. Dans une première partie de son travail concernant le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, Chevallard (1985 a) analyse l'évolution de la transposition didactique de ce savoir depuis 1945. Il relève en particulier que la réforme des programmes de mathématiques au collège de 1971 appelée « réforme des mathématiques modernes » a constitué une profonde réorganisation du corpus mathématique enseigné, et que la « réforme de la réforme » de 1978 ne parviendra que peu à le rééquilibrer. En particulier, il souligne que l'opposition arithmétique/algèbre y est révoquée, le terme même « algèbre » disparaissant presque complètement (on parle alors de calcul littéral). Cette éclipse de l'algèbre est partielle, mais sélective dans le sens où ce sont les parties « numériques » de l'algèbre qui sont conservées et mises en avant : les nombres relatifs qui sont en fait des nombres algébriques et les fractions. Par contre, les parties « algébriques » de l'algèbre (calcul et équations algébriques) s'en trouvent tronquées et relayées à la toute fin du collège. Concernant les fractions, si elles ne sont pas directement de l'algèbre puisqu'elles ne contiennent pas de lettres, elles relèvent cependant de l'algébrique et permettent de faire de l'algèbre sans algèbre, étant donné qu'elles développent un jeu formel sur les écritures.

Cette nouvelle organisation du corpus mathématique, selon Chevallard (1985 a), induit une disparition de la dialectique qu'entretenaient l'arithmétique et l'algèbre, au détriment de l'algèbre. Ceci étant d'autant plus marqué qu'en plus de voir le champ d'étude inondé par le numérique, le thème de l'« observation » et de l'« expérimentation » mathématiques fait une intrusion qui sera par la suite décisive. L'algébrique étant le premier outil de l'étude du numérique, pour que cet outil puisse prendre toute sa dimension, il est nécessaire de l'étudier, alors que dans ce nouveau paradigme, c'est ici le numérique qui devient un outil d'étude de l'algébrique. Les rapports qu'entretenaient l'algébrique et le numérique s'en trouvent inversés : « ce n'est plus l'algébrique qui vient permettre d'étudier le numérique, c'est le numérique qui « justifie » et « permet de comprendre » l'algébrique. » (Chevallard, 1985 a, p.77). Chevallard conclut ainsi que « L'algébrique ne sert plus à connaître le numérique. Il n'est plus désormais qu'une sténographie essentialisante, qui décrit, résume, et sépare l'essence de l'accident. » (Chevallard, 1985 a, p.81). L'objet de connaissance s'en trouve alors dissout au profit de l'objet réel. Dans des travaux ultérieurs, Chevallard (1989 a) souligne que le numérisme et le concrétisme étant prédominants dans le corpus mathématique, l'algèbre n'y existe que simplement juxtaposée aux précédents, la dialectique qu'ils entretenaient étant perdue. Il montre alors qu'au collège « le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l’idée d’une relation entre manipulation algébrique de l’expression, d’une part, et substitution de valeurs numériques dans l’expression, d’autre part » (Chevallard, 1989 a, p.47). De plus, l’aspect empirique des mathématiques dans les petites classes (6e et 5e) qu’il nomme « empirisme flamboyant » (soin, exactitude, précision, …) provoque ensuite un « endettement empiriste » très marqué au niveau de l’algèbre. De surcroît, le travail sur les expressions algébriques est traité de manière formelle et se retrouve enfermé dans un monde clos de manipulations sans fonctionnalités apparentes :

> La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n’est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s’exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser, etc.). (Chevallard, 1989 a, p.48)

Cet apprentissage au collège se révélera ensuite tout à fait inadéquat au lycée, au moment où apparaîtront les finalités de ces manipulations comme par exemple lors des études de fonctions, ce qui constitue en soi un problème d’ingénierie curriculaire.

Les outils de la mathématisation sont alors désignés, à savoir, la portée de la modélisation et les pratiques sémiotiques. Les outils de l’arithmétique étant à la fois le langage ordinaire (ou naturel) et le calcul sur les nombres, ceci oblige donc à raisonner sur les énoncés ; alors qu’avec l’algèbre, l’usage des lettres permet de calculer avec les expressions littérales produites, le raisonnement devient alors calcul, ce qui confère à l’algèbre une puissance que l’arithmétique ne peut avoir pour la résolution de problèmes plus complexes. Ce qui fait dire à Chevallard :

> L’invention de la « langue algébrique » constitue, de ce point de vue, un bond en avant dont on peut dire — à regarder son destin dans l’enseignement du collège — que sa portée et sa signification n’ont pas été, encore aujourd’hui, totalement mesurées. (1989 a, p.62)

3.1.3 Les paradoxes de l’enseignement de l’algèbre

L’algèbre ne constituant plus un domaine à part des programmes du collège depuis 1971, il a alors été nécessaire de repenser sa place et ses liens avec l’arithmétique et le numérique. Mais ceci ne peut se faire sans prendre en considération l’articulation nécessaire entre la langue naturelle et la « langue algébrique », comme le soulignent certains auteurs. En particulier, selon Duval et Pluvinage (2016) : « Le paradoxe de l’enseignement de l’algèbre est qu’on ne peut pas se couper de la langue naturelle pour l’introduire, alors que son apport épistémologique et mathématique est au contraire de rompre complètement avec la langue ». Les auteurs ajoutent que l’écart cognitif entre les productions algébriques et les productions linguistiques n’est jamais assumé de manière pertinente, et se proposent d’analyser les opérations de désignation. Lors de la désignation directe par une lettre, on ne cherche pas à avoir autant de lettres (de désignations directes) qu’il y a d’objets différents à désigner comme dans la langue naturelle, on cherche au contraire (en plus d’avoir une abréviation courte) à en avoir le moins possible. Cette désignation ne vise pas à l’élargissement du vocabulaire comme dans le langage, mais à sa réduction maximale pour désigner des objets. Pour ce faire, la désignation d’un objet se fait à partir d’un autre objet par la désignation fonctionnelle, en utilisant une seule lettre et des opérations pour les mettre en relation. Cette désignation fonctionnelle nécessite une phrase pour être exprimée en langage courant, car elle n’y trouve pas d’équivalent. Pour les objets qui échappent à la désignation directe (parce qu’ils ne sont pas sous nos yeux), le recours à la désignation indirecte révèle la puissance mathématique de l’utilisation des lettres, et là encore, dans le langage courant, cette désignation indirecte induit également une micro-description ; les auteurs en donnent l’exemple suivant : « le prix *du* litre *d’*essence *à la* pompe *avant* la dernière crise pétrolière » (Duval et Pluvinage, 2016).

CHIFFRES	LETTRES	MOTS *(interface verbale, souvent muette ou oubliée, entre chiffres et lettres)*
UN nombre	**Redésignation directe** par une lettre	Désignation directe ou Désignation indirecte par micro-description
UNE LISTE OUVERTE de nombres	**Condensation** en une lettre **Balayage des éléments** d’un ensemble de nombres	Désignation directe du **type nom propre** pour un ensemble de nombres ou pour un type de grandeur : vitesse, temps, aire..
DES LISTES dont la génération des nombres est corrélée	**Désignation fonctionnelle** par ***une combinaison opératoire lettre-chiffre*** : « 2n +1 » **Balayage** d’un ensemble de nombres	**Désignation directe d’une propriété** des nombres : « impair » **Désignation indirecte** par une micro-description (souvent relative à une quantité ou une grandeur)

Figure 4: Gamme des substitutions sémantiques mobilisées dans le registre algébrique (Duval, et Pluvinage, 2016)

De plus, les auteurs soulignent deux points essentiels lors de l’utilisation des lettres :

- On ne désigne pas, mais on REDÉSIGNE ce qui a déjà été désigné verbalement. Ce qui est la pratique couramment attendue dans les énoncés de problèmes proposés pour introduire l'emploi de lettres.

- L'intérêt et la difficulté de l'emploi d'une lettre commence avec la désignation fonctionnelle et non pas avec la désignation directe. (Duval et Pluvinage, 2016)

Les différents types d'opérations de désignation et de redésignation que toute entrée dans l'algèbre suppose sont présentés dans la Figure 4, où les flèches en traits pleins indiquent les passages à effectuer d'une colonne à l'autre pour la redésignation, et les flèches en pointillés les opérations inverses.

Par ailleurs, l'équivalence mathématique a fait l'objet de nombreux travaux en didactique, par exemple Kieran et Martinez-Hernández (2022) ont pu caractériser l'équivalence haut-bas et l'équivalence gauche-droite. La relation d'équivalence mathématique étant bien définie (relation binaire réflexive, symétrique et transitive), l'exemple le plus emblématique d'une telle relation est la relation « est égal à » symbolisée par « = ». L'équivalence gauche-droite peut être établie de manière calculatoire ou structurelle (en faisant intervenir des propriétés), par exemple, on peut écrire : $7x - 6x = x$. L'équivalence haut-bas, de son côté, repose largement sur la dimension structurelle, par exemple :

$7x + 6 = 6x$

$7x - 6x + 6 - 6 = 6x - 6x - 6$

$x = -6$.

Duval et Pluvinage (2016) relèvent quatre emplois différents du signe « = » ; une relation opératoire qui annonce un résultat (celle que les élèves connaissent le mieux) ; une relation d'affectation par définition (comme dans le cas des formules de calcul d'aires) ; une relation d'identité entre deux expressions (comme celle de la distributivité qui peut être utilisée pour développer ou pour factoriser) ; une relation d'équivalence sémantique (comme dans la mise en équation où il s'agit d'exprimer de deux manières différentes le même objet). Ces différents usages du signe « = » sont liés aux changements dans l'usage d'une lettre (*variable*, *indéterminée*, *inconnue* et *paramètre*). Du point de vue des élèves, les auteurs parlent alors de « symbole et de lettres-caméléons », puisque dans les expressions mathématiques écrites, rien ne vient indiquer ces changements de statuts ou de signification.

Enfin, d'après Duval et Pluvinage (2016), l'écriture d'expressions en algèbre articule deux types de signes : les lettres et les chiffres (que l'on peut interpréter en termes de nombres) et les signes organisateurs d'expressions (les symboles d'opérations, les parenthèses, et les symboles de relation). Les auteurs en déduisent trois types d'unités discursives de sens qui correspondent à trois niveaux d'organisation des unités de sens en algèbre, et qui induisent des opérations de traitement très différents pour chacune d'elles. En l'espèce, les substitutions d'expressions faites lors de la résolution d'équations s'appuient sur les propriétés des opérations, tandis que dans d'autres expressions, l'opération de substitution réside dans l'instanciation des lettres par des valeurs purement numériques pour trouver le résultat d'une expression complète. Aussi, d'après les mêmes auteurs :

> Ainsi, quels que soient les programmes d'introduction à l'algèbre, on retrouve toujours les mêmes impasses caractéristiques sur trois points stratégiques pour la compréhension non pas de « l'élève », mais de centaines de milliers d'élèves : l'introduction de lettres-caméléons, l'écrasement des niveaux d'organisation dans les écritures symboliques et l'oubli de l'écart cognitif entre les écritures symboliques et la langue naturelle. (Duval et Pluvinage, 2016)

3.2 Les difficultés des élèves documentées par la recherche

L'entrée dans la pensée algébrique telle que définie par Radford (2014) n'est pas sans difficultés. De nombreux travaux de recherche ont pu documenter celles-ci. Par exemple Coppé et Grugeon (2009) soulignent que la résolution de certains problèmes amènent les élèves à mobiliser les lettres avec plusieurs statuts : nombre généralisé, nombre indéterminé, puis inconnue. Lors de résolutions, les difficultés alors répertoriées sont les suivantes :

- Les élèves éprouvent des difficultés à mettre en œuvre un calcul littéral (respectivement algébrique) fonctionnel au collège (respectivement au lycée).
- Les élèves ont du mal à mobiliser une lettre pour résoudre un problème si on ne la leur donne pas.
- Les approches visant la généralisation ou la modélisation sont encore peu mises en avant dans l'enseignement actuel de l'algèbre.
- L'algèbre est encore enseignée en privilégiant la dimension *objet* plutôt que la dimension *outil*. (Coppé et Grugeon, 2009, p.4)

Plus récemment, l'Observatoire International de la Pensée Algébrique relève que le passage d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique pose de nombreux problèmes aux élèves, et présente une synthèse des difficultés bien documentées par la recherche :

- Les élèves voient le signe d'égalité comme un signe d'annonce de résultats (Booth, 1984 ; Kieran, 1981 ; Vergnaud, 1985 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988) ;

• Ils ont tendance à rechercher une valeur numérique simple (Booth, 1984). Le refus de laisser les opérations en suspens conduit à des erreurs de concaténation (Bednarz et Janvier, 1996) ;

• Ils ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité (Boulton-Lewis et al., 2001 ; Demana et Leitzel, 1988 ; MacGregor, 1996) ;

• Ils n'utilisent pas des symboles mathématiques pour représenter des relations entre des quantités (Bednarz, 2001 ; Bednarz et Janvier, 1996 ; Vergnaud, 1985 ; Wagner, 1981) ;

• Ils ne savent pas utiliser les lettres comme nombres généralisés ou comme variables (Booth, 1984 ; Kuchemann, 1981 ; Vergnaud, 1985) ;

• Ils ont des difficultés à opérer sur les inconnues ; et ils n'arrivent pas à comprendre les règles de transformation d'une équation en une équation équivalente (Bednarz, 2001 ; Bednarz et Janvier, 1996 ; Filloy et Rojano, 1989 ; Kieran, 1989 ; Steinberg, Sleeman et Ktorza, 1990). (Carraher et Schliemann, 2007, cité dans Squalli, et al., 2020, p.5-6)

3.3 L'entrée dans la pensée algébrique dans la documentation institutionnelle

D'après les « Repères annuels de progression pour le cycle 3 en Mathématiques » du Ministère de l'Éducation Nationale (2020 b), les élèves commencent à utiliser des lettres dans les calculs en CM1 : ils établissent et utilisent les formules du périmètre du carré et du rectangle. Ils utilisent également les formules d'aire du carré, du rectangle et du triangle rectangle. De ce point de vue, les élèves commencent alors à utiliser une nouvelle signification du signe « = » qui soit autre que l'annonce d'un résultat ; ils l'utilisent alors comme une relation d'affectation (au périmètre, on affecte la formule qui en permet le calcul) au sens de Duval et Pluvinage (2016). Dans la partie sur le calcul mental ou en ligne, les élèves travaillent sur les propriétés des opérations. Ils sont amenés à écrire dans ce cadre des égalités de type : $12 + 199 = 199 + 12$ ou encore $23 \times 7 + 23 \times 3 = 23 \times 10$ où le signe « = » est utilisé comme une relation d'identité entre deux expressions. Nous n'avons par contre pas trouvé de préconisations particulières dans le fait de distinguer l'équivalence calculatoire de l'équivalence structurelle. Par exemple, la dimension calculatoire est utilisée lorsque l'on considère que l'égalité $5 + 9 + 3 = 10 + 7$ est vraie, parce que chaque côté une fois calculé, donne 17. La dimension structurelle est utilisée lorsque l'on décompose pour recomposer la partie droite de l'égalité par exemple de cette manière :

5 + 9 + 3 = 10 + 7

5 + 9 + 3 = 5 + 5 + 4 + 3

5 + 9 + 3 = 5 + 9 + 3

L'équivalence gauche-droite semble prédominante dans les textes de programme par rapport à l'équivalence haut-bas (telles que caractérisées par Kieran et Martinez-Hernández (2022)).

Dans les « guides fondamentaux pour enseigner » de la documentation officielle d'accompagnement du Ministère de l'Éducation Nationale de la Jeunesse et des Sports (2022), le document « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » propose, dans la catégorie des problèmes atypiques (page 31), une initiation à la pensée algébrique à travers des problèmes algébriques ; ces problèmes sont considérés comme étant algébriques s'ils peuvent être traités au cycle 4 par l'écriture et la résolution d'une équation, alors qu'au cours moyen, d'autres stratégies de résolution seront mobilisées.

En 6e, viennent s'ajouter aux apprentissages avec les formules précédemment citées : la longueur du cercle, l'aire du disque et d'un triangle quelconque, le volume d'un cube et d'un pavé droit. En 5e, les « Repères annuels de progression pour le cycle 4 en Mathématiques » du Ministère de l'Éducation Nationale (2020 c) indiquent que le répertoire des formules d'aires et de volumes est enrichi. Par ailleurs, il y est prescrit que les expressions littérales soient introduites à travers des formules mettant en jeu des grandeurs ou traduisant des programmes de calcul. Les notations associées sont progressivement utilisées, la propriété de distributivité simple est utilisée pour réduire des expressions littérales. De plus, les élèves calculent la valeur d'une expression littérale en substituant une valeur numérique à une lettre. La notion d'équation n'est pas formalisée à ce stade. Cependant les élèves sont amenés à tester si une égalité où figure une lettre est vraie lorsqu'on lui attribue une valeur numérique. L'idée d'une relation entre la manipulation algébrique de l'expression et la substitution de valeurs numériques dans l'expression n'est pas davantage explicitée ici, alors que selon Chevallard (1989 a), il s'agit de l'un des écueils des apprentissages algébriques au collège.

D'après les informations recueillies au-dessus dans la documentation institutionnelle, l'entrée dans l'algèbre (appelée à ce niveau « calcul littéral ») se fait en classe de 5e, après une certaine progressivité dans les apprentissages.

3.4 Algèbre et sens quotient de la fraction

À l'âge de la 6e, notre étude de la progression dans les documents officiels au cycle 3 ne fait pas apparaître d'introduction au calcul littéral comme préalable à la définition du sens quotient. Les élèves ont pu rencontrer l'utilisation de lettres en mathématiques au moment de l'utilisation de formules pour le calcul du périmètre et de l'aire d'une figure. Cependant, les lettres mises en jeu font référence à chaque fois à un mot de vocabulaire concret : L pour Longueur, l pour largeur, c pour côté. À travers ces redésignations, l'élève convoque une représentation mentale d'une figure sur laquelle il peut visualiser la place de la lettre. Dans la définition prescrite du sens quotient de la fraction, l'utilisation des lettres est plus abstraite, la lettre **a** représentant un nombre qui peut être le dividende ou le numérateur suivant l'écriture produite, mais qui ne désigne pas un mot de vocabulaire commençant par « a », et de plus il serait difficile de lui associer une image mentale. Il en est de même pour la lettre **b**. C'est en effet l'une des premières difficultés mise en évidence par Booth (1984), les élèves éprouvent des difficultés à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets :

> L'utilisation de 5y pour représenter 5 yachts ou de 6a pour 6 ananas a été assez générale. Il est tentant de suggérer qu'une des difficultés que les enfants ont avec la signification de x est qu'ils ont du mal à trouver beaucoup de mots commençant par « x »…

Si l'élève interprète 6a comme « six « a » » ou « six ananas », le sens sous-entendu de la multiplication disparaît puisque 6a n'est alors pas interprété comme « six fois le nombre a ».
Selon Booth (1984), une autre difficulté réside dans le fait que lorsque les élèves pensent que la lettre désigne bien un nombre, ils croient généralement qu'il a une valeur définie plutôt qu'un ensemble de valeurs possibles, et que des lettres différentes représentent toujours des valeurs différentes. Selon le même auteur, les longs apprentissages faits par les élèves en arithmétique viennent faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre.

Afin d'anticiper, voire éviter les difficultés des élèves relevées dans la littérature, nous avons choisi, pour préparer la définition du sens « quotient » pris par la fraction, d'élaborer une courte introduction au calcul littéral en prenant en compte ces observations, tout en investiguant ce qui pouvait être fait dans d'autres pays européens à ce sujet à l'âge de la 6e, à l'aide de notre étude de manuels étrangers. Nous avons pu relever que dans la plupart des cas (sauf en Italie), la fraction prend le sens « quotient » à travers des exemples numériques sans utilisation de lettres, ceci en associant la barre de fraction au signe de la division. En Italie, le sens quotient est défini de la sorte : $n \div m = \frac{n}{m}$, sans véritablement d'introduction au calcul littéral, mais nous présumons que cette présentation de la définition est en adéquation culturelle avec la progression de la pensée algébrique qui peut y être faite. Les manuels danois ont par ailleurs retenu notre attention : alors que dans les différents niveaux de classes qui sont équivalents au cycle 3 le sens quotient est introduit en associant la barre de fraction avec le

signe « diviser » uniquement sur des exemples numériques, une introduction au calcul littéral est cependant envisagée dès le CM2 dans ces manuels.
En amont du travail sur le sens quotient de la fraction, nous avons donc choisi de nous inspirer de l'activité d'introduction au calcul littéral qui est proposée dans le manuel de CM2 Matematrix 5 (Gregersen et al., 2013), activité qui sera ensuite reprise dans le manuel de 6e Matematrix 6 (Gregersen et al., 2013) de manière partielle et ceci parmi d'autres activités d'introduction dans le premier chapitre du manuel, intitulé « Algebra ». Cette activité (pages 18 et 19) du manuel de CM2 est présentée en Annexe 1. Elle s'intitule « Ukendt tal », ce que l'on pourrait traduire par « Nombre inconnu », mettant en scène une manipulation fictive sans pour autant préconiser cette manipulation en classe, dans un premier temps.

4 CADRES THÉORIQUES

4.1 La Théorie des Situations Didactiques

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) développée par Guy Brousseau (1998) est la théorie la plus fondamentale en didactique des mathématiques, et celle-ci trouve de plus un large champ d'applications dans les autres disciplines. Selon Brousseau :

> Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution (1982).

Dans ce contexte du triangle didactique, le milieu désigne tout ce qui agit sur l'élève, ou ce sur quoi l'élève agit. La notion de contrat didactique désigne quant à elle le résultat de négociations dans les rapports qu'entretiennent les élèves, l'enseignant et le savoir visé, ce contrat fixe une sorte de règle du jeu. Dans la pratique de la classe, les habitudes de l'enseignant attendues par les élèves tout comme les habitudes de comportement des élèves attendues par l'enseignant forment un système d'attentes réciproques qui font partie du contrat didactique (Brousseau, 1998). Certaines situations didactiques peuvent se présenter comme des situations a-didactiques, lorsque l'intention d'enseigner n'est pas explicite et qu'elle n'est de ce fait pas perçue par l'élève. L'élève réagit alors comme si la situation était non didactique (c'est-à-dire sans finalité didactique), le rapport au savoir se décline comme un moyen d'action, et laisse à l'élève la marge de manœuvre, d'initiative et d'autonomie la plus grande possible, tandis que l'enseignant reste en retrait. L'étude du contrat didactique donne à voir le passage d'une situation didactique à une situation a-didactique. L'objectif, pour l'enseignant, sera alors de faire accepter à l'élève d'agir et de prendre la responsabilité de la situation en entrant dans cette situation a-didactique, afin qu'il construise lui-même son savoir en effectuant des choix dans ses moyens d'actions, en adaptant ses stratégies de résolution en fonction des rétroactions du milieu. L'enseignant, de son côté, acceptera les conséquences de ce transfert de responsabilités. Ce processus est désigné par Brousseau comme le processus de dévolution.

Analyse a priori et analyse a posteriori

L'analyse a priori se construit en prenant appui sur des travaux de recherche préexistants, à travers plusieurs étapes. Après une analyse épistémologique du savoir en jeu dans une situation didactique, une analyse didactique vient compléter celle-ci, en cherchant à déterminer entre autres les prérequis, les obstacles éventuels, les erreurs fréquentes et les évolutions possibles du savoir dans une situation d'enseignement/apprentissage. L'analyse a priori vise à prévoir les comportements possibles des élèves et de l'enseignant dans une situation donnée, tout en cherchant à identifier les causes et les raisons de ces comportements, en engageant des hypothèses. Le déroulement ainsi prévu vient ensuite être confronté à ce qui s'est appris et joué dans la réalité dans une analyse a posteriori. Les analyses a posteriori utilisent les observations faites sur le terrain lors d'une séance ou d'une séquence d'enseignement, ces observations sont éventuellement outillées (synopsis, films, etc). Ces analyses ont pour objectif de comprendre et de mettre à jour des phénomènes didactiques.

Ingénierie didactique

L'ingénierie didactique cherche à prendre en compte la complexité de la classe tout en pensant les relations au sein système d'enseignement entre la recherche et l'action sur le terrain. La recherche utilise alors des méthodes inspirées de celles utilisées dans les sciences expérimentales (statistiques entre groupes, etc), cependant le mode de validation différera : le mode de validation, dans l'ingénierie didactique est basé sur la confrontation entre une analyse a priori et une analyse a posteriori. Sur le terrain, les situations au potentiel a-didactique sont soumises à des contraintes (liées au temps didactique imparti dans la forme scolaire), ce qui peut nécessiter de multiples médiations de l'enseignant. D'après Artigue :

> La question qui se pose alors au chercheur est, dans le cadre des contraintes existantes, d'organiser les médiations de l'enseignant de manière à ce que, dans la résolution du problème posé, la répartition des responsabilités entre enseignant et étudiants soit

optimisée, dans le sens de la dévolution aux étudiants d'une responsabilité maximale. Si l'on se situe dans le cadre de la théorie des situations, on n'a plus alors affaire à une situation unique mais à une succession de situations. (Artigue, 2002).

Chaque médiation de l'enseignant induit alors de ré-interpréter les comportements observés puisque le milieu a-didactique s'en trouve altéré, et que les interactions possibles avec celui-ci s'en trouvent de même modifiées.

4.2 La Théorie Anthropologique du Didactique

Notre recherche s'inscrit de plus dans le cadre théorique anthropologique des faits didactiques (TAD) développé par Yves Chevallard en didactique des mathématiques (Chevallard, 1989 b). Cette théorie est en filiation avec la Théorie des Situations didactiques développée par Guy Brousseau, mais elle met l'accent sur la relativité institutionnelle des savoirs, tout en ayant l'ambition de dépasser les séparations disciplinaires en didactique. Ainsi, la TAD a pour objectif d'étudier et de modéliser la vie des savoirs partagés au sein d'une institution, en caractérisant les conditions et les contraintes de la transmission de ces savoirs et savoir-faire, ceci en développant des outils pour servir la didactique des mathématiques, mais qui peuvent aussi s'appliquer à d'autres champs disciplinaires.

La théorie de la transposition didactique

Les travaux d'Yves Chevallard sur la théorie de la transposition didactique sont antérieurs et à l'origine de la TAD. La théorie de la transposition didactique examine le savoir présent dans le système didactique à travers toutes les étapes de transformation que celui-ci subira. En effet, les scientifiques produisent un savoir savant qui ne peut pas être enseigné tel quel dans le milieu scolaire, ce savoir savant doit être adapté avant de pouvoir être enseigné pour qu'ensuite les élèves s'en emparent et se l'approprient. Dans un premier temps, les savoirs savants seront désignés comme savoir à enseigner par la noosphère (pédagogues, didacticiens, enseignants, etc.) dans une transposition externe, où l'on pense le fonctionnement didactique, d'après Chevallard (Chevallard, 1985 b, 1992). Certains choix curriculaires sont alors faits pour pouvoir élaborer les programmes scolaires officiels français tout en respectant le contexte socio-culturel et historique, chaque élément de programme devant trouver une place cohérente dans l'ensemble en s'inscrivant parfaitement dans la progression. Le savoir savant devra vérifier cinq conditions avant de devenir un savoir à enseigner dans les programmes officiels. Ces conditions ne seront pas détaillées ici, mais ceci induit que le savoir savant fait l'objet d'une réorganisation avant de devenir un savoir à enseigner dans les programmes scolaires français.

Dans ses travaux, Bueno-Ravel (2005) a mis en évidence l'apprêtage didactique du savoir à enseigner, ce qui permet d'ajouter une étape dans le mécanisme de transposition interne au système d'enseignement, en prenant en considération le travail transpositif des auteurs de manuels et des enseignants. Le cheminement du savoir à enseigner se poursuit alors dans la manière dont il sera apprêté dans les manuels scolaires. L'éditeur se porte garant de la conformité du manuel aux programmes officiels, cependant les auteurs peuvent interpréter l'organisation didactique des savoirs de différentes manières, ou mettre l'accent sur certains aspects plutôt que d'autres. D'après Chevallard (1985 b, 1992), les manuels sont le résultat d'une transposition didactique des textes de programme, ils relèvent de la transposition interne du savoir. Pour analyser les manuels et les textes de programme, la théorie de la transposition a été élargie à la problématique écologique en didactique comme moyen de questionner le réel, ce qui est exprimé ainsi par Artaud (1998) :

> Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? (Artaud, 1998).

La notion d'« écosystèmes didactiques » permet de prendre en compte les contraintes et les exigences liées aux relations qu'entretiennent les objets d'enseignement dans les systèmes didactiques et liées aux choix de transposition de la noosphère. Chevallard complète cette approche écologique par une approche anthropologique qui décrit les rapports institutionnels et l'ensemble des contraintes qui influencent les auteurs de manuels et les enseignants.

Le savoir à enseigner dans les programmes officiels et le savoir à enseigner apprêté dans les manuels en tant que support essentiel pour l'enseignant, fait ensuite l'objet d'une transposition interne (interne au système d'enseignement) par les enseignants. Pour construire un projet de cours qui puisse s'intégrer dans l'organisation des séquences d'enseignement, répondre à certaines contraintes et épouser la personnalité de l'enseignant, le savoir à enseigner est de nouveau transformé et interprété. Il devient ainsi le savoir enseigné, celui-ci subira d'autres transformations pour finalement devenir le savoir appris et construit par l'élève.

À travers toutes ces phases de la transposition didactique (externes et internes), les savoirs ont subi des transformations qui induisent naturellement des irrégularités voire des décalages entre le savoir à enseigner et le savoir appris. La théorie de la transposition didactique met en évidence l'écart systématique entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment ceci étant dû aux contraintes auxquelles le système d'enseignement est soumis.

Les praxéologies

Un concept essentiel de la TAD pour décrire et expliquer les rapports institutionnels à un objet de savoir dans leur fonctionnement est celui d'organisation praxéologique, ou praxéologie (Bosch et Chevallard, 1999). La praxéologie part d'un premier postulat : toute activité humaine peut être analysée en structures d'action appelées « types de tâches » qui peuvent être saillantes dans une pratique institutionnelle. La délimitation des types de tâches est flexible, mais doit cependant rester précise. L'activité dont le contenu serait trop large ou mal défini est désigné par « genre de tâches ». Un deuxième postulat vient ensuite spécifier les « types de tâches » : l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique (Bosch et Chevallard, 1999), la technique étant vue ici comme une « manière de faire ». À cette manière de faire correspond une technologie (autre postulat) : un discours qui décrit et légitime les tâches et techniques, et ainsi permettre éventuellement la collaboration de plusieurs acteurs dans la production de cette tâche. Cette technique doit elle-même être justifiée par la théorie de la technique. L'activité humaine se trouve alors décomposée dans l'organisation praxéologique en deux blocs : le bloc pratique (du grec *praxis*) et le bloc du discours raisonné (*logos*).

4.3 Questions de recherche

À présent, nous allons pouvoir reformuler notre questionnement initial à la lumière des cadres théoriques choisis.

La présente recherche vise à adresser un problème particulier que notre précédent Travail d'Étude et de Recherche (TER) a pu mettre à jour : la difficulté éprouvée par les enseignants pour introduire la définition du sens quotient pris par la fraction tel que prescrit par la documentation officielle. Cette difficulté provient essentiellement du fait que cette définition fait intervenir des lettres, alors que les élèves ne sont pas familiers avec leur usage. Nous souhaitons mettre en œuvre une initiation à l'algèbre et à l'usage des lettres auprès des élèves. Notre première question de recherche est donc la suivante :

<u>QR1 :</u> Un travail d'introduction à l'algèbre permet-il de faciliter la compréhension de la définition du sens quotient de la fraction par les élèves, notamment quant à l'utilisation des lettres ?

Nous souhaitons mettre en œuvre cette initiation à travers différents dispositifs. Une activité de découverte au potentiel a-didactique faisant intervenir la manipulation sera proposée aux élèves. Des rituels liés à l'algèbre seront soumis aux élèves, ceux-ci sont regroupés dans un carnet dont l'usage fait par les élèves pourra être très variable, chacun avançant à son propre rythme, il revêt également un potentiel a-didactique. Enfin, les savoirs mis en jeu seront réinvestis dans la suite de la progression, dans le chapitre consacré au calcul d'aire et de périmètre, puis dans le chapitre sur la division. Notre deuxième question de recherche est alors la suivante :

QR2 : Est-il possible de favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique grâce à la conception d'une ingénierie didactique ?

Il nous a semblé ensuite opportun d'introduire la définition du sens quotient de la fraction, non pas dans le chapitre sur les fractions, mais plus tôt, c'est-à-dire à la fin du chapitre qui a pour thème la division, au moment de la division décimale, ceci en prenant appui sur la vérification de la division et sur les apports de l'algèbre travaillés en amont, de sorte que l'écriture du quotient sous la forme d'une fraction et la définition de son sens quotient trouvent toute leur justification lorsque le quotient n'est pas un nombre décimal (lorsque la division ne « s'arrête pas »). La définition du sens quotient de la fraction fera également l'objet de rituels développés dans un « carnet de sens quotient », de manière à favoriser leurs apprentissages. Ceci a donné lieu à notre troisième question de recherche qui est la suivante :

QR3 : Une introduction de la définition du sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division plutôt qu'en début de chapitre sur les fractions est-elle susceptible de permettre aux élèves de donner du sens à cette définition, ceci en prenant appui sur les praxéologies travaillées avec l'algèbre et la division ?

Enfin, nous avons voulu évaluer si les dispositifs mis en œuvre avaient permis aux élèves d'y donner le sens souhaité, et si ces aménagements avaient favorisé la résolution d'exercices. Nous avons également voulu déterminer si les acquis faits par les élèves pouvaient s'inscrire dans la durée, ce qui a donné lieu à notre quatrième et dernière question de recherche :

QR4 : L'ingénierie mise en œuvre a-t-elle permis aux élèves de donner du sens et d'utiliser la définition (du sens quotient de la fraction) pour résoudre des exercices ? Ces apprentissages du sens et des techniques sont-ils pérennes ?

5 MÉTHODOLOGIE

5.1 Contexte

Le recueil de données a eu lieu au Collège Pierre de Dreux, à Saint-Aubin-du-Cormier en Ille-et-Vilaine. C'est un collège en milieu rural qui compte un effectif de 516 élèves dont 116 élèves de 6e répartis en quatre classes. La prise de données a eu lieu dans deux de ces classes de 6e, avec des effectifs conséquents, 30 élèves en classe de 6A et 29 élèves en classe de 6B. Les profils de ces deux classes sont assez éloignés : la 6A est très hétérogène, parfois bruyante et brouillon avec un certain nombre d'élèves intégrés à la section foot, tandis que la 6B est plus scolaire et plus calme. Une élève de 6A bénéficie d'un plan d'accompagnement personnalisé (PAP), tandis que deux autres élèves en 6B profitent des mêmes aménagements. Ces élèves à besoins particuliers ainsi que quelques autres en grande difficulté sont autorisés par l'enseignante (Lili) à utiliser leur calculatrice pendant les séances de cours. Pendant les évaluations, la calculatrice n'est pas autorisée, mais ils peuvent au besoin utiliser les tables de multiplication. Une étudiante en pré-professionnalisation (AED) est présente deux fois par semaine sur les cours de mathématiques en 6B ; en plus d'être une observatrice attentive, elle est susceptible d'apporter une aide dans l'organisation du déroulé des séances. De par ces considérations, nous avons privilégié de prélever les données filmées en demi-groupes en 6A, et en classe entière en 6B. Notre étude se situe à un moment de transition vers une réforme : en plus des heures de mathématiques, les élèves sont répartis dans des groupes de soutien et d'approfondissement à raison d'une heure par semaine, en alternant les périodes ; à certaines périodes les élèves font des mathématiques, à d'autres ils font du français. Ces dispositifs seront amenés à être modifiés l'année prochaine.

5.1.1 Méthodologie de recueil des données

Au préalable, nous mènerons une analyse de l'initiation à la pensée algébrique à travers une revue de littérature succincte où nous recueillerons des éléments concernant les difficultés avérées des élèves à l'entrée de la pensée algébrique. Puis nous étudierons l'entrée dans la pensée algébrique dans la documentation des programmes officiels. Ces informations nous permettront de concevoir une ingénierie didactique au potentiel a-didactique. Tout d'abord une activité d'introduction au calcul littéral sera implémentée au cours de deux séances pour chaque classe. Ces deux séances seront filmées. L'introduction au calcul littéral impliquera l'utilisation d'un « carnet de calcul littéral » pour consigner les résultats de l'activité et pour travailler ensuite des rituels, ce qui nous permettra de prélever ensuite facilement des données écrites. Des données écrites seront aussi prélevées pour documenter l'impact de cette introduction dans la suite de la progression, en particulier au niveau du chapitre traitant du calcul de périmètre et d'aire : des cahiers d'élèves seront photographiés et des interrogations seront scannées. L'introduction du sens quotient pris par la fraction aura lieu à la fin du chapitre abordant la division. Deux séances seront également filmées dans chaque classe à ce moment précis. Un « carnet de sens quotient » proposant des rituels aux élèves nous permettra également de prélever des données écrites par les élèves concernant le sens quotient. Le savoir appris par les élèves sera documenté par le biais du scan des copies d'interrogation. Enfin, un test à distance (dans le temps) sera proposé aux élèves dans les classes filmées ayant été pourvues des aménagements présentés (avec une distance de cinq semaines), et le même test sera proposé dans des classes sans avoir eu ces aménagements dans le même collège (avec une distance de six semaines). Ces traces écrites des élèves seront scannées. Le post test sera également proposé à des enseignants d'autres collèges n'ayant pas effectué les aménagements mis en place, à une distance de plusieurs semaines également.

Toutes les données filmées seront filmées dans la même salle de classe et de la même manière, avec : une caméra fixe posée sur un trépied au fond de la classe faisant un plan large sur les élèves (de manière à pouvoir isoler un élève dont les parents n'avaient pas donné d'autorisation en lien avec le droit à l'image), avec un système de micro-cravate sans fil couplé à la caméra fixe et porté par l'enseignante ; une caméra de type « GoPro » posée sur un petit trépied sur le bureau de l'enseignante, parfois utilisée de manière mobile (le bureau de l'enseignante se trouve dans le coin opposé en diagonale par rapport à la première caméra) ; la caméra et l'appareil photo d'un téléphone portable. Un test à distance (dans le temps) sera proposé aux élèves dans les classes filmées ayant été pourvues des aménagements présentés, et le même test sera proposé dans des classes sans avoir eu ces aménagements. Ces traces écrites des élèves seront scannées. Le tableau ci-dessous donne à voir notre corpus de données recueillies :

Type de données	**Classe/Groupe/Objet**	**Modalités**	**Date**	**Observations**
Calcul littéral				
Données filmées ou photographiées	Séance 1 / 6B	Classe entière Présence de l'AED	08 Déc. 2023	Durée 1h Découverte ludique du calcul littéral
	Séance 1 / 6A groupe 1	Demi-groupe	11 Déc. 2023	Durée 1h Idem
	Séance 1 / 6A groupe 2	Demi-groupe	11 Déc. 2023	Durée 1h Idem
	Séance 2 / 6B	Classe entière	15 Déc. 2023	Durée 1h Idem

		Présence de l'AED		
	Séance 2 / 6A	Classe entière	15 Déc. 2023	Durée 1h Idem
Traces écrites des élèves	6A / 6B	Carnet de calcul littéral	22 Déc. 2023	Après les 2 séances (après l'exo 2)
	6A / 6B	Carnet de calcul littéral	Janv. 2024	Les exercices rituels terminés
Périmètre et aire				
Données photographiées	Tableau/Cahier	Classe entière (Traces de cours) 6A/B	Janv. 2024 (19 Décembre)	Utilisation du calcul littéral pour réduire les formules
	Travaux d'élèves 6A/B	Cahiers des élèves	Janv. 2024	Calcul d'une expression
Traces écrites des élèves	Travaux d'élèves 6A/B	Interrogation écrite – scan des copies	11 Janv. 2024	Écriture des formules et calcul en remplaçant par les valeurs données
Sens « quotient » pris par la fraction				
Données filmées ou photographiées	Séance 1 / 6B	Classe entière	13 Fév. 2024	Découverte du quotient non décimal dans la division décimale et écriture du quotient exact sous forme de fraction
	Séance 1 / 6A	Classe entière	14 Fév. 2024	
	Séance 2 / 6B	Classe entière	14 Fév. 2024	Utilisation de la définition du sens quotient pris par la fraction dans une première séance d'exercices
	Séance 2 / 6A	Classe entière	15 Fév. 2024	
Traces écrites des élèves	6A / 6B	Carnet sens quotient	Fév. 2024	Carnet de quotient similaire à celui du calcul littéral. Le test à distance étant fait le plus tard possible dans l'année scolaire
	6A / 6B	Interrogation écrite scan des copies	3 Avril 2024	
	6A / 6B	Test à distance	7 Mai 2024	
Traces écrites d'autres élèves	6C / 6D (même établissement)	Test à distance des apprentissages du collègue de l'enseignante	15 Mai 2024	Test identique à celui donné aux 6A/6B, effectué également
Traces écrites d'autres élèves	1 classe d'un autre collège (établissement 1)	Test à distance des apprentissages dans un autre collège	24 Mai 2024	Test identique à celui donné aux 6A/6B, effectué également
Traces écrites d'autres élèves	4 classes d'un autre collège (établissement 2)	Test à distance des apprentissages dans un autre collège	16 Juin 2024	Test identique à celui donné aux 6A/6B, effectué également

Tableau 1: Recueil de données

5.1.2 Méthodologie d’analyse des données

Les données filmées lors des séances d’introduction au calcul littéral mise en œuvre avec l’activité ont fait l’objet de synopsis détaillés, ce qui a permis d’y repérer des épisodes emblématiques. Ces synopsis peuvent être consultés en Annexe 11.4. Une transcription des moments emblématiques a été utilisée pour illustrer notre analyse dans la partie 6.6. Les séances filmées lors de l’introduction du sens quotient de la fraction n’ont pas été analysées en détail à partir de transcriptions et de synopsis (puisque pour répondre à QR1 nous avons surtout pris en considération les résultats du test), cependant de courts extraits ont été transcrits pour renseigner notre analyse de la mise en œuvre de la nouvelle trace de cours dans la partie 7.

Une analyse a priori a été menée concernant le contenu du carnet de calcul littéral ayant trait à l’activité d’introduction au calcul littéral. Ceci nous a permis de confronter cette analyse a priori à notre analyse a posteriori. L’analyse a posteriori prend appui sur les fonctionnalités statistiques des feuilles de calcul LibreOffice, en répertoriant les types d’erreurs effectuées, les obstacles, et les différents types de techniques utilisées par les élèves, tout en exprimant les résultats sous forme de pourcentages. Ceci permet de confronter efficacement nos prévisions faites lors de l’analyse a priori avec les productions concrètes dans la pratique de classe. De la même manière, nous avons analysé le test sur le sens quotient de la fraction, et le post test effectué à distance. Cependant, nous n’avons pu examiner les copies d’élèves provenant d’un enseignant en dehors du collège considéré seulement que de manière superficielle, par manque de temps, puisque cet enseignant n’avait pas pu obtenir ces copies plus tôt pour nous permettre de les analyser.

6 UNE ENTRÉE DANS L’ALGÈBRE AVEC L’ACTIVITÉ DES JETONS

Au cours de notre étude synchronique dans quelques pays européens lors du Travail d’Étude et de Recherche (TER) de l’année passée concernant la transposition du sens « quotient » pris par la fraction, une activité d’introduction au calcul littéral a retenu notre attention. Cette activité provient du manuel danois Matematrix 5 (Gregersen et al., 2013) à destination de la classe équivalente au CM2 en France. Le manuel de la classe correspondant à la classe de 6e, Matematrix 6 (Gregersen et al., 2013) fait référence à cette activité dans l’introduction du premier chapitre qui s’intitule « Algèbre ». Nous décrirons dans ce qui suit tout d’abord l’activité danoise proposée pour la classe de CM2, que nous chercherons ensuite à adapter pour une classe de 6e en France, nous la nommerons « l’activité des jetons ».

