UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
BENI-MELLAL

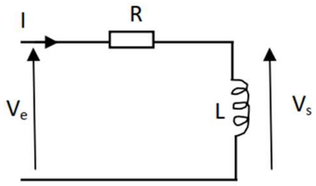
Parcours : **GESE - GP- GMSI – GI- GC - MSD**
Module : **Circuits électriques et électroniques**

Travaux Dirigés
Correction

Série N° : 4

Correction de l'exercice 1 :

On considère le circuit ci-dessous avec **R = 1 kΩ** et **L = 10 mH.**



1. **Type de filtre** :

➔ À très **basse fréquence**, la bobine est équivalente à un fil, donc $V_S = 0$;

➔ À très **haute fréquence**, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $V_S = V_e$.

Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut.**

2. **Fonction de transfert** $H = \frac{V_s}{V_e}$

Utilisons un pont diviseur de tension :

$$V_s = \frac{Z_L}{R + Z_L} V_e$$

Donc

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

$$H = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

Ainsi

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0}\frac{\mathbf{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\mathbf{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Avec : $\begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_0 = \frac{R}{L} \end{cases}$

3. Diagramme de Bode du gain

➔ **Module de Fonction de Transfert**

$$|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)| = \left| H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \right| = |\mathrm{H_0}| \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad ;\ Avec\ H_0 = 1\ et\ \omega_0 = \frac{R}{L}$$

➔ **Gain en décibel (dB) H_{dB}**

$$\mathrm{H_{dB}} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

$$\mathrm{H_{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{\mathrm{H_0}\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = 20\log(\mathrm{H_0}) + 20log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

➔ **Asymptotes**

$$\mathrm{H_{dB}} = 20log(H_0) + 20log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\mathrm{H_{dB}} = 20log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

À basse fréquence :

$$\omega \ll \omega_0 \quad \text{donc} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$$

$$|\mathrm{H}| = \mathrm{H_0}\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{donc} \quad \mathrm{H_{dB}} = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow -\infty$$

Ainsi :

H_{dB} → -∞ qui représente une asymptote sous forme d'une droite de pente +20dB/decade à basse fréquence

À haute fréquence :

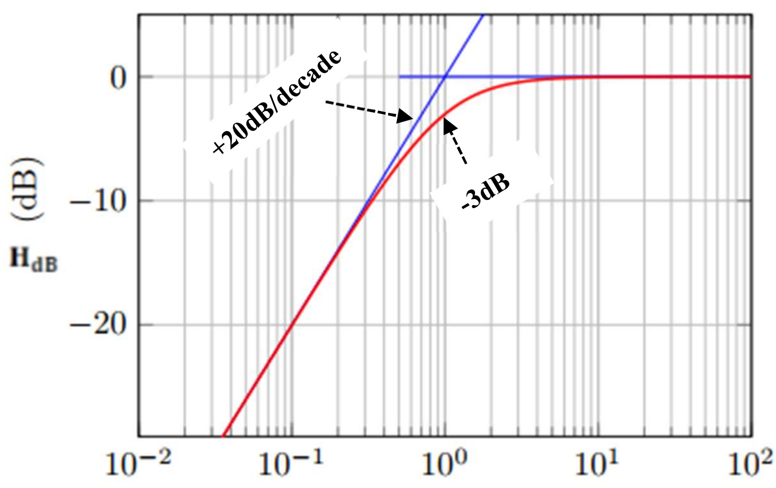
$$\omega_0 \ll \omega \quad \text{donc} \quad 1 \ll \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$|H| = |H_0| \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = |H_0| = 1 \text{ donc } H_{dB} \rightarrow \ 0$$

Ainsi :

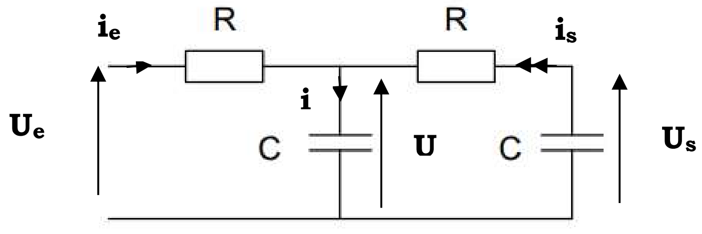
H_{dB} → 0 qui représente une asymptote sous forme d'une droite horizontale de pente nulle, qui coïncide avec l'axe des abscisses, à haute fréquence.

