

ELECTROTECHNIQUE

GE_GM

Chapitre 3

Circuits Magnétiques

Prof Ali NEJMI

Circuit magnétique

I – Rappels et définitions

- 1- Matériaux magnétiques
- 2- Théorèmes fondamentaux

II – Etude des circuits magnétiques sans fuites :

- 1- Circuits magnétiques linéaires : (non saturés)
- 2- Association de circuits magnétiques linéaires
- 3- Circuits magnétiques non linéaires

III – Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

- 1- Pertes par hystérésis
- 2- Pertes par courant de Foucault
- 3- Pertes fer

IV – Circuit magnétique couplés – diverses inductances

- 1- Inductance propre
- 2- Inductance principale – Inductance de fuites partielles
- 3- Inductance mutuelle
- 4- Coefficient de couplage
- 5- Coefficient de dispersion
- 6- Inductance de fuites totales

Rappels et définitions

1) Matériaux magnétiques:

Ce sont des matériaux ferromagnétiques susceptibles d'acquérir une aimantation (magnétisation) macroscopique importante sous l'action d'un champ magnétique, même relativement faible.

Les matériaux magnétiques sont caractérisés par leur courbe d'aimantation $B = f(H)$.

B : induction magnétique ou champ magnétique.

H : champ magnétique ou excitation magnétique.

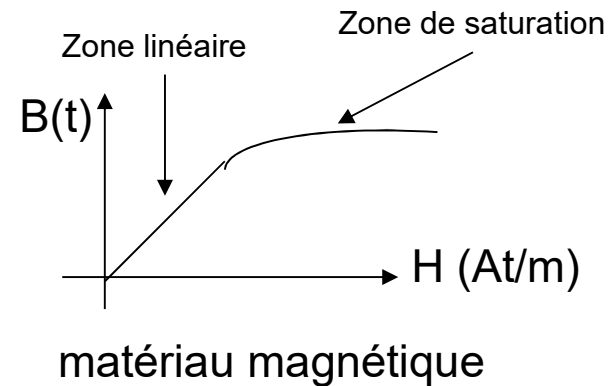
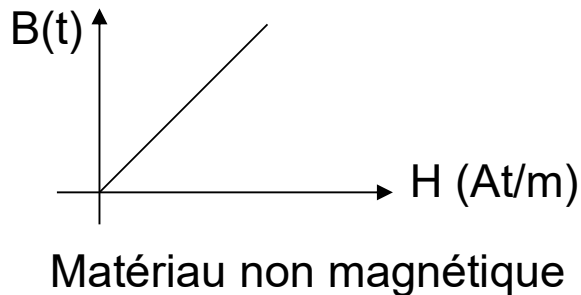
Pour un matériau non magnétique (l'air en particulier), cette courbe est une droite de pente

$$\mu \approx \mu_0 \approx 4\pi 10^{-7} H/m$$

Rappels et définitions

Sinon $B = f(H)$ comporte une zone linéaire caractérisée par

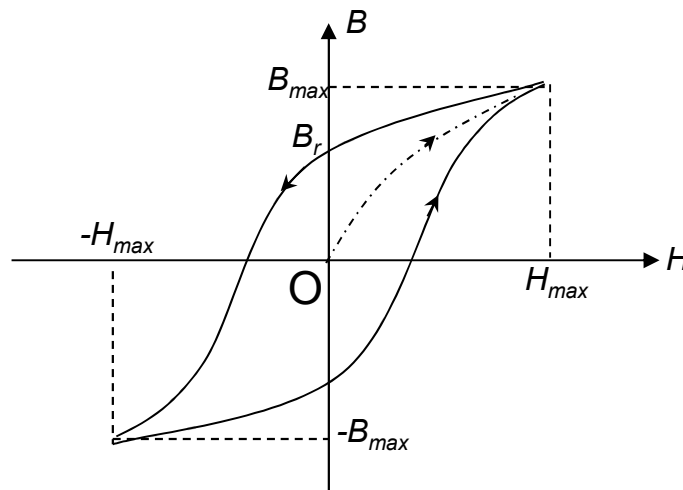
- une perméabilité magnétique $\mu = B/H$ constante et
- une zone de saturation (μ variable).



Rappels et définitions

Quand on parle de la perméabilité magnétique d'un matériau, il s'agit bien sûr de sa valeur dans la zone linéaire. $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ où μ_r est la perméabilité relative du matériau.

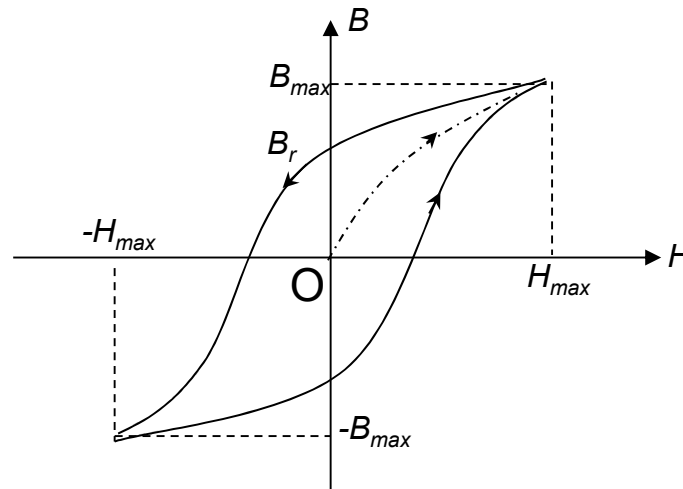
En plus de la non linéarité due à la saturation, la caractéristique $B = f(H)$ possède une autre non linéarité due à l'hystérésis.



----- : Courbe de 1^{er} aimantation

B_r : induction rémanente

Rappels et définitions



En effet, en faisant varier H de 0 à H_{max} puis de H_{max} à $-H_{max}$ et ensuite de $-H_{max}$ à $+H_{max}$, on ne décrit pas la même courbe.