6.1 Description de l’activité danoise

Dans une première partie de l’activité, un sac contient une multitude de jetons tous de la même couleur avec sur chaque jeton une lettre : A, B ou C. Peter tire au hasard cinq jetons du sac ; Peter pense alors aux lettres comme à des nombres inconnus. Aussi, il peut calculer avec ces nombres. Il additionne ces nombres inconnus et écrit le résultat ainsi (les lettres étant à chaque fois représentées sur des jetons dessinés) : « A+A+B+B+B = 2 . A + 3 . B », le point symbolisant au Danemark la multiplication. Il s’agit donc ici de réduire les expressions obtenues, tout en gardant le symbole de la multiplication (voir Figure 5).

Figure 5: p.19 Matematrix 5, (Gregersen et al., 2013)

Le texte dans le phylactère plus bas dans l’activité (voir ANNEXE 1-« Ukendt tal ») peut être traduit de la sorte : « J’ai A deux fois et B trois fois ».

Dans un premier exercice d’application, quatre expressions sont proposées, les lettres étant encore représentées sur des jetons dessinés, il est alors demandé aux élèves d’écrire de la même manière le résultat de ces tirages (en réduisant les expressions). Un autre phylactère donne des indications pour la réduction : « 1A, c’est la même chose que A, et 3B c’est la même chose que 3.B ».

Dans les trois exercices d’application qui suivent, les lettres ne sont plus représentées sur des jetons dessinés et le symbole de la multiplication a disparu, la consigne donnée étant : « calculer avec les lettres ». Les élèves sont alors amenés à réduire des expressions comme « 2C+10A+9A », « 7B-6B » ou encore « 2 . (10C-4C) ». En conclusion, cette première partie initie les élèves aux écritures et aux réductions d’expressions tout en introduisant les notations algébriques.

Dans la deuxième partie de l’activité, Peter a inventé un jeu, où à chaque tour on tire un certain nombre de jetons au hasard. Peter considère chaque lettre comme réservant un espace pour un nombre, chaque lettre « garde la place d’un nombre ». À chaque tour de jeu, chaque lettre correspond à un certain nombre de points. Pour pouvoir donner le nombre de points représenté par chaque lettre, il jette trois dés à six faces de couleurs différentes. Le dé rouge donne alors la valeur du nombre A, le bleu donne la valeur du nombre B, et le blanc donne la valeur du nombre C. Une fois prêt à jouer, il tire d’abord un certain nombre de jetons, par exemple cinq. Puis il écrit le résultat du tirage à l'aide des lettres. L'activité présente alors les cinq jetons avec les lettres tirées d'abord dessinés (voir Figure 6).

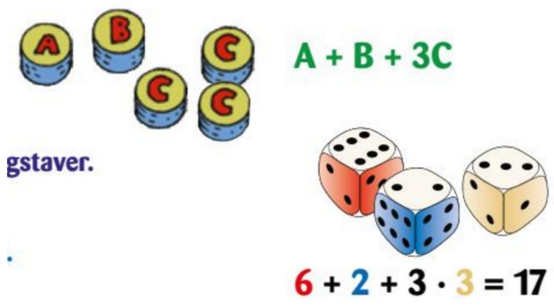


Figure 6: p.20 Matematrix 5, (Gregersen et al., 2013)

Puis l'expression algébrique correspondante est présentée à côté : « A+B+3C ». Ensuite il jette les trois dés, et on peut lire sur les dés dessinés que le dé rouge indique 6, le bleu 2 et le blanc 3. Ceci lui permet d'écrire les points à la place de chaque lettre. Maintenant il peut calculer le résultat de son tour de jeu : 6+2+3.3 = 17, chaque nombre étant écrit de la couleur du dé correspondant. Un premier exercice d'application propose huit vignettes représentant les tours de jeu suivants de Peter, où les trois dés sont dessinés à chaque fois dans des configurations différentes (on suppose qu'il conserve les mêmes jetons tirés auparavant) ; la consigne est alors de calculer le nombre de points obtenus par Peter à chaque tour, en utilisant les nombres indiqués par les dés, puis de déterminer pour quel jet de dés il a obtenu le plus de points. Dans le deuxième exercice d'application, Peter a tiré sept jetons au hasard, ceux-ci sont représentés dessinés (3 jetons A, 2 jetons B et 2 jetons C). Il est d'abord demandé à l'élève d'écrire le résultat de ce tirage, puis de calculer le nombre de points obtenus lorsque par exemple « A = 2, B = 4 et C = 1 » (les dés ne sont plus dessinés) ; sept situations différentes sont proposées. Enfin, le dernier exercice d'application propose à l'élève de jouer à ce jeu avec un camarade de classe, il est précisé qu'à chaque tour, les élèves doivent tirer le même nombre de jetons chacun. Celui qui obtient le plus de points après huit tours de jeu est le gagnant. En conclusion, cette deuxième partie de l'activité reprend ce qui a été fait dans la première (écriture puis réduction d'expressions algébriques), puis guide l'élève dans le calcul d'une expression, lorsque l'on donne des valeurs aux lettres. La manipulation n'est envisagée qu'en dernier lieu.

6.2 Choix d'adaptation de cette activité

Pour notre activité d'introduction au calcul littéral, nous avons choisi de nous inspirer très largement de l'activité danoise détaillée ici, mais par contre nous avons pris parti d'opter pour la manipulation en premier lieu pour aller ensuite vers le calcul plus décontextualisé, calcul qui se détachera par la suite de la manipulation. Il nous a semblé plus opportun d'effectuer cette introduction à la toute fin du chapitre sur les opérations (addition, soustraction, multiplication), l'activité proposée permettant de réinvestir ces opérations et leurs propriétés d'une manière différente, tout en travaillant également les priorités opératoires et le rôle des parenthèses dans un calcul.

Au préalable d'une introduction au calcul littéral, les élèves de deux classes de 6e y ont été exposés de manière indicible et délibérée : de nombreuses fois, ils sont entrés dans la classe en découvrant le tableau couvert de calcul littéral et d'identités remarquables non encore effacés de la classe de 3e qui les a précédés. Ces calculs restent au tableau en début de séance, le temps de faire le point sur la séance passée et l'état d'avancement des travaux. Ceci éveille manifestement leur curiosité, ils sondent ces écritures comme un message secret à décoder.

L'activité d'introduction que nous nommerons « l'activité des jetons » est opérée en binômes d'élèves. Le jeu est le suivant : chaque élève de chaque binôme dispose d'un petit carnet confectionné à partir de papier de recyclage de la photocopieuse pour garder une trace des travaux effectués (voir ANNEXE 2-Carnet de calcul littéral) et chaque binôme est en possession d'un petit sac avec une vingtaine de jetons de couleur (bleus, jaunes, rouges). Sur les jetons sont écrites des lettres : sur les jetons bleus, on peut lire la lettre **a**, sur les jaunes la lettre **b** et sur les rouges la lettre **c**.

Les lettres choisies ne sont pas des majuscules (alors que c'était le cas de l'activité danoise) ceci de façon à éviter que les élèves n'utilisent que des majuscules plus tard dans leurs calculs, alors qu'à de rares exceptions près, le calcul littéral est généralement écrit à l'aide de lettres en minuscules. Les lettres majuscules sont habituellement réservées aux noms des expressions, ou encore aux noms des points en géométrie. Délibérément, la lettre **b** n'est pas placée sur les jetons bleus, mais sur les jaunes, ceci afin d'éviter l'association lettre – couleur, tout comme l'on cherchera à éviter l'association lettre – objet (qui se révèle être un obstacle à la compréhension de l'algèbre selon Booth (1984)) mais par contre en favorisant l'association lettre – nombre inconnu. Nous avons choisi de faire tirer à chaque fois 7 jetons au lieu de 5, ce qui devrait permettre d'écrire une plus grande variété d'expressions algébriques.

À chaque tirage, chaque élève piochera sept jetons dans le petit sac et consignera les lettres tirées dans son carnet. En considérant que chaque lettre représente un nombre inconnu, une expression sera écrite pour faire la somme de ces nombres, puis l'expression sera réduite. Pour la suite du jeu, la classe dispose de trois gros dés en caoutchouc, un bleu, un jaune et un rouge (voir Figure 7). Les dés seront jetés au sol dans la classe dans les allées entre les tables et les élèves énonceront le résultat du tirage. Le dé bleu donnera alors la valeur du nombre inconnu **a** écrit sur les jetons bleus, le dé jaune donnera la valeur de **b** écrit sur les jetons jaunes et le dé rouge, la valeur de **c** écrit sur les jetons rouges. Les élèves consigneront les résultats du tirage dans leur carnet, puis remplaceront **a**, **b** et **c** dans l'expression réduite écrite auparavant par les valeurs données par les dés. Enfin, l'expression sera calculée.

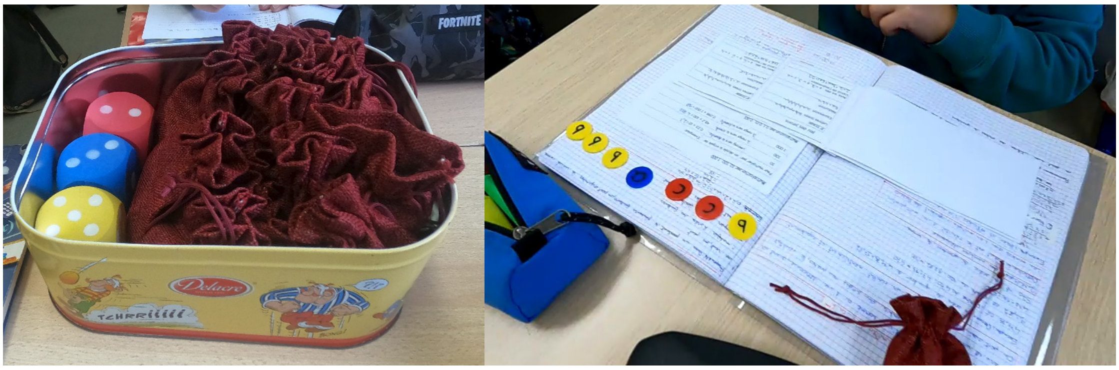


Figure 7: Activité des jetons – Matériel

Les binômes s'échangeront ensuite leurs carnets pour vérification voire correction des écritures et des calculs, puis chacun récupérera son carnet et remettra ses jetons dans le petit sac. Six tirages de ce type auront lieu. À l'issue des six manipulations, les élèves reporteront le score de chaque tirage dans la quatrième page du carnet (voir ANNEXE 2-Carnet de calcul littéral) et calculeront le total des points. Le calcul du total donnera lieu à une nouvelle vérification par le binôme, puis les gagnants de la classe seront désignés : celui avec le plus grand score et celui avec le plus petit. Les synopsis détaillés des séances filmées mettant en œuvre l'activité des jetons dans les deux classes de 6e sont visibles en ANNEXE 4-Tableaux de synopsis.

L'activité proposée revêt des aspects potentiels de situation a-didactique au sens de Brousseau. Le tirage des lettres étant individuel et différent pour chacun, l'élève endossera la responsabilité de consigner les lettres tirées, de produire une expression réduite et d'en effectuer une instanciation, sans l'intervention de l'enseignante qui pourra rester en retrait. Ceci pourra conduire l'élève à adopter seul des changements de procédures au cours de la répétition des tirages, par exemple il pourra chercher à regrouper les lettres par couleur avant de s'engager dans la réduction de l'expression.

Le travail sur le carnet se détachera de la manipulation dans les pages qui suivent : la cinquième page proposera des réductions d'expressions littérales sans manipulation préalable, la sixième page introduira une trace de cours sous forme de texte à trous, et les dernières pages présenteront chacune un exercice de réduction et un exercice de calcul d'expression (voir ANNEXE 2-Carnet de calcul littéral). Cet entraînement pourra se faire sous forme de petits rituels en début d'heure ponctuant le chapitre qui suit, ils seront distribués de manière à venir étoffer les carnets des élèves. Les activités ritualisées désignent des activités proposées de manière régulière sous une même forme mais qui évoluent dans le temps au niveau de leur contenu tout en échappant au piège de la routine, et qui permettent de découvrir, de renforcer et de systématiser des stratégies opératoires. Ce sont des temps courts et codifiés où de manière économique, les gestes remplacent la parole tout en marquant le cadre de la situation (par exemple la distribution des carnets annonce une nouvelle situation), ce qui crée les conditions de l'enseignement (Marchive, 2007), et déclenche un « mode de fonctionnement ». Les rituels répondent à des besoins spécifiques des élèves, comme le relève Mary et al. (2014), en particulier en ce qui concerne la structuration du temps et de la pensée : ils favorisent l'attention et la mémorisation des connaissances à travers un cadre rassurant et répété. Ainsi, de récentes recherches (Croset et al., 2022) proposent de caractériser les rituels autour de trois fonctions : faire apprendre, sécuriser l'élève, intégrer l'élève dans le collectif « classe » (le rituel ne met pas en activité un seul tandis que les autres observent). Pour remplir ces fonctions, le contenu des rituels doit donc évoluer au fil du temps (les apprentissages doivent varier) et doit pouvoir être différencié pour intégrer la dimension collective des apprentissages. Lors de la construction des rituels de calcul littéral, nous avons cherché à observer ces considérations, et au moment de la mise en œuvre, la différenciation a pu être effective en proposant aux élèves les plus en difficulté non pas la résolution de tâches simplifiées, mais plutôt la résolution d'un moins grand nombre de tâches, avec cependant un niveau d'exigence identique aux autres en termes d'apprentissage, essayant d'éviter par là même une démobilisation de certains élèves (les plus rapides comme les moins rapides) puisque chacun peut avancer à son rythme.

Le carnet de l'élève est présenté sous forme de feuilles A4 découpées en tiers dans le sens de la largeur. Les tiers de feuilles sont perforées à gauche et assemblées par une ficelle nouée comme un lacet au dos du carnet. Des attaches parisiennes auraient pu être utilisées, mais nous avons craint qu'après un certain nombre de manipulations celles-ci n'en viennent à se détériorer. Le format carnet permet d'une part de traiter ce qui y est travaillé symboliquement comme un savoir périphérique ludique qui n'a pas tout à fait sa place dans le cahier de l'élève. D'autre part, les savoirs qui y sont travaillés ne se retrouvent pas noyés parmi ce qui est fait autrement en classe, ce qui lui confère un statut proche de celui d'une boîte à outils. Ce format permet aussi à l'enseignante de pouvoir conserver les carnets dans la classe, de pouvoir les consulter et éventuellement d'y écrire quelques remarques aux élèves si nécessaire, ainsi que de s'assurer que chaque élève aura bien son carnet au moment où il sera nécessaire de l'utiliser. Lorsque des pages seront à ajouter au carnet, il sera alors possible de le faire en amont de la séance, pour éviter une gestion de classe qui pourrait devenir chaotique du fait des effectifs chargés en classe de 6e, d’autant plus qu’il n’est pas certain que tous les élèves soient capables de refaire le nœud au dos du carnet de manière satisfaisante. Enfin, l’avantage déterminant de ce format est qu’il permet au chercheur d’isoler facilement certaines pages pour pouvoir les scanner et les étudier plus finement par la suite.

Après cette activité de découverte du calcul littéral, la suite de la progression abordera le chapitre du calcul de périmètres et d’aires, ce qui sera l’opportunité de réutiliser ce qui aura été fait avec le calcul littéral précédemment, que ce soit au niveau de la réduction d’expressions pour l’obtention de formules, ou au niveau du calcul d’une expression en donnant des valeurs aux lettres. Nous escomptons que le statut de la lettre soit plus clair pour les élèves après l’activité des jetons et le chapitre de calcul de périmètres et d’aires. Cela nous permettra ensuite d’aborder le chapitre sur la division en y intégrant la définition du sens « quotient » pris par la fraction, en faisant l’hypothèse que cette définition sera mieux comprise des élèves.

6.3 Analyse a priori de l’activité des jetons

6.3.1 Analyse épistémologique

L’activité des jetons décrite plus haut implique l’usage des trois types d’activités de l’algèbre scolaire synthétisés dans le modèle GTG (voir 3.1.1) développé par Kieran (2007). Le type d’activité Générationnel correspond à la production et l’écriture des expressions algébriques pour faire la somme de nombres non encore connus, une fois les jetons tirés. Le type d’activité Transformationnel englobe la réduction des expressions et la substitution des lettres par les valeurs attribuées par les dés. Le problème à résoudre étant le suivant : « faire la somme de nombres représentés par les jetons dont on ne connaît pas la valeur précise au départ », ce problème fournit le contexte pour s’engager dans une démarche utilisant les activités générationnelles et transformationnelles. Aussi, de ce point de vue, on peut considérer le problème posé comme relevant du type d’activité Global/Meta-niveau.
Cette activité a également retenu notre attention, car elle adresse une préoccupation liminaire au niveau des premiers apprentissages de l’algèbre au collège : afin d’être le plus accessible possible aux élèves, elle se doit d’être tendue vers un but (voir 3.1.2). Dans le cas présent, il s’agit de calculer la somme de nombres qui n’ont pas de valeur définie au départ. Le jet des dés pourra donner par la suite une valeur à ces nombres pour permettre d’en calculer la somme. Il s’agit aussi pour les élèves de gagner le jeu à l’issue des six tirages.
Pour reprendre les mots de Chevallard (voir 3.1.2), l’un des écueils du calcul algébrique au collège vient du fait que « le rapport de l’élève au calcul algébrique n’incorpore pas l’idée

d’une relation entre manipulation algébrique de l’expression, d’une part, et substitution de valeurs numériques dans l’expression, d’autre part **»** (Chevallard, 1989 a, p.47). Avec l’« activité des jetons », les élèves seront dans un premier temps amenés à écrire une expression algébrique pour exprimer la somme des nombres non encore connus représentés par les jetons tirés du sac, puis à manipuler cette expression afin de la réduire. Dès que les dés seront jetés, chaque lettre de l’expression sera remplacée par une valeur (le nombre indiqué par le dé bleu donne la valeur de la lettre **a**, qui est indiquée sur les jetons bleus par exemple). L’activité présente donc l’avantage d’incorporer à la fois manipulation algébrique et la substitution de valeurs numériques dans l’expression, et ceci pour chacun des six tirages consécutifs.

L’activité est également de nature à répondre à l’« endettement empiriste » des élèves relevé par Chevallard (voir 3.1.2). Étant donné que dans les classes précédant la 6e l’aspect empirique des mathématiques est prédominant, les manipulations engagées au cours de l’« activité des jetons » peuvent permettre de bâtir des liens vers un calcul qui sera plus tard plus formel. L’intérêt pratique de la réduction d’une expression trouve sa justification immédiate lors du calcul de l’expression une fois les valeurs attribuées aux lettres, ce calcul étant alors plus rapide et plus efficace (par exemple, on ne remplace la lettre **a** par sa valeur qu’une seule fois dans l’expression réduite), ce qui évite que le calcul algébrique ne se retrouve enfermé dans un monde clos de règles sans fonctionnalités apparentes.

Par ailleurs, l’« activité des jetons » autorise à contourner la difficulté de redésigner par une lettre ce qui a déjà été désigné verbalement par le langage courant lors de redésignation directe, puisque les lettres **a**, **b** et **c** sont écrites directement sur les jetons. Sans cela, c’est-à-dire si les jetons n’étaient que porteurs d’une couleur, il aurait fallu ensuite utiliser des micro-descriptions comme « le jeton bleu correspond à la lettre **a** » afin de pouvoir écrire des expressions algébriques, ce qui n’aurait pas manqué de compliquer le travail des élèves, du fait de « l’écart cognitif entre les écritures symboliques et la langue naturelle » (Duval et Pluvinage, 2016). L’activité choisie peut aussi prémunir les élèves de cette fausse idée qu’une lettre ne peut être remplacée par qu’une seule valeur. Le dé à six faces symbolise de la sorte les valeurs possibles, avec certaines limites, certes, puisque les valeurs ne peuvent être que des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à six. Néanmoins, avec la même expression algébrique, il serait possible d’effectuer différentes instanciations des lettres en jetant plusieurs fois les dés. De plus, lors des six différents tirages proposés aux élèves lors du jeu, les lettres sur les jetons restent identiques, alors que les valeurs assignées aux lettres par le jet des dés pourra varier. Par conséquent, dans la « gamme des substitutions sémantiques mobilisées dans le registre algébrique » (Duval, R. et Pluvinage, F., 2016) chaque nombre inconnu est condensé en une lettre écrite sur chaque jeton, chaque lettre faisant référence à ce qui peut s'apparenter à une liste ouverte de nombres, l'interface verbale entre les nombres et les lettres pouvant être exprimée ainsi : « le nombre indiqué par le dé bleu donne sa valeur à la lettre écrite sur le jeton bleu », de même pour les autres dés. Lorsque l'on jettera les dés plusieurs fois au cours de l'activité, on peut noter que la probabilité que deux des trois dés indiquent le même résultat est assez élevée, et que très probablement cette situation se produira au moins une fois lors du jeu. Ceci permettra de travailler sur une autre idée préconçue des élèves rapportée par la recherche (voir 3.1.3) qui consiste pour les élèves à croire que deux nombres identiques ne peuvent être assignés à deux lettres différentes.

Par ailleurs, l'activité des jetons permettra de focaliser sur certains « types d'unités discursives de sens en algèbre » (Duval, R. et Pluvinage, F., 2016). Les écritures symboliques en algèbre articulent deux types différents de signes : les lettres tout comme les chiffres que l'on peut interpréter en tant que nombre, et les signes organisateurs d'expression (symboles d'opérations, parenthèses, symboles de relation). La première expression écrite par les élèves après un premier tirage de jetons sera construite de la sorte : lettre + lettre + lettre… cette expression sera constituée de sept lettres (parmi les lettres **a**, **b** et **c**) articulées par le même symbole d'opération additive six fois pour organiser l'expression. Par la suite, la réduction de l'expression fera intervenir des transformations liées au nombre d'occurrences de chaque lettre **a**, **b** et **c** par rapport aux signes opératoires qui est dans le cas présent toujours le même signe « + », afin d'obtenir une réduction maximale du nombre d'occurrences d'une même lettre dans l'expression initiale. Dans ces transformations, on notera que toutes les occurrences d'une lettre sont systématiquement réductibles à une seule, ce qui ne serait pas le cas dans une expression comme $a^2 + a$ par exemple. En notant N_a le nombre d'occurrences de la lettre **a**, N_b le nombre d'occurrences de la lettre **b** et N_c le nombre d'occurrences de la lettre **c**, l'expression obtenue sera alors de la forme : $N_a \times a + N_b \times b + N_c \times c$ ou encore $N_a a + N_b b + N_c c$ lorsque l'on sous-entend le signe « $\times$ ». Du reste, on conviendra que si l'un des nombres N_a , N_b ou N_c vaut « 1 », alors il ne sera tout simplement pas écrit. L'expression écrite immédiatement après avoir tiré les jetons et l'expression réduite participent du même type d'unité discursive de sens (elles sont constituées de termes). Pourtant, en reliant ces deux expressions par le signe « = », nous entrons dans un autre type d'unité discursive de sens puisque chaque expression devient un membre de la formule ainsi écrite. Le signe « = » figurant entre les deux prend alors une signification moins habituelle, car il n'est pas l'annonce d'un résultat. Ce signe est ici utilisé pour indiquer une relation d'identité entre nos deux expressions. Au moment de l'instanciation des lettres lorsque les dés seront jetés, une nouvelle égalité pourra être écrite entre l'expression réduite $N_a a + N_b b + N_c c$ et celle obtenue en remplaçant rigoureusement les lettres par leurs valeurs dans un premier temps sans calculer. Le signe « = » est alors employé pour rendre compte de l'instanciation, il n'est pas encore l'annonce d'un résultat à proprement parler, mais il indique toutefois une étape qui s'oriente vers le résultat final. Du côté des élèves, le calcul de l'expression $N_a a + N_b b + N_c c$ avec les valeurs attribuées implique la maîtrise de certains prérequis calculatoires.

6.3.2 Analyse a priori

Les prérequis à la situation d'enseignement/apprentissage de l'activité des jetons

Pour que l'activité des jetons soit accessible aux élèves, il est nécessaire au préalable qu'ils aient une bonne connaissance du sens des opérations, en particulier, même s'ils pensent bien connaître les opérations + et $\times$ ils oublient parfois les relations qu'elles entretiennent. L'apprentissage des tables de multiplication insistant plus sur la mémorisation que sur la reconstruction pour être efficace en classe de 6e, le lien entre les deux s'en trouve parfois dissout. La relation qui nous intéresse en l'espèce est la suivante par exemple : $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3$ qui sera utile pour la réduction des expressions, en comptant le nombre d'occurrences de chaque lettre. Les propriétés des deux opérations nommées seront également utiles. La commutativité et l'associativité de l'addition pourront permettre de regrouper les lettres identiques dans l'expression de départ. Un calcul correct de l'expression réduite $N_a a + N_b b + N_c c$ suppose aussi de connaître les priorités opératoires, la multiplication étant prioritaire sur l'addition. Par conséquent, l'activité des jetons trouve sa place dans une progression où les chapitres sur les nombres entiers et décimaux et sur les opérations (addition, soustraction, multiplication) ont été traités.

L'apprentissage de nouvelles conventions d'écriture

Des éléments sur l'écriture de la réduction d'expressions devront être apportés en particulier concernant le fait de sous-entendre les signes « × » devant une lettre, et donc de ne pas les écrire tout en comprenant que sens « multiplier » ne disparaît pas pour autant, mais qu'il n'est juste pas écrit. Cependant, lorsque les lettres seront remplacées par leurs valeurs, il deviendra indispensable de faire réapparaître les signes « × » pour exprimer un calcul correct. De même, la convention d'écriture $1 \times a = a$ pouvant aussi être appliquée à **b** et **c**, devra être explicitée. Ces deux remarques sur l'écriture de l'expression réduite correspondent aux phylactères de l'activité danoise (voir ANNEXE 1-« Ukendt tal »).

Nous dégageons de l'activité des jetons deux types de tâches à réaliser par les élèves.

Type de tâche A : Après avoir écrit sous forme de somme de sept termes le résultat du tirage des jetons, chacun des termes n'étant constitué que d'une seule lettre, réduire l'expression sous la forme $N_a a + N_b b + N_c c$, toutes les occurrences d'une lettre étant systématiquement réduites à une seule.

Type de tâche B : Calculer la valeur de l'expression réduite en remplaçant les lettres **a**, **b**, et **c** par les valeurs données par les dés qui leur sont associés (et qui ont donc la même couleur).

Du point de vue des praxéologies, nous détaillons chaque type de tâche dans le Tableau 2 ci-dessous :

Type de tâche T	Sous-types de Tâches t	Techniques τ
Type A. Réduire une expression écrite sous la forme d'une somme de sept termes de sorte qu'il n'y ait qu'une seule occurrence de chaque lettre.	Repérer les différentes lettres présentes. Repérer le nombre d'occurrences de chaque lettre. Écrire l'expression réduite.	Regrouper les mêmes occurrences de chaque lettre. Compter les occurrences de chaque lettre.
Type B. Calculer la valeur de l'expression réduite lorsque des valeurs sont données à chaque lettre.	Repérer les valeurs données à chaque lettre. Écrire ces valeurs dans son carnet. Calculer l'expression.	Remplacer chaque lettre par sa valeur dans l'expression et écrire les signes « × » qui ont été sous-entendus entre chaque lettre et son nombre d'occurrences.

Tableau 2: Type de tâche T, tâches t, techniques τ

Pour ces deux types de tâches, nous décrirons les différentes techniques qui peuvent être mobilisées, les erreurs possibles, les difficultés et les obstacles associés.

<u>Type de tâche A</u>

On suppose que les jetons viennent d'être tirés et placés dans l'ordre de tirage sur la table, l'expression de la somme des lettres tirées indiquées par les jetons est alors écrite telle quelle.

Par exemple si les 7 jetons tirés sont **a**, **b**, **a**, **c**, **b**, **b**, **b**, l'expression écrite est : a + b + a + c + b + b + b.

<u>Technique T1A :</u> L'élève compte le nombre de jetons a, puis le nombre de jetons b et enfin le nombre de jetons c posés sur la table ou écrits dans l'expression initiale et produit directement l'expression réduite en tenant compte des indications particulières de réduction. Il obtient alors : a + b + a + c + b + b + b = 2a + 4b + c, c'est-à-dire qu'il cherche à écrire directement l'expression $N_a a + N_b b + N_c c$.

<u>Erreur E1A$_1$:</u> L'élève a compris qu'on n'écrivait pas le signe « + » et conserve par contre le signe « × ». L'expression trouvée est alors : 2×a 4×b 1×c ou bien 2×a 4×b c.

<u>Erreur E1A$_2$:</u> Puisqu'on peut ne pas écrire les signes « × », l'élève interprète qu'on peut ne pas écrire les opérations et n'écrit pas les signes « + » non plus. L'expression trouvée est alors : 2a 4b c.

<u>Erreur E1A$_3$:</u> L'élève additionne le nombre d'apparitions de chaque lettre N_a , N_b et N_c , l'expression trouvée est alors : 7 a b c, ou une variante de celle-ci.

<u>Erreur E1A$_4$:</u> L'élève cherche à donner une valeur numérique au résultat final, il additionne le nombre d'apparitions de chaque lettre N_a , N_b , N_c et obtient la valeur 7 (ou 6 dans le cas où il n'identifie plus le coefficient de **c** comme étant 1dans l'exemple donné).

<u>Erreur E1A$_{réduc}$:</u> L'élève n'a pas réduit complètement (certaines occurrences de lettres se répètent)

<u>Erreur sur les conventions d'écriture EC1A :</u> L'élève inverse la lettre et son nombre d'occurrences tout en omettant bien d'écrire le signe « × », l'écriture produite est alors : a2 + b4 + c soit de type $aN_a + bN_b + cN_c$.

<u>Non respect des conventions d'écriture C1A$_1$:</u> L'élève oublie l'indication pour l'écriture de la réduction 1 × c = c et l'expression trouvée est : 2a + 4b + 1c.

<u>Non respect des conventions d'écriture C1A$_2$:</u> L'élève a conservé le signe « × » dans l'expression réduite.

<u>Non respect des conventions d'écriture C1A$_{maj}$:</u> L'élève écrit parfois les lettres en majuscules, parfois en minuscules.

<u>Erreur de comptage E1A$_{comp}$:</u> L'élève fait une erreur de comptage des occurrences d'une lettre.

<u>Erreur de recopie E1A$_{recop}$:</u> L'élève fait une erreur de recopie en inversant la place de deux lettres (en écrivant **a** à la place de **b**) par exemple, ou autre variante.

<u>Erreur d'écriture E1A$_{écrit}$:</u> L'élève écrit bien le premier signe « + » dans l'expression réduite mais oublie d'écrire le second par exemple. Ou bien l'élève rajoute une lettre lorsqu'il écrit la somme de toutes les lettres (on a alors huit termes au départ ; on considère que l'expression finale est correcte si les huit termes sont pris en considération dans la réduction finale). Ou

encore, il manque une lettre dans la liste des lettres tirées (il se peut que l'élève n'ait tiré que six jetons, ou qu'il ait oublié d'en écrire un).

Technique T2A : L'élève regroupe physiquement sur la table les jetons **a**, puis les jetons **b** et enfin les jetons **c,** ou bien il compte le nombre de jetons de chaque type, ou encore en remarquant ensuite qu'on a obtenu deux fois le jeton a, quatre fois le jeton b et une fois le jeton c, soit en considérant que a + a = 2 × a puis b + b + b + b = 4 × b et enfin c = 1 × c, il écrit en premier lieu une expression de type $N_a \times a + N_b \times b + N_c \times c$ ce qui dans l'exemple choisi produit l'écriture 2 × a + 4 × b + 1 × c pour ensuite appliquer les consignes sur les écritures de réductions et obtenir $N_a a + N_b b + N_c c$, soit ici 2a + 4b + c.
Les erreurs et difficultés inhérentes à cette technique sont identiques à celles de la technique T1A, aussi nous les nommerons respectivement $E2A_1$, $E2A_2$, $E2A_3$, $E2A_4$, $E2A_{réduc}$, EC2A, $C2A_1$, $C2A_2$, $C2A_{maj}$, $E2A_{comp}$, $E2A_{recop}$, $E2A_{écrit}$.

Technique T3A : Les lettres identiques sont d'abord regroupées en utilisant la commutativité et l'associativité de l'addition qui induit que dans une somme, on peut modifier l'ordre des termes et regrouper les termes de son choix (les lettres peuvent également être regroupées sur la table). L'expression donnée en exemple devient alors : a + a + b + b + b + b + c. Puis la technique T2A est appliquée. Les difficultés rencontrées en appliquant la technique T3A sont du même ordre que lors des précédentes techniques utilisées, nous les nommerons respectivement $E3A_1$, $E3A_2$, $E3A_3$, $E3A_4$, $E3A_{réduc}$, EC3A, $C3A_1$, $C3A_2$, $C3A_{maj}$, $E3A_{comp}$, $E3A_{recop}$, $E3A_{écrit}$.
Obstacle $O1A_1$ / $O2A_1$ / $O3A_1$: Si lors du tirage des jetons l'élève n'a pas obtenu les trois sortes de jetons (si par exemple il n'a pas de jeton **c**), ceci est de nature à représenter un obstacle à ses yeux pour la réduction de l'expression puisqu'il peut lui sembler que son expression est incomplète. Nous nommerons cette situation O1A s'il s'agit d'un élève qui applique la technique T1A, même chose pour les autres techniques.
Obstacle $O1A_2$ / $O2A_2$ / $O3A_2$: L'élève tire du sac les mêmes jetons qu'au tirage précédent et pense que ce tirage n'a pas d'intérêt puisque les mêmes lettres sont présentes, et croit que fatalement il obtiendra le même résultat final.

Type de tâche B

Dans cette partie, on suppose que le type de tâche A a été accompli avec succès et que l'expression trouvée $N_a a + N_b b + N_c c$ est correcte. En l'appliquant à l'exemple donné, les jetons tirés étant **a**, **b**, **a**, **c**, **b**, **b, b**, l'expression obtenue est : 2a + 4b + c. Le jet des dés vient ensuite donner des valeurs aux lettres. Supposons l'instanciation a = 6, b = 2, c = 3. Les élèves noteront dans leur carnet ces valeurs à l'endroit réservé à cet effet :« Avec les dés : a = …, b = …, c = … ». La consigne sera donnée oralement de remplacer dans un premier temps les lettres par leur valeur sans chercher à calculer, mais en faisant réapparaître les signes « × ». Puis il est attendu des élèves de calculer l'expression en respectant les priorités opératoires. On considère dans cette partie que le calcul est correct s'il correspond à l'expression réduite trouvée (sauf dans le cas d'auto-remédiation explicité ci-dessous, auquel cas, le calcul ne correspond pas à l'expression réduite, mais à l'expression non réduite de la somme des lettres tirées).

Technique T1B : L'élève calcule mentalement le résultat et l'inscrit sur son carnet sans passer par l'étape « remplacer par les valeurs en faisant réapparaître les signes × ». Avec l'exemple cité au-dessus, il trouve et écrit le résultat 23.

Technique T2B : L'élève effectue l'étape de remplacement des lettres par les valeurs en faisant réapparaître les signes « × » et donne ensuite le résultat directement, sans les étapes de calcul intermédiaire (donc sans le calcul des produits explicité). Dans l'exemple donné, le calcul écrit serait alors : $2 \times 6 + 4 \times 2 + 3 = 23$.

Technique T3B : Toutes les étapes sont présentes, le remplacement par les valeurs est suivi des calculs intermédiaires et du résultat final. Dans l'exemple donné, les calculs écrits seraient alors : $2 \times 6 + 4 \times 2 + 3 = 12 + 8 + 3 = 23$, en soulignant éventuellement les calculs prioritaires.

Technique T4B : Toutes les étapes sont présentes, mais les calculs intermédiaires sont faits séparément. Avec l'exemple donné, on aurait ceci (ou une variante de ceci) :

$2 \times 6 + 4 \times 2 + 3$

$2 \times 6 = 12$

$4 \times 2 = 8$

$8 + 12 = 20$

$20 + 3 = 23$

Technique T5B : L'élève remplace les lettres par leur valeur dans l'expression non réduite.

Erreur $E1B_1$ / $E2B_1$ / $E3B_1$ / $E4B_1$ / $E5B_1$: L'élève remplace par les valeurs suivant respectivement la technique T1B, T2B, T3B ou T4B, en oubliant de faire réapparaître le signe « × » et produit une concaténation. Dans le cas de l'exemple donné, on obtiendrait : $2a + 4b + c = 26+42+3$ pour l'instanciation a = 6, b = 2, c = 3.

Erreur $E1B_2$ / $E2B_2$ / $E3B_2$ / $E4B_2$ / $E5B_2$: L'élève a bien remplacé par les valeurs et fait apparaître le signe « × » mais pense effectuer un calcul astucieux en faisant certaines opérations plus pratiques pour le calcul mental, ceci en oubliant la priorité de la multiplication sur l'addition. On peut noter que dans le cas où la technique T1B est utilisée, il peut être difficile de repérer quels calculs auront été effectués.

Erreur $E1B_3$ / $E2B_3$ / $E3B_3$ / $E4B_3$ / / $E5B_3$: L'élève remplace les lettres par une ou des valeurs erronées, en échangeant les valeurs attribuées à **a** et à **b** par exemple, ceci pouvant se produire si l'expression réduite n'est pas ordonnée de manière alphabétique (si par exemple au lieu d'avoir écrit 2a + 4b + c, l'élève a écrit 4b + 2a + c). La technique T1B posera de nouveau problème pour la détection de cette erreur.

Erreur $E1B_{calc}$ / $E2B_{calc}$ / $E3B_{calc}$ / $E4B_{calc}$ / $E5B_{calc}$: L'élève a produit une erreur de calcul mental soit parce qu'il maîtrise mal les tables de multiplication, soit parce qu'une erreur s'est glissée dans la somme.

Erreur $E1B_{recop}$ / $E2B_{recop}$ / $E3B_{recop}$ / $E4B_{recop}$ / $E5B_{calc}$: L'élève produit une erreur de recopie, ou bien il oublie d'écrire une partie de l'expression. Dans le cas où la technique T1B est appliquée, la seule erreur possible de recopie résiderait dans la recopie des valeurs données aux lettres.

Erreur $E1B_{égal}$ / $E2B_{égal}$ / $E3B_{égal}$ / $E4B_{égal}$ / $E5B_{égal}$: L'élève écrit des égalités fausses lors du calcul de l'expression. Avec l'exemple choisi, on aurait ceci (ou une variante) :

$2 \times 6 + 4 \times 2 + 3 = 12 + 8 = 20 + 3 = 23$

Erreur $E1B_{écrit}$ / $E2B_{écrit}$ / $E3B_{écrit}$ / $E4B_{écrit}$ / $E5B_{écrit}$: L'élève comprend que l'on remplace les occurrences des lettres par les valeurs données par les dés (ce qui n'empêche pas un calcul correct de l'expression par la suite).

Difficulté D1B / D2B / D3B / D4B / D5B : L'élève s'engage dans la démarche mais le calcul n'est pas terminé, le résultat final n'est pas donné.

Auto-remédiation R1B/R2B/R3B/R4B/R5B : Alors que l'expression réduite écrite est erronée, l'élève parvient à calculer correctement l'expression en la corrigeant lors du calcul ou du remplacement par les valeurs.

Obstacle $O1B_1$ / $O2B_1$ / $O3B_1$ / $O4B_1$ / $O5B_1$: L'élève pense ne pas pouvoir calculer l'expression car lors du tirage des jetons il n'a par exemple pas tiré de jeton **c**. Il ne peut pas, par conséquent, attribuer sa valeur à **c**.

Obstacle $O1B_2$ / $O2B_2$ / $O3B_2$ / $O4B_2$ / $O5B_2$: L'élève pense ne pas pouvoir calculer l'expression car lors de l'instanciation avec le jet de dés, les valeurs données sont les suivantes : a = 4, b = 4, c = 3. L'élève pense alors qu'on ne peut pas calculer l'expression dans de telles conditions, puisque **a** et **b** ont la même valeur.

Obstacle $O1B_3$ / $O2B_3$ / $O3B_3$ / $O4B_3$ / $O5B_3$: Une ou des erreurs dans l'expression réduite sont de nature à empêcher le calcul de l'expression, par exemple lorsque l'élève n'écrit pas les signes « + » (on considère ici qu’une expression réduite qui ne correspond pas aux lettres tirées n’est pas en soi un obstacle au calcul ultérieur dans la mesure où l’expression est mathématiquement correcte).

À la suite de cette analyse a priori de l’activité des jetons, nous pouvons apporter des éléments de réponse à notre première question de recherche rappelée ci-dessous :

QR1 : Un travail d’introduction à l’algèbre permet-il de faciliter la compréhension de la définition du sens quotient de la fraction par les élèves, notamment quant à l’utilisation des lettres ?

L’activité proposée met en jeu l’utilisation répétée de lettres au cours des tirages et de la réalisation des deux types de tâches (réduction, instanciation), et l’écriture des égalités mathématiques engendrées au cours des manipulations permet d’initier les élèves au calcul algébrique. À travers la répétition des opérations, les élèves auront la possibilité non seulement de découvrir l’usage des lettres, mais aussi le temps de se familiariser avec cet usage.

6.4 Analyse a posteriori de la mise en œuvre

L’activité des jetons a été mise en œuvre par une enseignante dans deux classes de 6e, elle a nécessité deux séances pour chaque classe ou demi-classe pour compléter les six tirages et faire ensuite les totaux de tous les tirages pour désigner les gagnants. À la fin de la deuxième séance, l’activité des jetons étant terminée, les élèves ont pu chercher le premier exercice des rituels proposés, ainsi que compléter une trace de cours sous forme de leçon à trous. Chacune de ces séances ont été filmées et ont fait l’objet de retranscriptions partielles. L’activité des jetons a été très appréciée des élèves, la grande majorité d’entre eux ayant facilement pu entrer dans la démarche proposée, ce qui a été facilité par la manipulation et le travail en binôme. Le déroulé a pu être parfois bruyant, que ce soit au moment de jeter les dés (chacun espère pouvoir prendre son tour pour le faire, les dés rebondissent dans les allées comme des balles en caoutchouc, et chacun souhaite voir apparaître des six !), ou que ce soit au moment d’effectuer un nouveau tirage (chaque élève s’évertue alors à mélanger au mieux ses jetons dans son sachet en le secouant le plus fort possible, mais avec les conseils de Lili, l’enseignante, les élèves tombent d’accord sur le fait que les jetons restent les uns contre les autres et que le meilleur moyen de mélanger est finalement de le faire à la main dans le sac). Le détail des résultats de la mise en œuvre de l’activité sont visibles dans l’« ANNEXE 3-Tableau récapitulatif des différentes erreurs, difficultés et obstacles dans l’activité des jetons ».