Nous obtenons ainsi le **diagramme de Bode du gain :**



Correction de l'exercice 2 :

On considère le **filtre** suivant, **R = 10 kΩ, C = 10 nF.**



1. Montrons que la **fonction de transfert** de ce filtre peut se mettre sous la forme

$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{H_0}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Les **lois de Kirchhoff** donnent :

$$i = i_e + i_s$$

$$i_e = \frac{U_e - U}{R} \;\; ; \;\; i_s = \frac{U_s - U}{R} ; i = \frac{U}{Z_c}$$

Par suit

$$\frac{U}{Z_c} = \frac{U_s - U}{R} + \frac{U_e - U}{R}$$

$$U\left(\frac{1}{Z_c} + \frac{2}{R}\right) = \frac{U_s + U_e}{R}$$

Le diviseur de tension donne :

$$U_s = \frac{Z_c}{Z_c + R} U$$

Alors

$$\frac{Z_c + R}{Z_c}\left(\frac{1}{Z_c} + \frac{2}{R}\right) U_s = \frac{U_s + U_e}{R}$$

$$\frac{Z_c + R}{Z_c}\left(\frac{R + 2Z_c}{Z_c}\right) U_s = U_s + U_e$$

$$\left(\frac{(Z_c + R)(R + 2Z_c)}{Z_c^2} - 1\right) U_s = U_e$$

$$H = \frac{1}{\frac{(Z_c + R)(R + 2Z_c)}{Z_c^2} - 1} = \frac{1}{\frac{RZ_c + 2Z_c^2 + R^2 + 2RZ_c}{Z_c^2} - 1}$$

$$H = \frac{1}{\frac{R}{Z_c} + \left(\frac{R}{Z_c}\right)^2 + \frac{2R}{Z_c} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{3R}{Z_c} + \left(\frac{R}{Z_c}\right)^2}$$

Ainsi :

$$H = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} = \frac{H_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Avec :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ m = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2. L'expression de la **fréquence de coupure**, f_c, en fonction des éléments du circuit

$$|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega_c)| = \left|\frac{H_0}{1 + 2jm\frac{\omega_c}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}\right| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

Le module est maximal pour $\omega \to 0$ et vaut $H_{max} = H_0 = 1$

$$|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega_c)| = \left|\frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}}\right| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Par suit :

$$|\mathrm{H}|(f_c) = \left|\frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{f_c}{f_0}\right)^2}}\right| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Alors :

$$\left(1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2\right)^2 + \left(3\frac{f_c}{f_0}\right)^2 = 2$$

Posons : $x = \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2$

$$(1 - x)^2 + 9x = 2$$

Donc

$$x^2 + 7x - 1 = 0$$

$\Delta = 53$ **une solution positive ;** $x = \frac{-7+\sqrt{53}}{2}$ **donc** $f_c = f_0\sqrt{x}$

Ainsi :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}\sqrt{\frac{-7 + \sqrt{53}}{2}} = 596\ Hz$$