Après un certain nombre d'alternances entre H_{max} et $-H_{max}$, la courbe se stabilise suivant un cycle d'hystérésis symétrique par rapport à O .

Rappels et définitions

Les matériaux magnétiques utilisés en électrotechnique se classent en 2 familles :

Les matériaux magnétiques « doux » et les matériaux magnétiques « durs ».

Les premiers sont facilement aimantés et présentent des pertes par hystérésis faibles. On les utilise dans la construction des transformateurs et des machines tournantes.

Les seconds nécessitent un champ élevé pour être aimantés mais une fois ce champ est appliqué, ces matériaux acquièrent une aimantation rémanente importante et durable, cette propriété permet la réalisation d'aimants permanents utilisés comme inducteurs des machines à courant continu ou synchrones de faibles puissances.

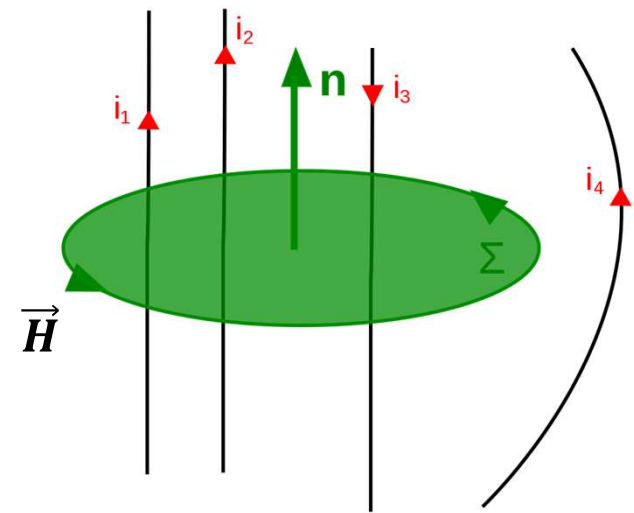
Rappels et définitions

2) Théorèmes fondamentaux:

a. Théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétique \vec{H} le long d'une courbe fermée quelconque (Σ) est égale à la somme algébrique des courants enlacés par cette courbe :

$$\oint_{\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i I_i$$

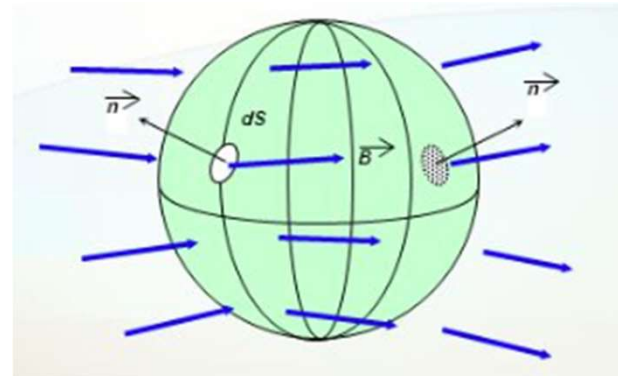


Rappels et définitions

b. Théorème de la conservation du flux :

Le flux de l'induction magnétique \vec{B} sortant d'une surface fermée quelconque (S) est nul.

$$\oiint_{(S)} \vec{B} d\vec{s} = 0$$



Remarque : Le flux est la grandeur conservative des circuits magnétiques. Il joue un rôle analogue à celui d'un courant dans les circuits électriques.

Etude des circuits magnétiques sans fuites

Circuits magnétiques sans fuites

Ce sont des circuits magnétiques où le flux est totalement canalisé.

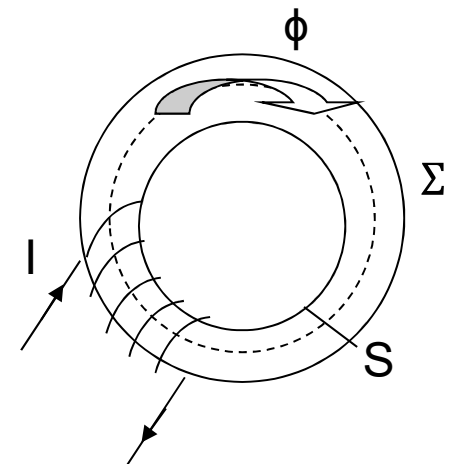
1) Circuits magnétiques linéaires : (non saturés)

Considérons un circuit magnétique torique de perméabilité relative $\mu_r \gg 1$ sur lequel sont régulièrement enroulées n spires :

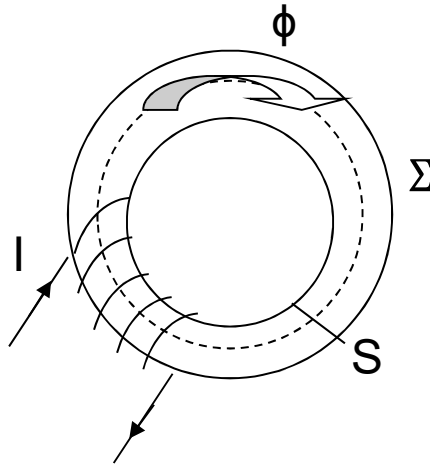
Le théorème d'Ampère appliqué le long de la ligne de champ (ℓ) donne :

$$\oint_{\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i I_i = nI$$

$$H\ell = nI$$



Etude des circuits magnétiques sans fuites



On néglige le phénomène d'hystérésis en supposant le matériau décrit par sa courbe de 1^{ère} aimantation. En plus le circuit magnétique est non saturé donc:

$$B = \mu H \quad (\mu = cte)$$

Le flux à travers la surface (S) est $\Phi = B \cdot S = \mu H \cdot S$

$$\rightarrow nI = (\ell / \mu S) \cdot \Phi$$

Etude des circuits magnétiques sans fuites

On pose :

$$\mathcal{R} = \ell / (\mu S)$$

expression analogue à la résistance d'un conducteur ($R = \ell / \sigma S$)

\mathcal{R} s'appelle la **réluctance** du circuit magnétique (unité : H^{-1})

En posant

$$\begin{aligned} \xi &= nI \\ \xi &= \mathcal{R} \cdot \Phi \end{aligned}$$

ξ analogue à une f.e.m, s'appelle **force magnétomotrice** (f.m.m) (unité : At) (ampère tours).