6.4.1 Type de tâche A

Techniques

Le type de tâche A consiste à écrire l'expression réduite de la somme des lettres après avoir tiré les sept jetons. Lors du premier tirage, Lili, l'enseignante des deux classes de 6e, a d'abord illustré les conventions d'écritures et la démarche de réduction des expressions à travers un exemple au tableau. Dans cet exemple, elle a utilisé la technique T3A, c'est-à-dire celle qui consiste à écrire chaque étape de la démarche (regroupement des lettres identiques dans la somme des lettres, puis écriture de l'expression $N_a \times a + N_b \times b + N_c \times c$ et enfin écriture de l'expression $N_a a + N_b b + N_c c$). Les élèves ont ensuite adapté cette démarche au tirage des jetons qu'eux-mêmes avaient effectué. Pour ce faire, 29 % des élèves ont utilisé la technique T1A, en écrivant directement l'expression réduite $N_a a + N_b b + N_c c$ après comptage des occurrences des lettres. 64 % ont utilisé la technique T2A, en donnant d'abord l'expression $N_a \times a + N_b \times b + N_c \times c$ puis l'expression réduite. 5 % des élèves utilisent un mélange de ces deux techniques T1A/T2A ; concrètement, ceci est dû au fait qu'après quelques tirages de jetons et quelques écritures d'expressions, ils se sentent plus à l'aise avec la démarche et sont alors en mesure d'écrire l'expression réduite directement. La technique T3A ne sera que très peu utilisée, ou alors juste dans un premier temps par un seul élève sur les deux classes, cet élève adoptant ensuite la technique la plus rapide T1A après quelques expérimentations. La Figure 8 présente la répartition des différents techniques utilisées par les élèves. Il en résulte que la technique la plus largement utilisée par les élèves est la technique T2A, avec une écriture $N_a \times a + N_b \times b + N_c \times c$ intermédiaire, puis l'écriture de l'expression réduite $N_a a + N_b b + N_c c$.

Techniques		
T1A	17	29 %
T1A/T2A	3	5 %
T2A	37	64 %
T2A/T3A	0	0 %
T3A	0	0 %
T1A/T3A	1	2 %
Total	58	100,00 %

Figure 8: Techniques utilisées pour la tâche A dans l'activité des jetons

Erreurs constatées

Certaines des erreurs que nous avions pressenties lors de notre analyse a priori n'ont pas été repérées. L'erreur EiA_1 (soit $E1A_1$ / $E2A_1$ / $E3A_1$ si l'on tient compte de la technique utilisée) où l'élève n'écrirait pas le signe « + » mais conserverait par contre le signe « × » dans l'expression réduite n'a pas été observée. L'erreur EiA_3 (quelle que soit la technique utilisée : $i \in \{1, 2, 3\}$) où l'élève additionnerait tous les nombres d'occurrences des différentes lettres n'a pas été relevée, alors que c'est une erreur fréquente plus tard au collège. L'erreur EiA_4 (quelle que soit la technique utilisée encore une fois : $i \in \{1, 2, 3\}$) où l'élève chercherait à donner une valeur numérique finale au résultat de la réduction n'a pu être trouvée également. Par contre la majorité des erreurs, soit 44 % des erreurs, relèvent du type EiA_2, $i \in \{1, 2, 3\}$: les élèves pensent que si on peut ne pas écrire le signe « × », alors on peut aussi ne pas écrire le signe « + ». La Figure 9 présente ce type d'erreur pour les techniques T1A et T2A.

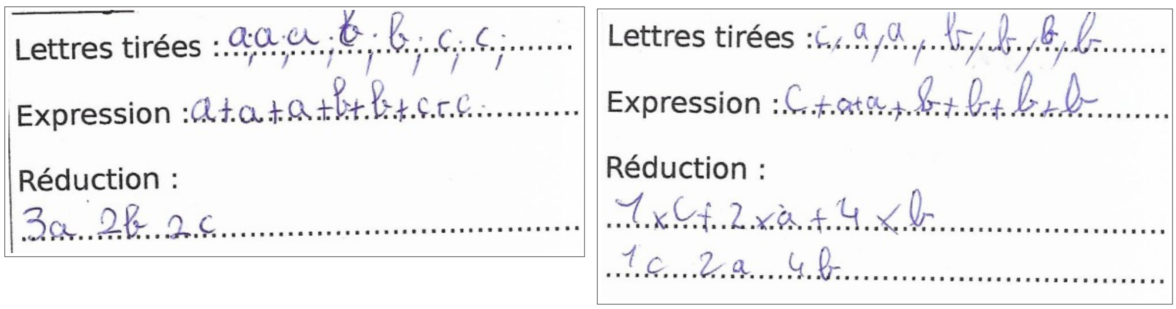


Figure 9: Erreurs $E1A_2$ à gauche et $E2A_2$ à droite

Les erreurs les plus fréquentes sont ensuite des erreurs d'écriture, ce sont 26 % des erreurs (il manque quelquefois l'écriture d'un jeton au départ, ou bien un jeton apparaît lors de l'écriture de la somme des lettres, ou encore une lettre est écrite pour une autre). La Figure 10 présente ce type d'erreurs. On peut noter que lorsqu'une lettre est écrite à la place d'une autre, ceci ne donne pas lieu ensuite à une réduction supplémentaire de l'expression par la suite.

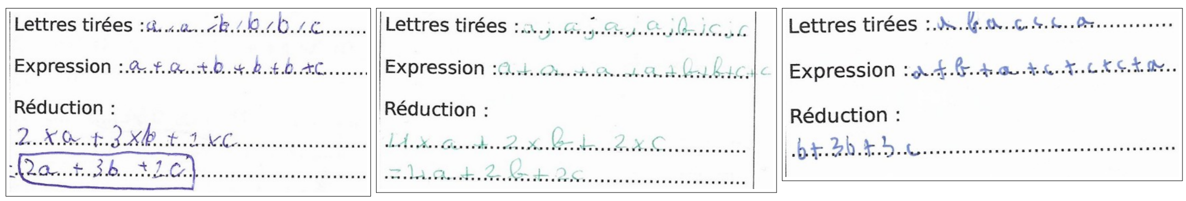


Figure 10: Erreurs $E1A_{\text{écrit}}$ (à droite) et $E2A_{\text{écrit}}$ (à gauche et au milieu)

15 % des erreurs comptabilisées sont des erreurs de comptage des occurrences des lettres, mais ces erreurs sont assez limitées puisqu'il s'agit de 6 erreurs sur 58 élèves ayant produit ensemble 348 réductions. 10 % des erreurs sont liées à une inversion de la lettre et de son nombre d'occurrences, ce type d'erreur sur les conventions d'écriture est donc aussi assez

marginal, deux exemples de ce type sont présentés Figure 11 où de plus ces erreurs sont associées éventuellement à d'autres types d'erreurs.

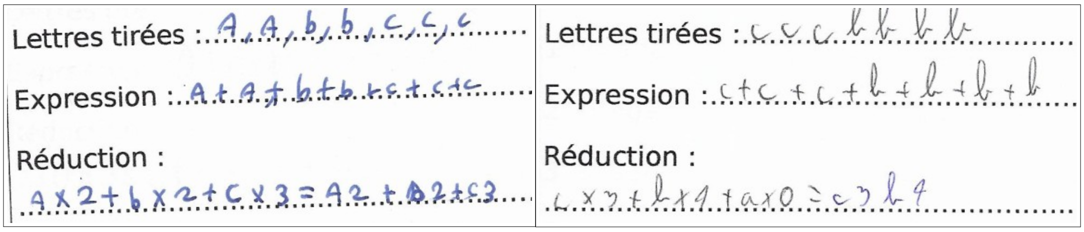


Figure 11: Erreurs EC2A

Les erreurs de recopie sont peu nombreuses (une seule erreur de ce type), mais il est parfois difficile de dissocier ce type d'erreur des erreurs d'écriture $\mathrm{EiA}_{\text{écrit}}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Dans les travaux des élèves, nous n'avons trouvé qu'une seule erreur de réduction $\mathrm{EiA}_{\text{réduc}}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, cette erreur a été produite lors du premier tirage seulement ; on peut constater que dans ce premier calcul de réduction (voir Figure 12), l'élève n'a réduit que lorsque les lettres étaient directement juxtaposées et lors des tirages suivants, il fera en sorte de les regrouper physiquement sur sa table avant d'en écrire la somme, ce qui adresse en amont en quelque sorte ce problème de réduction.

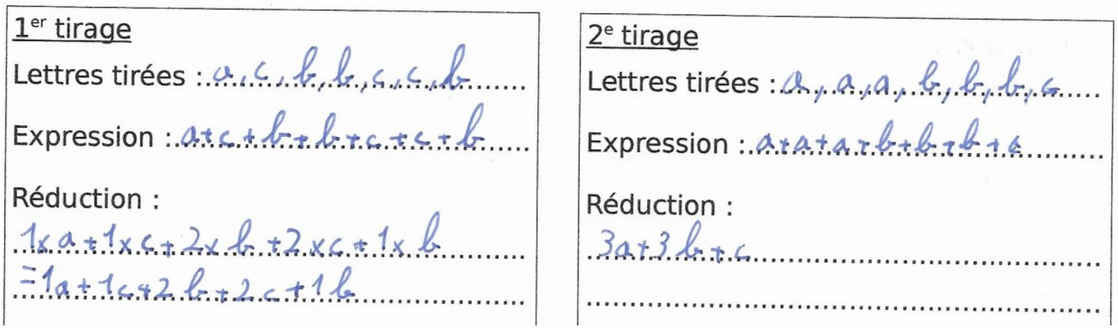
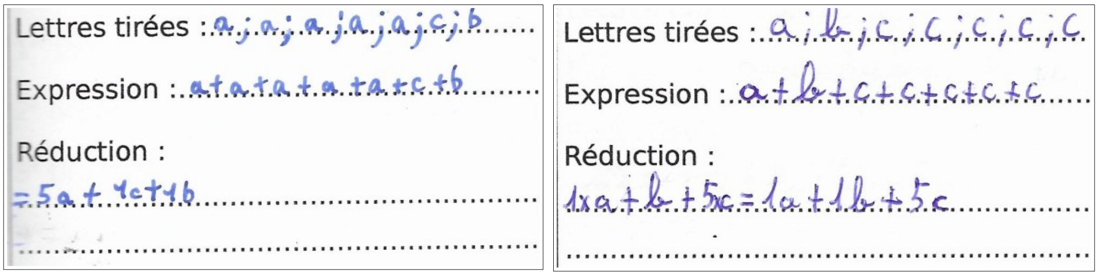


Figure 12: Erreur $\mathrm{E2A}_{\text{réduc}}$ à gauche

Le non-respect des conventions d'écriture

Environ le tiers des expressions produites par les élèves ne respectent pas les conventions d'écriture pour la réduction des expressions, mais les expressions écrites restent mathématiquement correctes et ne sont donc pas considérées comme des erreurs entraînant une expression fausse (le pourcentage de non-respect diffère légèrement dans le document en ANNEXE 3-Tableau récapitulatif des différentes erreurs, difficultés et obstacles dans l'activité des jetons, il est alors de 39,7 % ; ceci est lié au fait que certaines expressions produites peuvent comporter plusieurs types de non-respect de conventions d'écriture à la fois). 58 %

des non-respects des conventions d’écriture sont de type $C1A_1$ ou $C2A_1$, c’est-à-dire qu’ils proviennent de réductions telles que : $1 \times c = 1c = c$, comme dans la Figure 13 ci-dessous :

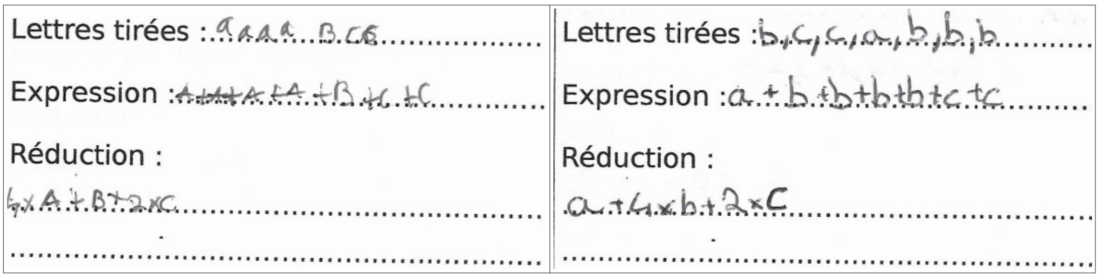


Lettres tirées : a ; a ; a ; a ; a ; c ; b
Expression : a+a+a+a+a+c+b
Réduction :
=5a + 1c+1b

Lettres tirées : a ; b ; c ; c ; c ; c ; c
Expression : a+b+c+c+c+c+c
Réduction :
1xa+b+5c=1a+1b+5c

Figure 13: Non respect des conventions d'écriture $C1A_1$ (gauche) et $C2A_1$ (droite)

24 % du non-respect des conventions d’écriture découle de la confusion des lettres majuscules et minuscules, les élèves apprécient difficilement la nuance entre les deux quand il s’agit des mathématiques ($C1A_{maj}$ / $C2A_{maj}$). Les 18 % des non-respects des conventions d’écriture restants se trouvent dans les expressions où les élèves ont conservé le signe « × » ($C1A_2$ / $C2A_2$), comme présenté dans la Figure 14 ci-dessous (où l’on remarquera également un non-respect des conventions d’écriture CiA_{maj}, $i \in \{1, 2, 3\}$) :



Lettres tirées : a A A A B C C
Expression : A+A+A+A+B+C+C
Réduction :
4xA+B+2xC

Lettres tirées : b, c, c, a, b, b, b
Expression : a+b+b+b+b+c+c
Réduction :
a+4xb+2xC

Figure 14: Non respect des conventions d'écriture CiA_{maj} / $C1A_2$ / $C2A_2$

Les Obstacles

Un certain nombres d’obstacles à la réduction des expressions a pu être répertorié lors de l’analyse a priori. Le premier obstacle serait pour l’élève de ne pas avoir tiré l’une des trois lettres, comme dans la Figure 15.

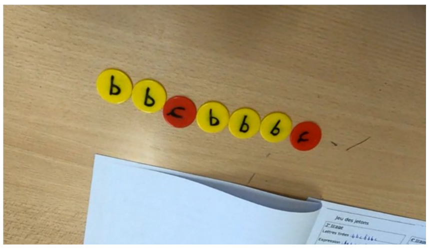


Figure 15: Obstacle OA_1

Le second étant d’avoir un tirage de jetons qui soit strictement identique au tirage précédent (voir le document en ANNEXE 3-Tableau récapitulatif des différentes erreurs, difficultés et obstacles dans l’activité des jetons). Cependant ces obstacles ont été assez peu déterminants dans la réalisation du travail, puisque la situation a pu être régulée par l’enseignante pour les quelques élèves qui considéraient qu’effectivement il y avait « obstacle » au calcul, par exemple en expliquant que si le tirage était strictement identique, les valeurs données par les dés seraient par contre différentes, et qu’il y avait donc bien un nouveau calcul à effectuer.

Conclusion

Ce premier type de tâche concernant la réduction d’expressions littérales a produit 54,63 % d’expressions entièrement correctes, respectant parfaitement les conventions d’écriture et reflétant exactement le tirage effectué. Seules 9,85 % des expressions produites par les élèves se sont révélées fausses, soit celles-ci étaient mathématiquement fausses, soit elles ne correspondaient pas au tirage de jetons effectué. Ici, la plupart des erreurs sont du type EiA_2, $i \in \{1, 2, 3\}$: les élèves pensent que si on peut ne pas écrire le signe « × », alors on peut aussi ne pas écrire le signe « + ». 35,52 % des expressions produites sont des expressions qui sont certes correctes mathématiquement, mais qui ne respectent pas complètement les conventions d’écriture, parmi lesquelles en particulier les réductions de type $1 \times c= 1c = c$ n’ont souvent pas été faites. Ces résultats obtenus se repartissent comme illustré dans la Figure 16.

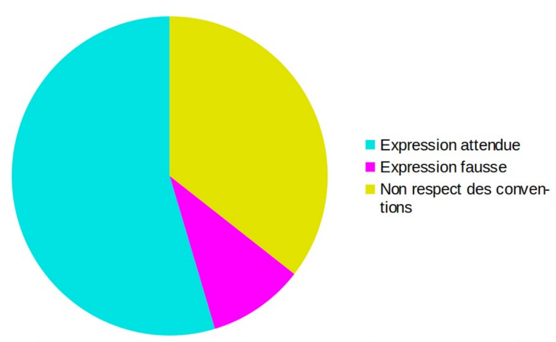


Figure 16: Répartition des expressions produites

6.4.2 Type de tâche B

Techniques

Le type de tâche B consiste à donner des valeurs aux différentes lettres (par le biais du lancer des dés), puis à calculer la valeur de l’expression réduite obtenue, en remplaçant les lettres par leur valeur. Lili, l’enseignante des deux classes de 6e observées, après avoir achevé de donner un exemple de réduction d’expression, propose à la suite au tableau un exemple de calcul d’expression à partir de l’expression réduite après avoir jeté les dés. Elle utilise alors la technique T3B, qui consiste dans un premier temps à ré-écrire le calcul en faisant réapparaître les signes « × » tout en remplaçant chaque lettre par sa valeur, puis à calculer dans un premier temps les produits, et enfin en faisant la somme des produits obtenus pour pouvoir écrire le résultat final. Les calculs faits au tableau sont l’occasion pour l’enseignante de réactiver les connaissances des élèves sur les priorités opératoires (priorité de la multiplication sur l’addition/soustraction) tout en discutant avec les élèves sur le rôle des parenthèses dans un calcul. Il découle que dans le cas étudié, les parenthèses ne sont pas nécessaires. Dans le déroulé de l’activité, les élèves ont conservé ces premières valeurs données à chaque lettre en les consignant dans leur carnet, puis ont adapté la démarche de l’enseignante à leur propre expression réduite pour en calculer la valeur. Dans cette mise en œuvre, la technique majoritairement utilisée par les élèves est celle qui leur a été présentée par l’enseignante : 71 % des élèves ont utilisé la technique T3B. 9 % des élèves ont utilisé la technique T2B (qui consiste à remplacer les lettres par leur valeur en faisant réapparaître les signes « × », puis en donnant directement le résultat) et 12 % d’entre eux ont utilisé une technique qui résulte d’un mélange des deux techniques précitées : T2B/T3B. Les différentes techniques utilisées par les élèves sont présentées dans la Figure 17.

Techniques		
T1B	0	0 %
T1B/T2B	1	2 %
T2B	5	9 %
T2B/T3B	7	12 %
T3B	41	71 %
T1B/T3B	1	2 %
T4B	0	0 %
T5B	0	0 %
T3B/T4B	2	3 %
T1B/T2B/T3B/T5B	1	2 %
Total	58	100,00 %

Figure 17: Techniques utilisées pour la tâche B dans l'activité des jetons

Le choix fait par les élèves d’utiliser la technique T2B ou T2B/T3B peut souvent s’expliquer en observant les expressions réduites produites. Dans certains cas, une lettre se trouve absente, ou bien il n’y a pas plusieurs occurrences de chaque lettre, ce qui induit que les produits s’en trouvent simplifiés. L’expression à calculer une fois les lettres remplacées par leur valeur semble alors assez triviale pour ne pas en faire le détail de calcul. Certaines techniques n’ont pas ou peu été utilisées par les élèves, il s’agit des techniques T1B (où l’élève calculerait mentalement et écrirait directement le résultat de l’expression), T4B (où l’élève effectue séparément le calcul de chaque produit) et T5B (où l’élève remplace par les valeurs dans l’expression non réduite). Elles ont exceptionnellement été utilisées en association avec une autre technique.

Erreurs constatées

Certaines erreurs attendues n’ont pas été remarquées, en particulier, aucun élève n’a produit une erreur de concaténation (Erreur EiB_1, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) au moment de remplacer une lettre par sa valeur dans l’expression réduite, alors que cette erreur est fréquente en classe de 3e. Nous pensons que nous le devons à la proximité immédiate des notions de réduction abordées, le sens de l’expression réduite est au moment du calcul encore très présent à l’esprit des élèves, tout comme l’idée d’un signe « $\times$ » sous entendu. Une seule erreur en lien avec la priorité de la multiplication sur l’addition a pu être trouvée (Erreur EiB_2, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), de même une seule erreur dans l’écriture des expressions faisant intervenir des égalités fausses (Erreur $EiB_{\text{égal}}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) a été produite, et nous n’avons trouvé que trois erreurs de recopie (Erreur EiB_{recop}, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), ce qui est assez remarquable pour des élèves de 6e. Cinq erreurs d’écriture ont été relevées (Erreur $Eib_{\text{écrit}}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), où l’élève substitue le nombre d’occurrences de la lettre par les valeurs données par les dés, ce qui n’empêche pas d’obtenir un calcul correct par la suite (voir Figure 18) :

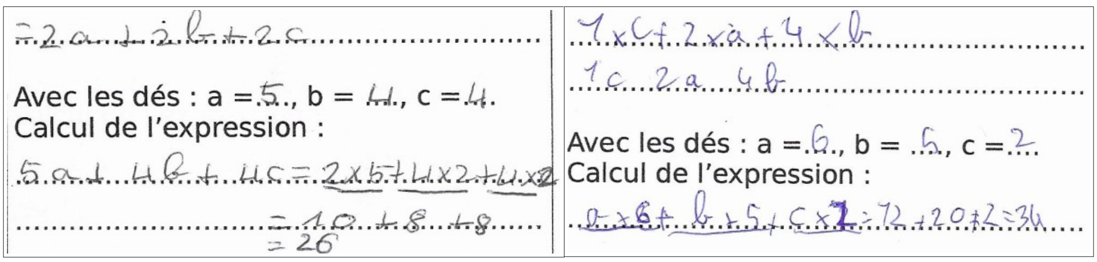


Figure 18: Erreur d'écriture $EiB_{\text{écrit}}$

En dehors de ces erreurs marginales, la grande partie des erreurs observées sont des erreurs de calcul (Erreur EiB_{calc},$i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), elles représentent une proportion de 44 % des erreurs. Nous pouvons souligner que ces erreurs de calcul sont indépendantes de la technique utilisée. Puis 37 % des erreurs adviennent lorsque les élèves remplacent les lettres par leur valeur (Erreur EiB_3, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), les élèves viennent à remplacer par des valeurs erronées. Très souvent, ces erreurs sont dues au fait que l’expression réduite n’est pas ordonnée dans l’ordre alphabétique, ce qui résulte en une confusion des valeurs (voir Figure 19) :

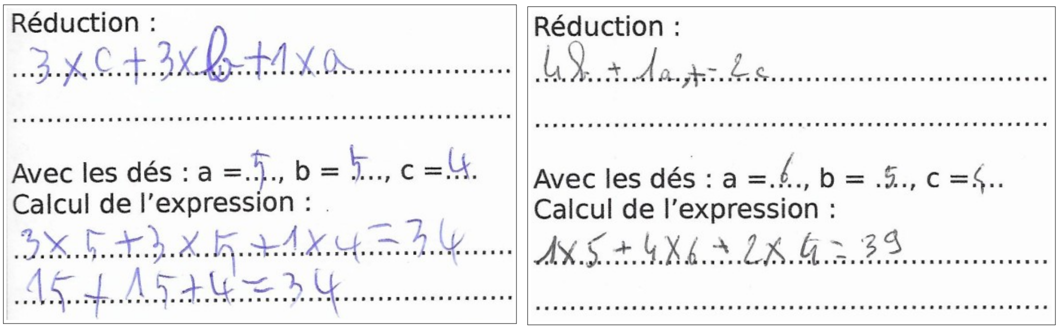


Figure 19: Confusion des valeurs - Erreur EiB_3

Les obstacles et les difficultés

Des difficultés dans les calculs ont pu être aperçues lors de huit instanciations : l'élève s'engage dans la démarche, mais le calcul n'aboutit pas dans quatre cas seulement (le calcul n'est tout simplement pas terminé). Les situations que nous avions pu identifier comme faisant obstacle pour les élèves au calcul de l'expression comme lorsqu'il manque une lettre dans le tirage des jetons (obstacle OiB_1, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), ou lorsque le jet de dé indique des valeurs qui se répètent (obstacle OiB_2, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) n'ont pas été déterminantes dans le déroulé du calcul, la situation étant régulée de nouveau par l'enseignante, ceci en particulier au moment où les dés jetés indiquaient tous les trois la même valeur, soit la valeur 4 (voirFigure 20) :

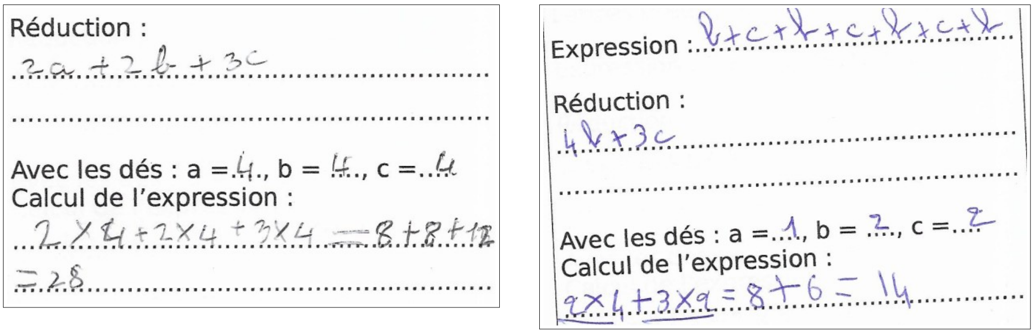


Figure 20: Obstacles OiB_2 à gauche et OiB_1 à droite

Par contre, les obstacles de type OiB_3, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui surgissent lorsque le calcul de l'expression réduite est erroné ont été plus difficiles à surmonter. Ces obstacles sont principalement le résultat des erreurs de type EiA_2 et $EiA_{écrit}$ survenus lors de l'exécution de la tâche A précédente. Cependant, nous avons pu remarquer que sur 21 obstacles de type OiB_3, 12 ont pu être surpassés, c'est-à-dire plus de la moitié. Dans cette situation, l'élève effectue une auto-remédiation afin de rendre le calcul de l'expression possible, ou de manière à avoir un calcul qui corresponde aux jetons tirés, voir Figure 21 :

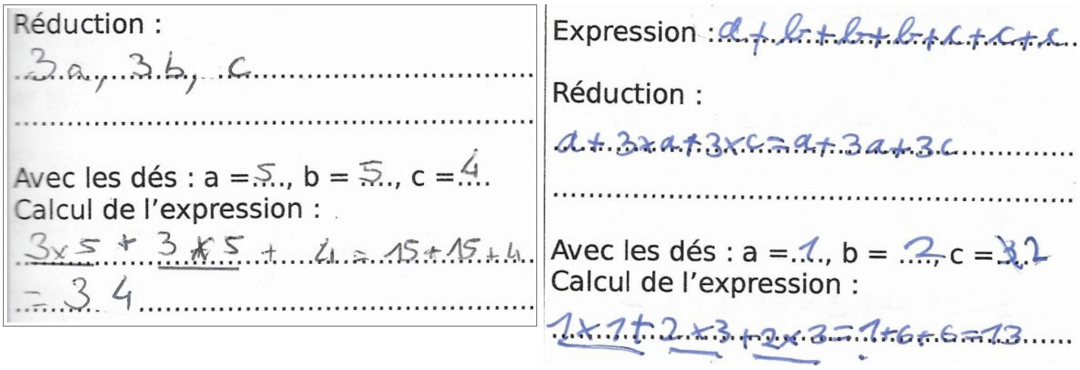


Figure 21: Auto-remédiation pour l'obstacle OiB_3

Conclusion

Le deuxième type de tâche, consistant à calculer la valeur de l'expression réduite pour des valeurs données par les dés a généré 82,18 % de calculs corrects, et seulement 13,22 % de calculs erronés. 1,15 % des calculs n'ont pas abouti alors que l'élève s'était engagé dans la démarche de calcul, et 3,45 % des calculs n'ont pas été faits (pour cause d'absence de l'élève). La grande majorité des erreurs constatées sont des erreurs de calcul ou des erreurs dans le remplacement des lettres par leur valeur lorsque l'expression n'est pas ordonnée de manière alphabétique. Lorsque l'expression réduite produite précédemment n'était pas correcte, nous avons pu observer une auto-remédiation de certains élèves lors de l'instanciation. Les résultats de cette partie du travail des élèves se répartissent comme illustré dans la Figure 22.

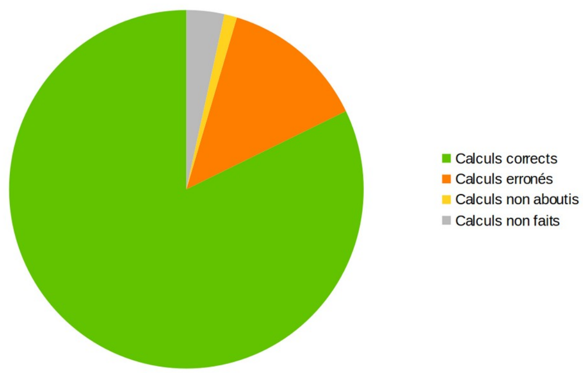


Figure 22: Répartition des calculs produits par les élèves

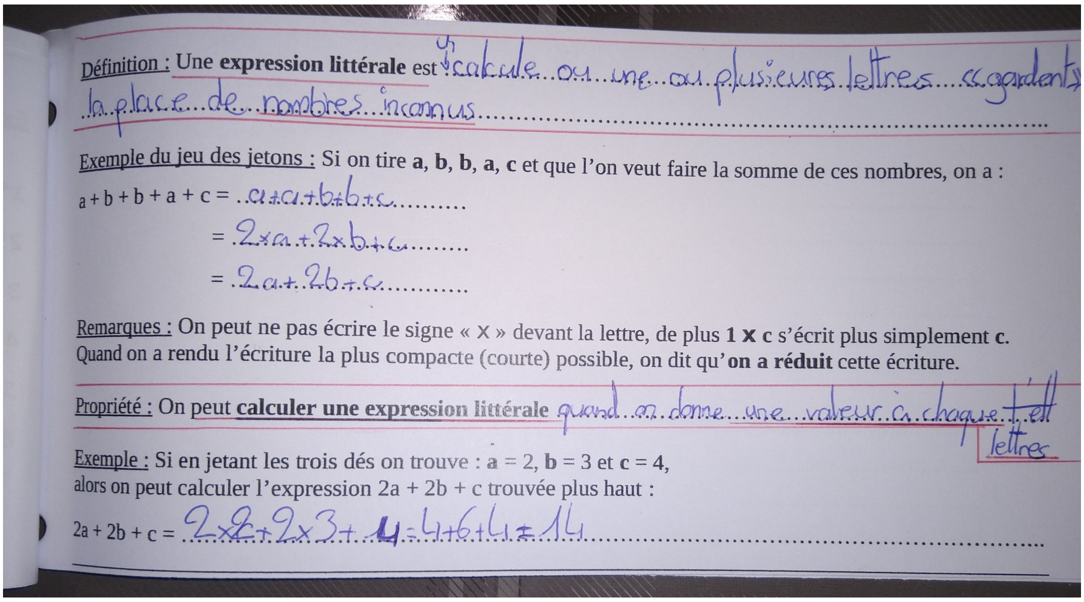
6.4.3 Conclusion sur la mise en œuvre de l'activité des jetons

L'activité des jetons a permis d'aborder le calcul littéral en effectuant des réductions et des instanciations d'expressions, tout en étant appréciée des élèves. Elle a permis d'incorporer manipulation algébrique et substitution de valeurs numériques. Lors de la substitution des lettres par des valeurs numériques, les élèves ont pu rencontrer des situations où parfois une valeur peut être assignée à deux, voire trois lettres différentes (comme dans la Figure 20), et nous espérons que ceci sera en mesure d'éloigner cette idée préconçue des élèves qui consiste à croire que deux lettres différentes ont forcément deux valeurs différentes (voir 3.1). De même, à chaque séance, un certain nombre d'élèves ont produit deux fois consécutives le même tirage de jetons, mais l'instanciation par le biais des dés étant à chaque fois différente, le résultat obtenu le sera tout autant, aussi nous espérons que cette expérience sera de nature à mettre en lumière qu'une même expression peut avoir plusieurs instanciations.

Si l'activité a remporté l'adhésion des élèves, nous pouvons également considérer qu'elle a été bien réussie par ces deux classes puisque seulement 9,85 % des expressions réduites produites par les élèves étaient mathématiquement fausses, et que 82,18 % des calculs lors de l'instanciation étaient corrects. Nous n'avons relevé aucune erreur de concaténation, et si l'expression réduite écrite par certains a pu être fausse, ils ont été capables dans certains cas de la modifier ensuite pour effectuer l'instanciation. Nous pouvons alors apporter une réponse partielle à notre deuxième question de recherche QR2 :

> QR2 : Est-il possible de favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique grâce à la conception d'une ingénierie didactique ?

D'après les considérations faites précédemment dans cette conclusion, nous pensons que les élèves ont pu mettre du sens dans le déroulement des opérations. Ces conventions d'écriture pour la réduction des expressions sont encore incertaines à l'issue de l'activité (surtout en ce qui concerne l'écriture $1 \times c = 1c = c$), avec 35,52 % des expressions produites qui sont mathématiquement correctes sans toutefois respecter les conventions, mais la petite partie de leçon à trous viendra ensuite préciser ces dernières (voir Figure 23), puis les rituels qui suivront avec le « carnet de sens quotient » permettront aux élèves de mieux se les approprier.


Définition : Une **expression littérale** est un calcule ou une ou plusieures lettres gardants la place de nombres inconnus

Exemple du jeu des jetons : Si on tire **a**, **b**, **b**, **a**, **c** et que l'on veut faire la somme de ces nombres, on a :

a + b + b + a + c = a+a+b+b+c

= 2×a+2×b+c

= 2a+2b+c

Remarques : On peut ne pas écrire le signe « x » devant la lettre, de plus **1 x c** s'écrit plus simplement **c**.
Quand on a rendu l'écriture la plus compacte (courte) possible, on dit qu'**on a réduit** cette écriture.

Propriété : On peut **calculer une expression littérale** quand on donne une valeur à chaque lettres

Exemple : Si en jetant les trois dés on trouve : **a** = 2, **b** = 3 et **c** = 4,
alors on peut calculer l'expression 2a + 2b + c trouvée plus haut :

2a + 2b + c = 2×2+2×3+4=4+6+4=14

Figure 23: Trace de cours dans le carnet pour le calcul littéral

6.5 Les impacts sur la suite de la progression

La suite immédiate de la progression aborde le périmètre puis l'aire de figures. La découverte (ou re-découverte) de certaines formules est alors l'occasion pour l'enseignante de remobiliser ce qui a pu être fait avec la manipulation des lettres dans un nouveau contexte. Par exemple, la formule du calcul du périmètre d'un carré de côté **c**, permet d'écrire dans un premier temps la somme des longueurs des côtés : $P = c + c + c + c$, ce qui n'est pas sans rappeler les manipulations de l'activité des jetons. L'expression du périmètre du carré sera alors réduite, puis écrite en utilisant les conventions d'écriture : $P = c + c + c + c = 4 \times c = 4c$. Un exemple de calcul où une valeur numérique est donnée à la longueur du côté **c** permet ensuite de donner une instanciation de cette formule (voir Figure 24). Dans les séances d'exercices correspondantes, de nombreuses autres instanciations de cette formule pourront être produites.

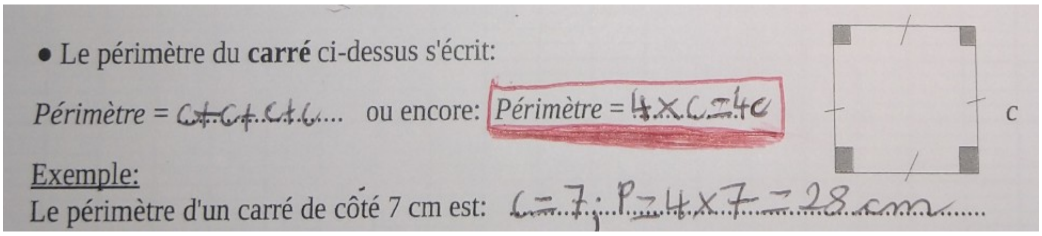


Figure 24: Formule pour le calcul du périmètre du carré et exemple

De même, les formules permettant de calculer le périmètre du rectangle pourront être envisagées comme une réduction des occurrences de chaque lettre, ce qui donne lieu à deux écritures différentes mais équivalentes suivant la manière dont on choisit de réduire les occurrences des lettres. Dans un premier temps, en faisant le tour de la figure pour faire la somme des longueurs des côtés, l'expression écrite est $P = \ell + L + \ell + L$. Ensuite, pour regrouper les occurrences de chaque lettre, la formule devient ainsi :$P = \ell + L + \ell + L = \ell + \ell + L + L$, ce qui permet d'obtenir $P = 2 \times \ell + 2 \times L$, soit de manière réduite $P = 2\ell + 2L$, ce que l'enseignante justifie en disant que pour calculer la longueur du contour du rectangle, on additionne deux fois la largeur et deux fois la longueur. Dans un deuxième temps, on peut aussi choisir de compter les occurrences de $\ell + L$ tout en les mettant en évidence dans la formule avec des parenthèses inutiles : $P = (\ell + L) + (\ell + L)$. Puisqu'il y a deux occurrences de $\ell + L$ la formule du périmètre du rectangle devient $P = 2\times(\ell + L)$, soit de manière réduite $P = 2(\ell + L)$, ce que l'enseignante verbalise en disant que la longueur du contour est égale à deux fois la somme de la largeur et de la longueur. Par contre, dans la partie leçon associée à ces considérations, l'enseignante choisira de faire écrire aux élèves des formules faisant apparaître les signes « × » (voir Figure 25).

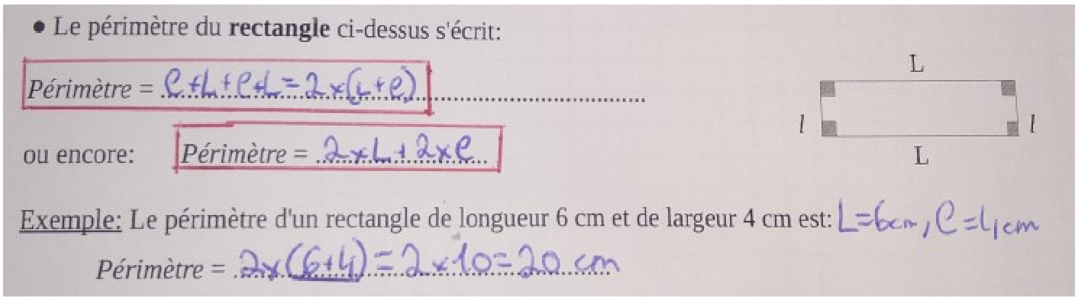


Figure 25: Formules pour le calcul du périmètre du rectangle et exemple

L'enseignante fait ce choix par crainte que les élèves ne retiennent pas correctement les formules, cependant ce choix peut aussi induire que par la suite, les élèves peuvent intégrer le fait qu'il est correct d'écrire les signes « × » dans une expression réduite. Si les deux formules précédentes ne posent en général pas de problème aux élèves de 6e quant à leur utilisation étant donné qu'elles ont déjà été manipulées en primaire, il n'en va pas de même du calcul de la longueur d'un cercle, ni du calcul d'aires. Lors de l'introduction des autres formules, l'enseignante choisira également de consigner ces formules dans la partie leçon en conservant les signes « × », même si elle a pu présenter aux élèves la manière réduite de les écrire (voir Figure 26).

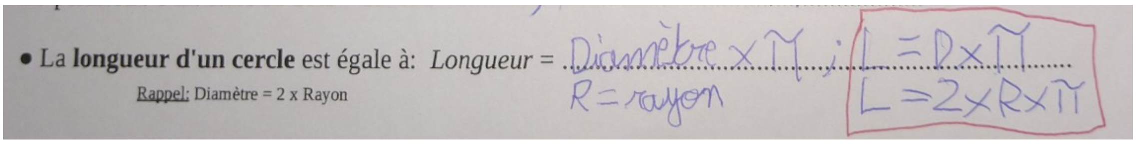


Figure 26: Formules pour le calcul de la longueur d'un cercle

D'après l'enseignante, les formules les plus difficiles dans leur appropriation par des élèves de 6e sont celles qui sont en rapport avec la longueur et l'aire du cercle. Remplacer π par sa valeur approchée 3,14 tout comme conserver π pour exprimer la valeur exacte de la longueur du cercle sont des étapes délicates, les élèves cherchant habituellement à donner le résultat sous forme d'une valeur numérique finale. Selon l'enseignante, après les travaux effectués avec l'activité des jetons, la résistance face à l'écriture de la valeur exacte telle que présentée dans la Figure 27 a été moindre que d'ordinaire. Bien entendu, ce point de vue reste subjectif du point de vue de l'enseignante puisque nous n'apportons pas ici d'éléments de comparaison tangibles.

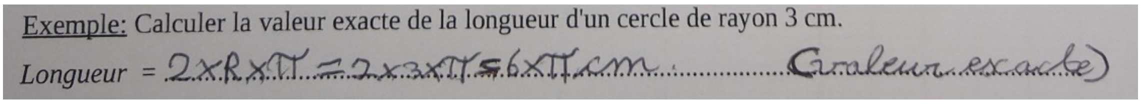


Figure 27: Calcul de la valeur exacte de la longueur de cercle

S’il peut être improbable de consulter les cahiers d’exercices des élèves pour y relever les difficultés rencontrées (la plupart des élèves n’aiment pas corriger en vert ou en rouge leurs exercices, au lieu de cela, ils utilisent de manière intensive le blanco, ce qui donne souvent l’apparence que tout est parfait dans leurs résultats), nous avons choisi de nous attarder sur des copies d’interrogations écrites mieux à même de refléter les difficultés au moment de remplacer une lettre par une valeur, en examinant tout particulièrement les copies des élèves repérés par l’enseignante comme étant à besoins face aux apprentissages, chacun pour des raisons différentes. Nous présentons dans la Figure 28 quelques extraits de copies de cette interrogation écrite, où les élèves sont amenés à calculer l’aire d’un disque de rayon 7 cm.

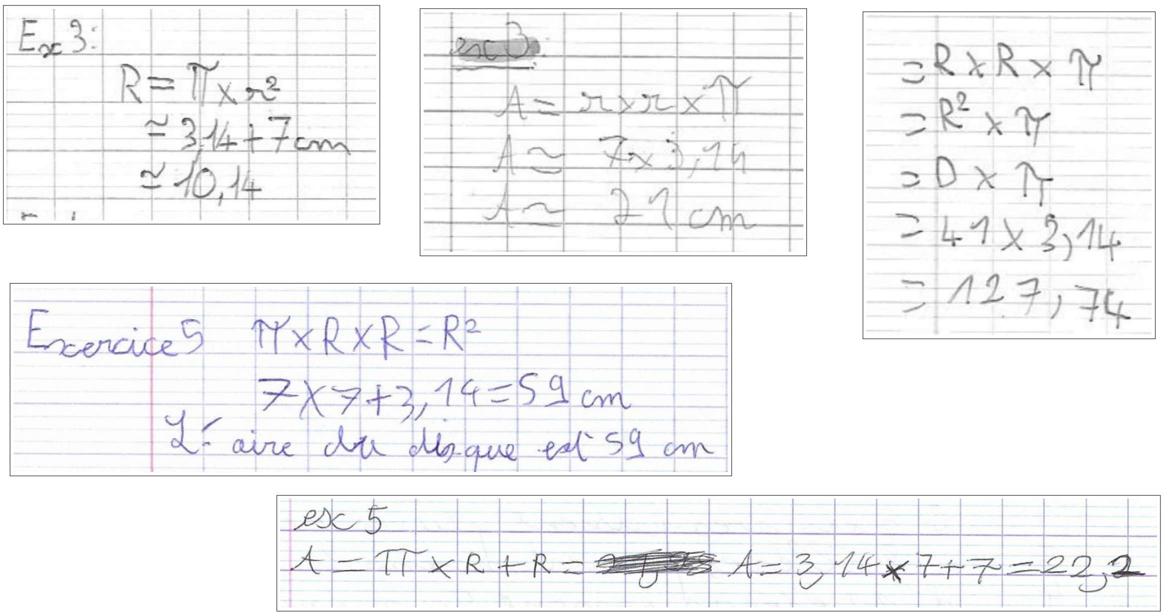


Figure 28: Calcul de l'aire d'un disque lors d'une interrogation écrite

Dans les extraits présentés, le remplacement des lettres par leur valeur ou le remplacement de π par 3,14 ne semble pas avoir été un obstacle au calcul, alors que d’après l’expérience de l’enseignante le remplacement de π par la valeur 3,14 est ce qui pose habituellement le plus de problème aux élèves. Sur ce point, nous émettons l’hypothèse que les élèves ont pu considérer π comme une variable et non comme une constante, et que la mise en œuvre de l’écriture du calcul en a été facilitée. Ce qui retient davantage notre attention dans les copies consultées, c’est la confusion entre les signes « + » et « × » (que ce soit parce que la formule a été mal mémorisée ou mal recopiée), ce qui génère en même temps une confusion entre R² et

D : selon l'extrait en haut à droite de la Figure 28, il semble que pour l'élève $R \times R = R^2 = 2 \times R = D$.