3. Il s'agit d'un **Filtre passif passe-bas du deuxième ordre**

4. **Diagramme de Bode** du gain

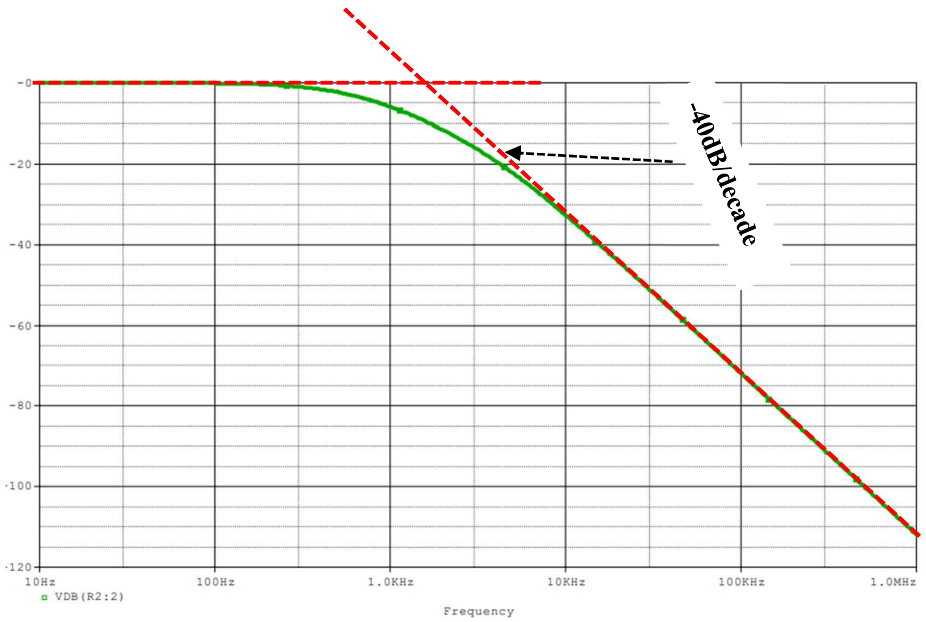
En **Basse Fréquence** : $\frac{\omega}{\omega_0}$ **<<1** ou **ω** << ω_0,
On a : **|H (jω)|** → **1** donc : $H_{dB} \rightarrow 20\,log\,1 = 0dB$.

➔ L'asymptote est donc horizontale.

- En **Haute Fréquence** : $\frac{\omega}{\omega_0}$ **>>1** ou **ω** >> ω_0,

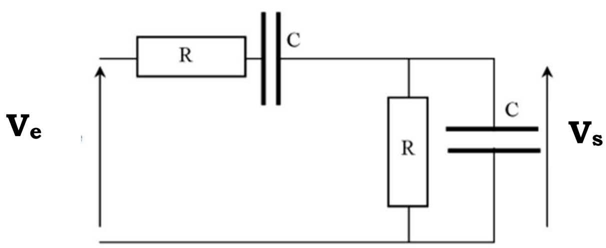
On a : **|H(jω)|** → $\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ donc : $H_{dB} \rightarrow -20\,log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -40\,log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

➔ L'asymptote est donc une droite de pente **-40dB/décade**

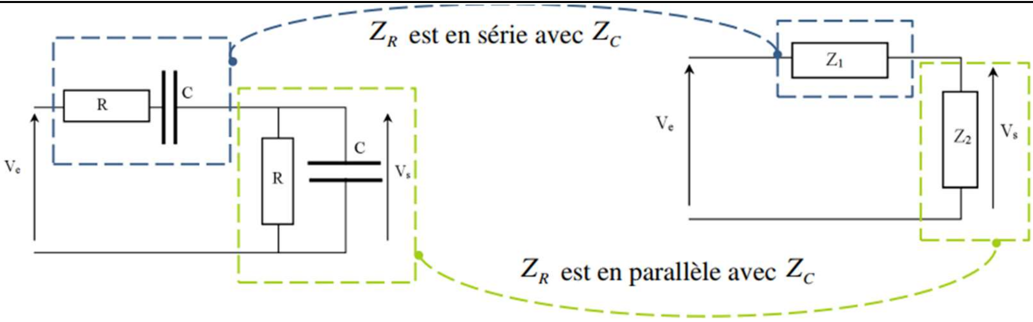


Correction de l'exercice 3 :

Soit le montage du filtre ci-dessous :



1. **La fonction de transfert** H(jω) = $\frac{V_s}{V_e}$ **en fonction de R, C et** ω **:**



