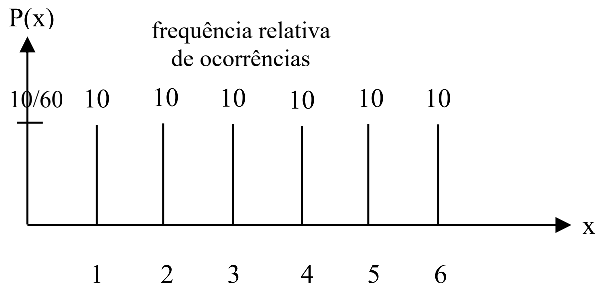
Simulação do canal rádio móvel para telemetria

Prof.º Carlos Henrique

1. **Variável Aleatória Uniforme**

Vamos imaginar o evento arremesso de um dado (não viciado). A probabilidade de o resultado ser 1 é a mesma de ser 2, 3, 4, 5 ou 6. Desta forma, a probabilidade é de um valor entre seis possibilidades e, portanto 1/6. Suponha 60 arremessos do dado:



Em linguagem C: U = rand() / RAND_MAX; (valores entre 0 e 1 uniformemente distribuídos).

2. **Geração das Variáveis Aleatórias Rayleigh e Gaussiana a partir da variável aleatória uniforme**

$$p(r) = \frac{r}{\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),\ r \geq 0 \qquad (1)$$

A equação (1) é a pdf da Rayleigh

$$P(R) = prob(r \leq R) = \int_0^R p(r)dr = \int_0^R \left[\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]dr$$

$$= -\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)_0^R = -\left[\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) - 1\right] = 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$1 - P(R) = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$$

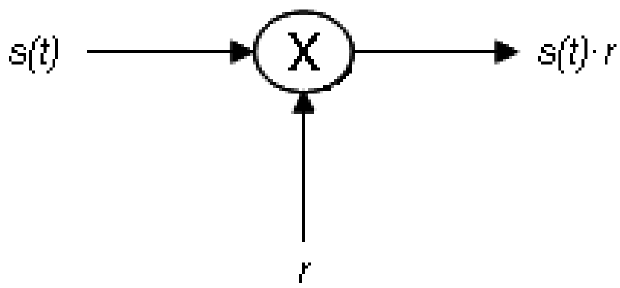
Aplicando $\ln$ nos dois membros:

$$\ln[1 - P(R)] = \left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$$

Aplicando o método da inversão de domínio (vide Papoulis), $P(R) = U$.

$$\ln(1-U) = -\frac{R^2}{2\sigma^2} \Rightarrow R^2 = -2\sigma^2 \ln(1-U)$$
$$R = \sigma\sqrt{-2\ln(1-U)}$$

A amplitude do sinal $s(t)$ é afetado pelo *fading* (desvanecimento) de forma multiplicativa.



A energia do sinal resultante é $[s(t)r]^2 = Es \cdot r^2$. O valor médio de $Es \cdot r^2$ será dado por:

$$\overline{Es \cdot r^2} = E\left[Es \cdot r^2\right] = Es \cdot \underbrace{E\left[r^2\right]}_{2^o\ Momento}$$

O segundo momento da V.A. Rayleigh é dado por:

$$E\left[r^2\right] = \int_0^\infty r^2 p(r)\, dr \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2)

$$E\left[r^2\right] = \int_0^\infty \left[r^2 \frac{r}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right] dr$$

Integração por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$u = r^2 \Rightarrow du = 2rdr$$

$$dv = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \Rightarrow v = -\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E\left[r^2\right]=\left\{\underbrace{\left[-r^2\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty}_{A}-\int_0^\infty -\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)2rdr\right\}$$

$$E\left[r^2\right]=A-2\sigma^2\int_0^\infty\left[-\frac{2r}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]dr$$

$$E\left[r^2\right]=A-2\sigma^2\left[\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty$$

Indeterminação de A no limite superior:
Aplicando a regra de L´Hospital:

$$=\lim_{r\to\infty}-r^2\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)=\lim_{r\to\infty}\left[-\frac{r^2}{\exp\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right]$$