D'après l'enseignante, l'impact du travail fait avec les élèves au cours de l'activité des jetons a été significatif dans le déroulé de la suite de la progression qui aborde le calcul d'aire et de périmètre. Selon elle, les élèves ont eu moins de difficultés qu'habituellement pour remplacer les lettres des formules par leur valeur. Tout particulièrement il a été plus facile pour les élèves de remplacer π par la valeur 3,14 dans les calculs. De plus, la nécessité d'exprimer le résultat en fonction de π afin de pouvoir donner une valeur exacte de la longueur du cercle ou de l'aire d'un disque a été plus facile d'accès pour les élèves. À travers l'étude des interrogations écrites fournies, il apparaît que les difficultés pour remplacer une lettre par une valeur soient tout à fait marginales. Ces constatations restent subjectives cependant puisque nous n'avons pas mené d'étude comparative avec d'autres classes n'ayant pas participé à l'activité des jetons. Cependant, nous pouvons apporter des éléments de réponse supplémentaires à notre première question de recherche QR1.

QR1 : Un travail d'introduction à l'algèbre permet-il de faciliter la compréhension de la définition du sens quotient de la fraction par les élèves, notamment quant à l'utilisation des lettres ?

D'après l'enseignante et d'après les copies d'élèves consultées, le travail d'introduction à l'algèbre mis en œuvre auparavant a facilité de manière significative le déroulement et la compréhension du chapitre de calcul d'aire et de périmètre, en permettant un réinvestissement dans l'écriture et la simplification des formules. Les élèves étant plus familiers avec l'usage des lettres, la découverte et l'usage du nombre π a été plus facile d'accès en particulier pour les élèves dits « à besoins », ceci leur a permis d'exprimer, malgré leurs difficultés, une certaine agilité quant à l'usage de ce nombre particulier au moment de le remplacer par sa valeur approchée.

6.6 Conclusion

L'activité des jetons a remporté l'adhésion des élèves et elle leur a permis de se familiariser avec l'utilisation des lettres dans les expressions mathématiques. Les situations didactiques mises en œuvre ont permis l'émergence de certains questionnements, les élèves ayant pu faire un lien entre ce qu'ils ont pu observer écrit sur le tableau lorsqu'ils arrivaient en cours alors que les 3e quittaient la salle : ils ont su faire le lien avec le calcul littéral « avec des x », et ils ont compris que la lettre choisie lors de la désignation importait peu. Les synopsis détaillés des séances ont permis d'isoler ces épisodes emblématiques et d'en produire les transcriptions qui sont présentées dans les Tableau 3 et Tableau 4.

Vendredi 8 décembre 2023 — Séance 1 — Classe 6B — (9h15-10h10) — Introduction au calcul littéral		
Temps (min)	**Tour de parole**	**Contenu**
35.55	Lili	Oui L [élève qui lève la main]
	L	Mais la lettre a… on aurait pu la mettre sur une autre couleur, ou mettre une autre lettre… et les x dans tout ça ?
36.25	Lili	Tu vois, ta lettre a… on l'appelle a, on l'appelle b, mais on aurait pu aussi choisir de l'appeler autrement tu vois. J'aurais pu vous dire, bah finalement, le jeton jaune c'est x et puis écrire x sur tous mes jetons jaunes. Et à ce moment-là on aurait associé le dé jaune avec le x et puis on aurait fait pareil. Donc le nom de la lettre en fait il importe peu. C'est une très bonne question que tu poses, là, oui.

Tableau 3: Extrait n°1 de transcription

Lundi 11 décembre 2023 — Séance 1 — Classe 6A Groupe 1 — (14h45-15h40) — (Introduction au calcul littéral)		
Temps (min)	**Tour de parole**	**Contenu**
8.17	Lili	Moi j'ai 4 a… plus 2b… plus c [en écrivant au tableau] et maintenant je remplace par les valeurs. Donc j'ai dit a, ça prend quelle valeur ? Oui. [élève qui lève la main]
	E	C'est un peu comme les x
	Lili	C'est exactement ça, c'est exactement ça sauf que pour vous j'ai pas voulu les appeler x, y, etc mais si au départ j'étais partie en écrivant sur mes jetons x, y, et z… on a exactement ça
	M	La lettre… quand euh bah quand dans les calculs x… la lettre… est ce que x c'est… m'enfin est ce que x s'appelle par exemple une autre lettre. Est-ce que c'est pas la lettre qui change pour x et… là c'est pareil, c'est un nombre inconnu

	Lili	Bah tu vois, regarde sur ton petit carnet, là, j'ai mis euh… là t'as vu y'a des lettres là dans un fauteuil, et ils sont tous en train de dire « on garde chacun la place de notre nombre inconnu » ça veut dire qu'en fait moi je les ai appelées a b c, nous on écrira qu'en petites lettres, vous avez vu faudra rester sur des petites lettres pas mettre des grandes lettres. Nous on a écrit a b c mais en fait j'aurais pu comme je disais tout à l'heure à E. dès le départ me dire ben non je veux calculer avec x y z, et au lieu de mettre des a b c sur mes jetons j'aurais écrit x y z, c'est juste…
	M	En fait ça change rien du tout
	Lili	… c'est juste le nom qui changerait
	L	Non mais psychologiquement à mon avis c'est plus simple pour les élèves de dire c'est a b c plutôt que x y z
9.50	Lili	Oui, voilà, c'est ce que je me suis dit aussi. Donc j'ai pas fait de x y z parce que x déjà c'est difficile à écrire des fois pour certains...

Tableau 4: Extrait n°2 de transcription

Dans les parties 6.4.1 et 6.4.2, nous avons pu montrer que seulement 9,85 % des expressions réduites produites par les élèves étaient fausses, et que 82,18 % des instanciations faites des expressions réduites étaient correctes. Dans la partie 6.5, nous avons pu remarquer que le calcul de périmètre et d'aire en avait été facilité, et que les élèves éprouvaient moins de difficultés à remplacer π par sa valeur, tout comme à conserver ce même nombre π pour donner une valeur exacte, ce qui semble témoigner d'une appropriation des élèves de ce savoir qu'ils sont alors capables de mobiliser dans un contexte différent.

Ces considérations nous fournissent des éléments pour répondre de manière partielle à notre deuxième question de recherche QR2, rappelée ci-dessous.

QR2 : Est-il possible de favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique grâce à la conception d'une ingénierie didactique ?

L'ingénierie didactique développée se décline à travers l'activité d'introduction à l'algèbre appelée activité des jetons, les savoirs qui y sont mis en œuvre trouvent ensuite une application concrète dans le chapitre sur les périmètres et les aires, alors que les élèves poursuivent en parallèle leur entraînement (chacun à leur rythme) de réductions et d'instanciations d'expressions algébriques lors de rituels avec le « carnet de calcul littéral ».

Aux observations faites plus haut concernant le taux d'expressions réduites correctes et le taux d'instanciations réussies faites par les élèves dans l'activité d'introduction, puis la capacité des élèves à remobiliser ces savoirs et techniques dans le contexte du calcul de périmètre et d'aire, l'examen des rituels du carnet de calcul littéral vient corroborer notre analyse. Les élèves sont nombreux à avoir terminé ce carnet avec succès, et Lili (leur enseignante) a pu nous rapporter qu'ils avaient alors réclamé des pages supplémentaires à ce carnet. Aussi, nous pouvons avancer que la conception de cette ingénierie didactique semble avoir favorisé l'entrée des élèves dans la pensée algébrique.

L'activité des jetons ayant permis aux élèves de se familiariser avec l'utilisation des lettres, il en résulte que le contrat didactique futur (lorsque les élèves aborderont le sens quotient de la fraction) s'en trouve modifié, l'usage des lettres faisant à présent partie du *déjà-là* des élèves. Nous projetons que la résistance du milieu lors de l'introduction de la définition du sens quotient de la fraction tel que prescrite dans les programmes officiels n'entraînera plus une rupture du contrat didactique comme documentée au travers le questionnaire enseignant de notre travail d'étude et de recherche de l'année dernière (TER).

7 VERS UNE NOUVELLE TRACE DE COURS POUR INTRODUIRE LE SENS QUOTIENT DE LA FRACTION

7.1 La définition préconisée de cet objet de savoir

7.1.1 La définition du sens quotient dans les programmes officiels

Dans notre précédent travail d'étude et de recherche (TER), notre étude de transposition examinait la progression dans les documents officiels afin de distinguer à quel moment les différents sens pris par la fraction étaient abordés. Nous avons pu y mettre en évidence que les différentes interprétations de la fraction étaient prescrites avec une grande progressivité dans les apprentissages dès le CM1, mais que la fraction « quotient » ne transparaît que de manière intuitive au primaire avec l'écriture décimale de fractions simples, en lien avec la division par 10 ou 100. Le sens « quotient » de la fraction est réellement défini et travaillé à la fin du cycle 3, en 6e.

Dans la documentation officielle du Ministère de l'Éducation Nationale, le Programme du cycle 3 publié au B.O. n°31 du 30 juillet 2020 décrit les attendus de fin de cycle 3, et ceci pour toutes les disciplines. Dans le chapitre relevant des mathématiques, la partie « Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux » décompose ces attendus en trois sections : nombres entiers, fractions, nombres décimaux. Les attendus de fin de cycle au niveau des fractions y sont décrits, mais la partie qui nous intéresse en lien avec le sens quotient de la fraction n'est manifeste qu'à travers une seule phrase : « Utiliser des fractions pour exprimer un quotient. » (2020 a, p.92). L'analyse des ressources d'accompagnement du programme de mathématiques permet de préciser cette phrase. La mise en œuvre de progressions pour atteindre ces attendus de fin de cycle est détaillée dans les repères annuels de progression pour le cycle 3 en mathématiques du Ministère de l'Éducation Nationale. La phrase précédemment relevée est alors précisée dans ce dernier document dans la partie « Nombres et calculs » sous le thème « fractions » : « En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b) » sans détails supplémentaires (2020 b, p.2). L'annexe 12 des documents officiels d'accompagnement de 2016 expose les attendus de fin d'année de 6e. Sous « Ce que sait faire l'élève », nous trouvons : « Il sait utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Il comprend que $\frac{a}{b} \times b = a$ » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2016). Plus loin dans ce document, des exemples de réussite sont présentés (voir Figure 29).

- Il verbalise que sept fois deux septièmes c'est deux, que le septième de deux, c'est deux septièmes et que deux fois un septième c'est deux septièmes.
- Il calcule : $\frac{2}{7} \times 7$; $\frac{31}{51} \times 51$.
- Complète les égalités suivantes :
  4 × … = 8 ; 4 × … = 10 ; 4 × … = 11.
- Il exprime la largeur exacte d'un rectangle de longueur 7 cm et d'aire 23 cm². Il encadre la mesure trouvée par deux nombres entiers consécutifs de centimètres.

Figure 29: Exemples de réussite

Le document d'accompagnement traitant des fractions et des nombres décimaux au cycle 3 se veut plus précis, et propose d'aborder la définition du sens quotient par le biais de multiplications à trous, où la recherche de la solution aboutit à la recherche du résultat d'une division. Lorsque la solution de la multiplication à trou n'est pas un nombre décimal, et que seule une valeur approchée de la solution peut être donnée en divisant, le quotient cherché est alors noté sous forme de fraction puisque c'est la seule valeur exacte qui convienne, comme indiqué dans la Figure 30 ci-dessous :

La recherche du nombre qui, multiplié par 5, donne 13 unités (autrement dit la solution de la multiplication à trou 5 × … = 13) aboutit à la recherche du résultat de la division 13 ÷ 5. En calcul en ligne, l'élève a appris que « 13 divisé par 5 », c'est « 10 divisé par 5 plus 3 divisé par 5 », donc « 2 unités + 3 divisé par 5 ». « 3 divisé par 5 », c'est aussi « 30 dixièmes divisé par 5 », c'est-à-dire « 6 dixièmes ». On obtient ainsi que « 13 divisé par 5 est égal à 2 unités et 6 dixièmes, c'est-à-dire 2,6 ». Le nombre qui, multiplié par 5, donne 13 s'appelle le quotient de 13 par 5, et ce quotient est 2,6.

[...]

Au cycle 4, on privilégiera la division et la conception de la fraction en tant que quotient.

La recherche du nombre qui, multiplié par 3, donne 7 (autrement dit la solution de la multiplication à trou 3 × ... = 7) aboutit au fait qu'aucun nombre décimal ne peut convenir : on peut seulement approcher la solution en divisant 7 par 3.

- $\frac{7}{3}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 3 pour obtenir 7, ce n'est pas un nombre décimal.
- $\frac{7}{3}$ est le quotient de 7 par 3 : il n'est pas conçu ici comme « sept tiers de l'unité », mais comme « le tiers de sept ».

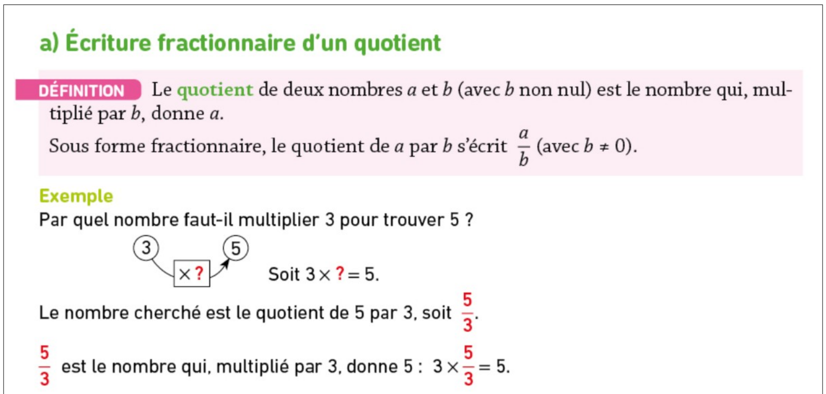
Figure 30: Document d'accompagnement: La fraction pour exprimer un quotient

Sur le site officiel du ministère, une fiche d'activités produite le 4 décembre 2015 par l'« Atelier Fraction — séminaire cycle 3 » est disponible au téléchargement, cette fiche d'activités peut être consultée en ANNEXE 5-Fiche d'activités : les fractions au cycle 3, elle propose certaines activités pour aborder le sens quotient de la fraction et elle se termine par la question suivante : « quel est le résultat exact de la division 8:3 ? » ; le déroulé des activités devrait permettre aux élèves d'exprimer ce quotient sous forme de fraction.

Pour conclure sur cette partie, d'après la documentation officielle, la définition du sens quotient pris par la fraction intervient en fin de cycle 3, en 6e, et à la période 3, ce qui correspond au milieu du deuxième trimestre. Cette définition est rattachée au thème des fractions et non au thème de la division, et elle s'énonce comme suit : « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b) ». Nous rappelons ici qu'à ce stade, la progression dans les programmes officiels ne mentionne pas d'introduction à l'algèbre ou au calcul littéral, c'est en début de cycle 4, en 5e, que cette introduction sera faite comme nous l'avons déjà évoqué dans la partie 2.1 de ce mémoire.

7.1.2 La définition du sens quotient de la fraction faite dans les manuels

Dans notre précédent travail d'étude et de recherche (TER), nous avions mené une analyse praxéologique de trois manuels de 6e (parmi les plus largement utilisés par les enseignants) concernant le sens « quotient » pris par la fraction, analysant les activités d'introduction à ce savoir, ensuite en présentant la définition choisie par chacun d'eux puis en analysant l'activité de l'élève au niveau des exercices. Les trois manuels que nous avions choisis sont les suivants : **Myriade 6ème** (Boullis, et al., 2021), **Transmath 6ème** (Malaval, et al., 2022) et **Mission Indigo 6ème** (Barnet, et al., 2021). Nous avions statué sur ce choix étant donné que ce sont des manuels récents largement utilisés par les enseignants, en particulier par les enseignants que nous avions interrogés par le biais de notre questionnaire. De plus, chacun d'entre eux offre une variation intérressante sur la manière d'aborder le sens quotient de la fraction dans l'activité d'introduction correspondante. Dans ces trois manuels (tout comme dans tous les autres que nous avons pu consulter), le sens « quotient » pris par la fraction se trouve situé à chaque fois dans le chapitre sur les fractions. La définition énoncée dans la partie leçon du manuel Myriade 6ème (Boullis, et al., 2021) est la suivante :


a) Écriture fractionnaire d'un quotient

DÉFINITION Le quotient de deux nombres a et b (avec b non nul) est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
Sous forme fractionnaire, le quotient de a par b s'écrit $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$).

Exemple
Par quel nombre faut-il multiplier 3 pour trouver 5 ?

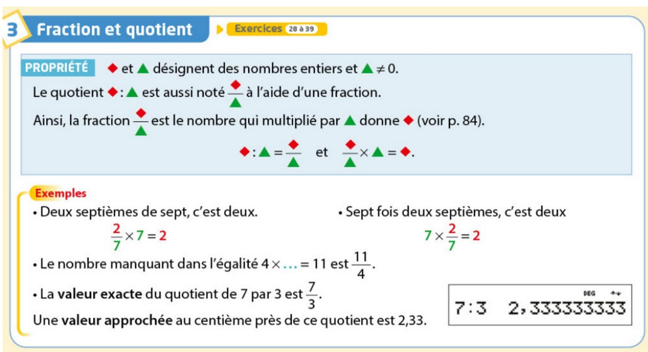
$3 \xrightarrow{\times ?} 5$ Soit $3 \times ? = 5$.

Le nombre cherché est le quotient de 5 par 3, soit $\frac{5}{3}$.

$\frac{5}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 5 : $3 \times \frac{5}{3} = 5$.

Figure 31: p.101 Myriade 6ème (Boullis, et al., 2021)

Cette définition est conforme aux prescriptions officielles, on peut cependant remarquer que le choix a été fait de ne pas y faire apparaître le symbole de la division avec $a \div b = \frac{a}{b}$. L'exemple qui illustre le propos présente une multiplication à trou comme suggéré dans les documents d'accompagnement, où la solution qui convient ne peut s'écrire de manière exacte que sous la forme d'une fraction. Cet exemple ne fait pas de référence à la différence entre la valeur décimale exacte du quotient et la valeur décimale approchée, le quotient de 5 par 3 n'étant pas calculé. La définition choisie par le manuel Transmath 6ème (Malaval, et al., 2022) est celle-ci :


3 Fraction et quotient ▶ Exercices 28 à 39

PROPRIÉTÉ ♦ et ▲ désignent des nombres entiers et ▲ ≠ 0.
Le quotient ♦ : ▲ est aussi noté $\frac{♦}{▲}$ à l'aide d'une fraction.
Ainsi, la fraction $\frac{♦}{▲}$ est le nombre qui multiplié par ▲ donne ♦ (voir p. 84).

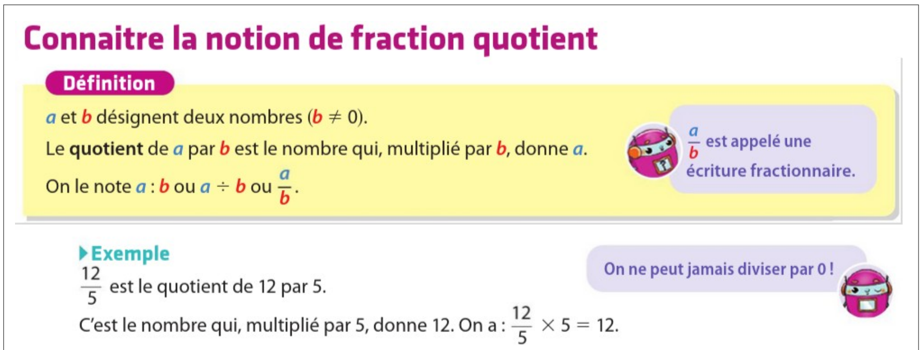
♦ : ▲ = $\frac{♦}{▲}$ et $\frac{♦}{▲}$ × ▲ = ♦.

Exemples
- Deux septièmes de sept, c'est deux. $\frac{2}{7} \times 7 = 2$
- Sept fois deux septièmes, c'est deux $7 \times \frac{2}{7} = 2$
- Le nombre manquant dans l'égalité $4 \times \ldots = 11$ est $\frac{11}{4}$.
- La **valeur exacte** du quotient de 7 par 3 est $\frac{7}{3}$.

Une **valeur approchée** au centième près de ce quotient est 2,33.

Figure 32: p.98 Transmath 6ème (Malaval, et al., 2022)

Cette définition est une autre interprétation des programmes officiels, car le choix a été fait ici de ne pas utiliser de lettres dans la définition, mais des symboles. Nous pensons que ce choix est à relier au fait que les élèves ne commenceront à utiliser le calcul littéral qu'en 5e, aussi les auteurs ont jugé plus simple pour les élèves de 6e d'aborder cette définition avec des symboles de couleur. Cependant rien ne peut garantir que cette approche soit plus simple pour les élèves, et ce que l'on peut craindre avec le côté visuel de ces formules, c'est que les élèves soient plus enclins à mémoriser la disposition des nombres sans comprendre la formule : le nombre au numérateur, c'est le nombre que l'on retrouve après le signe « = », le nombre au dénominateur est celui que l'on retrouve juste après le signe « × ». Du reste, à travers le questionnaire enseignant de notre TER, certains enseignants avaient exprimé cet état de fait : la définition étant trop difficile à comprendre pour les élèves, ils cherchent davantage à donner la bonne réponse en mémorisant la place des nombres, sans relation avec le sens du quotient. Dans cette définition du manuel Transmath 6ème (Malaval, et al., 2022), le symbole de la division est ici présent et relié à l'écriture décimale de manière explicite avec le signe « = », et de plus, la valeur exacte du quotient et la valeur approchée sont évoquées dans les exemples qui l'accompagnent, en justifiant la valeur approchée par une copie d'écran de calculatrice. Nous remarquons que les exemples choisis mettent en jeu presque uniquement des nombres dont la valeur exacte ne peut être écrite que sous forme de fraction. Le manuel Mission Indigo 6ème (Barnet, et al., 2021) choisit de présenter la définition de cette manière :


Connaitre la notion de fraction quotient

Définition

a et b désignent deux nombres ($b \neq 0$).

Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

On le note $a : b$ ou $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}$ est appelé une écriture fractionnaire.

Exemple

$\frac{12}{5}$ est le quotient de 12 par 5.

C'est le nombre qui, multiplié par 5, donne 12. On a : $\frac{12}{5} \times 5 = 12$.

On ne peut jamais diviser par 0 !

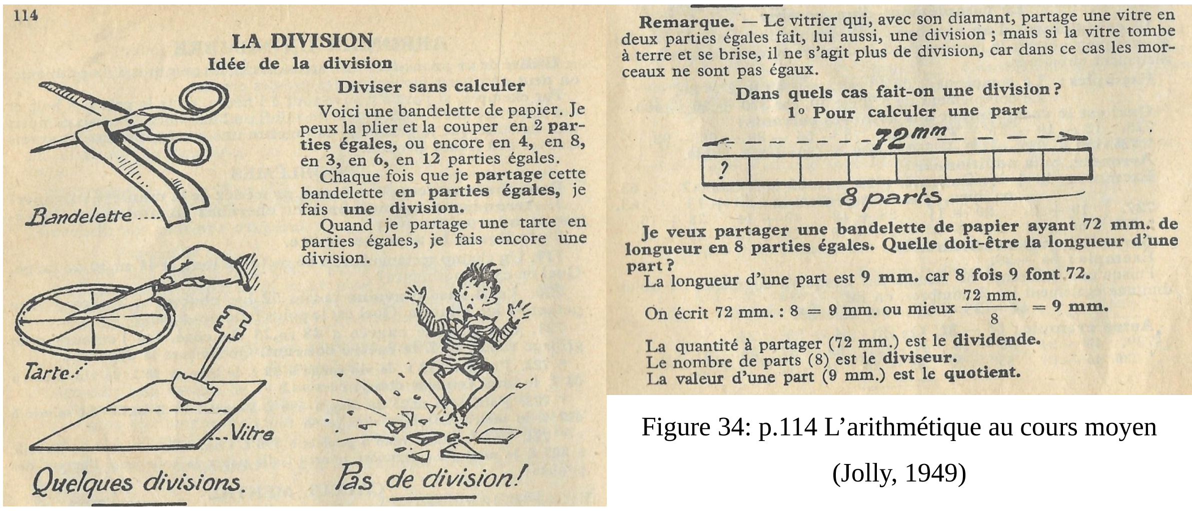
Figure 33: p.120 Mission Indigo 6ème (Barnet, et al., 2021)

La définition est ici explicitée avec des lettres et non des symboles, mais un code couleur est censé faciliter la lecture de celle-ci. Nous remarquons que le symbole de la division est associé à la barre de fraction, mais de manière plus implicite puisqu'ils ne sont pas reliés par le signe « = ». L'exemple donné pour illustrer la définition ne fait pas intervenir de quotient dont le résultat ne serait pas un nombre non décimal, ce qui n'implique pas de devoir écrire une fraction pour exprimer le quotient exact. L'élève pourrait à la lecture de cet exemple s'interroger sur les raisons pour lesquelles on n'effectue pas la division $\frac{12}{5} = 12 \div 5 = 2{,}4$, l'élève ayant la propension à vouloir donner un résultat final sous la forme d'un nombre décimal. De plus, l'égalité $2{,}4 \times 5 = 12$ serait tout à fait correcte, il nous semble donc que le choix de l'exemple n'est pas le plus pertinent, d'autant plus qu'il ne sera pas l'occasion de discuter de la valeur exacte et de la valeur décimale approchée du quotient. Toutefois cet aspect sera évoqué plus loin dans le chapitre, sur une page présentant des exercices résolus où une remarque indique que le quotient n'est pas toujours un nombre décimal, puis un exemple sur la valeur décimale exacte du quotient et sur la valeur décimale approchée est présenté.

Les manuels étudiés formulent une définition du sens « quotient » pris par la fraction conforme aux prescriptions officielles, « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a » mais ils ne choisissent pas d'écrire l'égalité $\frac{a}{b} = a \div b$ de manière explicite, sauf dans le manuel Transmath 6ème (Malaval, et al., 2022), mais là encore, cette égalité conserve une part d'implicite, car elle n'est pas écrite avec des lettres puisque ce sont des symboles qui sont utilisés. La justification de l'écriture du quotient sous forme fractionnaire dans les exemples est souvent motivée par le fait que ce soit la seule manière d'écrire le quotient exact lorsque le quotient n'est pas un nombre décimal, mais pas toujours, comme nous avons pu le voir dans le manuel Transmath 6ème (Malaval, et al., 2022).

7.2 Introduire le sens quotient en s'appuyant sur l'algèbre

L'activité des jetons décrite en partie 6 nous a permis de développer une entrée dans l'algèbre pour des élèves de 6e, et la manipulation des lettres par les élèves nous a semblé suffisamment réussie (même si très imparfaite) pour nous permettre de considérer que l'utilisation de lettres fait à présent partie du *déjà là* de leurs connaissances, et qu'ils en ont un a priori plutôt positif puisque les séances mises en œuvre ont manifestement été appréciées des élèves. Nous souhaitons ensuite produire une nouvelle trace de cours qui prendrait appui sur l'algèbre, tout en ayant le projet d'introduire cet objet de savoir à une place nouvelle dans la progression. L'introduction ne se ferait plus au début du chapitre sur les fractions, mais à la fin du chapitre sur la division, en prenant appui sur la vérification de la division, et le chapitre sur les fractions serait traité ultérieurement. Pour préparer l'utilisation des lettres que l'on retrouvera dans la définition « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a », le début du chapitre sur la division sera revisité afin d'y faire apparaître également ces lettres (nous pouvons remarquer, du reste, que ce sont aussi presque les mêmes lettres que celles que nous avons utilisées dans l'activité des jetons). Cette nouvelle trace de cours est visible dans son intégralité dans l'Annexe 11.6, dans la partie qui suit, seuls des extraits la mise en œuvre faite par Lili seront visibles. Le choix d'introduire le sens « quotient » de la fraction dans le chapitre sur la division a été inspiré de nos lectures d'anciens manuels de mathématiques, qui attribuaient cette place à cet objet de savoir. Par exemple, au cours moyen, en classe de septième en 1949 :



114

LA DIVISION

Idée de la division

Diviser sans calculer

Voici une bandelette de papier. Je peux la plier et la couper en 2 **parties égales,** ou encore en 4, en 8, en 3, en 6, en 12 parties égales.

Chaque fois que je **partage** cette bandelette **en parties égales,** je fais **une division.**

Quand je partage une tarte en parties égales, je fais encore une division.

Remarque. — Le vitrier qui, avec son diamant, partage une vitre en deux parties égales fait, lui aussi, une division ; mais si la vitre tombe à terre et se brise, il ne s'agit plus de division, car dans ce cas les morceaux ne sont pas égaux.

Dans quels cas fait-on une division ?

1° Pour calculer une part

Je veux partager une bandelette de papier ayant 72 mm. de longueur en 8 parties égales. Quelle doit-être la longueur d'une part ?

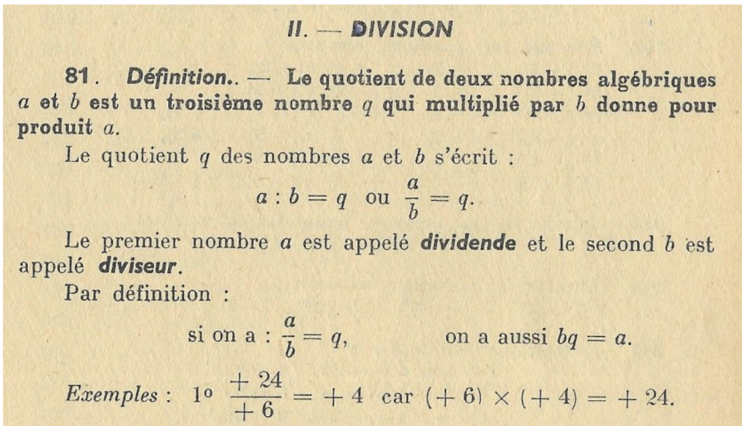
La longueur d'une part est **9 mm.** car **8 fois 9 font 72.**

On écrit 72 mm. : 8 = 9 mm. ou mieux $\frac{72 \text{ mm.}}{8}$ = **9 mm.**

La quantité à partager (72 mm.) est le **dividende.**
Le nombre de parts (8) est le **diviseur.**
La valeur d'une part (9 mm.) est le **quotient.**

Figure 34: p.114 L'arithmétique au cours moyen (Jolly, 1949)

Dans la Figure 34, nous pouvons constater que la division a pu être autrefois écrite sous forme fractionnaire au CM2 dans le chapitre sur la division : « on écrit 72 mm : 8 = 9 mm ou mieux $\frac{72\,\text{mm}}{8} = 9\text{mm}$ ». Les unités ont ici été conservées dans les écritures mathématiques, de sorte que l'élève puisse y donner du sens plus aisément, en repérant plus facilement les longueurs et les parts découpées. Dans un manuel d'algèbre, la partie destinée à la classe de 5e définit le quotient de cette manière :



II. — **DIVISION**

81. *Définition.* — **Le quotient de deux nombres algébriques a et b est un troisième nombre q qui multiplié par b donne pour produit a.**

Le quotient q des nombres a et b s'écrit :

$$a : b = q \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = q.$$

Le premier nombre a est appelé ***dividende*** et le second b est appelé ***diviseur***.

Par définition :

$$\text{si on a : } \frac{a}{b} = q, \qquad \text{on a aussi } bq = a.$$

Exemples : 1° $\frac{+24}{+6} = +4$ car $(+6) \times (+4) = +24.$

Figure 35: p.91 Algèbre (Une réunion de professeurs, 1954)

Nous remarquons que dans la Figure 35, le choix est fait de ne pas écrire $\frac{a}{b} = a \div b$, mais plutôt : « $a \div b = q$ ou $\frac{a}{b} = q$ », différence subtile que nous avons pu retrouver dans d'autres manuels anciens, qui met en exergue les deux différentes notations de l'écriture d'un quotient. $a \div b = q$ permet de faire le lien entre la division et le quotient, puis $\frac{a}{b} = q$ explicite le sens quotient de la fraction ; par transitivité, il est possible d'en déduire $\frac{a}{b} = a \div b$ de manière implicite.

7.2.1 *Déroulé du chapitre traitant de la division*

Le chapitre traitant de la division intervient dans la progression de Lili immédiatement après le chapitre sur les périmètres et les aires. Nous rappelons que dans cette partie, seuls des extraits de la trace de cours seront donnés à voir, la trace de cours complète figurant en Annexe 11.6. Le chapitre s'ouvre de manière habituelle sur la division euclidienne. Après la réalisation d'une activité d'introduction issue du manuel que la classe utilise, le manuel Myriade 6ème (Boullis, et al., 2016), Lili écrit la partie leçon au tableau tandis que les élèves la consignent dans leur cahier :

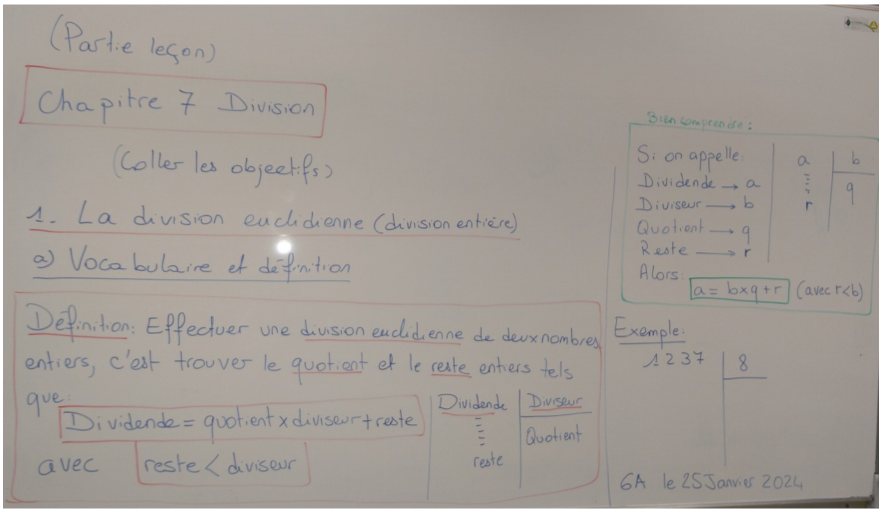


Figure 36: Leçon : La division euclidienne

La leçon copiée par les élèves sur la division euclidienne est dans un premier temps tout à fait traditionnelle, l'égalité « Dividende = quotient × diviseur + reste » étant déjà connue et utilisée en CM2, et également rappelée et réutilisée lors de l'activité d'introduction au chapitre afin de vérifier les divisions faites. Nous avions convenu avec Lili d'utiliser un code couleur similaire à celui de la Figure 33, c'est-à-dire en faisant apparaître le dividende et le diviseur dans une couleur particulière tout au long du chapitre, mais au lieu de cela, c'est un autre code couleur que Lili a produit dans le coin en haut à gauche du tableau, sur le moment, et qui cette fois sera conservé tout au long du chapitre. L'adaptation prévue de la formule « Dividende = quotient × diviseur + reste » avec des lettres qui rappellent l'activité des jetons, où le dividende est re-désigné par la lettre **a** et le diviseur par la lettre **b,** le quotient par la lettre **q** et le reste par la lettre **r**, ce qui permet d'écrire la formule d'apparence réduite « a = b ×q +r ». Le code couleur adopté par Lili est alors d'encadrer cette adaptation de la formule en vert ainsi que les re-désignations accompagnées de leur support visuel sous forme d'une division factice dans un encadré vert (en haut à gauche du tableau). Dans l'exemple qui illustrera cette partie de leçon, l'accent sera mis sur la vérification de la division, ce qui en soi produira une instanciation de la formule « a = b ×q +r ». La partie du chapitre sur la divisibilité reprendra les mêmes codes et la même notation :

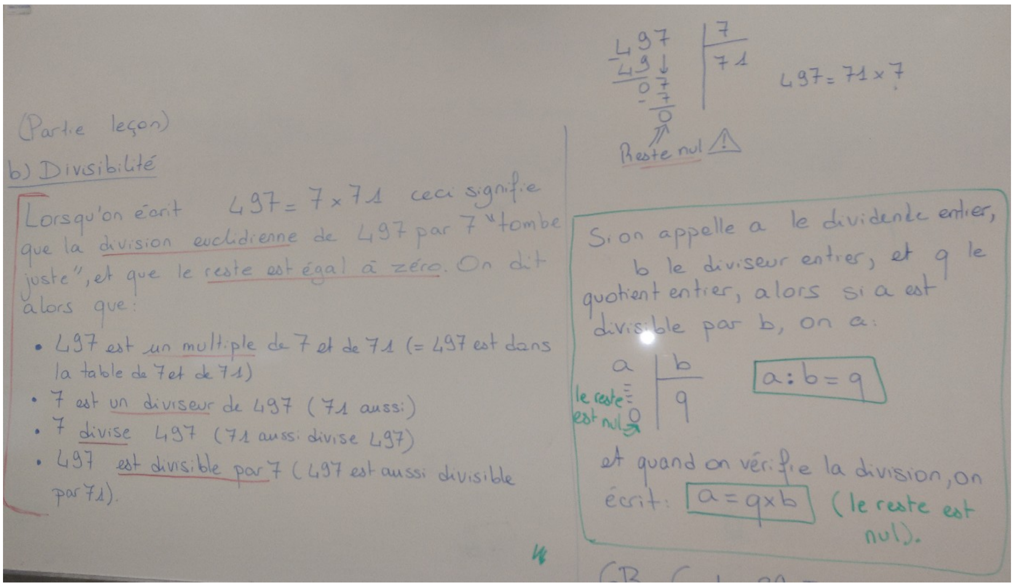


Figure 37: Leçon : La divisibilité

Lorsque le reste de la division euclidienne est nul, en re-désignant comme fait auparavant le dividende par la lettre **a**, le diviseur par la lettre **b** et le quotient par la lettre **q**, on peut alors écrire « a : b = q », le reste de la division euclidienne de a par b étant nul. Pour vérifier cette division, il faudrait alors vérifier que : « a = q × b », ceci étant accompagné d'une division factice servant de support visuel. Ces considérations ont été de nouveau encadrées en vert sur le tableau de Lili et sur le cahier des élèves, puis travaillé dans les exercices, en insistant toujours sur la vérification de la division faite. Une autre étape de ce chapitre consiste à introduire la division décimale. Lili a choisi d'utiliser l'activité 4 page 53 du manuel de la classe pour introduire le propos. L'activité débute en faisant partager aux élèves une bande de 21 cm en 6 morceaux identiques d'abord de manière empirique en matérialisant cette bande, puis en posant une division afin de donner la longueur d'un morceau. Ensuite, toujours en posant une division, il s'agit de partager la même bande en 8 morceaux identiques, on trouve ainsi : $21 \div 8 = 2{,}625$. Une fois la division posée, les élèves vérifient cette division et écrivent : $21 = 2{,}625 \times 8$. La dernière question de l'activité est la suivante : « Pourquoi est-il difficile de partager en trois morceaux une bande de papier de longueur 10 cm ? ». Les élèves posent la division et découvrent que « *la division ne s'arrête jamais* », Lili explique que ce n'est pas un nombre décimal. On donne alors une valeur approchée : $10 \div 3 \simeq 3{,}333$. Puis comme à chaque fois, la vérification de la division est entreprise, ce qui donne dans le cas présent : $3{,}333 \times 3 = 9{,}999$ et non 10, ce que Lili justifie en disant que 3,333 n'est pas le quotient exact, c'est une valeur approchée du quotient et par conséquent on ne peut pas retrouver 10 en vérifiant la division avec ce nombre, seul le quotient exact peut permettre de retrouver 10. La partie leçon est ensuite consignée au tableau et dans le cahier des élèves :

<u>Définition :</u>
Effectuer la **<u>division décimale</u>** d'un nombre décimal (le dividende **a**), par un nombre entier (le diviseur **b**) différent de zéro, c'est chercher le quotient **q** tel que :

$$\text{dividende} = \text{quotient} \times \text{diviseur}$$

Lorsqu'on trouve ce nombre, on peut alors écrire :

$$\text{dividende} \div \text{diviseur} = \text{quotient}$$

dividende → **a**
diviseur → **b**
quotient → **q**

a : b = q
a = q x b

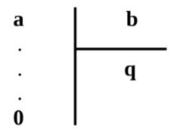


Figure 38: Leçon : définition de la division décimale

Deux exemples viennent illustrer la définition de la division décimale. Dans le premier exemple, on obtient un reste nul en posant la division décimale $20{,}7 \div 6$, la valeur exacte du quotient est donc un nombre décimal : $20{,}7 \div 6 = 3{,}45$. Dans le deuxième exemple, la division posée est $23{,}3 \div 3$ et il n'est pas possible d'obtenir un reste nul, la division « *ne s'arrête jamais* », le quotient n'est pas un nombre décimal. On trouve alors une valeur approchée du quotient : $23{,}3 \div 3 \simeq 7{,}766$ (ici par défaut au millième). Si on vérifie la division, on pose alors la multiplication $7{,}766 \times 3 = 23{,}298$ et non 23,3 donc $23{,}3 \div 3 \neq 7{,}766$. Il en résulte que le seul nombre qui puisse permettre d'écrire une égalité est le nombre $23{,}3 \div 3 = \dfrac{23{,}3}{3}$, ainsi : $\dfrac{23{,}3}{3} \times 3 = (23{,}3 \div 3) \times 3 = 23{,}3$ ce que Lili verbalise en disant que lorsque l'on divise 23,3 par 3 et qu'on le re-multiplie par 3, c'est comme si on ne faisait rien, donc on retrouve 23,3, ce qui semble naturel et acceptable aux élèves. La fraction $\dfrac{23{,}3}{3}$ est alors une nouvelle manière d'écrire le nombre que l'on trouverait si la division $23{,}3 \div 3$ était posée. Cet exemple vient clore la partie sur la division décimale, et la définition du sens quotient pris par la fraction suivra :

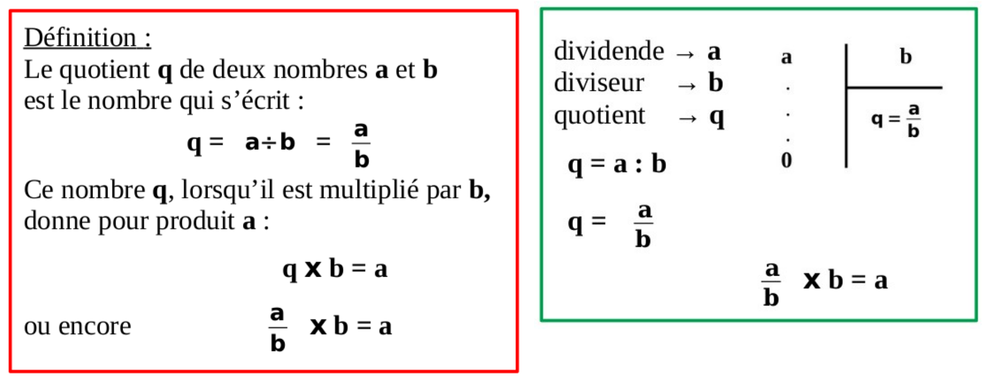


Figure 39: Définition du sens quotient de la fraction

Les exemples qui viennent illustrer cette définition de la leçon sont les suivants :

1. Samy veut couper en trois morceaux identiques une corde de longueur 4 unités. Quelle sera la mesure exacte de chaque morceau de corde ?