Etude des circuits magnétiques sans fuites

En conséquence le flux Φ est analogue à un courant :

$$\xi = n I = \mathcal{R} \cdot \Phi$$

s'appelle la loi d'ohm pour les circuits magnétiques ou loi **d'Hopkinson**

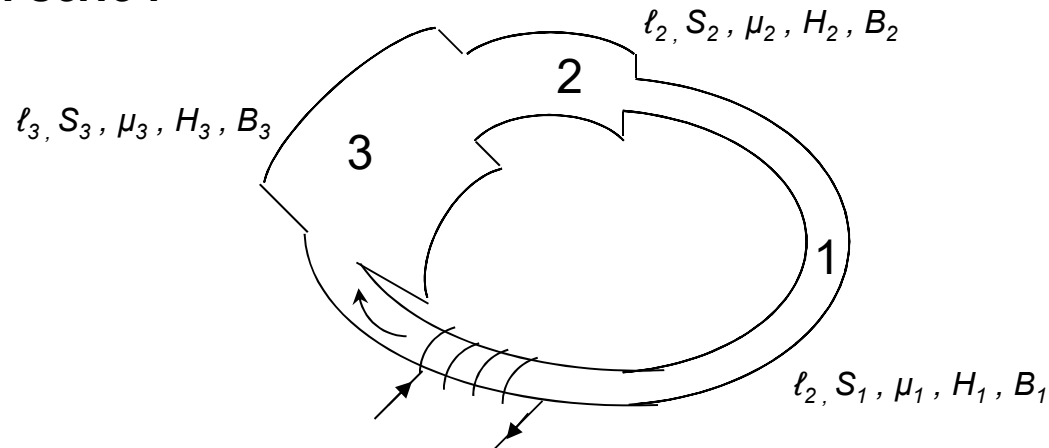
Remarque :

Il n'y a pas de vraie circulation des grandeurs magnétiques.
Le flux existe mais ne correspond ni à un déplacement de charge
ni de matière.

Etude des circuits magnétiques sans fuites

2) Associations de circuits magnétiques linéaires :

a – Association série :



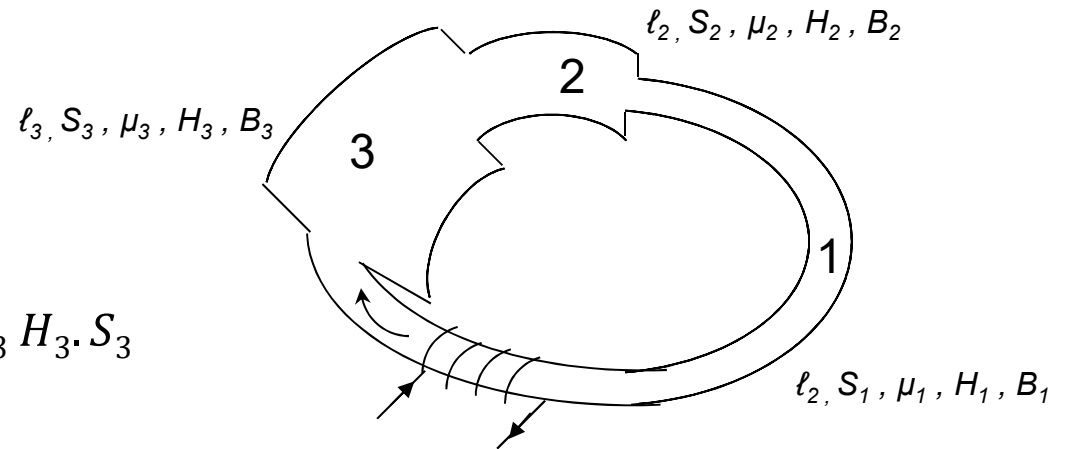
D'après le théorème d'Ampère :

$$n I = H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + H_3 \cdot \ell_3$$

Le flux magnétique est conservatif

$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3$$

Etude des circuits magnétiques sans fuites



$$\Phi = \mu_1 H_1 \cdot S_1 = \mu_2 H_2 \cdot S_2 = \mu_3 H_3 \cdot S_3$$

D'où

$$\mathcal{R} \cdot \Phi = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3) \Phi$$

$$\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_i$$

La réluctance équivalente de plusieurs circuits **en série** est égale à la somme des réluctances des différents circuits.

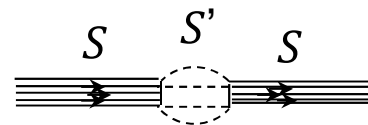
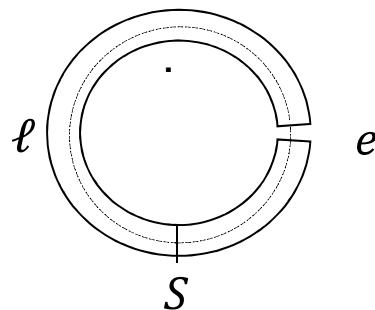
$$nI = \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} \right) \Phi$$

Etude des circuits magnétiques sans fuites

Application à un circuit torique comportant un entrefer :

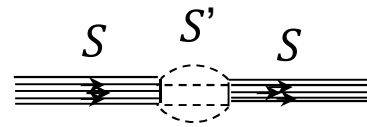
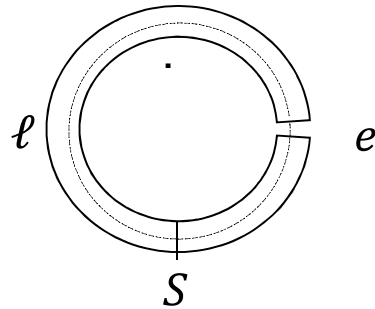
Soit un circuit magnétique torique constitué d'un matériau de perméabilité relative $\mu_r = 1000$, de longueur $\ell = 1\text{ m}$, de section S constante présentant un entrefer d'épaisseur $e = 1\text{ mm}$.