Avec :

$$Z_1 = R + Z_c = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}$$

$$Z_2 = R//Z_c = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Le pont diviseur de tension donne :

$$V_s = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} V_e$$

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{\mathrm{V_s}}{\mathrm{V_e}} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{1 + jRC\omega} + \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}}$$

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{jRC\omega + (jRC\omega + 1)^2}{jC\omega(1 + jRC\omega)}}$$

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (jRC\omega + 1)^2}$$

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1 + 2jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} = \frac{1}{3 + \frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega}$$

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Avec :

$$\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

2. L'expression de la fréquence coupure ou les fréquences de coupure en fonction de R et C

La fréquence de coupure f_c, ou ω_c, est la fréquence à laquelle l'amplitude de sortie est à de la valeur maximale :

$$|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega_c)| = \left|\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)}\right| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

Le module est maximal pour $\omega \to \omega_0$ et vaut $H_{max} = H_0 = \frac{1}{3}$

Donc :

$$|H|(f_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f_c}{f_0} - \frac{f_0}{f_c}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Par suit :

$$\left|Q\left(\frac{f_c}{f_0} - \frac{f_0}{f_c}\right)\right| = 1 \quad \textbf{c'est-à-dire} \quad Q\left(\frac{f_c}{f_0} - \frac{f_0}{f_c}\right) = \pm 1$$

Si :

$$Q\left(\frac{f_c}{f_0} - \frac{f_0}{f_c}\right) = 1$$

$$Qf_c^2 - f_0 f_c - Qf_0^2 = 0$$

Donc

$$\Delta = f_0\sqrt{1 + 4Q^2}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f_{c_1} = \dfrac{f_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 + 4Q^2}\right) \\ f_{c_2} = \dfrac{f_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right) \end{cases}$$

Si :

$$Q\left(\frac{f_c}{f_0} - \frac{f_0}{f_c}\right) = -1$$

$$Qf_c^2 + f_0 f_c - Qf_0^2 = 0$$

Donc

$$\Delta = f_0\sqrt{1+4Q^2}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f'_{c_1} = \dfrac{f_0}{2Q}\left(-1-\sqrt{1+4Q^2}\right) \\ f'_{c_2} = \dfrac{f_0}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right) \end{cases}$$

Seules les solutions positives de cette équation sont physiquement acceptables.

$$\begin{cases} f_{c_1} = \frac{f_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1+4Q^2}\right) \\ f_{c_2} = \frac{f_0}{2Q}\left(1+\sqrt{1+4Q^2}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f'_{c_1} = \frac{f_0}{2Q}\left(-1-\sqrt{1+4Q^2}\right) \\ f'_{c_2} = \frac{f_0}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right) \end{cases}$$

En conclusion :

➔ **Fréquence de coupure basse est :**

$$f_{C_B} = \frac{f_0}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right)$$

➔ **Fréquence de coupure basse est :**

$$f_{C_H} = \frac{f_0}{2Q}\left(1+\sqrt{1+4Q^2}\right)$$

Avec :

$$\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

3. Diagramme de Bode pour le gain et la phase

➔ **Module de Fonction de Transfert**

$$|\mathbf{H}(\mathbf{j\omega})| = \left|\frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right| = \frac{|\mathbf{H_0}|}{\sqrt{1+\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}} \quad ; \; \textit{Avec } H_0 = 1/3 \textit{ et } \omega_0 = 1/RC$$

➔ **Gain en décibel (dB) H_{dB}**

$$H_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\,log(H_0) - 20log\left(\sqrt{1+\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}\right)$$

➔ **Phase**

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

➔ **Asymptotes pour le gain en dB**

À basse fréquence :

$$\omega \ll \omega_0 \quad \text{donc} \ \frac{\omega}{\omega_0} \to 0 \ \text{et} \ \frac{\omega_0}{\omega} \to \infty \ \left(\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1\right)$$

$$|H| = \frac{H_0}{Q\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{\omega}} \to 0 \ ; \ avec\ H_0 = Q = \frac{1}{3}$$