2. Quel est le nombre qui, multiplié par 8 donne 13 ?

3. Compléter : $\frac{22}{7}$ est le nombre qui, multiplié par… donne…

Le premier exemple implique une division décimale où le quotient trouvé ne peut être exprimé de manière exacte que sous la forme d'une fraction. Le deuxième exemple amène l'élève à traduire l'énoncé sous forme de multiplication à trou, et à écrire le quotient cherché sous forme de fraction. Dans le dernier exemple, l'énoncé sera également traduit de manière mathématique sous forme de multiplication à trous, mais le quotient étant donné, il s'agit cette fois d'expliciter le sens de ce quotient.

Le chapitre de la division a été construit en prenant appui sur l'algèbre, ce qui a permis d'introduire le sens quotient de la fraction à la toute fin de celui-ci. L'écriture du quotient sous forme de fraction trouve alors toute sa justification lorsque le quotient n'est pas un nombre décimal, et qu'il n'est alors pas possible de donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal exact. Cette partie nous permet de répondre à QR3, notre troisième question de recherche rappelée ci-dessous :

QR3 : Une introduction de la définition du sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division plutôt qu'en début de chapitre sur les fractions est-elle susceptible de permettre aux élèves de donner du sens à cette définition, ceci en prenant appui sur les praxéologies travaillées avec l'algèbre et la division ?

Dans la progression proposée, les élèves sont moins gênés par l'écriture d'un nombre qui ne se présente pas sous la forme attendue d'un nombre décimal, puisqu'ils ont déjà produit un certain nombre d'expressions n'ayant pas de valeur décimale (expressions algébriques) lors des rituels de réduction faisant suite à l'activité des jetons. La manipulation des lettres dans l'activité des jetons, dans les rituels répétés de calcul littéral, dans les expressions de périmètre et d'aire, puis surtout tout au long du chapitre de la division en prenant appui sur l'algèbre, rend la signification de la lettre plus abordable aux élèves au moment d'introduire le sens quotient de la fraction, leur expérience de l'utilisation des lettres s'étant déroulée sur un temps assez long, ils s'y sont accommodés. La répétition des vérifications de la division tout au long du chapitre est également un levier précieux qui permet de justifier l'écriture du résultat exact de la division sous forme de fraction. La combinaison des expériences issues de l'utilisation des lettres et de la vérification de la division permet d'écrire une définition du sens « quotient » de la fraction qui semble mieux acceptée et surtout mieux comprise par les élèves. Par ailleurs, la manière particulière d'écrire un quotient exact vient faire écho à la manière d'écrire la valeur exacte de la longueur du cercle ou la valeur exacte de l'aire du disque en fonction de π, ceci sans donner un résultat final sous forme d'un nombre décimal, comme Lili a pu le mettre en parallèle avec les élèves. L'appropriation d'une notion nécessitant de s'inscrire dans un temps plus long que celui imparti dans une portion de chapitre, nous avons ensuite développé des rituels qui se présentent de nouveau sous forme de carnet : le carnet de sens quotient.

7.3 Élaboration d'un carnet de sens quotient

7.3.1 Analyse praxéologique du contenu du carnet

Le carnet de sens quotient se présente matériellement de manière analogue au carnet de calcul littéral, il permet d'ajouter des pages au fur et à mesure, et il a pour but de proposer un entraînement aux élèves sous forme de rituels, dont nous avons exposé l'intérêt précédemment dans la partie 6.2. L'analyse des différents sous-types de tâches liés au travail sur le sens quotient de la fraction, décrite dans ce qui suit, nous a guidé dans l'élaboration du contenu du carnet, de sorte que nous avons pu proposer aux élèves des exercices variés, couvrant de la manière la plus équilibrée possible les différents aspects de ce savoir à apprendre. L'ensemble du contenu du carnet peut être consulté en Annexe 11.7 — Carnet de sens quotient. Les quatre premiers exercices visent à réactiver les relations qu'entretiennent la division et la multiplication, et peuvent être résolus sans faire appel au sens quotient de la fraction ; toutefois Lili s'appuiera sur ces exercices pendant les corrections pour faire le lien avec l'écriture du quotient sous forme de fraction, comme dans l'exercice de la Figure 40 :

Exercice 3 :

Compléter par le nombre qui convient :

a. 20 x …… = 60	**e.** 150 = ….. x 50
b. ….. x 3 = 4,5	**f.** 0,8 = 4 x …..
c. 2 x ….. = 15	**g.** 27 = 2 x …..
d. 0,35 x …… = 350	**h.** 2 600 = …… x 26

Figure 40: Exercice 3 du carnet de sens quotient

L'exercice 5 présenté dans la Figure 41 a pour but de réactiver les connaissances des élèves au niveau de la nature des nombres : nombre entier, nombre décimal, et nombre non entier et non décimal.

Exercice 5 :

Parmi les trois divisions suivantes : $35 \div 6$; $128 \div 8$; $28 \div 5$

a. Quelle est celle dont le quotient est un nombre entier ? ……………………………

b. Quelle est celle dont le quotient est un nombre décimal non entier ? ………….

c. Quelle est celle dont le quotient s'écrit seulement sous la forme fractionnaire ? ………

Figure 41: Exercice 5 du carnet de sens quotient

La suite du carnet se consacre exclusivement au sens quotient de la fraction. Afin de déterminer le reste du contenu des exercices du carnet, nous avons considéré cet objet de savoir sous l'angle de la praxéologie en menant une analyse a priori, afin d'essayer ensuite de balayer les différents sous-types de tâches dans les exercices de rituels à proposer aux élèves. Comme lors de notre travail d'étude et de recherche, nous avons appelé Q le type de tâches « résoudre un problème faisant intervenir le sens « quotient » de la fraction ». Concernant le type de tâche Q, nous nommons donc :

- Q1 le sous-type de tâches « Trouver le nombre qui, multiplié par b donne a » ou bien « trouver le nombre par lequel b doit être multiplié pour obtenir a »

  Ceci est l'objet par exemple de l'exercice 11 du carnet de sens quotient où l'une des questions est la suivante : « Quel est le nombre qui, multiplié par 9, donne 14 ? ». Cette question peut être traduite sous forme d'égalité mathématique par l'élève, mais ce n'est pas une nécessité. La technique de résolution consiste alors à effectuer la division de 14 par 9 comme dans les premiers exercices à trous du carnet. Implicitement, il s'agit ici d'écrire un nombre qui soit la solution exacte de l'énoncé, et non une valeur approchée. La technique pour écrire cette valeur exacte est alors de faire appel à la définition du sens quotient de la fraction, ce qui permet de donner le résultat exact sous la forme fractionnaire : $\frac{14}{9}$.
- Q2 le sous-type de tâches « Compléter l'égalité $\ldots \times b = a$ ou l'égalité $b \times \ldots = a$ »

Q2 est le pendant de Q1 mais exprimé sous forme d'égalité mathématique. Par exemple, l'exercice 10 du carnet de sens quotient propose les énoncés suivants :

Exercice 10 : Compléter les égalités suivantes :

a. $4 \times \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = 7$ **c.** $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times 15 = 8$

Figure 42: Extrait de l'exercice 10 du carnet de sens quotient

La réponse à la question **a.** pourrait être donnée sous la forme d'un nombre décimal, mais la barre de fraction apparaissant, l'élève sera amené à écrire le résultat sous forme fractionnaire. Par contre dans la question **c.**, le résultat exact ne peut être exprimé que sous forme de fraction.

- Q3 le sous-type de tâches « Trouver le nombre qui multiplié par $\frac{a}{b}$ donne a », ou bien « Trouver le nombre par lequel il faut multiplier $\frac{a}{b}$ pour obtenir a »

  Par exemple, l'exercice 17 propose la question : « Par quel nombre faut-il multiplier $\frac{3}{4}$ pour obtenir 3 ? ». Une technique de résolution peut être de calculer la valeur décimale du quotient de 3 par 4 : $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75$, puis de diviser 3 par la valeur décimale du quotient pour trouver 4. Plus simplement, une autre technique de résolution est de faire appel à la définition du quotient (et du sens quotient de la fraction), et considérer que si l'on divise 3 par 4, pour retrouver le nombre de départ qui est 3, il suffit de multiplier le quotient $\frac{3}{4}$ par le diviseur 4, comme lors de la vérification de la division ; diviser 3 par 4, puis multiplier de nouveau par 4, c'est finalement ne rien faire, aussi on retrouve 3. Si la question de l'exercice avait été la suivante : « Par quel nombre faut-il multiplier $\frac{4}{3}$ pour obtenir 4 ? », on peut noter que la première technique détaillée aurait été inutilisable, et que seule la dernière permettait d'obtenir le résultat souhaité.

- Q4 le sous-type de tâches « Compléter l'égalité $\ldots \times \frac{a}{b} = a$ ou l'égalité $\frac{a}{b} \times \ldots = a$ »

  Q4 est également le pendant de Q3, mais exprimé sous forme d'égalité mathématique. Des exemples illustrant ce sous-type de tâche présent dans le carnet de sens quotient sont donnés dans la Figure 43 :

Exercice 11 :

e. $\frac{11}{147} \times \ldots\ldots = 11$

Exercice 20 :

b. $\ldots\ldots \times \frac{8}{3} = 8$

Figure 43: Extraits des exercices 11 et 20 du carnet de sens quotient

La technique de résolution employée est ici la même que pour le sous-type de tâche Q3, elle fait appel à la définition du sens quotient de la fraction.

- Q5 le sous-type de tâches « Compléter l'égalité $b \times \frac{a}{b} = \dots$ ou l'égalité $\frac{a}{b} \times b = \dots$ »

  Une technique qui peut être utilisée est de diviser **a** par **b**, puis de multiplier ce quotient par **b** de nouveau, ceci peut donner lieu cependant à un résultat inexact dans certaines situations, comme nous le montrons par la suite à travers un exemple. Une autre technique est alors possible, en considérant que faire une opération pour ensuite effectuer l'opération inverse, revient à n'effectuer aucune opération sur le nombre de départ, ce qui permet in fine d'appliquer la définition du sens quotient de la fraction, et de trouver a. Des exemples relatifs à ce sous-type de tâche sont présentés en Figure 44.

Exercice 9 :	**Exercice 15 :**
a. $4 \times \frac{7}{4} = \dots\dots$	**f.** $\frac{55}{23} \times 23 = \dots\dots$

Figure 44: Extraits des exercices 9 et 15 du carnet de sens quotient

  L'exemple issu de l'exercice 9 peut éventuellement être fait en commençant par un calcul du quotient $\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1{,}75$ en effectuant la division pour être ensuite de nouveau multiplié par 4, ce qui permet d'obtenir le résultat : $1{,}75 \times 4 = 7$. En revanche, l'exemple issu de l'exercice 15 ne permet pas d'utiliser cette technique, la seule technique correcte étant l'utilisation de la définition du quotient puisque le résultat de la division $55 \div 23$ n'est pas un nombre décimal.

- Q6 le sous-type de tâches « Exprimer un quotient exact à l'aide d'une fraction ».

  Il s'agit ici d'exprimer le résultat d'un quotient sous forme d'une fraction, la technique étant d'écrire le dividende au numérateur et le diviseur au dénominateur : $a \div b = \frac{a}{b}$. Cette technique est utilisée en particulier si le quotient n'est pas un nombre décimal, ce qui permet malgré tout d'en exprimer la valeur exacte (mais peut tout de même être utilisée si le quotient est un nombre décimal). Des exemples d'énoncés sont donnés en Figure 45 :

Exercice 7 :

c. On dispose de 4 kg de confiture pour remplir équitablement 7 pots. Exprimer la masse de confiture en kg dans chaque pot sous la forme d'une fraction.

Exercice 8 :

b. Sur un marché, on partage 15 m de trottoir en 4 emplacements de même longueur. Exprimer la longueur d'un emplacement sous la forme d'une fraction.

Figure 45: Extraits des exercices 7 et 8 du carnet de sens quotient

Dans ces énoncés, seule l'expression du quotient sous forme de fraction est demandée, alors que dans l'extrait de l'exercice 8, il serait plus naturel pour les élèves d'en donner la valeur décimale en faisant le calcul mentalement, mais l'objectif visé ici est seulement de travailler sur la manière d'exprimer un quotient (même simple) sous forme de fraction, le calcul effectif faisant référence à d'autres sous-types de tâches.

- Q7 le sous-type de tâches « Déterminer si un quotient est un nombre décimal ».

  La technique utilisée pour ce sous-type de tâche est de poser la division, et d'observer si la division « se termine », puisque un nombre décimal est un nombre dont la partie décimale est finie. Un exemple pour ce sous-type de tâche a déjà été fourni plus haut à la Figure 41. Une variante de ce type d'énoncé est présenté dans la Figure 46 :

Exercice 12 :

a. Marc a acheté un sachet de 15 mini-viennoiseries à la boulangerie pour 9 euros. Quel est le prix d'une mini-viennoiserie ? Donner le résultat sous forme d'une fraction, puis sous forme décimale.

Figure 46: Extrait exercice 12 du carnet de sens quotient

Dans cet exemple, l'élève sera amené à écrire : $\frac{9}{15} = 9 \div 15 = 0{,}6$ en posant la division décimale (mais il n'est pas demandé à l'élève de dire explicitement si la fraction représente un nombre décimal, donc la notion de nombre décimal relève davantage ici de l'implicite).

- Q8 le sous-type de tâches « Donner la valeur exacte d'un quotient ».

  La technique consiste à poser la division. Deux cas peuvent se présenter : soit il est possible d'obtenir un reste nul lors de la division décimale, auquel cas le résultat sera un nombre décimal ; soit il n'est pas possible d'obtenir un reste nul lors de la division, le quotient sera alors exprimé de manière exacte sous forme de fraction.

Exercice 19:

Une tablette de chocolat de 100 g est composée de 12 carrés.

Quelle est la masse exacte d'un carré ?

Exercice 8 :

a. Samuel veut découper une planche de 102 cm de longueur en 11 morceaux identiques. Quelle est la longueur exacte de chaque morceau ? Donner une valeur approchée par défaut de cette longueur au millimètre près.

Figure 47: Extraits des exercices 19 et 8 du carnet de sens quotient

Les deux exemples de la Figure 47 donnent à voir des exercices où l'élève sera amené à écrire le résultat exact sous la forme d'une fraction, la division décimale ne permettant pas de trouver un reste nul.

- Q9 le sous-type de tâches « Donner une valeur approchée d'un quotient ».

La technique pour ce sous-type de tâche est de poser la division décimale, avec un certain nombre de chiffres significatifs, de manière à pouvoir donner la valeur approchée demandée dans l'énoncé. Lorsque le type de valeur approchée souhaitée n'est pas précisée, les élèves choisissent en général de donner la valeur approchée par défaut, avec une ou deux décimales, puisque c'est la valeur que l'on peut lire résultant de la division. Dans l'exemple extrait de l'exercice 8 dans la Figure 47, les élèves donneront une valeur approchée par défaut au mm près, ce qui implique une sous-tâche supplémentaire : repérer combien de chiffres sont nécessaires après la virgule lors du calcul du quotient. Souvent dans ce type d'exercices, les élèves sont tentés de donner le résultat en mm, plutôt qu'au mm près, le résultat restant correct cependant puisqu'il n'est pas précisé de donner le résultat en cm dans l'énoncé.

D'autres sous-types de tâches comme « Encadrer un quotient par deux entiers consécutifs » ou « Utiliser le vocabulaire du quotient » ne sont pas présents dans le carnet, ces types de questions ayant été abordés en prenant pour support le manuel qui en propose.

Dans l'élaboration du carnet de sens quotient, nous avons privilégié le sous-type de tâches Q2 : « Compléter l'égalité $\ldots \times b = a$ ou l'égalité $b \times \ldots = a$ ». C'est donc celui qui apparaît le plus souvent dans les exercices (38 tâches de ce type), étant donné que c'est l'une des questions où les élèves sont le plus en difficulté ; de plus, la maîtrise de ce sous-type de tâche rend plus aisée la résolution du sous-type de tâche Q1 (« Trouver le nombre qui, multiplié par b donne a » ou bien « trouver le nombre par lequel b doit être multiplié pour obtenir a »), que nous avons également choisi de mettre en avant (15 occurrences pour ce sous-type de tâche). Puis nous avons cherché à insister sur le sous-type de tâches Q6 : « Exprimer un quotient exact à l'aide d'une fraction ». Ce sous-type de tâches apparaît sous forme de petits problèmes à résoudre (14 occurrences). Nous cherchons alors à adresser la difficulté qu'éprouvent les élèves à ne pas donner un résultat sous la forme d'un nombre décimal, ainsi qu'à neutraliser l'idée préconçue des élèves que pour donner un résultat exact, il suffit d'écrire tous les chiffres présents sur l'écran de la calculatrice (pour ceux qui sont autorisés à l'utiliser). Enfin, le dernier sous-type de tâche que nous avons avantagé est Q5 : « Compléter l'égalité $b \times \frac{a}{b} = \ldots$ ou l'égalité $\frac{a}{b} \times b = \ldots$ », et nous comptons 11 occurrences pour ce sous-type de tâches. Par ce choix, nous espérons que même si certains élèves s'engagent au départ dans le calcul de la division puis de la multiplication, ils finiront par la suite par préférer utiliser la définition du sens quotient de la fraction, non seulement parce que cela sera souvent la seule manière de résoudre correctement cette tâche, mais aussi parce que cela sera moins coûteux en effort de calcul. Avec la ritualisation instaurée par le biais du carnet de ce contenu difficile pour les élèves, nous espérons qu’ils viendront à y donner du sens, plutôt que de chercher à mémoriser la place des nombres dans les égalités. La prochaine évaluation prévue par Lili sera pour nous l’occasion d’y glisser quelques questions sur le sens quotient de la fraction, ceci afin d’évaluer le savoir réellement appris par les élèves.

7.3.2 Évaluation du savoir appris par les élèves

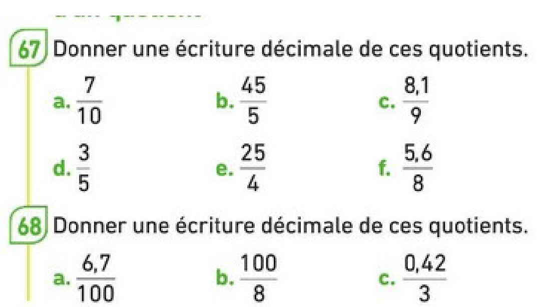
Le carnet de sens quotient (voir Annexe 11.7) est un outil qui a été apprécié des élèves, au même titre que les rituels précédents (carnet de calcul littéral). Il nous a cependant semblé difficile d’y évaluer le travail effectué par les élèves, pour différentes raisons : d’une part l’analyse des erreurs possibles des élèves serait fastidieuse du fait du grand nombre de sous-type de tâches mises en jeu. De plus, la progression des élèves dans le travail sur le carnet a été très inégale : certains élèves ont assez rapidement terminé le carnet, tandis que d’autres n’ont pas achevé la première moitié. Lili ayant proposé au tableau une correction des exercices qui avaient été achevés par tous les élèves, nous avons pu observer par la suite (les carnets restant toujours dans la classe) qu’il était aussi difficile de détecter les erreurs faites par les élèves, car au moment de la correction, les élèves ne corrigent pas en vert (ou en rouge) : soit ils écrivent la correction au bic sur ce qu’ils avaient écrit au crayon à papier auparavant, soit ils font usage de blanco, ce qui masque les erreurs produites.

Les derniers usages des rituels de sens quotient coïncidant avec le début du chapitre sur les fractions (où un rappel rapide de ce savoir a été consigné dans la partie leçon au tout début du chapitre), il nous a semblé assez naturel d’évaluer le savoir appris par les élèves concernant le sens quotient de la fraction au cours d’une évaluation sur le chapitre des fractions. Plus précisément, une partie de ce qui y est évalué fait appel aux connaissances du chapitre précédent qui était sur les angles, tandis que l’autre partie porte sur le début du chapitre sur les fractions. Dans cette évaluation, seuls deux exercices sont en lien direct avec le sens quotient. Le premier de ces exercices relève du sous-type de tâche Q8, et est formulé ainsi :

Exercice 4: Donner l'écriture décimale des nombres suivants: $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{16}{10}$.

Figure 48: Sous-type de tâche Q8 de l'évaluation

Cette formulation d’énoncé est particulièrement difficile pour des élèves de 6e. Elle a été travaillée en amont plusieurs fois avec leur enseignante dans le chapitre sur les fractions, en prenant pour support les exercices du manuel qui formulent ce type de question de manière très proche, comme dans la Figure 49 :


67 Donner une écriture décimale de ces quotients.

a. $\frac{7}{10}$ b. $\frac{45}{5}$ c. $\frac{8,1}{9}$

d. $\frac{3}{5}$ e. $\frac{25}{4}$ f. $\frac{5,6}{8}$

68 Donner une écriture décimale de ces quotients.

a. $\frac{6,7}{100}$ b. $\frac{100}{8}$ c. $\frac{0,42}{3}$

Figure 49: p.81 Myriade 6ème (Boullis, et al., 2016)

L'énoncé du manuel est cependant plus explicite puisque le mot « quotient » apparaît, ce mot donne alors un indice à l'élève sur l'opération à effectuer. Dans une analyse a priori de cet exercice 4 de la Figure 48, nous projetons les types d'erreurs suivantes :

— L'écriture produite est une écriture en toutes lettres (erreur notée « e »), par exemple pour $\frac{1}{4}$, l'écriture produite est « un quart ».

— L'élève cherche à écrire une fraction ou une écriture fractionnaire égale (erreur notée « = »). Par exemple, l'élève écrit $\frac{1}{4} = \frac{0,5}{2}$ ou encore $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$.

— L'élève traduit la barre de fraction par une virgule, ce qui donnerait alors : $\frac{1}{4} = 1,4$, $\frac{3}{5} = 3,5$ et $\frac{16}{10} = 16,10 = 16,1$ (erreur notée par le résultat obtenu, par exemple « 1,4 »). Ce type de confusion est persistant en 6e, et nous pensons qu'il peut être mis en lien avec la définition des nombres décimaux en primaire.

— L'élève ne comprend pas l'énoncé et produit une écriture calquée sur la définition du sens quotient de la fraction, comme s'il s'agissait d'une opération à trou à compléter. Par exemple, l'écriture produite est : $\frac{3}{5} \times 5 = 3$ (erreur notée « t »).

— L'élève écrit le bon calcul à effectuer, mais le résultat est erroné du fait d'une erreur de calcul ou du fait d'une approximation (l'élève ne termine pas la division pour obtenir un reste nul). Par exemple : $\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0,2$ ou $\frac{16}{10} = 16 \div 10 = 0,16$ (erreur notée « bc »).

Nous projetons que l'énoncé de l'exercice 4 représentera un obstacle pour les élèves, et que un certain nombre d'entre eux n'écriront rien (cette situation sera notée « Nf »).

Le deuxième exercice de l'évaluation faisant intervenir la définition du sens quotient de la fraction relève des sous-types de tâches Q2, Q4 et Q5, il est formulé ainsi :

Exercice 6: Compléter les égalités

$.... \times 5 = 40$; $\frac{2}{3} \times .... = 2$; $\frac{....}{....} \times 7 = 13$; $\frac{5}{11} \times 11 = ...$

Figure 50: Sous-types de tâche Q2, Q4 et Q5 de l'évaluation

La première question de l'exercice 6 présenté à la Figure 50 peut être considérée comme relevant du sous-type de tâche Q2, cependant il ne s'agit que d'une multiplication à trou où la bonne connaissance des tables de multiplication peut suffire pour la résolution. Cette question a pour but d'aider les élèves à faire le lien avec le quotient, le nombre manquant étant le résultat de la division de 40 par 5. Pour cette question, nous projetons deux types d'erreurs :

— L'élève maîtrise mal les tables de multiplication et écrit 9 au lieu de 8, ou autre chose (erreur notée « cal » suivi de la réponse donnée par l'élève)

— L'élève fait le lien avec le quotient, mais le résultat écrit est $\frac{5}{40}$ (erreur notée « $\frac{5}{40}$ »).

La deuxième question de l'exercice 6 relève du sous-type de tâche Q4. Pour cette question, l'erreur attendue des élèves est d'écrire 2 pour compléter l'égalité $\frac{2}{3} \times .... = 2$ (erreur notée « 2 »). Toute autre erreur sera noté par le résultat donné par l'élève à cette question (erreur notée « 1 » si l'élève répond 1 par exemple).

La troisième question relève du sous-type de tâche Q2, comme la première question, mais ici la barre de fraction est déjà écrite signifiant par là à l'élève qu'il est attendu un nombre écrit sous forme de fraction puisqu'il ne sera pas possible ici de donner une réponse sous forme d'un nombre décimal. L'erreur attendue dans cette question est que l'élève complétera l'égalité $\frac{....}{....} \times 7 = 13$ par le nombre $\frac{7}{13}$, soit par l'inverse du nombre cherché (erreur notée « $\frac{7}{13}$ »). De manière similaire à la question précédente, toute autre erreur sera notée par le résultat donné par l'élève à cette question.

La quatrième et dernière question de l'exercice 6 relève du sous-type de tâche Q5.

Deux erreurs différentes sont ici attendues lorsque les élèves compléteront l'égalité $\frac{5}{11} \times 11 = ...$:

— L'élève effectue la multiplication 5×11 et trouve 55 (erreur notée « 55 »).

— L'élève identifie 11 comme étant la bonne réponse (erreur notée « 11 »).

De nouveau, toute autre erreur sera notée par le résultat donné par l'élève à cette question.

Après un relevé des erreurs commises par les élèves dans les deux exercices présentés intégrés à cette évaluation, le tableur de LibreOffice nous permettra dans ce qui suit d'en faire une analyse quantitative a posteriori.

7.4 Résultats

Le relevé détaillé des erreurs commises par les élèves est disponible en Annexe 11.8, ainsi que les détails relatifs à chaque question des deux exercices. En ce qui concerne l'exercice 4, les résultats sont synthétisés dans le tableau présenté dans la Figure 51 :

Total ex. 4		
CORRECT	62	36,26 %
FAUX	69	40,35 %
Non fait	40	23,39 %
Total	171	100,00 %

Figure 51: Résultats pour l'exercice 4

Nous pouvons constater que seulement 36,26 % des réponses à cet exercice sont correctes, ce qui est peu. Près du quart (23,39 %) des élèves ont choisi de laisser cet exercice sans réponses. 40,35 % des réponses sont erronées. Les principales erreurs sont liées au fait d'avoir cherché à écrire des fractions égales (ceci concerne 6 élèves). 5 élèves (sur les 57 élèves ayant passé cette évaluation) ont compris qu'il fallait écrire la fraction en toute lettre à chaque fois. 5 élèves ont été capables d'écrire correctement le calcul à effectuer, mais ne sont pas parvenus à donner la bonne réponse ensuite. En conclusion de cet exercice, nous pensons que la consigne n'a pas été comprise par beaucoup d'élèves et que la signification d'« écriture décimale » a été un obstacle déterminant.

Les résultats de l'exercice 6 sont présentés dans la Figure 52 ci-dessous :

Total ex. 6		
CORRECT	189	82,89 %
FAUX	33	14,47 %
NON FAIT	6	2,63 %
Total	228	100,00 %

Figure 52: Résultats pour l'exercice 6

Nous remarquons que l'exercice 6 a été bien mieux réussi que l'exercice 4 puisqu'ici nous obtenons environ 83 % de réponses correctes, 14 % de réponses erronées et seulement 3 % de non-réponses. La question la mieux réussie de l'exercice est bien entendu la première question (91 % de réponses correctes), puis la quatrième question remporte le meilleur score suivant (84 % de réponses correctes). L'erreur la plus courante dans cette question est de compléter l'égalité $\frac{5}{11} \times 11 = \dots$ par le nombre 55. L'erreur la plus courante dans la deuxième question a été de compléter l'égalité $\frac{2}{3} \times \dots = 2$ par la valeur 1 (ceci concerne 5 élèves sur 57). Il est possible d'imaginer que les élèves ayant fait cette erreur n'ont tout simplement pas tenu compte du dénominateur dans cette question. L'erreur courante suivante est de compléter par la valeur 2 (4 élèves sur 57). Ici, il est possible de penser que ces élèves ont pu poser la division, puis donné une valeur approchée du résultat pour ensuite compléter l'égalité : $2 \div 3 \simeq 0{,}67 \simeq 1$ et ensuite $1 \times 2 = 2$. Mais par ailleurs, la question reste bien réussie par les élèves avec 79 % de réponses correctes, tandis que la troisième question a été réussie par 77 % des élèves. L'erreur la plus courante dans cette troisième question a été de compléter l'égalité $\frac{\dots}{\dots} \times 7 = 13$ par $\frac{7}{13}$, donc par l'inverse du nombre cherché. Cette question est la seule à avoir donné lieu à une variété de réponses, ainsi on y trouve les réponses suivantes : 7 ; $\frac{12}{7}$; $\frac{1{,}2}{7}$; $\frac{1{,}8}{18}$; $\frac{2}{6{,}5}$; $\frac{1{,}6}{7}$. Pour certaines de ces erreurs, il serait assez difficile de se représenter la démarche de l'élève, alors que dans d'autres, une erreur de recopie semble une explication plausible, lorsque le dénominateur trouvé est bien 7, comme pour $\frac{12}{7}$, $\frac{1{,}2}{7}$ et $\frac{1{,}6}{7}$.

Dans cette partie, nous avons analysé les résultats des élèves lors d'une évaluation sur les questions qui y étaient présentes en lien avec le sens quotient de la fraction, et la définition même du sens quotient. Le premier exercice analysé révèle que les élèves ont des difficultés à comprendre le sens des mots « écriture décimale », ce qui cependant ne présage pas d'une mauvaise compréhension du sens quotient. Afin de pouvoir évaluer si les élèves étaient dans la capacité d'associer la barre de fraction au signe de la division, il aurait probablement fallu formuler l'énoncé de cet exercice autrement, en demandant par exemple aux élèves de calculer les quotients indiqués, plutôt que de leur demander de donner l'écriture décimale des nombres. Le deuxième exercice analysé permet de constater que la définition du sens quotient de la fraction semble globalement très bien maîtrisée, avec un score de 83 % de réponses correctes.

7.5 Conclusion

Dans cette partie de notre mémoire, nous avons cherché à produire une nouvelle proposition didactique pour introduire le sens quotient de la fraction. Après avoir analysé la définition préconisée de cet objet de savoir tant dans les programmes officiels que dans les manuels scolaires, nous avons opté pour introduire le sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division plutôt que dans le chapitre sur les fractions, ceci en prenant appui sur l'algèbre auquel les élèves ont été initiés en amont, et sur la technique de vérification de la division. Lors de la division décimale, lorsque la division « ne s'arrête jamais », ceci justifie l'écriture du quotient exact sous forme de fraction, et de plus, la vérification d'une telle division écrite avec des lettres plutôt qu'avec des nombres génère l'écriture de la définition du sens quotient de la fraction telle que préconisée dans les programmes officiels : $\frac{a}{b} \times b = a$. Nous avons ensuite développé des rituels d'entraînement pour les élèves à travers un « carnet de sens quotient » dont le contenu a été guidé par notre analyse praxéologique. Enfin, nous avons voulu évaluer le savoir appris par les élèves grâce à des questions incorporées dans une évaluation de l'enseignante. Les résultats ont montré dans le premier exercice (exercice 4), que les élèves n'ont pas compris la formulation de l'énoncé « Donner l'écriture décimale des nombres ». Par contre, l'exercice relevant des sous-types de tâches Q2, Q4 et Q5 (exercice 6) a été très bien réussi puisque 83 % des réponses sont correctes. Ceci nous permet d'apporter des éléments de réponse supplémentaires à notre troisième question de recherche QR3 :

<u>QR3 :</u> Une introduction de la définition du sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division plutôt qu'en début de chapitre sur les fractions est-elle susceptible de permettre aux élèves de donner du sens à cette définition, ceci en prenant appui sur les praxéologies travaillées avec l'algèbre et la division ?

En prenant appui sur les praxéologies travaillées avec l'algèbre et la division, tout laisse penser que les élèves ont pu donner du sens à la définition du sens quotient de la fraction telle qu'elle a pu être introduite dans le chapitre sur la division. Les résultats de l'exercice 6 sont très satisfaisants, et de surcroît, le pourcentage de non-réponse est extrêmement faible, ce qui tend à indiquer que les élèves n'ont pas éprouvé de crainte à s'engager dans une démarche, ils ont gagné en confiance dans ce type de résolution.

Dans la suite de la progression, le chapitre abordant les fractions sera l'occasion d'évoquer de nouveau le sens quotient de la fraction, mais l'enseignante ne le fera que très succinctement, car nous avons par la suite le projet de tester les connaissances des élèves, mais à distance dans le temps cette fois-ci, nous planifions pour ce faire un post test.

8 POST TEST ÉLÈVE

Après avoir introduit l'utilisation de l'algèbre au travers d'une activité permettant aux élèves de manipuler des lettres, nous avons ensuite introduit le sens quotient de la fraction dans le chapitre traitant de la division en prenant appui sur l'algèbre. Nous avons pu évaluer le savoir appris par les élèves à la fin de ce chapitre, et nous avons souhaité approfondir sur ce sujet. Si les élèves ont simplement cherché à mémoriser la place des nombres qui se répètent dans les égalités faisant intervenir le sens quotient de la fraction, il y aura alors une forte probabilité pour que cette mémorisation soit peu fiable un mois plus tard, d'autant plus qu'une période de vacances se sera intercalée entre les apprentissages. Par contre, si les élèves ont mémorisé les techniques tout en ayant extrait le sens sous-jacent, tout porte à espérer qu'ils soient capables de re-mobiliser ces connaissances à distance dans le temps. Ceci sera l'objet du post test présenté à la suite.

8.1 Analyse a priori du post test élève

Avec l'objectif de répondre à notre dernière question de recherche Q4 nous avons élaboré un post test élève. La question de recherche Q4 est rappelée ci-dessous :

Q4 : L'ingénierie mise en œuvre a-t-elle permis aux élèves de donner du sens et d'utiliser la définition (du sens quotient de la fraction) pour résoudre des exercices ? Ces apprentissages du sens et des techniques sont-ils pérennes ?

Le post test élève demande à être réalisé à distance dans le temps des apprentissages effectués en relation avec le remplacement d'une lettre par une valeur dans une formule et à distance également des apprentissages en relation avec le sens quotient de la fraction. Lili a pu faire passer ce post test à ses deux classes de 6e où les aménagements de progression ont été effectués, et nous avons pu demander a un autre enseignant du collège de Lili de faire de même, sachant que ce dernier n'avait pas mis en œuvre les mêmes aménagements. Ce post test a été construit à partir des résultats dégagés dans notre revue de littérature et en prenant appui sur l'ingénierie mise en œuvre. L'analyse a priori menée dans ce qui suit nous permettra de la confronter à une analyse a posteriori.

Premier exercice

Dans un premier temps nous avons voulu tester si les élèves éprouvaient des difficultés à remplacer des lettres par leurs valeurs respectives lors de l'instanciation d'une formule. La première question est la suivante :

1. Calculer en montrant le détail du calcul : $3 \times a + b + 2 \times c$ avec $a = 3\,;\ b = 2$ et $c = 5$

$3 \times a + b + 2 \times c = \ldots$

Figure 53: Première question du post test

L'énoncé proposé est de nature à rappeler les expressions écrites par les élèves de Lili lors de l'activité des jetons. Comme ce que nous voulons tester concerne l'usage des lettres et non la mémorisation des conventions d'écriture des expressions réduites, nous avons choisi de ne pas écrire cette première formule sous forme réduite et donc nous avons fait apparaître les signes « × ». Du reste, les classes n'ayant pas suivi les aménagements faits dans les classes de Lili pourraient, sans ces signes « × », difficilement produire autre chose qu'une concaténation. Dans ce calcul, le résultat idéal attendu est le suivant : $3 \times a + b + 2 \times c = \underline{3 \times 3} + 2 + \underline{2 \times 5} = 9 + 2 + 10 = 21$. Dans cette première question, nous projetons les erreurs suivantes :

— L'élève ne parvient pas à remplacer les lettres par leurs valeurs ou/et ne parvient pas à mettre en œuvre un calcul pour donner un résultat numérique (erreur notée « r »). Par exemple, le résultat donné est : 9a 2b 10c.

— L'élève parvient à remplacer les lettres par leurs valeurs respectives, mais produit une erreur de calcul (erreur notée « c »). Nous pensons que l'erreur la plus courante sera liée au non-respect des priorités de calcul : la priorité de la multiplication sur l'addition. Nous projetons que beaucoup d'élèves effectueront leurs calculs dans le sens de lecture, ce qui produit alors 65 comme résultat : $3 \times 3 + 2 + 2 \times 5 = 9 + 2 + 2 \times 5 = 13 \times 5 = 65$

De même, nous pensons qu'une autre erreur fréquente sera liée à la proximité des deux nombres 2 qui offre un calcul simple à effectuer avant de calculer les multiplications, le résultat serait alors : $3 \times 3 + 2 + 2 \times 5 = 3 \times 3 + 4 \times 5 = 9 + 20 = 29$.

— Nous projetons également que dans ce type de calcul, une partie des élèves cherchera à effectuer des calculs en découpant l'expression par morceaux, ce qui produira un certain nombre d'erreurs d'écriture (erreur notée « e »), en particulier en induisant l'écriture d'égalités fausses, comme : $3 \times 3 = 9 + 2 = 11 + 2 = 13 \times 5 = \ldots$

— Lorsque les élèves s'engagent dans le calcul en faisant celui-ci par étapes, nous pensons qu'ils auront tendance à oublier la valeur de b puisque aucun coefficient ne précède b, et que de plus, la valeur de b étant 2, ils auront l'impression d'avoir tenu compte de cette valeur en calculant $2 \times c$. Les écritures produites seraient alors : $3 \times 3 = 9$; $2 \times 5 = 10$; $9 + 10 = 19$. Cette erreur relève pour nous d'une erreur de calcul (erreur notée « c »). Nous pensons que d'autres erreurs par omission d'une partie de l'expression sont possibles, soit en calculant seulement le début de celle-ci, soit en calculant seulement la fin, ce qui produirait un résultat égal à 9, 10 ou 11.

— Nous projetons qu'un certain nombre d'erreurs seront liées au fait qu'en 6ème, il se trouve des élèves confondant le signe « + » et le signe « × ». Une telle confusion produirait par exemple le calcul suivant : $3 + 3 + 2 + 2 + 5 = 15$ ou une variante de celui-ci. Ces erreurs sont répertoriées dans les erreurs de calcul notées « c », mais chaque résultat produit sera consigné dans notre relevé d'erreurs.

Si l'élève ne s'engage dans aucune démarche, nous considérerons son résultat faux, et nous consignerons « n » dans notre tableau de résultats pour « non fait ».

Deuxième exercice

Le deuxième exercice du test se veut toujours en lien avec l'usage des lettres mais cette fois-ci dans le contexte du calcul d'un périmètre. La deuxième question est la suivante :

2. Calculer le périmètre d'un rectangle de largeur $\ell = 3$ cm et de longueur L = 6 cm

P = …………

Figure 54: Deuxième question du post test

Le périmètre du rectangle et sa formule étant déjà travaillés en CM2, puis rappelés en 6e, nous avons pensé que c'était une question qui pouvait mettre les élèves en confiance après la première question qui est pour sa part assez inhabituelle dans le cadre d'une progression comme celle qui peut être proposée dans les manuels. Cet exercice peut être traité par les élèves sans utilisation de formule, cependant il nécessite la mémorisation de la définition du périmètre d'un polygone et des propriétés du rectangle pour pouvoir additionner les longueurs des côtés. Cette question peut aussi réactiver la notion de formule chez les élèves, et la manière dont ils ont pu y remplacer la longueur et la largeur par des valeurs numériques. Si certains ont pu rencontrer des difficultés pour répondre à la première question, il se peut qu'après la deuxième question ils soient à même d'y revenir pour réinvestir la méthode qu'ils connaissent avec le périmètre dans ce nouveau contexte. La réponse idéalement attendue est ici $P = 2 \times L + 2 \times l = \underline{2 \times 6} + \underline{2 \times 3} = 12 + 6 = 18\text{ cm}$, ou une variante de celle-ci, comme $P = 2 \times (L + l) = 2 \times (\underline{6 + 3}) = 2 \times 9 = 18\text{ cm}$. Dans la résolution de cet exercice, nous projetons les erreurs suivantes :

— L'élève cherche à mobiliser une formule mais utilise la formule de l'aire du rectangle au lieu de celle du périmètre. L'écriture alors produite est : $P = L \times l = 6 \times 3 = 18\text{ cm}$. Dans ce cas, nous considérerons que l'élève a remplacé correctement les lettres par leurs valeurs dans une formule qui est, elle, erronée. Aussi, nous considérerons cette réponse comme correcte, tout en relevant l'erreur de formule (erreur notée « f »). Nous pouvons remarquer que si l'élève ne produit pas de détail de calcul, il devient alors impossible de distinguer quelle formule a été utilisée, puisque les deux formules donnent le même résultat numérique. Nous noterons « d » le fait que l'élève n'ait pas produit de détail de calcul.

— L'élève ne calcule qu'une partie du périmètre, le calcul produit est alors : $P = L + l = 6 + 3 = 9 \text{ cm}$. Ce type d'erreur peut relever du fait que lorsque les élèves font le calcul par étapes, ils en viennent à oublier la dernière, qui serait de multiplier par 2. Ce type d'erreur peut aussi illustrer la confusion du signe « + » et du signe « $\times$ », si l'élève a pu souhaiter utiliser la formule de l'aire d'un rectangle.

— L'élève s'engage dans une démarche où il ne fait intervenir que la longueur d'un seul côté, et calcule le périmètre ou l'aire d'un carré. Ceci donnerait lieu aux résultats suivants : 12, 9, 24, 36.

Comme lors de l'exercice précédent, la résolution pourra entraîner des écritures incorrectes et des égalités fausses qui nous noterons par « e ». Comme lors de l'exercice précédent, si l'élève ne s'engage dans aucune démarche, nous considérerons son résultat faux, et nous consignerons « n » dans notre tableau de résultats pour « non fait ».

Troisième exercice

Le troisième exercice partage les mêmes objectifs que les précédents, mais avec la particularité de pouvoir examiner si les élèves ont des difficultés à remplacer π par la valeur 3,14, en plus de devoir remplacer le rayon R par la valeur 4. La troisième question est la suivante :

3. Calculer la longueur (le périmètre) d'un cercle de rayon R = 4 cm

On rappelle la formule : $L = 2 \times R \times \pi$

L = ……

Figure 55: Troisième question du post test

Le choix est fait ici de rappeler la formule du calcul de la longueur du cercle, pour que l'obstacle au calcul ne soit pas la bonne mémorisation de la formule. Nous choisissons les deux formulations « longueur du cercle » et « périmètre du cercle » car le vocabulaire peut être diversement utilisé par les enseignants. Nous y donnons la valeur numérique du rayon et pas celle du diamètre, la visée étant de maximiser les chances que l'élève s'engage dans le calcul.