On suppose que les lignes de champ ne débordent pas trop de la section S .



Entrefer réel: $S' = kS$ ($k > 1$)

Etude des circuits magnétiques sans fuites



Entrefer réel: $S' = kS$ ($k > 1$)

La réluctance du circuit est:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{fer} + \mathcal{R}_e$$

avec:

$$\mathcal{R}_{fer} = \frac{l - e}{\mu_0 \mu_r S} \approx \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} \quad \mathcal{R}_e = \frac{e}{\mu_0 \mu_r S} \approx \frac{l}{\mu_0 S}$$

$$\frac{\mathcal{R}_{fer}}{\mathcal{R}_e} = \frac{l}{\mu_r e} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_e = \mathcal{R}_{fer}$$

Etude des circuits magnétiques sans fuites

Donc 1 mm d'air a la même réluctance qu'un mètre de fer, il faudra alors utiliser une f.m.m aussi grande pour faire passer le même flux dans 1 mm d'air que dans 1 m de fer.

Conclusion :

Les entrefers doivent avoir des faibles épaisseurs.

De même $B_{fer} = B_e \rightarrow H_e = \mu_r H_{fer}$ C'est-à-dire $H_e = 1000 \cdot H_{fer}$

L'intérêt de ménager des entrefers est la possibilité d'obtenir des valeurs élevées du champ magnétique.

Etude des circuits magnétiques sans fuites

b – Association parallèle:

Le flux est conservatif :

$$\rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

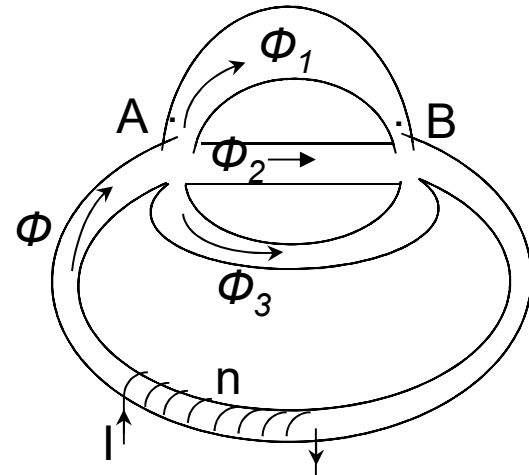
La différence de potentiel magnétique:

$$V_A - V_B = \mathcal{R}_1 \Phi_1 = \mathcal{R}_2 \Phi_2 = \mathcal{R}_3 \Phi_3$$

Si \mathcal{R} est la réluctance équivalente de la branche entre A et B

$$V_A - V_B = \mathcal{R} \Phi$$

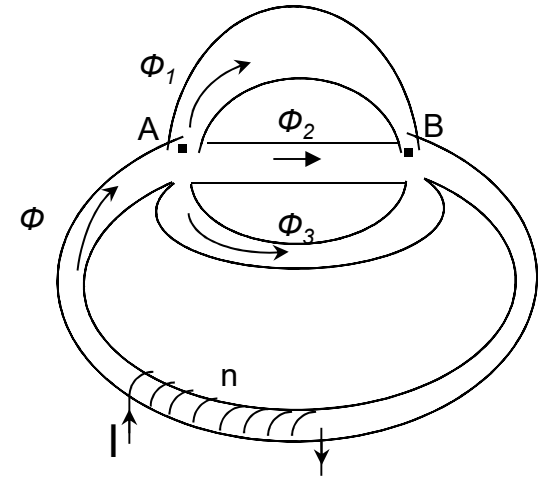
Or
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$



Etude des circuits magnétiques sans fuites

$$\Rightarrow \frac{V_A - V_B}{\mathcal{R}} = \frac{V_A - V_B}{\mathcal{R}_1} + \frac{V_A - V_B}{\mathcal{R}_2} + \frac{V_A - V_B}{\mathcal{R}_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} = \sum \frac{1}{\mathcal{R}_i}$$



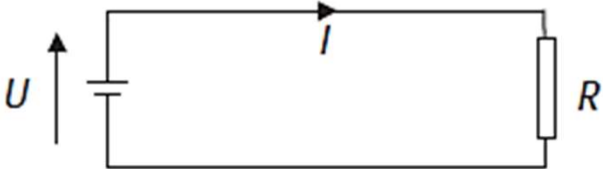
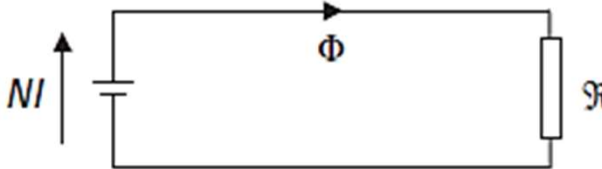
La **perméance** équivalence de plusieurs circuits en parallèle est égale à la somme des perméances des différents circuits.