Donc

$$H_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\infty$$

$$H_{dB} = +20\log(\omega) - 20log(\omega_0)$$

Ainsi :

$H_{dB} \to -\infty$ qui représente une asymptote sous forme d'une droite de pente +20dB/decade à basse fréquence

À haute fréquence :

$$\omega_0 \ll \omega \quad \text{donc} \ \frac{\omega_0}{\omega} \to 0 \ \text{et} \ \frac{\omega}{\omega_0} \to \infty \ \left(\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1\right)$$

$$|H| = \frac{H_0}{Q\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega} \to 0 \ ; \ avec\ H_0 = Q = \frac{1}{3}$$

Donc

$$H_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \to -\infty$$

$$H_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -20log(\omega) + 20log(\omega_0)$$

Ainsi :

$H_{dB} \rightarrow$ -∞ qui représente une asymptote sous forme d'une droite de pente -20dB/decade à haute fréquence

➔ Asymptotes pour la phase

À basse fréquence :

$$\omega \ll \omega_0 \quad \textbf{donc } \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow +\infty \; (\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1)$$

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

À haute fréquence :

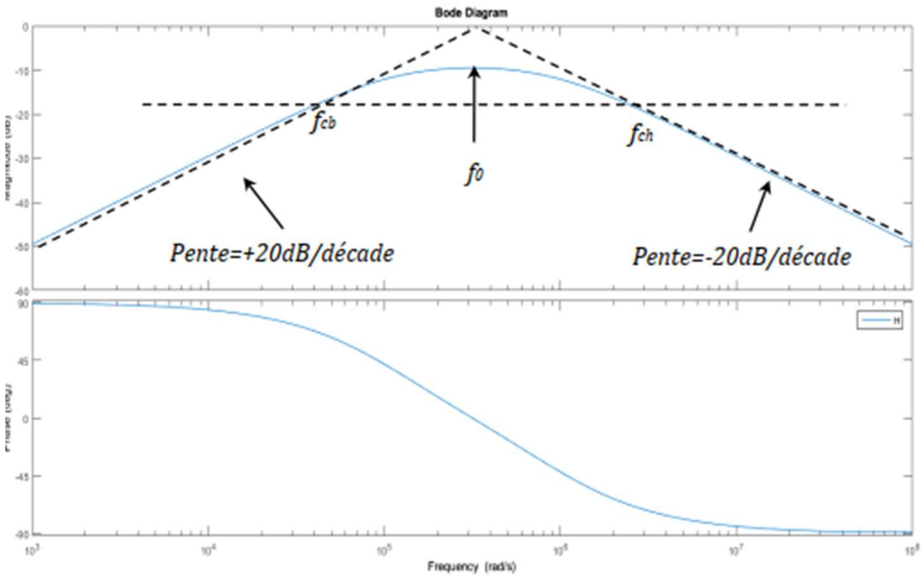
$$\omega_0 \ll \omega \quad \textbf{donc } \frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow +\infty \; (\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1)$$

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Si $\omega = \omega_0$:

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = 0$$

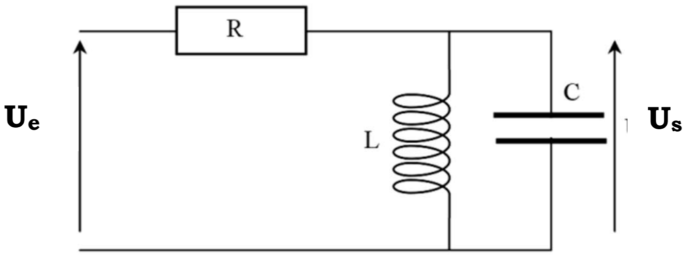
Nous obtenons ainsi le **diagramme de Bode suivant :**