La réponse idéale attendue est : $L = 2 \times R \times \pi = 2 \times 4 \times 3{,}14 = 8 \times 3{,}14 = 25{,}12 \text{ cm}$. Les différentes erreurs qui peuvent être produites par les élèves sont alors les suivantes :

— L’élève n’utilise pas la formule donnée et en écrit une autre, comme la formule de l’aire du disque $L = R \times R \times \pi$, ou une autre formule erronée. Cette erreur sera notée « f ».

— L’élève remplace correctement les lettres par leurs valeurs, mais n’a pas mémorisé correctement la valeur numérique approchée utilisée en 6e du nombre π . Nous noterons cette erreur par « v ».

— L’élève ne remplace pas correctement les lettres par leurs valeurs, par exemple il ne tient pas compte de π et celui-ci disparaît du calcul, ou bien, lorsqu’il remplace R par 4, il remplace également 2 par 4. Cette erreur sera notée « r ».

— L’élève a correctement remplacé les lettres par leurs valeurs, mais confond ensuite les signes « × » et « + », ce qui donne le résultat : $L = 2 \times R \times \pi = 2 \times 4 \times 3{,}14$; $L = 8 \times 3{,}14 = 11{,}14$. Cette erreur sera considérée comme une erreur de calcul notée « c », mais les résultats seront reportés dans notre tableau de résultats.

— L’élève a correctement remplacé les lettres par leurs valeurs, mais ne parvient pas à effectuer correctement la multiplication par le nombre décimal 3,14 (les élèves ne disposent pas de calculatrice pendant le test ni pendant les évaluations, les plus fragiles peuvent cependant utiliser des tables de multiplication). Cette erreur sera consignée comme une erreur de calcul notée « c ».

Comme lors des exercices précédents, si l’élève ne s’engage dans aucune démarche, nous considérerons son résultat faux, et nous consignerons « n » dans notre tableau de résultats pour « non fait ». Une erreur dans l’écriture sera également notée « e ».

Quatrième exercice

La quatrième et dernière question concerne directement le sens quotient de la fraction, et décline plusieurs de ces aspects. Elle est rédigée de la sorte :

4. Compléter les égalités

$\ldots\ldots \times 8 = 32$; $\frac{17}{6} \times \ldots. = 17$; $\frac{11}{7} \times 7 = \ldots.$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times 3 = 4$

Figure 56: Quatrième question du post test

Il s’agit donc ici de multiplications à trous à compléter, cet exercice est similaire en tout point à l’exercice 6 (voir Figure 51 p.82) déjà proposé lors de l’évaluation que nous avons présentée dans la partie 7.3.2 concernant l’évaluation du savoir appris par les élèves. Nous ne détaillerons donc pas les différentes erreurs attendues puisqu’elles sont abordées page 82 de ce mémoire. Comme lors de l’évaluation, toute erreur sera notée par le résultat donné par l’élève à chaque question, et comme dans les exercices précédents, une non-réponse de l’élève sera notée « n ». L’entièreté du post test peut être consultée en Annexe 11.9.

Après un relevé des erreurs commises par les élèves dans les quatre exercices proposés dans ce post test, le tableur de LibreOffice nous permettra dans ce qui suit d'en faire une analyse quantitative a posteriori.

8.2 Analyse a posteriori

Le post test décrit dans la partie précédente a pu être proposé aux deux classes d'élèves de 6e de Lili (6A et 6B) ayant bénéficié des adaptations de l'ingénierie didactique développée dans ce mémoire, et également aux deux classes d'élèves de 6e de son collègue du même établissement scolaire (6C et 6D) n'ayant pas bénéficié de ces adaptations. La distance dans le temps par rapport aux apprentissages est d'un mois pour les élèves de Lili, et de cinq semaines pour son collègue. Cette partie se propose d'étudier les résultats du post test, en comparant les résultats obtenus par les deux types de classes (avec adaptation versus sans adaptation). L'ensemble des grilles de résultats sont visibles en Annexe 11.10.

Premier exercice

Le premier exercice consistait à calculer la valeur d'une expression algébrique pour des valeurs données. Les élèves ont dans l'ensemble bien réussi à substituer les lettres par leurs valeurs dans les deux groupes différents. On relève peu de non-réponses (seulement trois non-réponses pour chaque groupe). Par contre, à notre étonnement, les élèves de Lili ont moins bien réussi le calcul correct de l'expression que les élèves de son collègue. Le nombre d'erreurs de calcul est cependant strictement identique dans les deux groupes, mais les élèves de Lili ont produit davantage d'écritures incorrectes induisant ensuite un calcul erroné. Seulement 37,5 % des élèves de Lili ont pu trouver un résultat correct contre 47 % des élèves de son collègue. La répartition des résultats est présentée Figure 57.

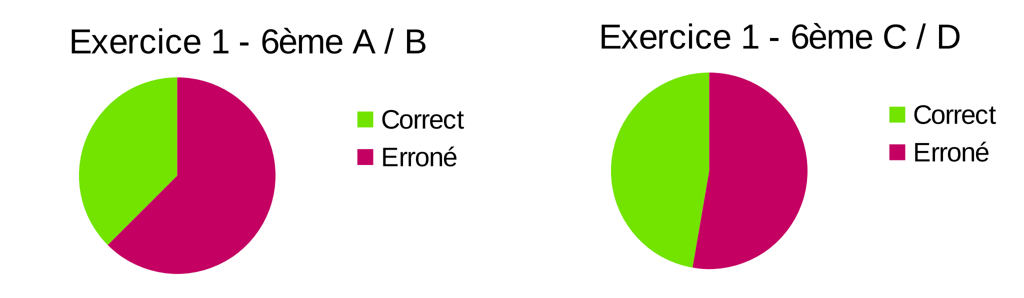


Figure 57: Répartition des résultats à l'exercice 1 du post test

Lors du calcul de l'expression, l'erreur la plus courante faite par les élèves les amène à trouver 65 pour résultat (34 % des élèves de Lili font cette erreur, alors que 38 % des élèves de son collègue la font) ; cette erreur consiste à ne pas respecter la priorité des opérations, les élèves enchaînent alors les calculs dans le sens de lecture. L'erreur qui vient ensuite est celle qui consiste à trouver 29 (6 % des élèves de Lili et 10 % des élèves de son collègue), cette erreur est produite lorsque les élèves font le choix d'additionner les deux valeurs 2 qui sont contiguës avant d'en multiplier le résultat par 5. Il en résulte que dans cet exercice, les erreurs de calcul proviennent surtout du non-respect des priorités opératoires, les autres types d'erreurs restant à la marge. Nous pouvons conclure que dans ce type de calculs, les apprentissages faits par les élèves de Lili ne semblent pas les avoir avantagés, au contraire, ces apprentissages faisant partie du « déjà là », les élèves semblent avoir été moins vigilants lors du calcul.

Deuxième exercice

Dans le deuxième exercice, il s'agit de calculer le périmètre d'un rectangle pour des valeurs données de la longueur et de la largeur. Les données de l'exercice ont cette particularité qu'il est possible d'obtenir le bon résultat en utilisant la formule de l'aire du rectangle. Quand cela est possible (c'est-à-dire lorsque le détail des calculs permet cette observation), nous avons distingué dans l'étude des résultats les cas où la formule utilisée n'est pas la bonne (mais puisque le résultat trouvé est correct, ceci indique que les élèves parviennent à utiliser correctement les données de l'exercice). Les résultats corrects obtenus dans les classes de Lili sont à peu près les mêmes que dans les classes de son collègue : 55 % des résultats sont corrects dans les classes de Lili, tandis que 56 % des résultats sont corrects dans les classes de son collègue. La répartition des résultats de cet exercice est présentée dans la Figure 58.

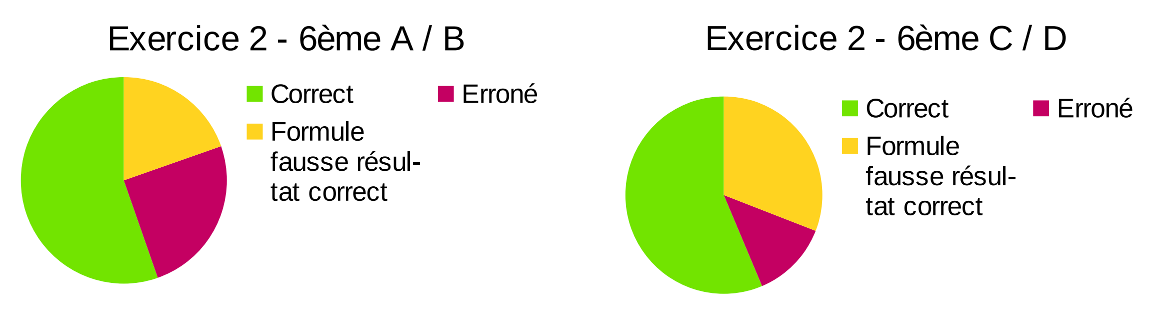


Figure 58: Répartition des résultats à l'exercice 2 du post test

Nous pouvons remarquer que les élèves de Lili sont moins nombreux à obtenir un résultat numériquement correct en utilisant la formule de l'aire du rectangle, ils sont 20 % alors que dans la classe de son collègue, cette proportion est de 31 %. L'erreur la plus courante pour les deux groupes confondus, est de trouver 9 pour résultat ; ceci concerne 36 % des élèves de Lili contre 14 % des élèves de son collègue. Cette erreur consiste à additionner les deux côtés du rectangle, en oubliant de multiplier par 2 ensuite. Mais ce résultat est aussi produit par les élèves qui utilisent la formule de l'aire du rectangle, tout en confondant les signes « + » et

« × ». Dans les deux différents groupes, nous pouvons remarquer que le nombre de non-réponse est faible (seulement deux élèves pour chaque groupe), ce qui indique que les élèves ont su s'engager dans une démarche, même si celle-ci n'est pas correcte.

Troisième exercice

Le troisième exercice a pour objectif le calcul de la longueur du cercle de rayon 4 cm. Seulement 25 % des élèves de Lili ont réussi à mener à bien ce calcul, alors que dans les classes de son collègue, 47 % des élèves ont réussi à produire le bon résultat. La répartition des résultats est présentée dans la Figure 59.

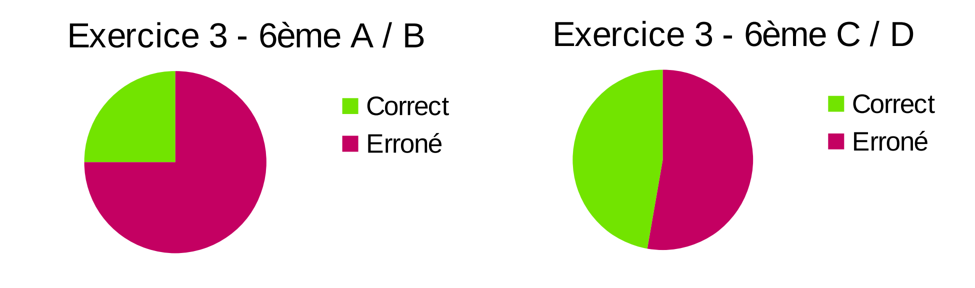


Figure 59: Répartition des résultats à l'exercice 3 du post test

24 % des élèves de Lili ont eu des difficultés pour remplacer les lettres par leurs valeurs, tandis que 21 % des élèves de son collègue ont éprouvé ces difficultés. Nous pouvons remarquer que la plupart des erreurs faites par les élèves de Lili sont liées au fait qu'ils ont mal mémorisé la valeur de π, qui se trouve alors remplacée par les nombres suivants : 4 ; 4,4 ; 3,8 ; 1,4 ; 3,3 ou encore 14. Ceci peut s'expliquer par le fait que les élèves de Lili ont travaillé sur le périmètre des figures à la mi-janvier, alors que pour les élèves de son collègue, cet objet de savoir avait été abordé trois semaines plus tôt seulement. Cette distance importante dans le temps peut elle aussi expliquer que 26 % des élèves de Lili n'ont pas su s'engager dans une démarche de résolution concernant cet exercice, alors que cela ne touche que 10 % des élèves de l'autre groupe.

Quatrième exercice

Le quatrième exercice comporte quatre questions relatives au sens quotient de la fraction. La répartition des résultats est exposée dans la Figure 59 :

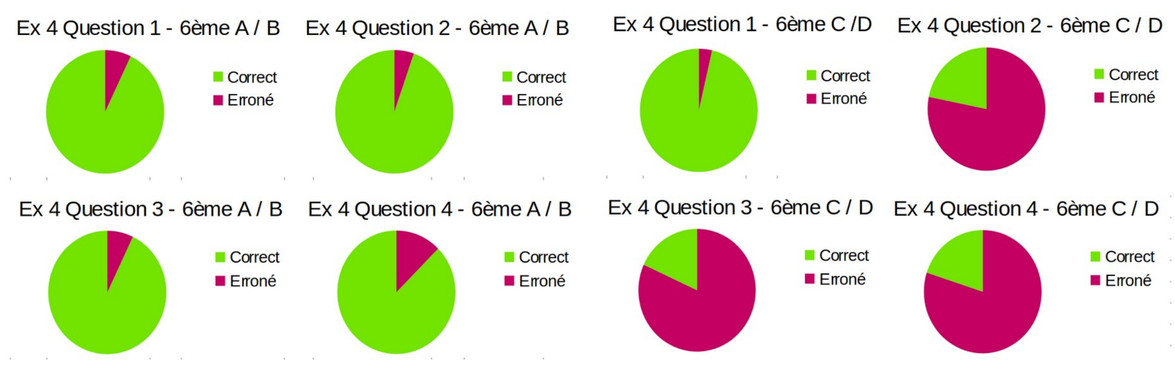


Figure 60: Répartition des résultats aux quatre questions de l'exercice 4 du post test

Dans la première question, $\ldots\ldots \times 8 = 32$, il est attendu des élèves de compléter une multiplication à trou (combien de fois huit pour avoir 32), cette question peut être complétée sans faire intervenir le sens quotient de la fraction, en utilisant les tables de multiplication. Cette première question a été très bien réussie par les élèves : 93 % des élèves de Lili ont écrit la bonne réponse contre 96 % des élèves de son collègue. Le taux de non-réponse est très faible pour cette question, seulement deux élèves de chaque groupe n'y ont pas répondu. 4 élèves des classes de Lili ont donné une réponse fausse du fait d'une mauvaise maîtrise des tables de multiplication, alors qu'ils ne sont que deux dans les classes de son collègue.

La deuxième égalité, $\frac{17}{6} \times \ldots\ldots = 17$, fait cette fois intervenir le sens quotient de la fraction. 95 % des élèves des classes de Lili ont su répondre correctement à cette question, alors qu'ils ne sont que 22 % dans les classes de son collègue. Tous les élèves de Lili ont essayé de répondre à cette question, tandis que dans l'autre groupe, on remarque un taux de non-réponse de 51 % (une non-réponse est considérée comme une réponse fausse pour la répartition des résultats). L'erreur la plus fréquente faite par les élèves de Lili est d'avoir complété cette égalité par le nombre 1. On peut penser que ces élèves n'ont tout simplement pas tenu compte du dénominateur de la fraction, ce qui donne alors une égalité cohérente : $17 \times 1 = 17$. L'erreur la plus fréquente faite par les élèves de son collègue, est d'avoir complété l'égalité par le nombre 2. Il est possible d'imaginer que ces élèves ont voulu compléter l'égalité par le quotient résultant de la division euclidienne de 17 par 6. Un certain nombre de valeurs données par les élèves du collègue de Lili font intervenir des « 8 » : la valeur « 8 » apparaît deux fois, puis « 8,5 » et enfin « 18 ». Si les élèves ont pu avoir des difficultés à remplir cette deuxième égalité, ils ont sans doute essayé de raisonner sur l'égalité précédente, sans toutefois parvenir à s'en détacher pour adapter leur deuxième réponse aux données de l'énoncé, ce qui pourrait expliquer cette réminiscence du nombre « 8 » présent auparavant, dans les réponses données à cette question. Nous constatons finalement que les élèves de Lili qui semblent pourtant moins à l'aise avec les mathématiques, étant donné le nombre d'erreurs de calculs et la mémorisation instable des tables de multiplication dans les autres questions du test, ont beaucoup mieux réussi à répondre à cette question.

La troisième égalité à compléter était : $\frac{11}{7} \times 7 = \ldots\ldots$. 93 % des élèves des classes de Lili ont écrit la valeur correcte manquante (la valeur 11), contre 18 % des élèves dans l'autre groupe. Parmi les élèves de Lili, un seul n'a pas essayé proposer une valeur en lieu et place des pointillés, tandis que dans les classes de son collègue, 55 % des élèves ont choisi de laisser cette question sans réponse. Les trois réponses erronées des élèves de Lili sont : 1, 7 et 14. Lorsque l'élève a répondu « 1 », il est possible d'imaginer que l'élève avait l'intention d'écrire « 11 », et que ce pourrait être une erreur simple d'écriture, au même titre que les erreurs d'écriture de mots où les élèves n'écrivent pas la fin du mot, ce qui devient de plus en plus fréquent en 6e (et même en 3e), ainsi, « les élèves » deviennent « les élèv » et « la classe » devient « la clas ». Il est aussi possible d'imaginer que la réponse « 1 » est en fait le quotient dans la division euclidienne de 11 par 7. Lorsque l'élève écrit pour résultat « 7 », ceci indique qu'il a su mémoriser que dans ce type d'égalité, les nombres écrits se répètent, mais n'ayant pas mémorisé le sens de ces écritures, il fait alors le mauvais choix du nombre à répéter. Pour trouver la valeur 14, il se peut que l'élève ait voulu calculer 7 × 7, mais comme quelques-uns confondent encore les signes « + » et « × », l'élève aurait ensuite calculé 7 + 7 et obtenir ainsi 14. Ces trois valeurs erronées (1, 7 et 14) pour compléter l'égalité ont également été trouvées par les élèves de l'autre groupe, mais ils ont trouvé également d'autres valeurs comme 77 et 17. La valeur « 17 » semble provenir d'une hybridation du « 7 » et du « 11 » de l'énoncé (mais peut aussi apparaître comme un fantôme de l'égalité précédente où le nombre 17 était présent), tandis que pour trouver la valeur 77, il semble que l'élève n'ait tout simplement pas pris en considération le dénominateur de la fraction, en calculant 11 × 7 = 77. Finalement, nous constatons que les élèves de Lili ont très bien réussi cette question en rapport de l'autre groupe.

La quatrième et dernière égalité à compléter était : $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times 3 = 4$. 88 % des élèves de Lili ont su répondre correctement à cette question, et on ne relève qu'une seule non-réponse. Dans les classes de son collègue, seulement 20 % des élèves ont pu trouver la bonne réponse, avec de plus un taux de non-réponse record de 64 %. Les réponses erronées sont très variées cette fois : $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{3}{1,3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1,5}{}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{1,5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{4}$.

Dans ces réponses, nous pouvons remarquer la présence du nombre « 7 », qui peut être obtenu en additionnant le « 3 » et le « 4 » de l'énoncé, certes, mais qui rappelle également le « 7 » de l'égalité précédente. De même, nous retrouvons le « 8 », le « 6 » et le « 11 » des questions précédentes. L'erreur qui consiste à inverser le numérateur et le dénominateur pour trouver $\frac{3}{4}$ n'a été observée qu'une seule fois à notre étonnement, alors que nous avions projeté que ce serait l'erreur la plus courante ; une variante très proche en est la réponse $\frac{6}{4}$. Après avoir examiné les réponses à cette dernière question, nous constatons que les élèves de Lili ont été plus efficaces pour trouver la bonne réponse.

8.3 Conclusion

Le post test effectué s'est révélé instructif concernant le savoir appris par les élèves, puisque soumis aux élèves à distance dans le temps. Nous avons compté cinq semaines (dont deux semaines de vacances) entre la fin du chapitre sur les fractions et le passage du test pour les élèves de Lili, et six semaines pour les élèves de son collègue. Les premiers exercices du post test qui visent à identifier les difficultés des élèves pour remplacer des lettres par leurs valeurs ne semblent pas indiquer que les élèves de Lili aient eu plus de facilités pour le faire, puisqu'en réalité la première question a été mieux réussie par les élèves n'ayant pas bénéficié du travail d'introduction à l'algèbre. Dans les deux exercices suivants, les élèves de Lili apparaissent désavantagés par rapport à l'autre groupe puisque le calcul de périmètre avait été abordé en janvier par Lili, alors que son collègue n'avait terminé ce chapitre que depuis une semaine. En particulier, l'obstacle le plus important a été la bonne mémorisation du nombre π dans l'exercice 3 pour permettre un calcul correct par les classes de Lili. Nous considérons qu'il s'agit ici de l'un des biais de notre étude, car il est difficile d'évaluer et de comparer des classes n'ayant pas des progressions tout à fait similaires durant l'année scolaire. Un autre biais tient au fait que Lili, l'enseignante, de par son enthousiasme, a pu insister plus que d'ordinaire sur le sens quotient et y consacrer plus de temps que son collègue. Néanmoins, le dernier exercice du post test montre que les élèves de Lili maîtrisent bien davantage le sens quotient de la fraction que les élèves de l'autre groupe, et ceci avec des scores de réussite très élevés sur les trois dernières questions : 95 % contre 22 %; 93 % contre 18 %; 88 % contre 22 %. De plus, le pourcentage de non-réponse se révèle très important pour le groupe n'ayant pas profité des aménagements mis en place dans les classes de Lili. Dans les différentes égalités à compléter dans l'exercice 3, nous avons pu observer un phénomène particulier dans les réponses erronées des élèves dans les deux groupes : la réminiscence des nombres de l'égalité précédente dans les réponses données.

Afin de compléter notre étude à travers ce post test, nous avons demandé à d'autres enseignants de 6e d'y participer, et nous avons pu obtenir les résultats d'une première classe (établissement 1). Ces résultats étaient aussi satisfaisants que ceux des classes de Lili, mais il s'est révélé que l'enseignant n'avait pas suivi nos recommandations. Puisqu'il était demandé que le test soit effectué à distance, il l'a proposé à ses élèves une semaine exactement après avoir abordé le sens quotient de la fraction, mais entre le moment où cet objet de savoir a été consigné dans la leçon et le moment où les élèves ont passé le post test, l'enseignant leur a proposé chaque jour des petits rituels en début d'heure sur le sens quotient pendant une semaine. Nous considérons alors que le test a eu valeur d'évaluation immédiate d'un entraînement quotidien, et que les conditions de passage du test ne répondaient pas aux conditions attendues, ne permettant alors pas une comparaison avec les classes de Lili et de son collègue. Lors de nos échanges avec cet enseignant, il nous a indiqué que quinze jours après le post test, les élèves avaient eu une autre évaluation dans laquelle apparaissait trois questions relatives au sens quotient de la fraction. Nous avons pu consulter ces copies, et nous avons constaté avec cet enseignant que ses élèves étaient alors beaucoup moins en réussite, et que le nombre d'erreurs et de non-réponses s'approchaient bien davantage des résultats produits par les élèves du collègue du même établissement que Lili. Lors de questions sur la mise en œuvre adoptée, cet enseignant nous confie alors : « Je ne leur donne pas de « trucs » ou moyens mnémotechniques pour savoir compléter ce genre d'égalités, je reprends l'illustration du robot de l'activité d'introduction. Les élèves observateurs finissent par comprendre comment remplir sans avoir besoin de réfléchir », précisons ici qu'il utilise l'activité d'introduction du manuel Mission Indigo 6e (Barnet, et al., 2021) que nous avons analysée dans notre étude de transposition lors de notre précédent Travail d'Étude et de Recherche (TER). Plus tard, nous avons obtenu les résultats de quatre classes d'un autre établissement (établissement 2) ; nous n'avons pas pu analyser finement ces copies par manque de temps puisque reçues l'avant-veille du rendu de ce mémoire, cependant une étude superficielle de celles-ci montre qu'elles s'apparentent à celles fournies par le collègue de Lili, le taux de non-réponse semble tout aussi élevé, et les bonnes réponses assez rares.

Après ces différentes considérations, nous pensons pouvoir à présent répondre à notre quatrième question de recherche Q4 :

<u>Q4 :</u> L'ingénierie mise en œuvre a-t-elle permis aux élèves de donner du sens et d'utiliser la définition (du sens quotient de la fraction) pour résoudre des exercices ? Ces apprentissages du sens et des techniques sont-ils pérennes ?

Les apprentissages faits par les élèves de Lili se montrent bien davantage pérennes que ceux réalisés par les élèves de ses collègues en ce qui concerne le sens quotient de la fraction, après l'examen attentif du post test. Si les élèves de Lili ont pu massivement compléter correctement les différentes égalités en lien avec le sens quotient de la fraction, à distance dans le temps et après une période de vacances, c'est précisément parce qu'ils semblent y avoir donné du sens ; la mémorisation de techniques relevant d'automatismes permettant de compléter de telles égalités sans mémorisation du sens sous-jacent se retrouve rapidement fragile et altérable, l'émotion d'une évaluation venant ajouter de surcroît une certaine confusion ; seule la compréhension du sens peut permettre aux élèves de retrouver ensuite les techniques avec une aisance satisfaisante.

9 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire fait suite au Travail d'Étude et de Recherche (TER) de l'année passée qui avait pour thème la transposition didactique du sens quotient pris par la fraction. Cette suite donnée a exploré une possibilité de proposition didactique autour du sens quotient de la fraction.

Nous avons d'abord examiné s'il était possible de favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique grâce à la conception d'une ingénierie didactique. Nous avons présenté une activité d'introduction à l'algèbre faisant intervenir la manipulation pour aborder le calcul littéral et ensuite effectuer des réductions et des instanciations d'expressions mathématiques. Cette activité a été complétée de rituels regroupés dans un « carnet de calcul littéral ». Nous avons montré que le calcul de périmètre et d'aire en avait été facilité dans la suite de la progression, et que cette familiarisation avec l'utilisation des lettres avait en particulier été bénéfique quant à l'utilisation du nombre π, les élèves ayant compris que la lettre choisie lors de la désignation importait peu.

Nous avons ensuite proposé une introduction de la définition du sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division plutôt qu'en début de chapitre sur les fractions en prenant appui sur les praxéologies travaillées avec l'algèbre et la division ; la répétition des vérifications de la division tout au long de la partie leçon du chapitre en utilisant, de plus, presque uniquement les mêmes lettres a, b, c que celles utilisées auparavant lors des initiations algébriques, a pu également permettre de justifier l'écriture du résultat exact de la division sous forme de fraction et d'écrire une définition du sens « quotient » de la fraction qui semble mieux acceptée et mieux comprise par les élèves. Cette compréhension a été entretenue au cours de rituels développés dans le « carnet de sens quotient ». Les résultats tendent à prouver que ce travail d'introduction à l'algèbre a permis de faciliter la compréhension de la définition du sens quotient de la fraction par les élèves.

Enfin, les résultats des élèves de Lili lors du post test montrent que cette ingénierie mise en œuvre a permis aux élèves de donner du sens et d'utiliser cette définition de manière pérenne puisqu'ils peuvent remobiliser ces savoirs efficacement, même à distance dans le temps des apprentissages, ce qui ne semble pas être le cas des autres groupes d'élèves n'ayant pas bénéficié des mêmes adaptations particulières.

Les travaux décrits ont pu déjà retenir l'attention de certains enseignants ayant participé à notre étude : ceux-ci ont souhaité pouvoir utiliser l'activité d'introduction à l'algèbre pour laquelle ils ont manifesté un intérêt appuyé, et nous leur avons de ce fait communiqué les détails de la mise en œuvre ainsi que les documents concernant le carnet de calcul littéral. Ils projettent de l'utiliser en classe de 5e, au moment où la documentation officielle prescrit l'introduction au calcul littéral. Nous pensons que d'autres enseignants seraient susceptibles de vouloir en faire le même usage, aussi, nous souhaiterions dans un avenir assez proche écrire un article documentant l'entrée dans l'algèbre par le biais de cette activité et des rituels associés.

Les travaux engagés ces deux dernières années se sont intéressés aux difficultés des élèves concernant les fractions, puis aux difficultés liées à l'algèbre. Ces connaissances relèvent de contenus mathématiques « élémentaires », les difficultés associées sont bien documentées par la recherche internationale et nous avons pu les utiliser largement puisque les difficultés observées en France sont les mêmes que celles relevées à l'étranger. Nous souhaiterions poursuivre ces travaux avec un projet de thèse, en adressant un type de difficulté spécifique : la difficulté à mobiliser, dans les enseignements de sciences expérimentales, des connaissances relevant de contenus mathématiques « élémentaires ». Il s'agirait alors de mieux comprendre ces difficultés, d'en effectuer un diagnostic, de proposer des ressources aux enseignants qui puissent permettre de surmonter ces difficultés, ainsi que de contribuer à la conception de ressources pour la formation des enseignants.

10 BIBLIOGRAPHIE

Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, 101-139.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, *8*, 59-72.

Barnet, C., Villattes, A. et Maillard, S. (2021). *Mission Indigo 6e*. Hachette Education.

Bernigole, V., Fernandez, A., Loi, M., Salles, F. (2023). « PISA 2022 : la France ne fait pas exception à la baisse généralisée des performances en culture mathématique dans l'OCDE », *Note d'Information* n° 23.48, DEPP. https://doi.org/10.48464/ni-23-48

Blanton, M. L., et Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 2*, 135-142.
https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489698.pdf

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, *5*, 5-17. https://gpc-maths.org/data/documents/booth5x1.pdf

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Boullis, M., Soto, A., Herrmann, E., Gallien, V., Cambon, M. et Percot, S. (2021). *Myriade 6e*. Bordas éditeur.

Boullis, M., Herrmann, E., Annicchiarico, F., Lafon, M., Percot, S. et Monka, Y. (2016). *Myriade 6e*. Bordas éditeur.

Brousseau, G. (1982). D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *Actes de la deuxième école d'été de Didactique des mathématiques, IREM d'Orléans*, 39-60.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bueno-Ravel, L. (2005). Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique, Dans C. Castela et C. Houdement (eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2004*, (p.193-222). Université Paris 7, France. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR05003.pdf

Chevallard, Y. (1985 a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, *5*, 51-94. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR84010/IGR84010.pdf

Chevallard, Y. (1985 b). *La transposition didactique — du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989 a). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, *19*, 43-72. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR89002/IGR89002.pdf

Chevallard, Y. (1989 b). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, 108, 211-236.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12/1, 83-121.

Coetzee, J., et Mammen, K. J. (2017). Science and Engineering Students' Difficulties With Fractions At Entry-Level To University. International Electronic Journal of Mathematics Education, 12(3), 281-310. https://doi.org/10.29333/iejme/614

Coppé, S., et Grugeon, B. (2009, June). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ?. In *Colloque de la CORFEM*. https://shs.hal.science/halshs-00959612v1/document

Croset, M. C., Divisia, A., Le Gac, N., Mastrot, G., et Stoffel, H. (2022). Un rituel de numération. *Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire*, 110, 69-95 https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/GN/IGR22022/IGR22022.pdf

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 117-152. http://journals.openedition.org/adsc/789 ; DOI :https://doi.org/10.4000/adsc.789

Gregersen, P., Hedegaard, C., Højgaard Jensen, T., Petersen, L.K. et Thorbjørnsen, H. (2006/2012). *Matematrix 4, Grundbog.* Alinea.

Gregersen, P., Højgaard Jensen, T., Petersen, L.K. et Thorbjørnsen, H. (2008/2013). *Matematrix 5, Grundbog.* Alinea.

Gregersen, P., Højgaard Jensen, T., Petersen, L.K. et Thorbjørnsen, H. (2008/2013). *Matematrix 6, Grundbog.* Alinea.

Jolly, R. (1949). *L'arithmétique au cours moyen : classe de septième.* Fernand Nathan.

Kaput, J. J. (2017). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?. In *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781315097435-2/1-algebra-algebraic-reasoning-james-kaput

Kierran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester, F.K. (Ed) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762).

Kieran, C., et Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10-to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1215-1227.

Malaval, J., Carlod, V., Chrétien, B., Desrousseaux, P.A., Girin, M., Jacquemoud, D., Jorioz, A., Lécole, J.M., Plantiveau, A., Puigrédo, F. et Vedrine, M. (2022). *Transmath 6e*. Nathan.

Marchive, A. (2007). Le rituel, la règle et les savoirs : Ethnographie de l'ordre scolaire à l'école primaire. *Ethnologie française*, 37, 597-604. https://doi.org/10.3917/ethn.074.0597

Mary, C., Squalli, H., Theis, L., et DeBlois, L. (2014). *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique*. PUQ.

Ministère de l'Éducation Nationale (2016, novembre). Document d'accompagnement et annexes. *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*. https://eduscol.education.fr/document/16510/download

Ministère de l'Éducation Nationale (2016). Annexe 12 – Mathématiques – Attendus de fin d'année de 6e. https://eduscol.education.fr/document/14014/download

Ministère de l'Éducation Nationale (2020 a). Programme du cycle 3. *B.O. n°31 du 30 juillet 2020.* https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/88/7/ensel714_annexe2_1312887.pdf

Ministère de l'Éducation Nationale (2020 b). Repères annuels de progression cycle 3 Mathématiques. https://eduscol.education.fr/document/14026/download

Ministère de l'Éducation Nationale (2020 c). Repères annuels de progression cycle 4 Mathématiques. https://eduscol.education.fr/document/14080/download

Ministère de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports (2022). Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. https://eduscol.education.fr/document/32206/download

Ministère de l'Éducation Nationale (s.d.). Annexe 12 – Mathématiques – Attendus de fin d'année de 6e. https://eduscol.education.fr/document/14014/download

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277. https://www.researchgate.net/profile/Luis-Radford/publication/261014764_The_Progressive_Development_of_Early_Embodied_Algebraic_Thinking/links/548bb2570cf225bf669f8b1b/The-Progressive-Development-of-Early-Embodied-Algebraic-Thinking.pdf

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires. Québec. Livres en ligne du CRIRES : https ://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches https://crires.ulaval.ca/full-text/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_lecole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf

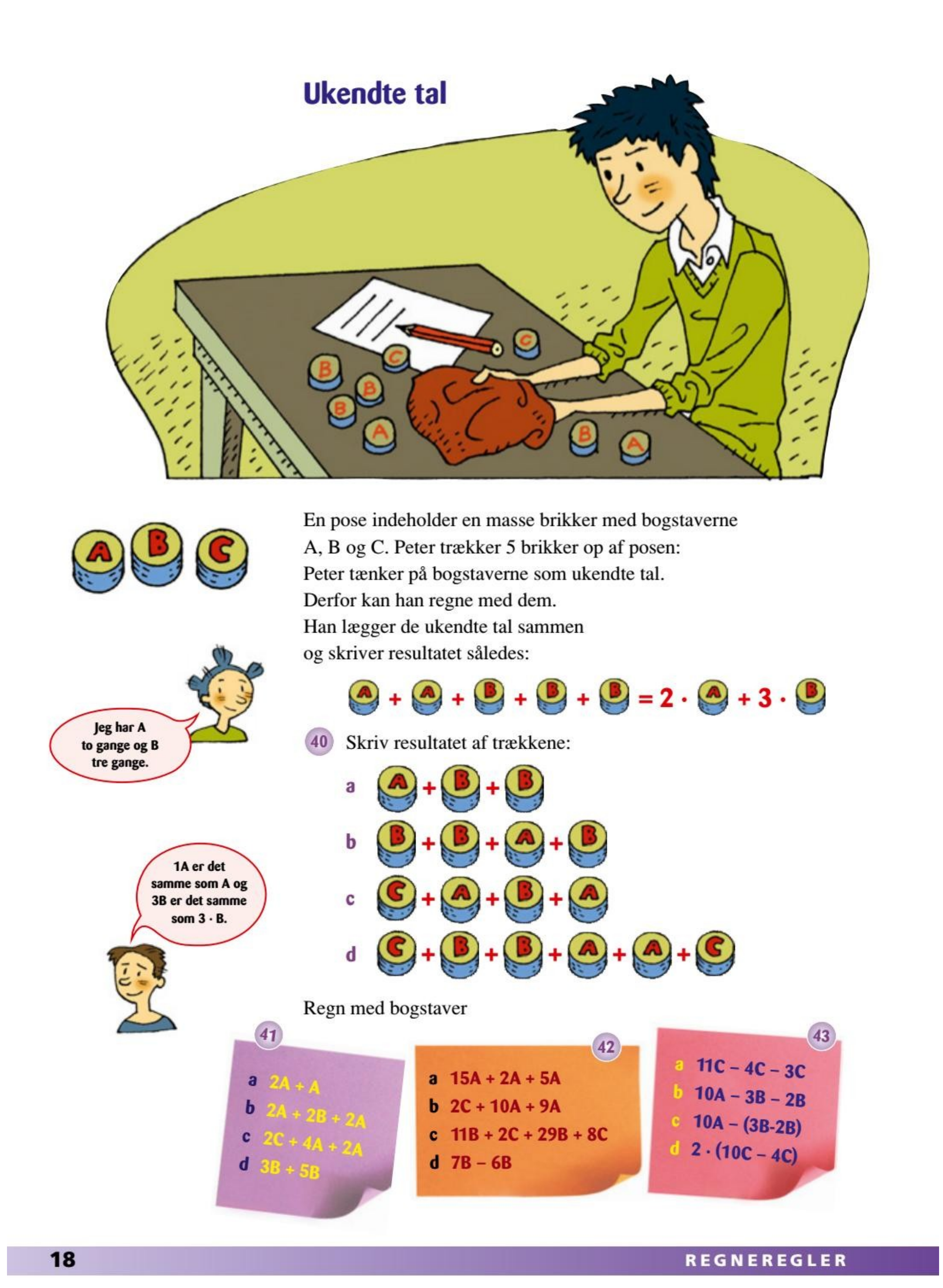
Une réunion de professeurs. (1954). *Algèbre : enseignement secondaire.* Ligel.

Index des figures

Index des tableaux

11 ANNEXES

11.1 ANNEXE 1-« Ukendt tal »



Ukendte tal

En pose indeholder en masse brikker med bogstaverne A, B og C. Peter trækker 5 brikker op af posen:
Peter tænker på bogstaverne som ukendte tal.
Derfor kan han regne med dem.
Han lægger de ukendte tal sammen
og skriver resultatet således:

A + A + B + B + B = 2 · A + 3 · B

Jeg har A to gange og B tre gange.

1A er det samme som A og 3B er det samme som 3 · B.

40 Skriv resultatet af trækkene:

a A + B + B

b B + B + A + B

c C + A + B + A

d C + B + B + A + A + C

Regn med bogstaver

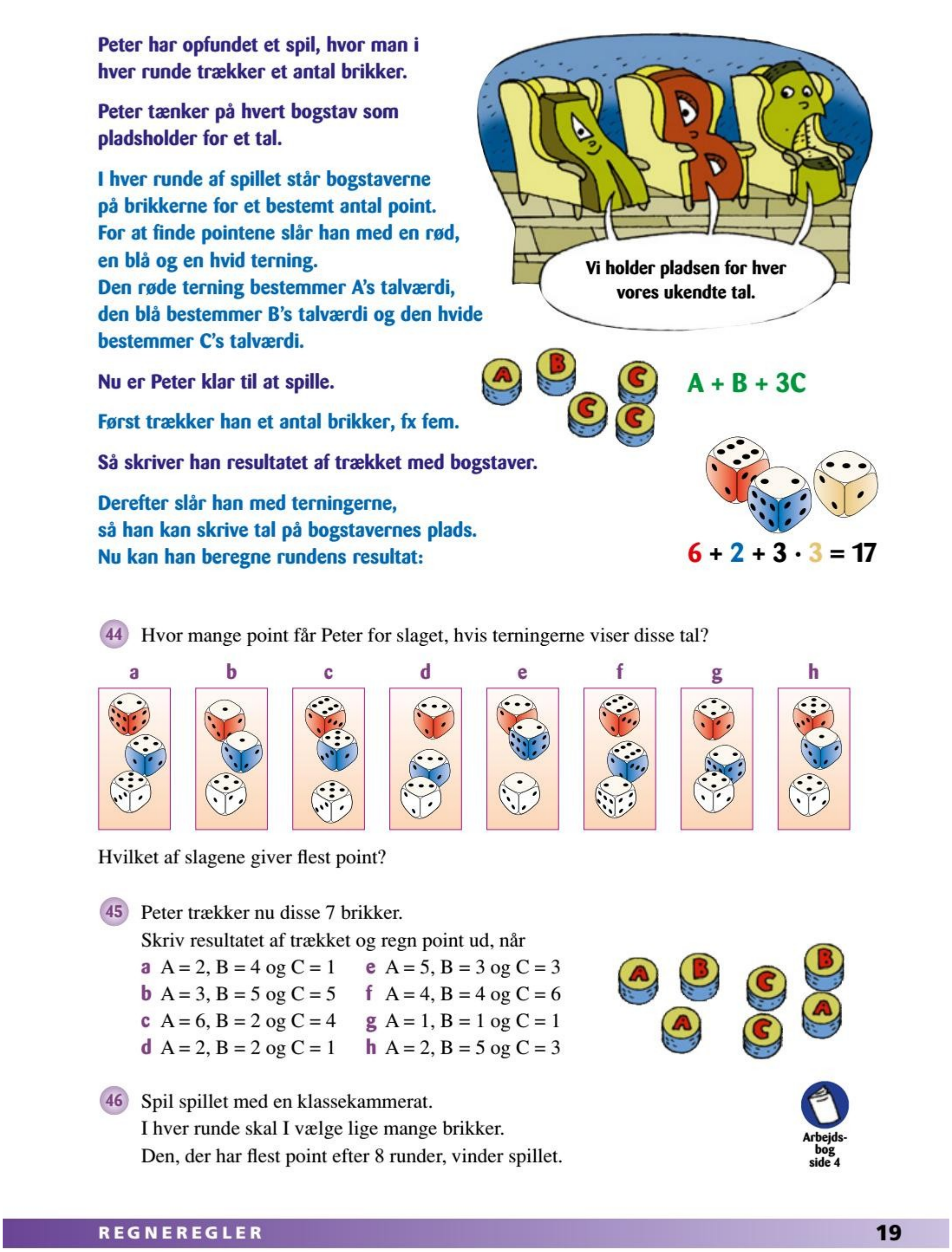
41
a 2A + A
b 2A + 2B + 2A
c 2C + 4A + 2A
d 3B + 5B

42
a 15A + 2A + 5A
b 2C + 10A + 9A
c 11B + 2C + 29B + 8C
d 7B – 6B

43
a 11C – 4C – 3C
b 10A – 3B – 2B
c 10A – (3B-2B)
d 2 · (10C – 4C)

18 REGNEREGLER

Figure 61: p.18 Matematrix 5 (Gregersen et al., 2013)


Peter har opfundet et spil, hvor man i hver runde trækker et antal brikker.

Peter tænker på hvert bogstav som pladsholder for et tal.

I hver runde af spillet står bogstaverne på brikkerne for et bestemt antal point. For at finde pointene slår han med en rød, en blå og en hvid terning. Den røde terning bestemmer A's talværdi, den blå bestemmer B's talværdi og den hvide bestemmer C's talværdi.

Vi holder pladsen for hver vores ukendte tal.

Nu er Peter klar til at spille.

Først trækker han et antal brikker, fx fem.

Så skriver han resultatet af trækket med bogstaver.

A + B + 3C

Derefter slår han med terningerne, så han kan skrive tal på bogstavernes plads. Nu kan han beregne rundens resultat:

6 + 2 + 3 · 3 = 17

44 Hvor mange point får Peter for slaget, hvis terningerne viser disse tal?

a b c d e f g h

Hvilket af slagene giver flest point?