$$\mathcal{P} = \sum \mathcal{P}_i$$

$$(\mathcal{P}_i = \frac{1}{\mathcal{R}_i}) : \text{perméance}$$

Etude des circuits magnétiques sans fuites

ANALOGIE ENTRE CIRCUITS ÉLECTRIQUES ET CIRCUITS MAGNÉTIQUES

Circuits électriques	Circuits magnétiques
	
U : Force électromotrice fem	NI : Force magnétomotrice fmm
R : Résistance	R : Réluctance
Loi d'Ohm : $U = R \cdot I$	Loi d'Hopkinson : $N \cdot I = R \cdot \Phi$
Associations de Résistances	Associations de Réluctances
Série : $R = R_1 + R_2$	Série : $R = R_1 + R_2$
Parallèle : $R = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$	Parallèle : $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Etude des circuits magnétiques sans fuites

3) Circuits magnétiques non linéaires :

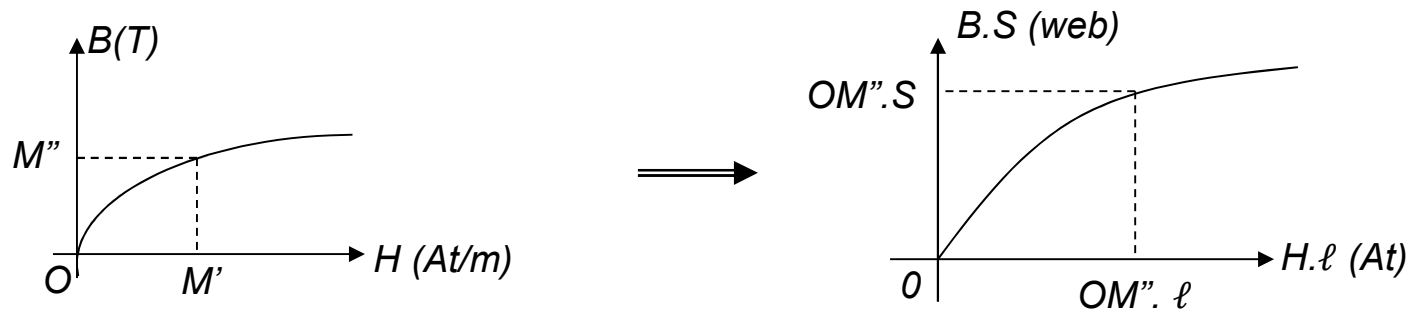
$\mu = B/H$ n'est plus une constante et les formules précédentes ne s'appliquent plus.

On étudie alors ces circuits par la méthode des « ***caractéristiques partielles*** ».

Soit $B = f(H)$ la caractéristique donnée d'un matériau par le fabricant ou relevé expérimentalement.

Supposons que ce matériau constitue un élément de section S et de longueur ℓ du circuit magnétique étudié.

Etude des circuits magnétiques sans fuites



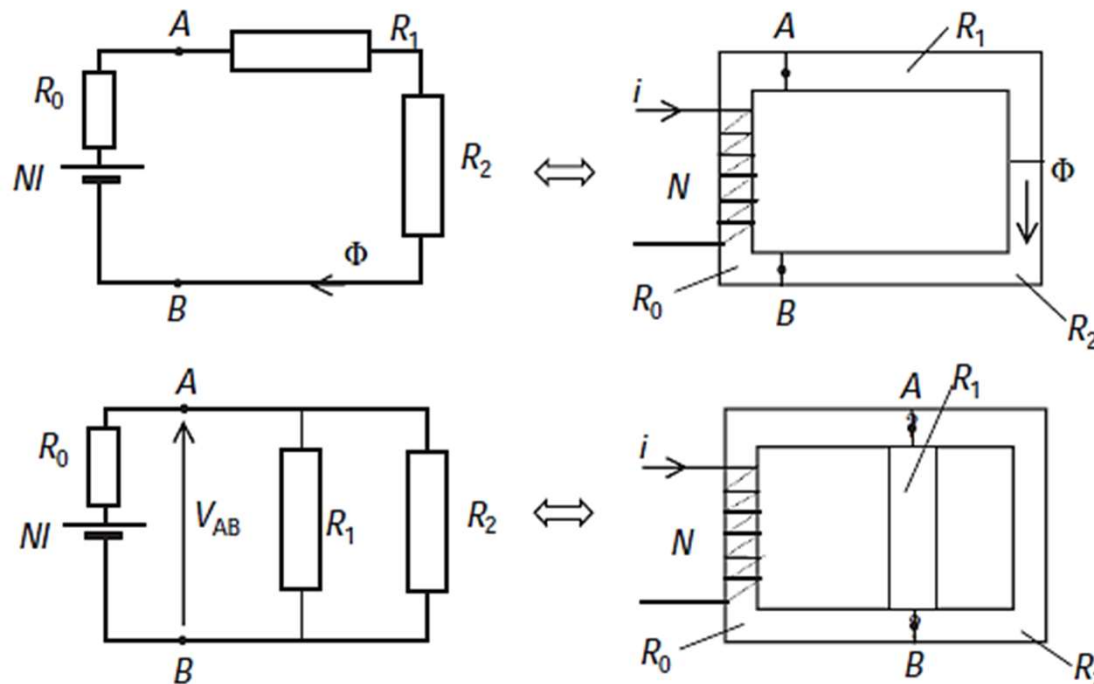
Pour obtenir dans cet élément une induction $B = OM''$, il faut lui appliquer un champ $H = OM'$. Donc pour la totalité de la longueur ℓ , il faut une ddp $H.l = OM'.l$ pour que la section S soit traversée par le flux :

$$\Phi = B.S = OM''.S$$

Etude des circuits magnétiques sans fuites

Un circuit est dit hétérogène dès lors qu'il est constitué de matériaux différents ou de géométries à sections variables.

La méthodologie va consister, comme dans un circuit électrique, à utiliser les associations connues de ré reluctances afin de calculer les différentes grandeurs.