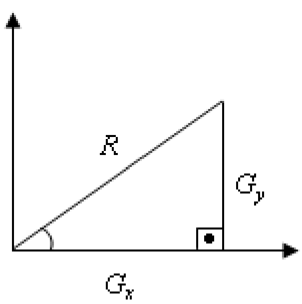
$$=\lim_{r\to\infty}\frac{-2r}{\frac{2r}{2\sigma^2}\exp\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Rightarrow\lim_{r\to\infty}\left[-2\sigma^2\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]=0$$

$$E\left[r^2\right]=(0-0)-2\sigma^2(0-1)=2\sigma^2\quad\therefore E\left[Es\cdot r^2\right]=Es\cdot E\left[r^2\right]=Es\cdot 2\sigma^2$$

Normalizando: $Es\cdot 2\sigma^2=1\Rightarrow Es=1\ e\ 2\sigma^2=1\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}$

Portanto, com a V.A U gerada e com σ pode-se encontrar R.
Do Proakis:

$$R^2=G_x^2+G_y^2$$



$$G_x = R \cdot \cos\theta_{u[0,2\pi]}$$
$$G_y = R \cdot sen\theta_{u[0,2\pi]}$$
$$G_x = R \cdot \cos\theta(2\pi U_1)$$
$$G_y = R \cdot \cos\theta(2\pi U_2)$$

Onde U_1 e U_2 são V.A. U geradas em instantes diferentes.

3. Ajuste do Desvio Padrão do ruído Gaussiano

$$\frac{Es}{N_0} = n\frac{Eb}{N_0}$$

Como $Es = 1$ e $N_0 = 2\sigma^2$,

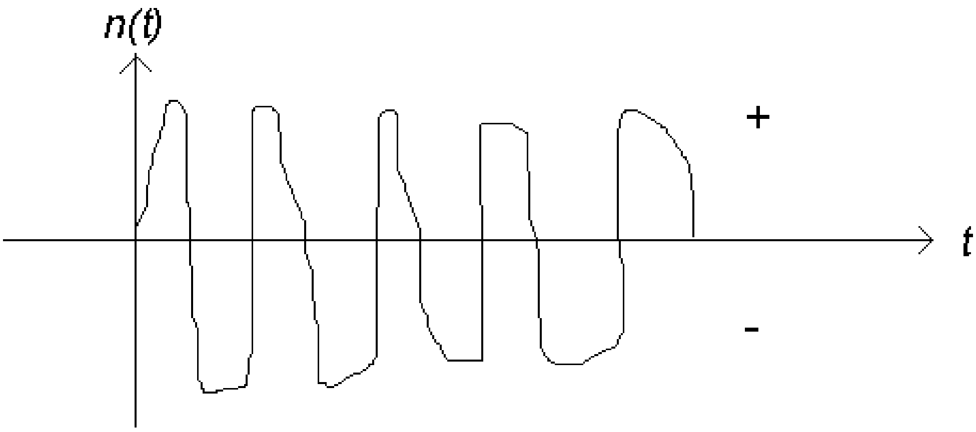
$$\frac{1}{2\sigma^2} = n\frac{Eb}{N_0} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{2n\frac{Eb}{N_0}} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2n\frac{Eb}{N_0}}}$$

Para atribuir valores de $\frac{Eb}{N_0}$ em dB:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2n10^{\left(\frac{Eb}{N_0}/10\right)}}}.$$

4. Cálculo da probabilidade de erro

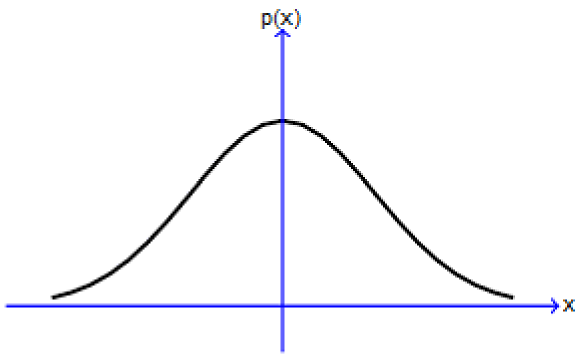
O ruído é um sinal aleatório e suas amplitudes tem uma certa distribuição:



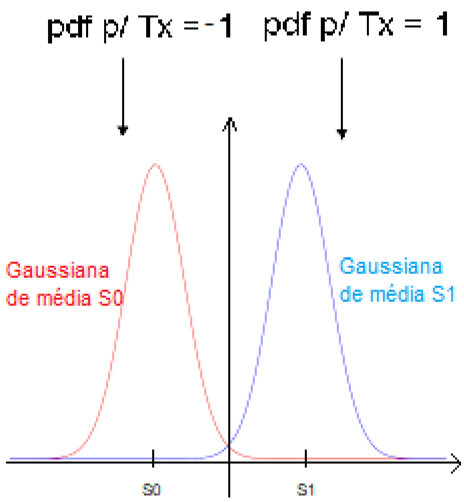
Este sinal $n(t)$ que representa o comportamento do ruído, tem igual probabilidade de ser tanto positivo como negativo e por isso tem um valor médio é igual a zero.
A distribuição de amplitude que melhor representa este comportamento é a distribuição gaussiana. Isto significa que a frequência relativa de ocorrência das amplitudes de ruído tem uma forma gaussiana $p(x)$ e sua função de densidade de probabilidade (pdf) da amplitude x é dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Onde σ_x^2 é o valor quadrático médio do ruído.



Pode-se perceber que a distribuição da amplitude é simétrica em torno do ponto x = 0.
A função de densidade de probabilidade representa a frequência relativa de ocorrência das amplitudes.
Para a modulação BPSK:



$S + n$ representa o deslocamento do valor médio levando ao erro.

Perro = Pb (probabilidade de erro do bit)

$$Pb = P\left(S + n < 0 \,|_{T_x=1}\right)P\left(T_x = 1\right) + P\left(S + n > 0 \,|_{T_x=0}\right)p\left(T_x = 0\right)$$

$$Pb = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(x-S_1)^2}{2\sigma^2}\right]\right]dx.0,5 + \int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(x-S_0)^2}{2\sigma^2}\right]\right]dx.0,5$$

σ (desvio padrão de $S_1 = S_0$ pois o ruído que atacou os sinais é o mesmo)

1ª Integração

$$\frac{x-S_1}{\sigma} = y_1$$

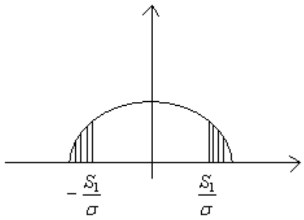
$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma \cdot dy_1$$

2ª Integração

$$\frac{x-S_0}{\sigma} = y_0$$

$$dx = \sigma \cdot dy_0$$

$$Pb = 0,5\int_{-\infty}^{\frac{-S_1}{\sigma}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{y_1}{2}\right)^2\sigma\right]dy_1 + 0,5\int_{-\frac{S_0}{\sigma}}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{y_0}{2}\right)^2\sigma\right]dy_0$$



$$Como\, de -\infty\ a\ -\frac{S_1}{\sigma} = \frac{S_1}{\sigma}\ a\ +\infty\ e\ -S_0 = S_1,\ vem:$$

$$Pb = 0,5\int_{\frac{S_1}{\sigma}}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y_1}{2}\right)^2\right]dy_1 + 0,5\int_{\frac{S_1}{\sigma}}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y_1}{2}\right)^2\right]dy_1$$

A função erro complementar ferc$(x) = Q(x)$ é:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}\exp\left(-\frac{y_1}{2}\right)^2 dy$$

$$Pb = Q\left(\frac{S_1}{\sigma}\right)$$

Como $Es = Eb(BPSK),\ Eb = S_1^{\ 2} \Rightarrow S_1 = \sqrt{Eb}\ e\ \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$,

$$\frac{S_1}{\sigma} = \frac{\sqrt{Eb}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}} = \sqrt{2\frac{Eb}{N_0}}$$

Chamando $\frac{Eb}{N_0} = \gamma_b$,

$$Pb = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

Assintoticamente,

$$Pb = e^{-\gamma_b}$$

Portanto a Pb cai exponencialmente com o aumento de $\frac{Eb}{N_0}$.