45 Peter trækker nu disse 7 brikker.
Skriv resultatet af trækket og regn point ud, når

a A = 2, B = 4 og C = 1
b A = 3, B = 5 og C = 5
c A = 6, B = 2 og C = 4
d A = 2, B = 2 og C = 1
e A = 5, B = 3 og C = 3
f A = 4, B = 4 og C = 6
g A = 1, B = 1 og C = 1
h A = 2, B = 5 og C = 3

46 Spil spillet med en klassekammerat.
I hver runde skal I vælge lige mange brikker.
Den, der har flest point efter 8 runder, vinder spillet.

Arbejdsbog side 4

REGNEREGLER 19

Figure 62: p.19 Matematrix 5 (Gregersen et al., 2013)

11.2 ANNEXE 2-Carnet de calcul littéral

Je suis le carnet de : ……………………………………………………………

En classe de :……………..

Carnet de calcul littéral

Couper

Jeu des jetons

1er tirage
Lettres tirées :……………………………
Expression :………………………………
Réduction :
……………………………………………
……………………………………………
Avec les dés : a =…., b = …., c =….
Calcul de l'expression :
……………………………………………
……………………………………………

2e tirage
Lettres tirées :……………………………
Expression :………………………………
Réduction :
……………………………………………
……………………………………………
Avec les dés : a =…., b = …., c =….
Calcul de l'expression :
……………………………………………
……………………………………………

Couper

Jeu des jetons

3e tirage
Lettres tirées :……………………………
Expression :………………………………
Réduction :
……………………………………………
……………………………………………
Avec les dés : a =…., b = …., c =….
Calcul de l'expression :
……………………………………………
……………………………………………

4e tirage
Lettres tirées :……………………………
Expression :………………………………
Réduction :
……………………………………………
……………………………………………
Avec les dés : a =…., b = …., c =….
Calcul de l'expression :
……………………………………………
……………………………………………

Jeu des jetons

5e tirage
Lettres tirées :……………………………
Expression :………………………………
Réduction :
……………………………………………
……………………………………………
Avec les dés : a =…., b = …., c =….
Calcul de l'expression :
……………………………………………
……………………………………………

6e tirage
Lettres tirées :……………………………
Expression :………………………………
Réduction :
……………………………………………
……………………………………………
Avec les dés : a =…., b = …., c =….
Calcul de l'expression :
……………………………………………
……………………………………………

Couper

Jeu des jetons

Totaux obtenus

1er tirage : ……………………
2e tirage : ……………………
3e tirage : ……………………
4e tirage : ……………………
5e tirage : ……………………
6e tirage : ……………………
TOTAL : ……………………

TOTAL
=
……….

Couper

Exercice 1 : Réduire les calculs (réduire veut dire écrire de manière courte) :

1°) a + a + a + a = ……………………………………………
2°) b + b – b + b + b + b = ……………………………………………
3°) a + c + a + c + c + a + c – a = ……………………………………………
4°) a – a + a = ……………………………………………
5°) c – c + b + b – b = ……………………………………………
6°) 2a + 3a = ……………………………………………

Figure 63: Pages 1 à 6 du carnet de calcul littéral

Définition : Une **expression littérale** est ……………………………………………
……………………………………………

Exemple du jeu des jetons : Si on tire **a**, **b**, **b**, **a**, **c** et que l'on veut faire la somme de ces nombres, on a :

a + b + b + a + c = ……………………
= ……………………
= ……………………

Remarques : On peut ne pas écrire le signe « x » devant la lettre, de plus **1 x c** s'écrit plus simplement **c**.
Quand on a rendu l'écriture la plus compacte (courte) possible, on dit qu'**on a réduit** cette écriture.

Propriété : On peut **calculer** une expression littérale ……………………………………………

Exemple : Si en jetant les trois dés on trouve : **a** = 2, **b** = 3 et **c** = 4,
alors on peut calculer l'expression 2a + 2b + c trouvée plus haut :

2a + 2b + c = ……………………………………………

Couper

Exercice 2 : Réduire les calculs :

1°) a + 2a + 3a + 4a = ……………………………………………
2°) 4b + 3b + 2b + b = ……………………………………………
3°) 2a + 5a – 3b = ……………………………………………
4°) 2a + 5b – 3b = ……………………………………………
5°) 2a + 5b + 3a = ……………………………………………

Exercice 3 : Calculer pour a = 2 et b = 5

1°) 3a + 2b = ……………………………………………
2°) 5b – 3a = ……………………………………………
3°) 2a – b = ……………………………………………
4°) 6a + 2b = ……………………………………………

Couper

Exercice 4 : Réduire les calculs

1°) a + 2a = ……………………………………………
2°) b + 3b + b = ……………………………………………
3°) 4a + 5a + a = ……………………………………………
4°) 4a – 2a = ……………………………………………
5°) 10a – 3a + 2a = ……………………………………………
6°) 6b – b – 2b =……………………………………………

Exercice 5 : Calculer pour a = 2 ; b = 3 et c = 1

1°) 3b = ……………………………………………
2°) a + 3c = ……………………………………………
3°) 3b + c = ……………………………………………
4°) a + 3b = ……………………………………………
5°) 3c + b = ……………………………………………
6°) c + 3a = ……………………………………………

Exercice 6 : Réduire les calculs

1°) 4x + 5x – 2x = ……………………………………………
2°) 3b + 6b + 2b – 10b = ……………………………………………
3°) 6y – 5y + 8y = ……………………………………………
4°) 16x + 12x – 14x = ……………………………………………
5°) 17a + 3a + 12a – 21a = ……………………………………………

Exercice 7 : Calculer pour a = 6 ; b = 4 et c = 9

1°) 4c = ……………………………………………
2°) 4c + a + 2b = ……………………………………………
3°) 7a + 5b = ……………………………………………
4°) 4c + 2b = ……………………………………………
5°) 7a = ……………………………………………
6°) 7a + 5b – 3c = ……………………………………………

Exercice 8 : Réduire les calculs

1°) 2 x 2a + 5a = ……………………………………………
2°) 3a + 3 x 3a = ……………………………………………
3°) 4a + 2 x 2a – 5a = ……………………………………………
4°) 8b + 3 x 3b – 7b = ……………………………………………
5°) 15b – 5 x 3b + b = ……………………………………………

Exercice 9 : Calculer pour a = 1 ; b = 3 et c = 5

1°) 3(2a + 3) = ……………………………………………
2°) 3(2b + 3) = ……………………………………………
3°) 3(2c + 3) = ……………………………………………
4°) 3b + 3(2a + 3) = ……………………………………………
5°) 2c + 3(2a + 3) = ……………………………………………
6°) 5a + 3(2a + 3) = ……………………………………………

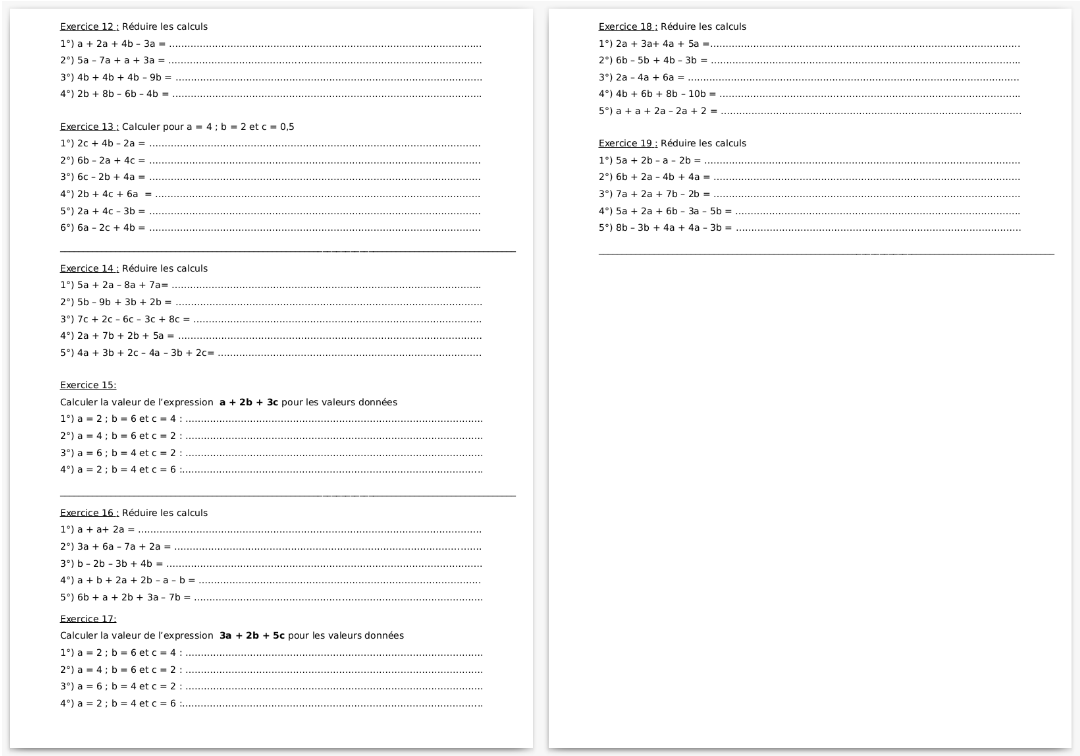
Exercice 10 : Réduire les calculs

1°) 2a + 4b – a = ……………………………………………
2°) 3b – b + 2a = ……………………………………………
3°) 5a + 10a + 8b – 2b = ……………………………………………
4°) 5b – 2b + 4a + 2b = ……………………………………………
5°) 2a + 5b + c + 4c + 2b = ……………………………………………

Exercice 11 : Calculer pour a = 9 ; b = 5 et c = 3

1°) 3a + 6b – 7c = ……………………………………………
2°) a – 5b + 9c = ……………………………………………
3°) 2a – 4b + 4c = ……………………………………………
4°) 4a – 2b + 10c = ……………………………………………
5°) 8a + 2b – 2c = ……………………………………………
6°) 5a + 8b + c = ……………………………………………

Figure 64: Pages 7 à 12 du carnet de calcul littéral



Exercice 12 : Réduire les calculs

1°) a + 2a + 4b – 3a = ...

2°) 5a – 7a + a + 3a = ...

3°) 4b + 4b + 4b – 9b = ...

4°) 2b + 8b – 6b – 4b = ...

Exercice 13 : Calculer pour a = 4 ; b = 2 et c = 0,5

1°) 2c + 4b – 2a = ...

2°) 6b – 2a + 4c = ...

3°) 6c – 2b + 4a = ...

4°) 2b + 4c + 6a = ...

5°) 2a + 4c – 3b = ...

6°) 6a – 2c + 4b = ...

Exercice 14 : Réduire les calculs

1°) 5a + 2a – 8a + 7a= ......

2°) 5b – 9b + 3b + 2b = ...

3°) 7c + 2c – 6c – 3c + 8c = ...

4°) 2a + 7b + 2b + 5a = ...

5°) 4a + 3b + 2c – 4a – 3b + 2c= ......

Exercice 15:

Calculer la valeur de l'expression **a + 2b + 3c** pour les valeurs données

1°) a = 2 ; b = 6 et c = 4 : ......

2°) a = 4 ; b = 6 et c = 2 : ......

3°) a = 6 ; b = 4 et c = 2 : ......

4°) a = 2 ; b = 4 et c = 6 :......

Exercice 16 : Réduire les calculs

1°) a + a+ 2a = ...

2°) 3a + 6a – 7a + 2a = ...

3°) b – 2b – 3b + 4b = ...

4°) a + b + 2a + 2b – a – b = ...

5°) 6b + a + 2b + 3a – 7b = ...

Exercice 17:

Calculer la valeur de l'expression **3a + 2b + 5c** pour les valeurs données

1°) a = 2 ; b = 6 et c = 4 : ......

2°) a = 4 ; b = 6 et c = 2 : ......

3°) a = 6 ; b = 4 et c = 2 : ......

4°) a = 2 ; b = 4 et c = 6 :......

Exercice 18 : Réduire les calculs

1°) 2a + 3a+ 4a + 5a =......

2°) 6b – 5b + 4b – 3b = ...

3°) 2a – 4a + 6a = ...

4°) 4b + 6b + 8b – 10b = ...

5°) a + a + 2a – 2a + 2 = ...

Exercice 19 : Réduire les calculs

1°) 5a + 2b – a – 2b = ...

2°) 6b + 2a – 4b + 4a = ...

3°) 7a + 2a + 7b – 2b = ...

4°) 5a + 2a + 6b – 3a – 5b = ...

5°) 8b – 3b + 4a + 4a – 3b = ...

Figure 65: Pages 13 à 16 du carnet de calcul littéral

11.3 ANNEXE 3-Tableau récapitulatif des différentes erreurs, difficultés et obstacles dans l'activité des jetons

	Activité des jetons - Type de tâche A						
Elève	Technique	Tirage 1	Tirage 2	Tirage 3	Tirage 4	Tirage 5	Tirage 6
A1	T1A	G	G $O1A_2$	G $O1A_2$	!$E1A_2$/$O1A_1$	G	G $O1A_1$
A2	T2A	G	!$E2A_{\text{écrit}}$	$C2A_1$	G	G	NF
A3	T1A	G	G	G	G $O1A_1$	G	G
A4	T2A	G	G $O2A_2$	G	G	G	G
A5	T2A	G $C2A_{\text{maj}}$	!$C2A_{\text{maj}}$/$E2A_{\text{écrit}}$	!$E2A_2$	$C2A_2$	$C2A_1$	NF
A6	T2A/T1A	G	G	G	G	!$E1A_{\text{comp}}$	G
A7	T2A	G	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_1$	G
A8	T2A/T1A	G	G	G	G $O2A_2$	$C1A_1$	$C1A_1$
A9	T2A	G	G	!$E2A_{\text{écrit}}$	!$E2A_{\text{comp}}$	$C2A_1$	$C2A_1$
A10	T2A	G	G	G $O2A_1$	G	G $O2A_1$	G $O2A_1$
A11	T1A	G $O1A_1$	!$E1A_2$	!$E1A_2$	!$E1A_2$	!$E1A_2$/$C1A_1$	!$E1A_2$

A12	T2A	G	G	$C2A_1$	$C2A_1$	G	G
A13	T2A	G	G	G $O2A_2$	G	G $O2A_2$	$C2A_1$
A14	T2A	G	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_1$	G
A15	T1A	G	$C1A_{maj}$	G	G	G $O1A_1$	$!E1A_2$
A16	T1A	G	G	G	G	G	G
A17	T1A	G	G	$!E1A_2$	G $O1A_2$	$!E1A_2$	$!E1A_2$/$C1A_1$
A18	T1A	G	$!E1A_{comp}$	G $O1A_1$	G	$!E1A_{écrit}$	G
A19	T1A	G	G	G	$C1A_2$	G	G
A20	T1A	G	G	G	G	$E1A_{recop}$	G
A21	T2A/T1A	$C1A_2$	$C1A_2$	G $O1A_1$	$C1A_{maj}$/$C1A_2$	$C1A_2$/$C1A_1$	$C1A_2$/$C1A_1$/ $C1A_{maj}$
A22	T1A	G	$C1A_1$	G	G	G	G
A23	T1A	G	G $O1A_1$	G	G	G	G $O1A_2$
A24	T1A	G	G	$C1A_{maj}$	$C1A_1$	G	$C1A_1$
A25	T1A	$C1A_1$	$C1A_1$/$O1A_2$	G	G $O1A_1$	$C1A_1$	G
A26	T1A	G	G $O1A_1$	G	G $O1A_2$	$C1A_1$	G
A27	T1A	$C1A_1$	$C1A_1$/$O1A_2$	$C1A_1$/$O1A_1$	G $O1A_1$	G	$C1A_1$
A28	T1A	G	G $O1A_1$	$C1A_{maj}$	$C1A_{maj}$	G	G $O1A_2$
A29	T1A	G	G	$C1A_1$	$C1A_1$	$C1A_{maj}$	G
B1	T2A	G $O2A_1$	G	$C2A_{maj}$	G	G $O2A_2$	G
B2	T2A	$C2A_1$	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	G	$C2A_{maj}$/$O2A_1$	G $O2A_1$
B3	T2A	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	!EC2A/ $C2A_{maj}$	!EC2A/ $C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$
B4	T2A	$C2A_1$	G	G $O2A_1$	$O2A_1$/$C2A_1$	G $O2A_1$	G
B5	T2A	$C2A_1$	G	$C2A_1$	G	G $O2A_2$	G
B6	T2A	G	G $O2A_2$	$C2A_1$	$C2A_1$	G	$C2A_1$
B7	T2A	$O2A_1$/$C2A_{maj}$	$C2A_2$/$C2A_{maj}$	$C2A_2$/$C2A_{maj}$	$C2A_2$/$C2A_{maj}$	$C2A_2$/$C2A_{maj}$	$C2A_2$/$C2A_{maj}$
B8	T2A	$!E2A_{écrit}$	$!E2A_{écrit}$	$!E2A_{écrit}$	$!E2A_{écrit}$/$C2A_2$	G	G
B9	T2A	G	$C2A_2$	$C2A_2$	$C2A_2$	G	NF
B10	T3A/T1A	$E3A_{réduc}$	G	G $O1A_1$	$O1A_1$/$C1A_2$	$C1A_2$	$O1A_1$/$C1A_2$
B11	T2A	G	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_2$	G	$C2A_1$

B12	T2A	G	$C2A_1$	G	$C2A_1$	$O2A_2/C2A_1$	G
B13	T2A	NF	NF	NF	NF	NF	G
B14	T2A	G	G $O2A_2$	G $O2A_1$	$!E2A_2/O2A_1$	$!E2A_2$	$!E2A_2/C1A_1$
B15	T2A	G	G	$C2A_2$	G $O2A_1$	$!E2A_{comp}$	G
B16	T2A	$!E2A_{comp}$	G	G	G	G $O2A_2$	G $O2A_1$
B17	T2A	$C2A_1$	G	$!E2A_2/EC2A$	G	$!E2A_2/EC2A/O2A_1$	G
B18	T2A	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_1/O2A_2$	$C2A_1/O2A_2$	G	$C2A_1$
B19	T2A	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}$	$C2A_{maj}/O2A_2$
B20	T2A	G	$C2A_1$	G	$C2A_1$	G $O2A_2$	$C2A_1$
B21	T2A	NF	NF	NF	NF	NF	$C2A_1$
B22	T2A	G	G	G $O2A_2$	G $O2A_2$	G $O2A_1$	$C2A_1$
B23	T2A	$C2A_1$	G	G $O2A_2$	$O2A_2/C2A_1$	G $O2A_2$	$C2A_1$
B24	T2A	$C2A_1$	$C2A_1$	G	$C2A_1$	$C2A_1$	G
B25	T2A	G	$C2A_1$	$C2A_1$	G	$GO2A_2$	$C2A_1$
B26	T2A	$C2A_{maj}$	$C2A_1$	$E1A_{écrit}/C2A_1$	G	G $O2A_2$	$!E2A_{comp}$
B27	T2A	G	$C2A_1$	G $O2A_2$	$C2A_2$	$C2A_2/O2A_2$	$C2A_2$
B28	T2A	$C2A_1/E2A_{écrit}$	G	G	G	G	G $O2A_2$
B29	T2A	G	$C2A_1$	$C2A_1$	$C2A_1$	$!E2A_2$	G

Erreurs

$E1A_1$	0	$E2A_1$	0	$E3A_1$	0	Total	0
$E1A_2$	10	$E2A_2$	7	$E3A_2$	0	Total	17
$E1A_3$	0	$E2A_3$	0	$E3A_3$	0	Total	0
$E1A_4$	0	$E2A_4$	0	$E3A_4$	0	Total	0
EC1A	0	EC2A	4	EC3A	0	Total	4
$E1A_{comp}$	2	$E2A_{comp}$	4	$E3A_{comp}$	0	Total	6
$E1A_{recop}$	1	$E2A_{recop}$	0	$E3A_{recop}$	0	Total	1
$E1A_{écrit}$	2	$E2A_{écrit}$	8	$E3A_{écrit}$	0	Total	10
$E1A_{réduc}$	0	$E2A_{réduc}$	0	$E3A_{réduc}$	1	Total	1
! Expr.fausse	**33**	**9,85 %**				**TOTAL**	39
Non fait	13						

G : expression attendue	**183**	**54,63 %**

Pourcentage d'erreurs :	11,64 %

Non respect conventions

$C1A_1$	20	$C2A_1$	57	$C3A_1$	0	TOTAL	77
$C1A_2$	9	$C2A_2$	15	$C3A_2$	0	Total	24
$C1A_{maj}$	7	$C2A_{maj}$	25	$C3A_{maj}$	0	Total	32
						TOTAL	133
						Pourcentage de non respect :	**39,70 %**

Obstacles

$01A_1$	16	$02A_1$	16	$03A_1$	0	Total	32
$01A_2$	8	$02A_2$	24	$03A_2$	0	Total	32
						TOTAL	64
						Pourcentage d'obstacles :	18,39 %

Techniques	
T1A	17
T1A/T2A	3
T2A	37
T2A/T3A	0
T3A	0
T1A/T3A	1
Total	58

	Activité des jetons - Type de tâche B						
Elève	Technique	Tirage 1	Tirage 2	Tirage 3	Tirage 4	Tirage 5	Tirage 6
A1	T1B/T3B	$!E3_{recop}$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2/O3B_1/O3B_3$	G $O1B_2$	G $O1B_2/O1B_1$
A2	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	$!E3_{recop}$	$D3B/O3B_2$	G $O3B_2$	NF
A3	T3B	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2/O3B_1$	G $O3B_2$	G
A4	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$
A5	T3B/T4B	$!O3B_2$/E3Bcalc	G $O3B_2/O3B_3$	$D3B/O3B_2$	$D4B/O4B_2$	$D4B/O4B_2$	NF
A6	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	$!O3B_2$/E3Bcalc	$!O3B_2$/E3Brecop	G $O3B_2$
A7	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$

A8	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$
A9	T3B	!$O3B_2/E3B_{calc}$	G $O3B_2$	G$O3B_2$/R3B/ $O3B_3/E3B_{écrit}$	G $O3B_2/E3B_{écrit}$	G $O3B_2/E3B_{écrit}$	!$O3B_2$/ $E3B_{écrit}$/ $E3B_{recop}$
A10	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2/O3B_1$	G $O3B_2$	G $O3B_2/O3B_1$	G $O3B_2/O3B_1$
A11	T3B	G $O3B_2/O3B_1$	G $O3B_2/O3B_3$	G $O3B_2/O3B_3$	G $O3B_2/O3B_3$	G $O3B_2/O3B_3$	G $O3B_2/O3B_3$
A12	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$
A13	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$
A14	T3B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G $O3B_2$
A15	T3B/T4B	G $O3B_2$	G $O3B_2$	!$O3B_2/E3B_{calc}$	!$E3B_{calc}/O3B_1$	G$O4B_2$/ $E4B_{égal}/O3B_1$	G $O3B_3/O3B_2$
A16	T3B	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G
A17	T3B	!$E3B_3$	G $O3B_2$	G $O3B_3$/R3	G $O3B_2$	G$O3B_3$/R3/ $O3B_2$	!$O3B_3$/R3B/ $E3B_3$
A18	T3B	!$E3B_{calc}$	G $O3B_2$	G $O3B_1$	G $O3B_2$	G$O3B_3/O3B_2$	G
A19	T2B	G	G $O2B_2$	G	G $O2B_2$	G $O2B_2$	G
A20	T3B	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G
A21	T3B	G	G $O3B_2$	G $O3B_1$	G $O3B_2$	!$O3B_2/E3B_3$	G $O3B_2$
A22	T3B	G	G	G	G $O3B_2$	!$O3B_2/E3B_3$	G
A23	T3B	G	G $O3B_1/O3B_2$	G	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G
A24	T2B	G	G $O2B_2$	!$E2B_{calc}$	G $O2B_2$	G $O2B_2$	G $O2B_2$
A25	T3B	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2/O3B_1$	G $O3B_2$	G
A26	T3B	!$E3B_{calc}$	G $O3B_2/O3B_1$	G	G $O3B_2$	G $O3B_2$	G
A27	T3B	G	!$E3B_3/O3B_2$	G $O3B_1$	!$E3B_3/E3B_{calc}$/ $O3B_2/O3B_1$	!$E3B_{calc}/O3B_2$	!$E3B_3/E3B_{calc}$
A28	T1B/T2B/ T3B/T5B	G (3B)	G $O5B_2$	G (5B)	!$E1B_2$/ $E1B_{calc}/O1B_2$	G (2B) $O2B_2$	G (2B)
A29	T3B	!D3B	!D3B/$O3B_2$	!$E3B_{calc}$	G $O3B_2$	!D3B/$O3B_2$	!D3B
B1	T3B/T2B	G $O3B_1$	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G (2B)
B2	T3B	G	G	G $O3B_2$	! $E3B_{calc}$	G $O3B_2$	G
B3	T3B/T2B	G	G	G $O3B_2$	G (2B)	G $O3B_2$ (2B)	G (2B)
B4	T3B/T2B	!$E3B_3/E3B_{calc}$	G	G $O3B_2$/ $O3B_1$	G $O3B_1$	G $O3B_2$/ $O3B_1$	G (2B)
B5	T3B	G	G	!$E3B_3$/ $O3B_2$	!$E3B_3$	G $O3B_2$	G

B6	T3B/T2B	G	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G (2B)
B7	T3B/T2B	G $O3B_1$	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G (2B)
B8	T3B	!$E3B_3$	!$E3B_3$	G$O3B_2$/ $O3B_3$/R3B	G $O3B_3$/R3B	G $O3B_2$	G
B9	T1B/T2B	G (2B)	G (2B)	G $O2B_2$	!$E2B_{calc}$	G $O2B_2$	G (1B)
B10	T2B/T3B	G (3B)	G (3B)	G $O3B_2$/ $O3B_1$	G $O2B_1$	G $O3B_2$	G $O3B_1$
B11	T2B/T3B	G (3B)	G (2B)	G $O2B_2$	G (2B)	G $O2B_2$	G (2B)
B12	T3B	G	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G
B13	T3B	NF	NF	NF	NF	NF	G
B14	T3B	G	G	G $O3B_2$/ $O3B_1$	G$O3B_1$/ $O3B_3$/R3B	G $O3B_3$/R3B	G$E3B_{écrit}$/ $O3B_3$/R3B
B15	T3B	G	G	G $O3B_2$	G $O3B_1$	G $O3B_2$	G
B16	T2B	!$E2B_{calc}$/$E2B_3$	G	!$E2B_3$/$O2B_2$	!$E2B_3$	G $O2B_2$	G $O2B_1$
B17	T3B	G	G	G $O3B_3$/R3B	G $O3B_2$	G$O3B_1$/ $O3B_2$/$O3B_3$/ R3B	G
B18	T3B	G	G	G $O3B_2$	!$E3B_{calc}$	G $O3B_2$	G
B19	T2B	G	G	!E2Bcalc/ $E2B_3$/$O2B_2$	!E2Bcalc	G $O2B_2$	G $O2B_1$
B20	T2B	G $E2B_{recop}$	G	G $O2B_2$	G	G $O2B_2$	G
B21	T3B	NF	NF	NF	NF	NF	G
B22	T3B	G	!$E3B_3$	G $O3B_2$/ $O3B_1$	G $O3B_1$	G $O3B_2$	G
B23	T3B	G	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G
B24	T3B	G	G	G $O3B_2$	G	G $O3B_2$	G
B25	T3B	G	G	G $O3B_2$	G	G$O3B_2$	G
B26	T3B	G	G	!$O3B_2$/$E3B_3$	G	G$O3B_2$	!$E3B_3$
B27	T3B	G	G	G $O3B_2$	G	G$O3B_2$	G
B28	T3B	!$E3B_{calc}$	G	!$E3B_{calc}$/$O3B_2$	! $E3B_3$/$E3B_{calc}$	G$O3B_2$	G
B29	T3B	!$E3B_{calc}$	G	G $O3B_2$	G	G$O3B_2$/ $O3B_3$/R3B	G

$E1B_1$	0	$E2B_1$	0	$E3B_1$	0	$E4B_1$	0	$E5B_1$	0	Total	0	0,00 %

$E1B_2$	1	$E2B_2$	0	$E3B_2$	0	$E4B_2$	0	$E5B_2$	0	Total	1	1,85 %
$E1B_3$	0	$E2B_3$	4	$E3B_3$	16	$E4B_3$	0	$E5B_3$	0	Total	20	37,04 %
$E1B_{calc}$	1	$E2B_{calc}$	5	$E3B_{calc}$	18	$E4B_{calc}$	0	$E5B_{calc}$	0	Total	24	44,44 %
$E1Br_{ecop}$	0	$E2B_{recop}$	1	$E3B_{recop}$	2	$E4B_{recop}$	0	$E5B_{recop}$	0	Total	3	5,56 %
$E1B_{écrit}$	0	$E2B_{écrit}$	0	$E3B_{écrit}$	5	$E4B_{écrit}$	0	$E5B_{écrit}$	0	Total	5	9,26 %
$E1B_{égal}$	0	$E2B_{égal}$	0	$E3B_{égal}$	0	$E4B_{égal}$	1	$E5B_{égal}$	0	Total	1	1,85 %
										TOTAL	54	100,00 %

Difficultés											
D1B	0	D2B	0	D3B	6	D4B	2	D5B	0	Total	8

Auto	**remédiations**										
R1B	0	R2B	0	R3B	12	R4B	0	R5B	0	Total	12

Obstacles											
$01B_1$	1	$02B_1$	3	$03B_1$	28	$04B_1$	0	$05B_1$	0	Total	32
$01B_2$	3	$02B_2$	18	$03B_2$	153	$04B_2$	3	$05B_2$	1	Total	178
$01B_3$	2	$02B_3$	0	$03B_3$	19	$04B_3$	0	$05B_3$	0	Total	21

Techniques		
T1B	0	0 %
T1B/T2B	1	2 %
T2B	5	9 %
T2B/T3B	7	12 %
T3B	41	71 %
T1B/T3B	1	2 %
T4B	0	0 %
T5B	0	0 %
T3B/T4B	2	3 %
T1B/T2B/T3B/T5B	1	2 %
Total	58	100,00 %

Calculs corrects	286	82,18 %
Calculs erronés	46	13,22 %
Calculs non faits	12	3,45 %
Calculs non aboutis	4	1,15 %
Total	348	100,00 %

11.4 ANNEXE 4-Tableaux de synopsis

Vendredi 8 décembre 2023 — Séance 1 — Classe 6B — (9h15-10h10) — Introduction au calcul littéral			
Phases	**Temps** (min)	**Scènes**	**Description**
Introduction	0 — 0.49	Installation dans la classe	Installation du dispositif de recueil de données dans la classe
	0.49 — 1.39	Présentation du carnet	Explications sur le carnet. Le carnet doit rester dans la classe. On va pouvoir rajouter des pages, etc. Écrire Nom et prénom sur la première page.
	1.39 — 2.50	Distribution du carnet	
	2.50 — 3.38	Explication du titre du carnet. Calcul littéral → avec des lettres	
	3.38 — 4.42	Présentation des sachets et des jetons de trois couleurs avec des lettres a, b et c.	Chacun devra tirer sept jetons et écrire les lettres tirées
	4.42 — 6.00	Distribution	Distribution des sachets
Premier tirage des 7 lettres	6.00 — 7.11	On tire les jetons	L'enseignant fait un exemple au tableau en même temps que les élèves font leur tirage. Quelques questions, exemple : « on a les mêmes »
	7.11 — 7.41	On regroupe les lettres	Les élèves ont eux-mêmes commencé à regrouper les lettres
	7.41 — 8.20	Écriture des lettres	Écriture dans le carnet et au tableau
	8.20 — 9.20	Écriture de l'expression associée	En considérant que chaque lettre représente un nombre, on peut alors en faire la somme

	9.20 — 10.47	Réduction de l'expression en utilisant le signe « x »	Les élèves doivent adapter l'exemple au tableau aux lettres qu'ils ont tiré
	10.47 — 11.04	Rappel de la commutativité de l'addition	Explications sur le fait que l'ordre où l'on tire les lettres importe peu
	11.04 — 12.52	Réduction sans le signe « x »	
On donne des valeurs aux lettres	12.52 — 13.58	On jette les trois dés	On donne des valeurs aux lettres en jetant les dés et on écrit ces valeurs (a=2 ; b=6 ; c=1)
Calcul de l'expression	13.58 — 14.56	Écriture de l'expression pour calculer	On remplace les lettres par les valeurs en réécrivant le signe « x »
	14.56 — 16.30	Calcul de l'expression	Priorité de la multiplication rappelée
	16.30 — 17.17	Une réquerre trouvée	Une élève restitue le matériel
	17.17 — 17.38	Comparaison des scores	« C'est que de la chance »
	17.38 — 18.22	Remarque réduction 1xc	
Deuxième tirage de lettres	18.22 — 19.15	Préparation 2^e tirage	On mélange les jetons
	19.15 — 20.39	Tirage des jetons et écriture de l'expression	On ne calcule pas tout de suite parce qu'on va relancer les dés. « L'idéal ce serait de les écrire dans l'ordre tiré »(en parlant des jetons)
	20.39 — 22.48	Commentaires sur les tirages de lettres et réduction de expression	Les élèves sont déçus pour certains d'avoir un tirage quasi identique. D'autres ont posé les lettres dans l'ordre en les triant.
	22.48 — 22.58	Rappel sur la réduction de 1xc	
	22.58 — 23.50	Question sur la réduction	Précisions sur l'expression réduite
On donne de nouvelles valeurs aux lettres et on calcule l'expression	23.50 — 24.18	Distribution des dés aux élèves	Comment on peut savoir si le dé c'est pour a ou b ou c → couleur du dé. Et si on n'a pas le dé ?
	24.18 — 24.41	Diverses considérations sur le calcul littéral	On ne donne pas toujours des valeurs aux lettres (avec les 3èmes)
	24.41 — 25.34	Les dés sont jetés	(a=5 ; b=3 ; c=4)
	25.34 — 26.40	Calcul de l'expression	Opération prioritaire

Vérification par les pairs	26.40 — 28.24	Échange de carnet avec son voisin	Certains ont fait le même tirage et les mêmes calculs que leur voisin
Troisième tirage	28.24 — 30.36	Tirage des lettres	Les élèves mélangent les jetons et font leur tirage. La classe s'agite
	30.36 — 32.10	Écriture des lettres, de l'expression et de l'expression réduite	Une élève demande si on doit faire la réduction. Une autre s'inquiète d'avoir tiré les mêmes lettres
	32.10 — 33.04	Questions sur le calcul littéral avec les 3èmes	Est-ce qu'on joue avec des jetons et des dés en 3ème ?
On donne des valeurs aux lettres et on calcule l'expression	33.04 — 34.47	Les dés sont jetés	(a=1 ; b=2 ; c=2) Les élèves veulent faire un six avec les dés
	34.47 — 35.55	« J'ai le même résultat que tout à l'heure »	Explications sur le caractère peu aléatoire (certains élèves ont le même résultat que leur voisin)
	35.55 — 36.22	Question d'une élève	« Et les « x » dans tout ça ? » On explique qu'on aurait pu écrire d'autres lettres sur les jetons, la lettre choisie et écrite importe peu
Quatrième tirage	36.22 — 39.53	Tirage des lettres	Les lettres sont tirées, mais les élèves s'agitent et n'ont pas écrit
	39.53 — 40.52	Écriture de l'expression réduite	
	40.52 — 42.23	On jette les dés	(a=3 ; b=4 ; c=6)
	42.23 — 43.19	Calcul de l'expression	Discussion sur la fin de l'activité où chacun calculera son score final
Cinquième tirage	43.19 — 44.43	Préparation du tirage et tirage	
	44.43 — 46.01	Discussion autour d'un score impossible d'un élève	Le score obtenu est 43. Détection d'une erreur d'un élève dans le remplacement par les valeurs
	46.01 — 47.52	Écriture de l'expression réduite	Les élèves sont moins concentrés. L'un d'entre eux a écrit l'expression réduite, mais en gardant les signes « x ».
	47.52 — 49.23	Tirage des valeurs avec les dés	(a=3 ; b=5 ; c=3)

	49.23 — 50.24	Calcul de l'expression	Chacun calcule son expression
	50.24 — 51.01	Mise en pause de l'activité	On n'aura pas le temps de faire le dernier tirage, mais on continuera une autre fois, et on rajoutera des pages dans le carnet
Fin de séance	51.01 — 52.38	Fin de séance	Rangement. Les carnets et les sachets de jetons sont conservés dans la classe

Remarque : 6A groupe 1 → cette séance a lieu après 6A Groupe 2

Lundi 11 décembre 2023 — Séance 1 — Classe 6A Groupe 1 — (14h45-15h40) — (Introduction au calcul littéral			
Phases	**Temps** (min)	**Scènes**	**Description**
Introduction	0 — 1.36	Installation dans la classe	Installation du dispositif de recueil de données dans la classe (carnets distribués et présentés avant l'installation du matériel)
Exemple	1.36 — 2.10	Présentation du sachet de jeton	Amorce d'un exemple de tirage
	2.10 — 3.27	Exemple de tirage écrit au tableau (les élèves n'ont pas encore les sachets)	Enseignant : on peut regrouper les lettres tirées. Les lettres sont écrites au tableau en étant regroupées, et donc pas dans l'ordre de tirage
	3.27 — 4.10	Explications sur l'écriture de l'expression	On cherche à faire la somme, comme si les lettres étaient des nombres
	4.10 — 5.25	Explications sur la réduction	Expression réduite écrite au tableau avec l'exemple de l'enseignant, en gardant les signes « x »
	5.25 — 7.11	Réduction sans les signes « x »	4xa s'écrit 4a et discussion sur le 1xc = c. Mais on réécrira les signes lors du calcul de l'expression
	7.11 — 7.33	Récapitulatif	Récapitulatif de ce qu'il faudra faire

			une fois les jetons tirés
	7.33 — 8.17	Explication pour la suite et amorce d'exemple de calcul au tableau	Explications sur la manière dont sera calculée l'expression à l'aide des valeurs données avec les dés. (a=2 ; b=2 ; c=6)
	8.17 — 9.50	Discussion sur les lettres	élève1 : « c'est un peu comme les « x » ? Discussion sur le choix des lettres utilisées
	9.50 — 11.18	Reprise du calcul pour des valeurs données	Rappels des priorités opératoires et sur la rédaction du calcul
	11.18 — 11.53	Récapitulatif des étapes	
	11.53 — 12.53	Distribution des sachets	
Premier tirage	12.53 — 13.50	Tirage des jetons	Élève : « j'ai pas de b »
	13.50 — 18.07	Écriture de l'expression et de l'expression réduite	Regroupement des lettres identiques, écriture de l'expression réduite ; l'élève qui n'a pas de b a déjà donné une valeur à b. Les élèves ont tendance à écrire des grandes lettres plutôt que des petites lettres. Aides individuelles.
	18.07 — 19.26	On jette les dés	(a=1 ; b=5 ; c=1)
	19.26 — 23.35	Calcul de l'expression	Aide individuelle spécifique auprès de deux élèves
Deuxième tirage	23.35 — 28.54	Deuxième tirage de jetons	Vérification des calculs chez les retardataires, l'enseignant insiste sur la manière de bien écrire pour pouvoir faire la différence entre « + » et « x » Élève : j'ai fait exactement la même pioche
	28.54 — 30.30	On jette les dés	(a=4 ; b=4 ; c=4) Surprise avec trois valeurs identiques
	30.30 — 32.36	Calcul de l'expression	

Troisième tirage	32.36 — 35.48	Tirage des jetons et écriture de l'expression et de l'expression réduite	
	35.48 — 36.20	On jette les dés	(a=2 ; b=2 ; c=4)
	36.20 — 39.25	Calcul de l'expression	Élève : « pourquoi on fait ça » et discussion. Pendant ce temps beaucoup d'élèves sont déjà prêts pour avoir les valeurs dans le 4° tirage.
Quatrième tirage	39.25 — 42.33	On jette les dés	Les élèves ont déjà tiré les jetons et écrit l'expression réduite. (a=5 ; b=4 ; c=4). Questions des élèves pour savoir si ils sont filmés.
	42.33 — 43.02	Calcul de l'expression	Retour sur « pourquoi on fait ça »
Cinquième tirage	43.02 — 44.55	On jette les dés	Les élèves ont déjà tiré les jetons et écrit l'expression réduite. (a=2 ; b=3 ; c=3)
	44.55 — 46.22	Calcul de l'expression	Aide auprès d'un élève pour le calcul de l'expression du 4ème tirage
Sixième tirage	46.22 — 48.02	On jette les dés	Les élèves ont déjà tiré les jetons et écrit l'expression réduite. (a=5 ; b=3 ; c=3). On remarque que les valeurs des lettres varient
Fin de séance	48.02 — 51.02	Rangement	Les carnets et les sachets de jetons sont conservés dans la classe

Lundi 11 décembre 2023 — Séance 1 — Classe 6A Groupe 2 — (13h45-14h40) — Introduction au calcul littéral			
Phases	**Temps** (min)	**Scènes**	**Description**
Introduction	0 — 0.31	Installation dans la classe	Installation du dispositif de recueil de données dans la classe (carnets distribués avant l'installation du

			matériel)
	0.31 — 1.30	Présentation du carnet	Signification de calcul littéral
	1.30 — 2.28	Distribution des sachets avec les jetons	Tirer sept jetons et les mettre sur la table dans l'ordre où ils sont tirés
Exemple et premier tirage	2.28 — 3.37	Exemple pris sur le tirage d'un élève	Les lettres sont écrites dans l'ordre où elles ont été tirées : c, b, a, b, c, b, b puis écriture de la somme au tableau :c+b+a+b+c+b+b
	3.37 — 5.29	Écriture de l'expression réduite	En rangeant les lettres d'abord a+b+b+b+b+c+c, puis avec les signes « x », puis sans les signes « x ».
	5.29 — 6.19	Écriture des lettres dans les carnets	En gardant l'ordre où elles ont été tirées, chaque élève écrit ses lettres. Indications pour les lignes suivantes à écrire.
	6.19 — 6.57	Certains élèves ne commencent pas.	Explications complémentaires
	6.57 — 7.48	Question d'une élève	Les élèves ont du mal à comprendre qu'on regroupe les lettres identiques
	7.48 — 8.35	Écriture de l'expression	Écriture et réduction. Un élève a un jeton tourné qui lui fait écrire « y », un autre écrit des lettres majuscules.
	8.35 — 10.15	Indications pour la réduction	discussion sur le 1xc = c, puis « devant une lettre on peut ne pas écrire le signe « x »
On donne des valeurs aux lettres et on calcule l'expression	10.15 — 10.57	On jette les dés	(a=3 ; b=1 ; c=5)
	10.57 — 13.12	Calcul de l'expression	On remplace les lettres par les valeurs et on fait le calcul (exemple fait au tableau). Rappels opérations prioritaires.
	13.12 — 15.01	Deux élèves n'ont pas suivi	ré-explications
	15.01 — 19.38	Calcul de l'expression	Divers conseils pour ce faire

	19.38 — 20.28	Aide individuelle	Les deux élèves qui ne suivaient pas ne suivent toujours pas
Deuxième tirage	20.28 — 21.18	Consignes pour le deuxième tirage	
	21.18 — 22.33	Aide	Poursuite de l’aide individuelle pour les mêmes deux élèves
	22.33 — 23.35	On jette les dés	(a=1 ; b=2 ; c=2)
	23.35 — 24.44	Calcul de l’expression	« j’ai exactement les mêmes lettres que tout à l’heure » puis rappel des consignes pour un élève
	24.44 — 27.07	Aide individuelle	Aide aux deux élèves de devant qui ne suivent pas et déplacement de l’un d’entre eux dans la classe.
Troisième tirage	27.07 — 27.25	Les élèves tirent leurs sept jetons.	Élève : « Et ceux qui n’ont pas fini ? ». Il est demandé à ceux qui n’ont pas terminé le calcul de l’expression de terminer d’abord.
	27.07 — 29.53	Aide individuelle	Aide individuelle auprès des deux mêmes élèves (rappels sur la manière de rédiger les calculs)
	29.53 — 30.39	Quelques vérifications d’expressions réduites	Élève : « j’ai eu que ça ». Explication sur le fait que toutes les expressions réduites sont intéressantes.
	30.39 — 31.44	On jette les dés	(a=2 ; b=3 ; c=6)
	31.44 — 32.29	Calcul de l’expression	Rappels des consignes et vérification pour une élève qui a terminé
	32.29 — 34.01	Aide individuelle	Aide auprès des deux mêmes élèves. Celui qui a été déplacé arrive à présent à comprendre. Celui resté à sa place n’arrive toujours pas à se concentrer.
Quatrième	34.01 — 35.10	Les élèves tirent les jetons	Certains sont déjà prêts pour donner

tirage			des valeurs (expression réduite écrite)
	35.10 — 36.01	On jette les dés	(a=6 ; b=6 ; c=4)
	36.01 — 37.37	Calcul de l'expression	Élève : « ça va faire des gros chiffres ». Vérification de quelques calculs par l'enseignant
	37.37	Arrêt de la caméra	Par la suite certains élèves continuent leurs calculs et sont tout à la joie de montrer à l'enseignant qu'ils ont bien réussi.