Etude des circuits magnétiques sans fuites

Dans le cas d'une association d'éléments on applique les résultats suivants :

- Dans une association série les ddp magnétiques s'ajoutent à flux constant (somme graphique horizontale).
- Dans une association parallèle les flux s'ajoutent à ddp magnétique constante. (somme graphique verticale).

Etude des circuits magnétiques sans fuites

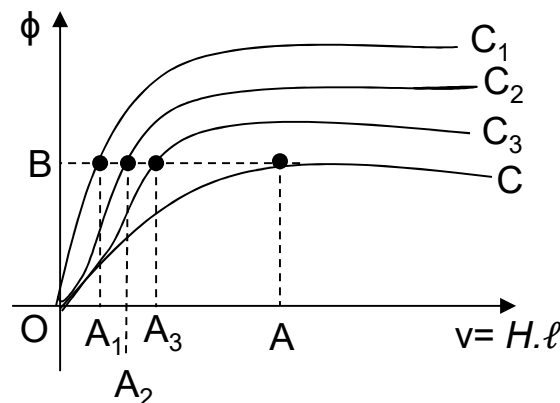
Application :

1. Circuit magnétique constitué d'éléments en série :

Considérons 3 éléments d'un circuit magnétique, montés en série, de caractéristiques partielles respectives C_1 , C_2 , C_3

Pour faire passer un flux égal à OB respectivement dans le 1^{ère}, le 2^{ème} et le 3^{ème} élément, il faut établir respectivement à ses bornes une ddp magnétique:

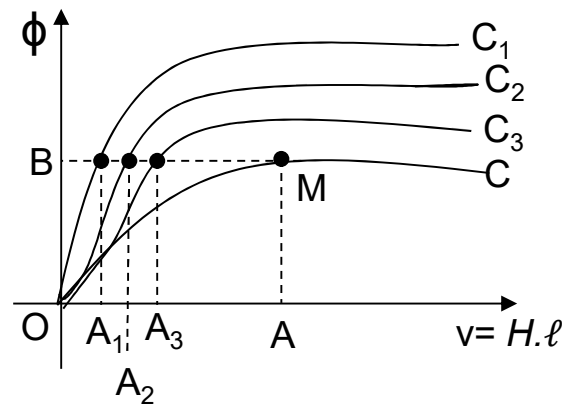
$$V_1 = OA_1 \quad V_2 = OA_2 \quad \text{et} \quad V_3 = OA_3$$



Etude des circuits magnétiques sans fuites

Pour faire passer le même flux dans les 3 éléments en série, il faut avoir une ddp magnétique:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = OA_1 + OA_2 + OA_3 = OA$$

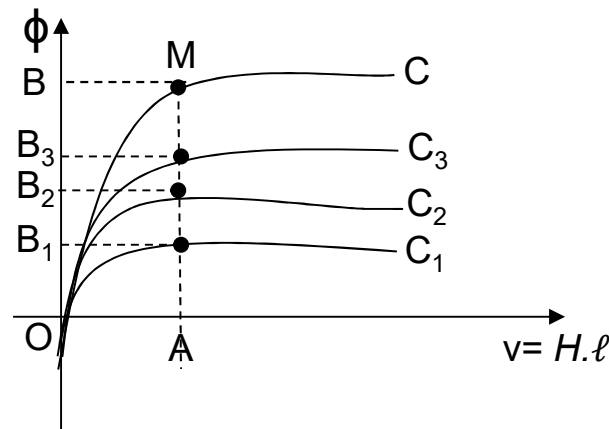


Les coordonnées (OA, OB) définissent le point M de la caractéristique totale C . En procédant ainsi pour d'autres points, on obtiendra la caractéristique C

Etude des circuits magnétiques sans fuites

2. Circuit magnétique constitué d'éléments en parallèle :

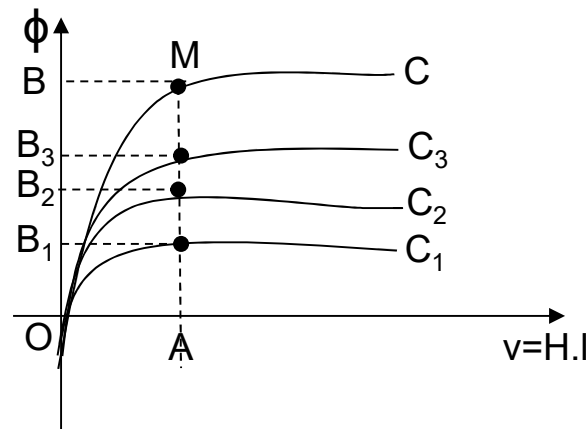
Considérons 3 éléments d'un circuit magnétique, montés en parallèle, de caractéristiques partielles respectives C_1, C_2, C_3



La ddp magnétique $v = H\ell$ fait circuler le flux:

$\Phi_1 = OB_1$ dans le premier élément,
 $\Phi_2 = OB_2$ dans le second et
 $\Phi_3 = OB_3$ dans le troisième

Etude des circuits magnétiques sans fuites



donc :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = OB_1 + OB_2 + OB_3 = OB$$

dans les 3 éléments en parallèle.

Les coordonnées (OA, OB) définissent le point M de la caractéristique totale C . En procédant ainsi pour d'autres points, on obtiendra la caractéristique C

Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

Un flux alternatif traversant un circuit magnétique y génère des pertes qui se traduisent par un échauffement. Ces pertes ont deux causes: **l'hystérésis** et les courants de **Foucault**.

1- Pertes par hystérésis :

On démontre qu'un échantillon de matériau magnétique soumis à un champ variable tel qu'il décrive un cycle d'hystérésis complet, absorbe une énergie égale à l'aire du cycle multiplié par le volume de l'échantillon.

Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

Donc si le cycle est décrit f fois par seconde càd si le champ est alternatif de fréquence f , les pertes d'énergie par seconde càd la puissance dissipée aura pour expression:

$$P_H = f \cdot V \cdot A$$

V : Volume de l'échantillon

A : aire du cycle

L'aire du cycle étant approximativement proportionnelle au carré de l'induction maximale, P_H s'écrit :

$$P_H = k_H \cdot V \cdot f \cdot B_{\max}^2$$

formule de Steinmetz.

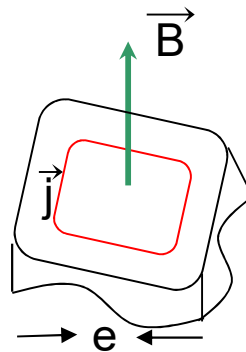
k_H : Coefficient fonction de la nature du matériau.

Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

2- Pertes par courants de Foucault:

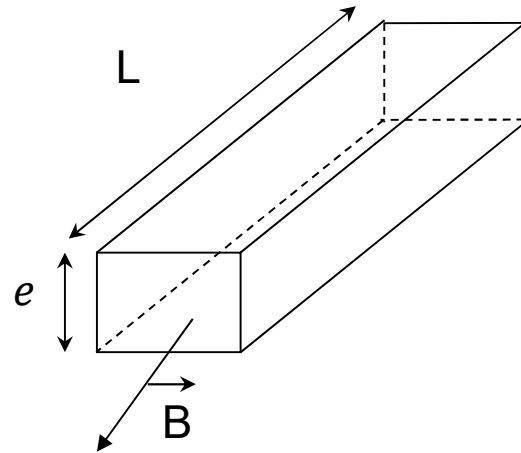
L'équation de maxwell $\text{rot}(\vec{J}) = -\sigma \partial \vec{B} / \partial t$ établit une relation entre un phénomène d'induction variable dans le temps et une densité de courant dans un milieu conducteur.

J : densité de courant
 σ : conductivité.



Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

e: épaisseur de
l'échantillon magnétique
V: Volume de l'échantillon



Il découle de ce phénomène des pertes par courants de Foucault P_F .

On démontre que P_F est proportionnel à f^2 , B_{\max}^2 , e^2 et V

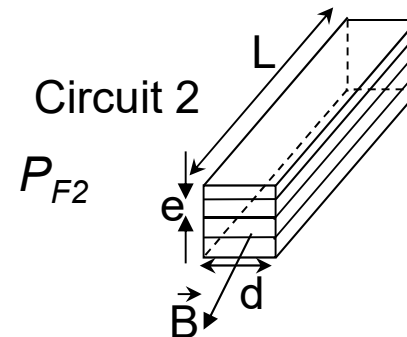
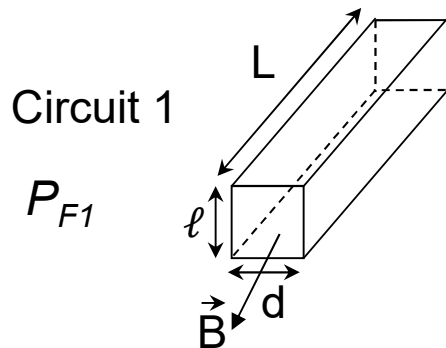
$$P_F = k_F \cdot V \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2$$

k_F : coefficient fonction de la nature du matériau

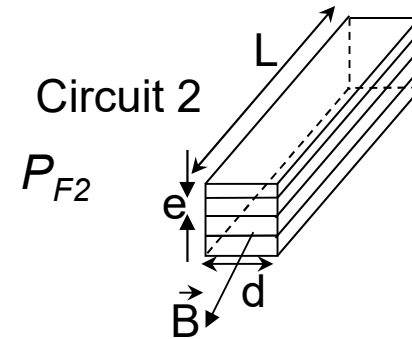
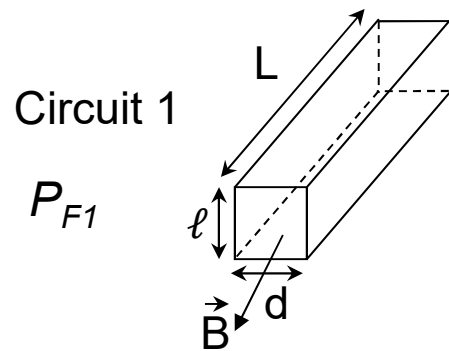
Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

En pratique, les circuits magnétiques soumis à des flux variables sont feuilletés. Ils sont réalisés par un empilement de tôles disposées parallèlement aux ligne du champ d'induction. Les tôles sont d'épaisseurs de l'ordre de $0,5\text{ mm}$ et sont isolés par du vernis.

Comparons les pertes par courant de Foucault P_F des deux circuits :
Avec $\ell = 5\text{ cm}$ et $e = 0,5\text{ mm}$. (même métal)



Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer



$$P_{F1} = k_F \cdot V \cdot \ell^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2 = k_F \cdot L \cdot d \cdot \ell \cdot \ell^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2$$

$$= k_F \cdot L \cdot d \cdot \ell^3 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2$$

Or : $\ell = 5 \text{ cm}$ et $e = 0,5 \text{ mm} \rightarrow \ell = 100 \cdot e$

$$P_{F1} = 10^3 k_F \cdot L \cdot d \cdot e^3 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2$$

$$= 100^2 \cdot [100 \cdot k_F \cdot L \cdot d \cdot e \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2]$$

$$P_{F1} = 100^2 \cdot P_{F2}$$

donc

$$P_{F1} = 10000 \cdot P_{F2}$$

Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

3- Pertes fer

On appelle pertes fer la somme des pertes par hystérésis et des pertes par courants de Foucault.

$$P_{\text{fer}} = V \cdot B_{\text{max}}^2 (k_H \cdot f + k_F \cdot e^2 \cdot f^2)$$

Pour réduire les pertes par hystérésis on ajoute du silicium dans le fer ($\leq 4\%$).