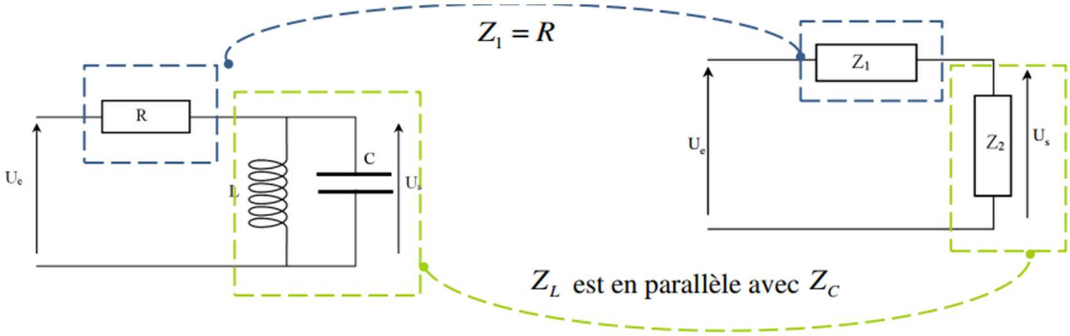


4. Il s'agit, donc, d'un **filtre passe-bande**

Correction de l'exercice 4 :

1. L'expression de la **fonction de transfert** H(jω) **= Us/Ue** en fonction de **R**, **L**, **C** et ω.





Diviseur de tension donne :

$$U_s = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} U_e$$

Avec :

$Z_2 = \dfrac{\frac{jL\omega}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$; $Z_2 = R$

$$H(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{\dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{\dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} + R}$$

$$H(j\omega) = \frac{jL\omega}{jL\omega + R(1 - LC\omega^2)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

$$\mathbf{H(j\omega)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - j\frac{R}{L\omega} + jRC\omega}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + jR}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{CL}\omega}\right)}$$

$$\mathbf{H(j\omega)} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1 + jQ}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Avec : $\begin{cases} \mathbf{K = 1} \\ \mathbf{Q = R}\sqrt{\frac{C}{L}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$

2. La valeur de la **fréquence de résonance f_r**.

La fréquence de résonance *est la fréquence à laquelle un système oscillant réagit avec une amplitude maximale, minimisant les pertes énergétiques. Dans un circuit RLC, c'est la fréquence où l'impédance est minimale et le courant maximal.*

Donc :

$$f_r = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

3. Pour les f**réquences de coupure**s f_{C_B} et f_{C_H} **:**

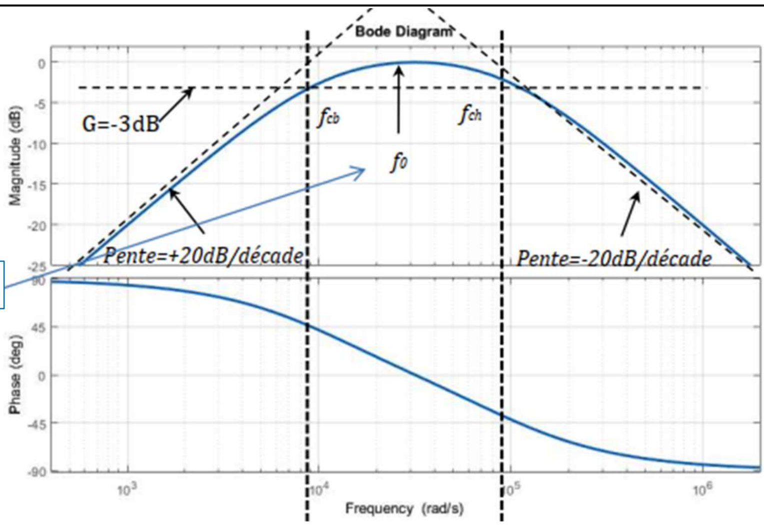
➔ **Voir l'exercice 3 question 2**

4. Us à la résonance :

f_0 est la fréquence de résonance, correspondant au maximum du gain et à un déphasage nul, donc : $U_s = U_e$

5. Le diagramme de Bode de ce filtre

➔ **De la même manière que dans l'exercice 3, nous obtenons le diagramme de Bode suivant :**



fréquence de résonance