Vendredi 15 décembre 2023 — Séance 2 — Classe 6B — (9h15-10h10) — Introduction au calcul littéral			
Phases	**Temps** (min)	**Scènes**	**Description**
Introduction / Sixième tirage	0 — 0.50	Installation dans la classe	Installation du dispositif de recueil de données dans la classe (carnets distribués avant l'installation du matériel, et jetons déjà tirés). Enseignant : « c'est pas la rédaction, c'est la ré-duc-tion ».
	0.50 — 2.18	Explications pour les élèves qui étaient absents lors de la séance précédente	Ici, les jetons sont rangés dans l'ordre avant l'écriture de l'expression. Rappels au tableau de la démarche : somme et expression avec les signes « x ».
	2.18 — 3.46	Expression réduite	Une élève rappelle comment réduire l'expression écrite. L'enseignant vérifie que les élèves s'en souviennent et qu'ils ont compris
	3.46 — 3.57	Rappels pour calculer l'expression	On réécrira alors les signes « x ».
	3.57 — 5.12	On jette les dés	(a=6 ; b=5 ; c=2)
	5.12 — 6.17	Calcul de l'expression	Rappel de la manière de procéder

			(pour les absents)
	6.17 — 7.23		Rappels sur la priorité des opérations et l'écriture des détails de calculs. Élève : « 37 madame »
Calcul des scores	7.23 — 7.33	Anticipation	Deux élèves non voisins anticipent déjà la suite de l'activité
	7.33 — 9.15	Indications pour la suite : la somme de tous les tirages	Les élèves calculent leurs scores. Certains veulent utiliser la calculatrice
	9.15 — 9.34		Élève : « est-ce qu'il faut poser ». Enseignant : « tu ne trouves pas que c'est déjà posé ? »
	9.34 — 11.24	Utilisation de la calculatrice	Élève : « c'est trop dur ! ». Les autres continuent leur calcul à la main.
	11.24 — 11.56	Discussions sur les scores	Score le plus important : 185
	11.56 — 12.13		Vérification du gros score par les pairs tandis que d'autres terminent leur calcul.
	12.13 — 12.44	Plus petit résultat	Un élève prétend avoir le plus petit résultat avec 125
	12.44 — 14.28	Ramassage des jetons	Un élève absent dit regretter de ne pas avoir pu faire les autres tirages pour participer au score.
	14.28 — 17.27	Vérifications	Après vérification 185→ 147. Vérification par les pairs pour le score 159 (et pour les autres scores – la classe s'agite)
	17.27 — 18.22	Conclusion des vérifications	Le plus petit score (29) remporté par une élève absente la séance précédente/ le plus grand 159. Scores différents mais pas très éloignés dans l'ensemble
Première application	18.22 — 21.49	Exercice 1	Premier exercice de réduction dans le carnet, sans manipulation

	21.49 — 23.23	Début de correction	Correction de l'exercice au tableau : les trois premières réductions seulement.
	23.23 — 23.43	Pause	Petite pause pour que les élèves corrigent
	23.43 — 24.56	Suite de la correction	Rappel : 1a = a sans écrire le 1. de même 1b=b.
	24.56 — 25.53	Leçon amorcée	Présentation de la leçon : sur la page suivante du carnet : leçon à trous
	25.53 — 27.05	Pages manquantes	Une élève n'avait pas laissé son carnet dans la classe et n'a pas les pages qui ont été rajoutées par l'enseignant
Leçon	27.05 — 33.19	Leçon	Définition expression littérale/ exemple de réduction d'une expression/Propriété pour calculer une expression
	33.19 — 34.57	Exemple	Exemple pour le calcul d'une expression littérale (remettre les signes « x »/ opérations prioritaires/rédaction du calcul et calcul)
Exercices d'applicatio n	34.57 — 38.40	Exercices 2 et 3	Les élèves cherchent les exercices. Conseils de l'enseignant : rester sur des petites lettres et ne pas les transformer en majuscules. Élève : « avec les moins c'est plus dur »
	38.40 — 39.27		Conseils pour un élève qui met les a et b ensemble « mais les a et les b c'est pas les mêmes valeurs, c'est pas les mêmes jetons » (élève absent à la séance précédente)
	39.27 — 40.23	Exercice 4	Les élèves les plus rapides demandent à continuer
	40.23 — 40.51		Une élève détecte que l'un des calculs

			est impossible (on aurait une valeur négative)
Fin	41.01 — 41.37	Fin de séance	On laisse les carnets sur la table vide devant.

Vendredi 15 décembre 2023 — Séance 2 — Classe 6A — (10h30-11h20) — Introduction au calcul littéral			
Phases	**Temps** (min)	**Scènes**	**Description**
Introduction	0 — 1.24	Installation dans la classe	Installation du dispositif de recueil de données dans la classe (carnets distribués avant l'installation du matériel). Avant le début de l'enregistrement : distribution des carnets et des sachets de jetons (et avant cela : répétition de la leçon de la veille sur le périmètre)
	1.24 — 3.08		Pendant que certains calculent leur score final, d'autres commencent l'exercice 1. Une partie des élèves n'ont pas terminé les précédents tirages (suivant la progression des demi-groupes la fois précédente).
	3.08 — 3.34	Vérification	Vérification du carnet d'un élève qui ne parvenait pas à suivre la séance précédente. Le calcul est parfait.
Cinquième tirage	3.34 — 4.41	Reprise de la démarche avec exemple au tableau	Pour ceux qui n'ont pas fini les tirages : écriture des lettres et de l'expression.
	4.41 — 5.32	La classe est agitée	L'enseignant fait une pause et tente de calmer la classe
	5.32 — 7.10	Expression réduite	Écriture de l'expression réduite au tableau (avec les signes « x » puis sans)

	7.10 — 9.06	Calcul de l’expression	Tirage fait la fois précédente : (a=5 ; b=5 ; c=4) et calcul de l’expression. Mais l’élève qui participe ne parvient pas à remplacer par les valeurs.
	9.06 — 10.22	Nouvel essai de calcul de l’expression	L’élève était dans l’autre groupe et avait donc les valeurs (a=2 ; b=3 ; c=3). Le calcul devient possible, en s’entendant sur les valeurs utilisées.
Sixième tirage	10.22 — 12.02	Valeurs données par les dés	Pour l’un des demi-groupes à qui il manquait des valeurs pour le dernier tirage. (a=5 ; b=3 ; c=3)
	12.02 — 13.30	Fin de la manipulation	Ramassage des derniers sachets de jetons. Élève : « est-ce que l’on met les lettres dans l’ordre alphabétique ? »
Exercice 1	13.30 — 14.37	Consigne	Mise en pause des calculs avec les tirages et recherche de l’exercice 1 (calcul du score abandonné)
	14.37 — 15.44	Aide individuelle	Aide auprès d’un élève : il s’étonne de ne pas pouvoir calculer dans cet exercice qui est juste un exercice de réduction, et il comprend ensuite que l’on s’arrête à : 4a. Élève : « on écrit que ça »
Correction de l’exercice 1	15.44 — 16.35	Amorce de correction	Partage de la réflexion de l’élève avec la classe et correction de la première expression
	16.35 — 17.16	Suite	Correction de la deuxième avec discussion sur b-b=0, même si on ne connaît pas la valeur de b.
	17.16 — 18.39	Troisième expression	Rangement des lettres dans l’ordre avec rappel sur la propriété de la somme et expression réduite

	18.39 — 19.40	Quatrième expression	Rappel pour 1a=a.
	19.40 — 22.55	Dernière expression	Le passage 2a+3a=5a est difficile. Au tableau, on écrit : a+a+a+a+a et les élèves sont ensuite capables de réduire.
Leçon	22.55 — 30.03	Leçon	Définition expression littérale/ exemple de réduction d'une expression/Propriété pour calculer une expression
	30.03 — 31.42	Exemple	Exemple en suspend, fin de la séance.

11.5 ANNEXE 5-Fiche d'activités : les fractions au cycle 3

Atelier Fraction- séminaire cycle 3 - 4 décembre 2015

Exercice 1

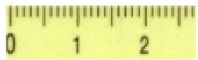
Placer 2/3 sur cet axe gradué.

Exercice 2

Placer 3/10 sur cet axe gradué.

Exercice 3

Placer 4/5 sur cet axe gradué.

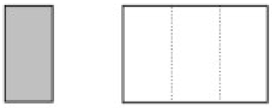


Exercice 4

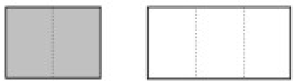
Tracer un segment. Tracer un segment dont la longueur soit les 2/3 de la longueur de ce segment.

Exercice 5

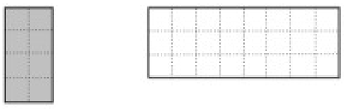
L'aire du rectangle gris représente ……. de l'aire du rectangle blanc.



L'aire du rectangle gris représente ……. de l'aire du rectangle blanc.



L'aire du rectangle gris représente ……. de l'aire du rectangle blanc.

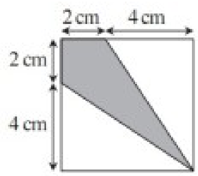


Exercice 6

Anne achète 20 bonbons. Elle en garde les trois cinquièmes.
Elle partage équitablement le reste entre ses deux petits frères.
Combien de bonbons chaque enfant aura-t-il ?

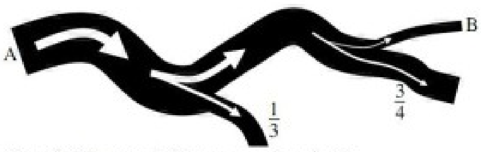
Exercice 7

Quelle fraction du carré est grisée ?



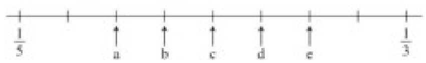
Exercice 8

Après le point A, la rivière se divise en deux. 1/3 de l'eau prend l'une des branches et le reste prend l'autre. Plus loin, la seconde branche se divise à nouveau en deux, 3/4 de l'eau d'un côté, le reste de l'autre, vers le point B. Quelle proportion de l'eau qui passe en A passe aussi en B ?



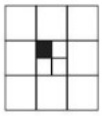
Exercice 9

Les fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ sont placées sur une droite graduée. Où est la fraction $\frac{1}{4}$?



Exercice 10 :

Un grand carré est découpé en carrés. L'aire du grand carré est 1.
Quelle est l'aire du petit carré noir ?



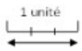
Exercice 11

4 personnes désirent se partager 3 baguettes. Quelle part reçoit chacune d'entre elle ?

Exercice 12

Dans cette activité la règle graduée n'est pas autorisée. On dispose de ciseaux et de papier blanc et d'un compas.

On considérera l'unité ci-contre :



Question 1 : Construire un triangle équilatéral de même périmètre que le rectangle de dimensions 3 unités et 1 unité.

Question 2 : Reporter sur la demi-droite graduée ci-dessous, à partir de l'origine, le périmètre du rectangle et la longueur d'un côté du triangle équilatéral. Exprimer la mesure de la longueur du côté du triangle équilatéral à l'aide de l'unité.

Question 3 : Quel est le résultat exact de la division 8 : 3 ?

11.6 ANNEXE 6-Nouvelle trace de cours pour le chapitre sur la division

{Introduction avec l'activité 1 p.52 du manuel Myriade}

<u>1. Division euclidienne (ou division entière)</u>

<u>Définition:</u> Effectuer la **<u>division euclidienne</u>** de deux nombres entiers, c'est trouver le quotient entier et le reste entier de cette division, tels que :

Dividende = Quotient x Diviseur + Reste
avec : Reste < Diviseur

Dividende	Diviseur
.	Quotient
.	
.	
Reste	

Si le nombre entier **a** est le dividende et le nombre entier **b** est le diviseur, en appelant **q** le quotient et **r** le reste, on peut poser la division **a÷b** :

a	**b**
.	**q**
.	
.	
r	

Et lorsque on vérifie que la division est correcte, on vérifie que :

a = **q** x **b** + **r** (avec r < b)

Exemple : Un fleuriste a reçu un lot de 500 roses. Pour un mariage, il veut faire des bouquets contenant 7 roses chacun.
a) Combien de bouquets pourra-t-il faire ?
b) Combien de roses lui restera-t-il ?
c) Combien de roses doit-il avoir au départ pour qu'il ne lui en reste pas en stock ?

{on pose ici la division euclidienne. On écrit : Le dividende est… Le diviseur est… Le quotient est… Le reste est…, et pour vérifier la division euclidienne, on écrit :
$500 = 71 \times 7 + 3$, on remarque que $3<7$ et enfin on répond aux questions posées}

a) Il pourra faire 71 bouquets.
b) Il lui restera 3 roses.
c) 500 – 3 = 497. Avec 497 roses, il ne lui reste pas de fleurs inutilisées. On a alors
$497 = 7 \times 71$.
{Ceci fait le lien avec la partie « Divisibilité »}

2. Divisibilité

Lorsqu'on écrit : $497 = 71 \times 7$, ceci signifie que la division euclidienne de 497 par 7 « tombe juste », et que le reste est égal à zéro. On dit alors que 497 est un multiple de 7 (et de 71), 7 est un diviseur de 497 (71 aussi), et que 497 est divisible par 7 (et par 71). *{montrer la division de 497 par 71 au tableau}*

Si le nombre entier **a** est le dividende et le nombre entier **b** est le diviseur, en appelant **q** le quotient, on peut alors poser la division $\mathbf{a \div b}$:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \cline{2-2} . & \\ . & \mathbf{q} \\ . & \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

Alors $\mathbf{a \div b} = \mathbf{q}$

Et lorsque on vérifie que la division est correcte, on vérifie que :
$\mathbf{a} = \mathbf{q} \times \mathbf{b}$ (avec $r = 0$)

{puis ici la partie sur les critères de divisibilité}

3. Division décimale {introduction avec l'activité 4 p.53 du manuel – Myriade édition 2016)}

> Définition : Effectuer la **division décimale** d'un nombre décimal (le dividende **a**), par un nombre entier (le diviseur **b**) différent de zéro, c'est chercher le quotient **q** tel que :
>
> dividende = quotient × diviseur ou encore : **a** = **q** × **b**
>
> Lorsqu'on trouve ce nombre, on peut alors écrire :
>
> $\text{dividende} \div \text{diviseur} = \text{quotient}$ ou encore : $\mathbf{a \div b} = \mathbf{q}$

Deux cas peuvent se présenter quand on pose la division.
{- ou bien on arrive à obtenir un reste nul quand on pose la division, le quotient est alors un nombre décimal et sa valeur est exacte.
- ou bien on n'arrive pas à obtenir un reste nul, le quotient n'est alors pas un nombre décimal et on ne peut pas donner sa valeur exacte.}

a) On obtient un reste nul, et donc une valeur exacte du quotient qui est un nombre décimal.
Exemple :
{Poser la division $20{,}7 \div 6$ *. On trouve 3,45}*
On obtient un reste égal à zéro. Le quotient exact de 20,7 par 6 est le nombre décimal 3,45 :
$20{,}7 \div 6$ = 3,45 et on peut vérifier la division en posant et en effectuant : 6 × 3,45 et on retrouve 20,7.
6 × 3,45 = 20,7

b) On n'obtient pas de reste nul, la division ne s'arrête jamais, le quotient n'est pas un nombre décimal.
Exemple :
{Poser la division $23{,}3 \div 3$ *. On trouve 7,766…}*
Le quotient trouvé n'est pas exact. Si on vérifie le calcul fait, on pose et on effectue la multiplication 7,766 × 3 = 23,298 et non 23,3 donc $23{,}3 \div 3 \neq 7{,}766$.
Le résultat trouvé est une valeur approchée (ici par défaut au millième) du quotient, aussi on écrit : $23{,}3 \div 3 \simeq 7{,}766$.

{le seul nombre qui permet d'écrire une égalité est le nombre $23{,}3 \div 3 = \frac{23{,}3}{3}$ *, alors* $\frac{23{,}3}{3} \times 3 = (23{,}3 \div 3) \times 3 = 23{,}3$ *quand on divise par 3 et que l'on re-multiplie par 3, c'est comme si on ne faisait rien, donc on retrouve bien 23,3}*

{division par 10, 100, 1000 etc ici}

4. Quotient *{introduction du sens quotient pris par la fraction}*

> Définition : Le quotient **q** de deux nombres **a** et **b** est le nombre qui s'écrit :
>
> $$\mathbf{q} = \mathbf{a} \div \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$
>
> Ce nombre **q**, lorsqu'il est multiplié par **b,** donne pour produit **a** :
>
> **q x b = a** ou encore $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ **x b = a**

Exemples :

1. Samy veut couper en trois morceaux identiques une corde de longueur 4 unités. Quelle sera la mesure exacte de chaque morceau de corde ?

{ici on pose la division de 4 divisé par 3}

La division de 4 par 3 ne s'arrête pas. Le quotient n'est pas un nombre décimal. On donne alors une écriture fractionnaire de la mesure d'un morceau de corde : $\frac{4}{3}$ de l'unité.

$\frac{4}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3 donne 4 : $\frac{4}{3} \times 3 = 4$

2. Quel est le nombre qui, multiplié par 8 donne 13 ?

{On traduira l'énoncé par : $\ldots\ldots \times 8 = 13$ *que l'on complétera :* $\frac{13}{8} \times 8 = 13$.

3. Compléter : $\frac{22}{7}$ est le nombre qui, multiplié par …. donne ….

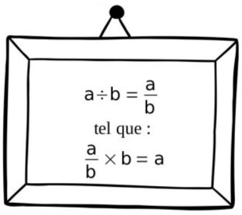
{que l'on complétera :} $\frac{22}{7}$ est le nombre qui, multiplié par 7 donne 22.

11.7 ANNEXE 7-Carnet de sens quotient

Je suis le carnet de : ....

En classe de :.................

Carnet de sens quotient
de la fraction



Exercice 1 : Compléter les égalités :

a. 5 x ...... = 20
b. ..... x 8 = 32
c. 30 x ...... = 3
c. ..... x 15 = 1,5
d. 4 x ..... = 2
e. 7 x ...... = 0

Exercice 2 : Compléter par le nombre qui convient :

a. 42 : ...... = 6
b. 120 : ..... = 40
c. 1,6 : ..... = 0,8
d. ..... : 3 = 8
e. ..... : 4 = 2,5
f. ..... : 7 = 12

Exercice 3 :
Compléter par le nombre qui convient :

a. 20 x ...... = 60
b. ..... x 3 = 4,5
c. 2 x ..... = 15
d. 0,35 x ...... = 350
e. 150 = ... x 50
f. 0,8 = 4 x .....
g. 27 = 2 x .....
h. 2 600 = ... x 26

Exercice 4 : Calculer le facteur manquant :

a. 6 x ...... = 38,4
b. ..... x 11 = 575,3
c. 5 x ..... = 34
d. ..... x 14 = 676,2

Exercice 5 : Parmi les trois divisions suivantes :

$35 \div 6$ $128 \div 8$ $28 \div 5$

a. Quelle est celle dont le quotient est un nombre entier ? ....
b. Quelle est celle dont le quotient est un nombre décimal non entier ? ....
c. Quelle est celle dont le quotient s'écrit seulement sous la forme fractionnaire ? ....

Exercice 6 :
Compléter les égalités :

a. $9 \div ..... = \frac{9}{15}$
b. $..... \div 17 = \frac{11}{17}$
c. $..... \div ..... = \frac{5}{7}$
d. $\frac{10}{3} = ... \div .....$
e. $..... \div ..... = \frac{11}{6}$
f. $7 \div 11 = \frac{.....}{.....}$

Exercice 7 :

a. Avec 27 bouteilles de 1 litre d'eau chacune, Katia a rempli 30 carafes. Quelle est la contenance d'une carafe ?

....

b. Avec 9 euros, Justine a acheté 10 m de ruban. Quel est le prix d'un mètre de ruban ?

....

c. On dispose de 4 kg de confiture pour remplir équitablement 7 pots. Exprimer la masse de confiture en kg dans chaque pot sous la forme d'une fraction.

....

Exercice 8 :
a. Samuel veut découper une planche de 102 cm de longueur en 11 morceaux identiques. Quelle est la longueur exacte de chaque morceau ? Donner une valeur approchée par défaut de cette longueur au millimètre près.

....

....

b. Sur un marché, on partage 15 m de trottoir en 4 emplacements de même longueur. Exprimer la longueur d'un emplacement sous la forme d'une fraction.

....

c. On verse équitablement 30 L d'eau dans 7 bidons.
Exprimer la quantité d'eau versée dans un bidon sous la forme d'une fraction. Avec la calculatrice, donner une valeur approchée au dixième près de cette quantité.

....

....

Exercice 9 : Compléter les égalités suivantes :

a. $4 \times \frac{7}{4} = ...$
b. $5 \times \frac{11}{5} = ...$
c. $\frac{3}{16} \times 16 = ...$
d. $\frac{1}{7} \times 7 = ...$

Exercice 10 : Compléter les égalités suivantes :

a. $4 \times \frac{......}{......} = 7$
b. $9 \times \frac{......}{......} = 11$
c. $\frac{......}{......} \times 15 = 8$
d. $\frac{......}{......} \times 3 = 4$

Exercice 11 :
e. Quel est le nombre qui, multiplié par 9, donne 14 ?..
f. Quel est le nombre qui, multiplié par 7, donne 2 ?..
g. Quel est le nombre qui, multiplié par 5, donne 22 ?..

Exercice 12 :
a. Marc a acheté un sachet de 15 mini-viennoiseries à la boulangerie pour 9 euros. Quel est le prix d'une mini-viennoiserie ? Donner le résultat sous forme d'une fraction, puis sous forme décimale.

....

b. Un rectangle de largeur 3 cm a une aire de 77 cm². Combien mesure sa longueur ? Donner la valeur exacte et une valeur arrondie au dixième.

....

c. Lors d'un dîner, 7 personnes ont mangé chacune $\frac{3}{7}$ de pizza. Combien de pizzas se sont-elles partagées équitablement ?

....

Exercice 13 :

Par quel nombre faut-il multiplier :

a. 2 pour obtenir 7 ? ....
b. 3 pour obtenir 4 ? ....
c. 9 pour obtenir 1 ? ....
d. 4 pour obtenir 3 ? ....

Exercice 14 :

Compléter les égalités :

a. $3 \times ..... = 10$
b. $8 \times ..... = 15$
c. $11 \times ..... = 2$
d. $..... \times 7 = 16$
e. $\frac{11}{147} \times ..... = 11$
f. $\frac{3}{31} \times 31 = ...$

Exercice 15 :
Compléter les égalités suivantes :

a. $6 \times \frac{8}{6} = ...$
b. $5 \times \frac{3}{5} = ...$
c. $9 \times \frac{6}{9} = ...$
d. $\frac{7}{12} \times 12 = ...$
e. $\frac{20}{15} \times 15 = ...$
f. $\frac{55}{23} \times 23 = ...$

Exercice 16 :

Par quel nombre faut-il multiplier :

a. 5 pour obtenir 3 ? ....
b. 9 pour obtenir 4 ? ....
c. 12 pour obtenir 11 ? ....
d. 38 pour obtenir 97 ? ....

Exercice 17 :

Compléter les égalités suivantes :

a. $4 \times \frac{9}{......} = 9$
b. $8 \times \frac{15}{......} = 15$
c. $13 \times \frac{5}{......} = 5$
d. $17 \times \frac{......}{......} = 14$
e. $14 \times \frac{......}{......} = 17$
f. $39 \times \frac{......}{......} = 76$

e. Par quel nombre faut-il multiplier $\frac{3}{4}$ pour obtenir 3 ? ....

f. Par quelle fraction faut-il multiplier 7 pour obtenir 1 ? ....

Exercice 18 :
Compléter les égalités suivantes :

a. $\frac{6}{......} \times 5 = 6$
b. $\frac{8}{......} \times 3 = 8$
c. $\frac{10}{......} \times 19 = 10$
d. $\frac{......}{......} \times 11 = 12$
e. $\frac{......}{......} \times 24 = 37$
f. $\frac{......}{......} \times 99 = 100$

Exercice 19:

Une tablette de chocolat de 100 g est composée de 12 carrés.

Poser la division ici :

Quelle est la masse exacte d'un carré ? ....

Exercice 20 :
Compléter les égalités suivantes :

a. $6 \times \frac{5}{6} = \ldots\ldots$

c. $9 \times \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = 11$

b. $\ldots\ldots \times \frac{8}{3} = 8$

d. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times 7 = 4$

Exercice 21 :

Un rectangle a une aire de 23 cm².
Quelle est la valeur exacte de sa largeur…

a. sachant que sa longueur est 6 cm ? ……………………………………………………………………

b. sachant que sa longueur est 23 cm ? ……………………………………………………………………

c. sachant que sa longueur est 46 cm ? ……………………………………………………………………

11.8 ANNEXE 8-Tableau récapitulatif des différentes erreurs dans l'interrogation

	Exo4			Exo6			
	Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3	Q4
A1	!=	!=	!=	g	!1	g	!55
A2	g	g	g	g	g	g	g
A3	g	g	!0,16	g	g	g	g
A4	!1,4	!3,5	!0,16	g	!2	!7/13	g
A5	Nf	Nf	Nf	g	g	!7/13	!11
A6	Nf	Nf	Nf	g	!2	g	g

A7	g	g	g	Nf	Nf	Nf	Nf
A8	!/bc 2	!/bc 2,5	!/bc 8	g	!1	Nf	!55
A9	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
A10	Nf	Nf	Nf	g	!1	!7	!11
A11	Nf 1/4	Nf 3/5	Nf 16/10	!8/5	!2/2	g	g
A12	g	! 1,5	g	g	g	g	g
A13	g	g	g	g	g	g	g
A14	g	g	g	g	g	g	g
A15	g	g	g	g	g	g	g
A16	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
A17	!0,1	!0,3	g	g	g	g	g
A18	! e	! e	! e	g	g	!13/7	g
A19	g	! 0,15	g	g	g	g	g
A20	g	g	g	g	g	g	g
A21	g	g	g	g	g	g	g
A22	g	g	g	g	g	g	g
A23	Nf	Nf	Nf	g	g	g	Nf
A24	!=	!=	!=	g	!5	g	g
A25	!=	!=	!=	!cal9	g	g	g
A26	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
A27	g	g	g	g	g	g	g
A28	!bc 1	!bc 0,5	!bc nfini	g	g	g	g
B1	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
B2	g	g	g	g	g	g	g
B3	g	g	!bc 1,06	g	! x2	g	g
B4	!e	!e	!e	g	g	g	g
B5	!e	!e	!e	g	! x1	g	g
B6	!bc 0,205	g	g	g	g	g	g
B7	!1,4	! 3,5	! 160	g	g	g	g
B8	! =2/2	! =3/2,5	=nf	g	! x2	! 1,2/7	! 55

B9	g	g	g	g	g	g	g
B10	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
B11	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
B12	!4	g	g	g	g	g	g
B13	! 1,4	! 3,5	g	! 5/40	g	! 7/13	g
B14	g	g	g	g	g	g	g
B15	!bc 4	!bc 1,6	g	g	! x1	! 18/1,8	! 55
B16	Nf	Nf	Nf	g	g	g	g
B17	!t	!t	!t	! 5/40	g	! 7/13	g
B18	!bc 0,2	!bc 0,7	g	g	g	g	g
B19	!t ?	!t ?	!t ?	g	g	g	g
B20	Nf	Nf	Nf	g	g	! 7/13	g
B21	g	g	g	g	g	g	g
B22	!=mais fau	!=id	!=id	g	g	g	g
B23	!e	!e	!e	g	g	g	g
B24	g	g	g	g	g	g	g
B25	!t	!t	!t	g	g	g	g
B26	g	g	g	g	g	g	g
B27	! 4	! 1,33	g	1g	1g	! 2/6,5	! 44
B28	!=	!=	!=	g	g	g	g
B29	!e	!e	!e	g	g	! 1,6/7	g

g :bon

!:faux

Nf : Non fait

e : ecriture en tt lettres

bc : bon calcul posé mais erreur de calc

t : essaye de refaire un truc à trous

= essaye d’écrire des fractions égales

Exo 4	Q1		Q2		Q3	
CORRECT	19	33,33 %	19	33,33 %	24	42,11 %
FAUX	25	43,86 %	25	43,86 %	19	33,33 %
NON FAIT	13	22,81 %	13	22,81 %	14	24,56 %
écriture lettres	5	8,77 %	5	8,77 %	5	8,77 %
Bon calcul mais résultat faux	5	8,77 %	4	7,02 %	3	5,26 %
Opération à trou	3	5,26 %	3	5,26 %	3	5,26 %
fraction égale	6	10,53 %	6	10,53 %	5	8,77 %

Total exo 4		
CORRECT	62	36,26 %
FAUX	69	40,35 %
Non fait	40	23,39 %
Total	171	100,00 %

Exo 6	Q1				Q2	
CORRECT	52	91,23 %		CORRECT	45	78,95 %
FAUX	4	7,02 %		FAUX	11	19,30 %
NON FAIT	1	1,75 %		NON FAIT	1	1,75 %
5 sur 40	2	3,51 %		1	5	8,77 %
8 sur 5	1	1,75 %		2	4	7,02 %
1	0	0,00 %		5	1	1,75 %
				2 sur 2	1	1,75 %

Q3				Q4		
CORRECT	44	77,19 %		CORRECT	48	84,21 %
FAUX	11	19,30 %		FAUX	7	12,28 %
NON FAIT	2	3,51 %		Non fait	2	3,51 %
7 sur 13	6	10,53 %		55	4	7,02 %
				11	2	3,51 %

Total exo 6		
CORRECT	189	82,89 %
FAUX	33	14,47 %

NON FAIT	6	2,63 %
Total	228	100,00 %

11.9 ANNEXE 9-Post test élève

Un Petit Test **Date : le** **2024**

1. Calculer en montrant le détail du calcul : $3 \times a + b + 2 \times c$ avec $a = 3$; $b = 2$ et $c = 5$

$3 \times a + b + 2 \times c$ = ...

2. Calculer le périmètre d'un rectangle de largeur $\ell = 3$ cm et de longueur L = 6 cm

P = ...

3. Calculer la longueur (le périmètre) d'un cercle de rayon R = 4 cm

On rappelle la formule : $L = 2 \times R \times \pi$

L = ...

4. Compléter les égalités

..... $\times 8 = 32$; $\frac{17}{6} \times .... = 17$; $\frac{11}{7} \times 7 = ...$; $\frac{.....}{.....} \times 3 = 4$

11.10 ANNEXE 10-Résultats du post test élève

	Ex 1		Ex 2		Ex 3		Ex 4							
							Q1		Q2		Q3		Q4	
6A1	0	c r 61	0	5 f c	0	n	0	n	1		0	n	0	n
2	0	c 65	1	f	1		1		1		1		1	
3	0	a	1		0	12,02 e	1		1		1		1	
4	1		1		1		1		1		1		1	
5	0	30 d c	1	f	0	16 r v	1		1		1		1	
6	0	15 d c	1		0	11,8 v c	1		1		1		1	
7	0	65 c	1		1		1		1		1		1	

8	0	10 d c	0	f 9	0	8 e f v	1		1		1		1	
9	0	19 e	1		1		1		1		1		1	
10	0	10 e c	1	e	0	8 e v	1		0	1	0	77	0	8/1,5
11	0	65 d c	1	d	0	n	1		1		1		1	
12	1		1		1		1		1		1		1	
13	0	11 e	1	e	0	e v r	1		1		1		1	
14	1	e	1	e	0	32 d c	1		1		1		0	3/2
15	0	65 c	1		0	11,14 c	1		1		1		1	
16	1		1		1		1		1		1		1	
17	1		1		0	12,4 v c	0	2	1		1		0	4/8
18	0	D	1	f	0	12 e r	1		1		1		1	
19	0	65c	1		1		1		1		1		1	
20	1		1	f	0	27,12	1		1		1		1	
21	1		1		1		1		1		1		1	
22	0	22 c d	0	24 c e	0	7,14 d c	1		1		1		1	
23	1		1		0	35,2 c	1		1		1		1	
24	1	e	1	f	1		1		1		1		1	
25	0	15 d c	1	f	0	n r	1		1		1		1	
26	1		1		0	v	1		1		1		1	
27	0	55 e c	0	24 p c	0	32 c	1		1		1		1	
6B1	0	n	1	e	0	24,14 c	1		1		1		1	
2	0	18 c	0	42 c	0	n	1		1		1		1	
3	1		1		0	n r	1		1		1		1	
4	0	18 c +	1	f	0	12,56 r c	1		1		1		1	
5	0	19 e	1	f	1		1		1		1		1	
6	0	29 c	0	9 f	0	25,13 c	1		1		1		1	
7	1		1		0	n r	1		1		1		1	
8	1		1	f	0	104 v	1		1		1		1	
9	1		0	n	0	n	1		1		1		1	

10	0	n	0	n	0	e v r	0	n	1		1		1	
11	0	65 c	0	36 f	0	n	1		1		1		1	
12	0	65 c	1	f	0	24,96 v	1		1		1		1	
13	0	23 d	0	9 f	0	R	1		1		1		1	
14	0	65 c	1		1		1		1		1		1	
15	0	29 c	1		0	11,14 c	1		1		1		1	
16	1	e	1	e	1	e	1		1		1		1	
17	0	11 d	0	9 d	0	32 d	1		1		1		1	
18	0	65 e c	1	e	1		1		1		1		1	
19	1	D	0	f	0	n	1		1		1		1	
20	0	65 c	1		1		0	6	1		1		1	
21	1	e	1		0	26,4 v	1		1		1		1	
22	0	65 c	1		0	112 v	1		1		1		0	4/7
23	1		1		0	n	1		1		1		1	
24	0	50 c	1	f	0	112 d	1		1		1		1	
25	0	65 c	1		0	27,2 c	1		1		1		1	
26	1		1	f	0	n v	1		0	48	0	14	0	12/9
27	1	e	0	9 d	0	8 d	1		0	1	0	1	0	1/4
28	0	n	0	f	0	2 r	1		1		1		1	
29	1		1		0	24 v	1		1		1		1	
6C1	0	65 c	0	f	0	11,14	1		0	2	0	1	0	n
2	0	23 c	1		0	n	1		0	n	0	n	0	n
3	0	65 c e	1		0	18 r c e	1		0	39	0	3,5	0	3/8
4	0	55 e c	1	f	0	1 r c	1		0	n	0	n	0	n
5	1		1	f	1		1		0	n	0	n	0	n
6	1		1	f	1		1		0	n	0	n	0	n
7	0	65 c e	1	f	0	18 r c e	1		0	38	0	n	0	n
8	0	n	0	n	0	n	0	n	0	n	0	n	0	n
9	0	30 c e	1	f	0	24,14 c e	0	n	0	n	0	n	0	n
10	0	n	0	n	0	n r	1		0	1	0	7	0	9/3

11	1		1	f	1		1		0	n	0	n	0	n
12	0	19 e	1		0	251,2 c	1		0	n	0	n	0	n
13	1		1	f	1		1		0	n	0	n	0	n
14	1		1	d	0	2,414 d	1		0	n	0	2,54	0	n
15	0	1 c	1	f	0	18	1		0	n	0	n	0	n
16	0	55 c e	1		0	12,56 r c	1		0	n	0	n	0	n
17	1		1	f	0	24,32	1		0	5	0	12	0	3/1,3
18	0	65 c	1		1		1		0	18	0	80	0	3/4
19	1	d	0	9 d	1	d	1		0	8,5	0	7	0	n
20	0	29 c	1	f	0	24,32	1		0	5	0	n	0	n
21	0	65 c	1		0	11,2	1		0	n	0	n	0	n
22	1		1	f	0	32 r e	1		0	1	0	78	0	n
23	1		1		1		1		0	8	0	9	0	6/4
24	1		1		1		1		1		1		1	
25	1		1	f	1	e	1		1		1		1	
26	1		1		0	50,24 e	1		0	2	1		1	
27	1		1	f	1		1		1		1		1	
28	1		1		0	9,12 c	1		1		0	9,8	1	
29	1		1		1		1		1		1		1	
6D1	0	65 c	1		0	15,70 c	1		0	n	0	n	0	n
2	1		1		1		1		0	n	0	n	0	1/2
3	1		1		1		1		1	e 2+4	0	70	0	n
4	0	18 c	0	45 f	0	12 f e	1		0	n	0	n	0	n
5	0	18 c	0	45 f	0	17,12 c	1		0	n	0	n	0	n
6	1		1	d	0		1		0	n	0	n	0	n
7	0	16 c e	1		1	e	1		0	n	0	n	0	n
8	0	65 c	1		0	142,4 e	1		0	n	0	n	0	n
9	0	65 c	1		0	24,14 c	1		0	8	0	17	0	n
10	1		1		1		1		0	2,1	0	77	0	1,5/
11	0	n	0		1		1		0	n	0	n	0	n

12	1		1		1		1		0	n	0	n	0	n
13	1		1		1		1		0	n	0	n	0	n
14	0	65 c	1	f	0		1		0	n	0	n	0	n
15	1		1	f	0	29,12 c	1		0	n	0	n	0	n
16	1		1	f	0	21,12 c	1		0	n	0	n	0	n
17	1		1	d	0	24,14	1		0	2	0	n	0	n
18	0	24 c	1		0	24,92	1		0	2	0	14	0	11/3
19	0	65 c	1	f	1		1		0	n	0	n	0	n
20	0	92 c	1		1		1		0	n	0	n	0	n
21	0	65 c	1		1		1		1		0	28	0	7/4
22	0	29 c	1		1		1		1		1		1	
23	0	19 c e	1		1		1		1		1		1	
24	1	d	1	d	1		1		1		1		1	
25	1		1		1		1		1		1		1	
26	0	29 c	1	e	1	e	1		1		1		1	

f formule fausse

c erreur de calcul

n non fait

r remplacement par les valeurs non correct

a donne une expression algébrique

v valeur de pi non connue

d pas de détail de calcul

e erreur d’écriture

0 réponse fausse (« non fait » est considéré comme une réponse fausse)

1 réponse correcte

Exercice 1 6ème AB avec adaptation

Correct	21	37,50 %	Erreur 10	2	5,71 %
Erroné	35	62,50 %	Erreur 11	2	5,71 %
Total	56	100,00 %	Erreur 15	2	5,71 %
			Erreur 18	2	5,71 %
			Erreur 19	2	5,71 %
			Erreur 23	1	2,86 %
			Erreur 29	2	5,71 %
			Erreur 50	1	2,86 %
			Erreur 55	1	2,86 %
			Erreur 65	12	34 %
			Erreur c	25	
			Erreur e	11	
			Erreur r	1	
			Non fait	3	

Exercice 2 6ème AB

Correct	31	55,36 %	Erreur 5	1	7 %
Erroné	14	25,00 %	Erreur 9	5	36 %
Formule faus	11	19,64 %	Erreur 24	2	14 %
Total	56	100 %	Erreur 36	1	7 %
			Erreur 42	1	7 %
			formule fausse	19	34 %
			Non fait	2	14 %

Exercice 3 6ème AB

Correct	14	25 %	Erreur r	10	24 %
Erroné	42	75 %	Erreur c	12	29 %
Total	56	100 %	Erreur e	7	17 %
			Erreur v	14	33 %
			Erreur f	1	2 %
			Non fait	11	26 %

Exercice 4 6ème AB

Question 1			**Question 2**		
Correct	52	93 %	Correct	53	95 %
Erroné	4	7 %	Erroné	3	5 %
Non fait	2	4 %	Non fait	0	0 %
Total	56	100 %	Total	56	100 %

Question 3			**Question 4**		
Correct	52	93 %	Correct	49	88 %
Erroné	4	7 %	Erroné	7	13 %
Non fait	1	2 %	Non fait	1	2 %
Total	56	100 %	Total	56	100 %

Exercice 1 6ème C D sans adaptation

Correct	26	47,27 %	Erreur 10	0	0,00 %
Erroné	29	52,73 %	Erreur 11	0	0,00 %
Total	55	100,00 %	Erreur 15	0	0,00 %
			Erreur 18	2	6,90 %
			Erreur 19	2	6,90 %
			Erreur 23	1	3,45 %
			Erreur 29	3	10,34 %
			Erreur 50	0	0,00 %
			Erreur 55	2	6,90 %
			Erreur 65	11	38 %
			Erreur c	25	
			Erreur e	8	
			Erreur r	0	
			Non fait	3	

Exercice 2 6ème C D

Correct	31	56,36 %	Erreur 5	2	29 %
Erroné	7	12,73 %	Erreur 9	1	14 %
Formule faus	17	30,91 %	Erreur 24	0	0 %
Total	55	100,00 %	Erreur 36	0	0 %
			Erreur 45	2	29 %
			formule fausse	20	36 %
			Non fait	2	4 %

Exercice 3 6ème C D

Correct	26	47 %	Erreur r	6	21 %
Erroné	29	53 %	Erreur c	12	41 %
Total	55	100 %	Erreur e	10	34 %
			Erreur v	0	0 %
			Erreur f	1	3 %
			Non fait	3	10 %

Exercice 4 6ème CD

Question 1			**Question 2**		
Correct	53	96 %	Correct	12	22 %
Erroné	2	4 %	Erroné	43	78 %
Non fait	2	4 %	Non fait	28	51 %
Total	55	100 %	Total	55	100 %

Question 3			**Question 4**		
Correct	10	18 %	Correct	11	20 %
Erroné	45	82 %	Erroné	44	80 %
Non fait	30	55 %	Non fait	35	64 %
Total	55	100 %	Total	55	100 %

Résumé

Ce mémoire fait suite à notre Travail d'Étude et de Recherche (TER) de l'an passé où nous analysions les choix de transposition didactique concernant la fraction-division faits en France. Nous avions pu mettre en exergue que dans la pratique de classe, nombreux sont les enseignants à ne pas utiliser la définition prescrite par les programmes officiels, estimée trop difficile pour des élèves de 6e du fait de l'utilisation de lettres. Nous cherchons dans le présent mémoire à adresser cette difficulté particulière, par le biais d'une ingénierie didactique. Nous proposons, dans une activité faisant intervenir la manipulation, une initiation à l'algèbre, entretenue lors de rituels. L'impact des apports de l'algèbre sur la suite de la progression est ensuite analysé. Puis nous soumettons une proposition pour une nouvelle trace de cours afin d'introduire la définition du sens quotient de la fraction à la fin du chapitre sur la division plutôt que dans le chapitre sur les fractions. Enfin, un post test réalisé à distance dans le temps nous permet d'évaluer le savoir appris par les élèves.

Mots clefs : Algèbre, sens « quotient » de la fraction, Analyse a priori, Analyse a posteriori, Ingénierie didactique, Praxéologie