Pour réduire les pertes par courants de Foucault on feuillette le fer. Donc pour réduire les pertes fer, on utilise des tôles de fer siliciées .

On caractérise les tôles utilisées dans les circuits magnétiques par leur qualité c.à.d par les pertes fer dont elles sont le siège sous une induction maximale de 1 T, à une fréquence de 50 Hz et pour une masse de 1 kg.

On trouve ainsi des tôles de 0,5W/kg pour les transformateurs, jusqu'à 3,5W/kg pour les petites machines tournantes.

Circuit magnétique couplés – diverses inductances

1) Inductance propre :

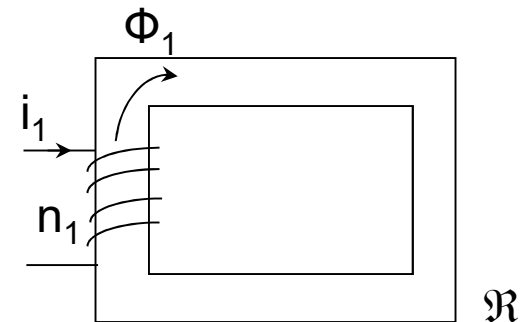
Considérons le circuit magnétique suivant, supposé parfait et de réluctance \mathfrak{R}

Le flux Φ_1 produit par la f.m.m: $n_1 i_1$ traverse intégralement le circuit magnétique :

$$n_1 i_1 = \mathfrak{R} \Phi_1$$

Par définition, l'inductance propre de la bobine montée sur ce circuit magnétique est :

$$L_1 = n_1 \Phi_1 / i_1 = \frac{n_1^2}{\mathfrak{R}}$$



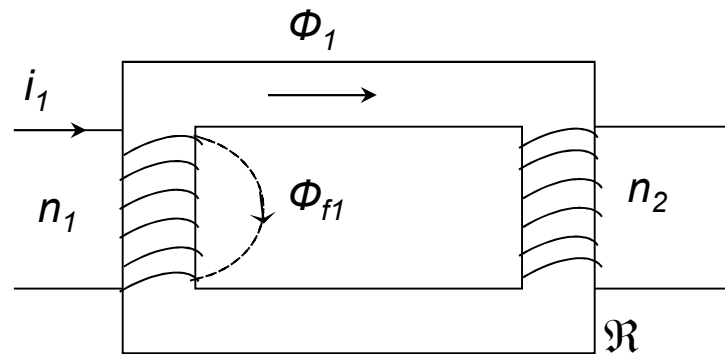
Circuit magnétique couplés – diverses inductances

2) Inductance principale – Inductance de fuites partielles,

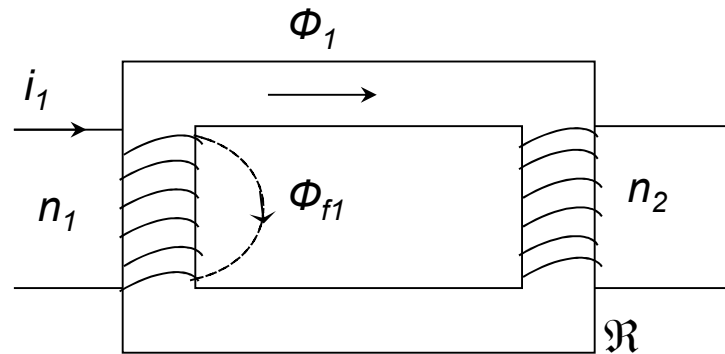
Inductance mutuelle :

En réalité le flux propre Φ'_1 est composé d'un flux principal Φ_1 qui est canalisé par le circuit magnétique et d'un flux de fuites Φ_{f1} dû aux lignes de champ qui se referment dans l'air.

$$\Phi'_1 = \Phi_1 + \Phi_{f1}$$



Circuit magnétique couplés – diverses inductances



$$L_{2p} = (n_2 \Phi_2)/i_2 = n_2^2/\mathcal{R}$$

$$\ell_2 = (n_2 \Phi_{f2})/i_2 = n_2^2/\mathcal{R}_{f2}$$

et $M = (n_1 \Phi_2)/i_2 = (n_1 n_2)/\mathcal{R}$

On déduit que :

$$L_1 = L_{1p} + \ell_1, \quad L_2 = L_{2p} + \ell_2 \quad \text{et} \quad M^2 = L_{1p} \cdot L_{2p}$$

Circuit magnétique couplés – diverses inductances

3) Coefficient de couplage

Le coefficient de couplage des bobines 1 et 2 est défini par:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

Le couplage est d'autant meilleur que k est proche de 1

4) Coefficient de dispersion

On le définit par $\sigma = 1 - k^2$

Le couplage est d'autant meilleur que σ est proche de zéro

Circuit magnétique couplés – diverses inductances

5) Coefficient de couplage

En présence de 2 bobines, chacune ayant une inductance de fuites partielles, souvent pour des raisons de simplicité de calcul, on ramène les fuites à l'un des 2 bobinages :

Supposons qu'on ramène les fuites à la bobine 1 et appelons N_1 l'inductance de fuites totales :

$$\begin{aligned} M^2 &= L_{1p} \cdot L_{2p} = (L_1 - l_1)(L_2 - l_1) \\ &= (L_1 - N_1)(L_2) \\ &= L_1 L_2 - N_1 \cdot L_2 \end{aligned}$$

Circuit magnétique couplés – diverses inductances

$$N_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 - M^2$$

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1 - (M^2 / L_2) = L_1(1 - M^2 / L_1 L_2) \\ &= L_1(1 - K^2) \\ &= \sigma \cdot L_1 \end{aligned}$$

De même

$$N_2 = \sigma \cdot L_2$$