



Actuariat non-vie



Professeur : M. Philippe Guinvarch

Réalisé par : Lauranne BESNARD & Alioune NDOYE

Sujet : Provisionnement 1 :

Dans le cadre de sa clôture des comptes au 31/12/2019, le Directeur Général d'une société d'assurance vous demande de formuler une opinion sur le niveau des provisions de la branche RC Automobile dont les statistiques de développement sont présentées dans l'onglet "Triangles".

Table des matières

Introduction.....	2
I - Les méthodes déterministes de calcul des provisions pour sinistres	3
A - Présentation de la branche Responsabilité civile automobile.....	3
B - Les provisions comptabilisées en RC automobile par exercice de survenance.....	4
C - Le calcul des provisions selon la méthode de Chain Ladder sur les charges de sinistres connus et sur les paiements de sinistres.....	6
D - Le calcul des provisions selon la méthode de Bornhuetter Ferguson sur les paiements et les charges de sinistres connus	8
II - Les méthodes stochastiques de calcul des provisions.....	9
A - Estimation de l'erreur de prédiction du montant total des prévisions selon le modèle de Mack	9
B - Le calcul des quantiles de la distribution des sinistres	11
Conclusion	13
Bibliographie	14
Annexe	15
A - Synthèse des résultats des différentes méthodes d'estimations des provisions.....	15

Introduction

La crise sanitaire que l'on connaît depuis début 2020 a de multiples conséquences tant sur la vie des citoyens mais également sur la vie et la gestion des entreprises. En effet, elle a entraîné une hausse de l'incertitude ce qui n'a pas épargné le secteur de l'assurance qui doit pour faire face à cela porter attention à l'évaluation de ses provisions¹. Les provisions « correspondent à des charges probables et incertaines qu'une entreprise devra supporter dans l'avenir et pour un montant estimable non connu de manière définitive ». Les provisions permettent aux assureurs de régler les sinistres. Il existe plusieurs types de provisions techniques : les PM des rentes, les provisions pour primes non acquises, les provisions pour risques en cours, la réserve de capitalisation, les provisions pour sinistres à payer (PSAP) etc.

Parmi les provisions constituées par une compagnie d'assurance non-vie, la plus importante est la Provision pour Sinistres A Payer (PSAP). « Elle correspond, à un instant donné, à la différence entre l'évaluation de la charge « ultime » des sinistres survenus, c'est à dire le montant final que la compagnie estime avoir à payer quand le sinistre sera définitivement réglé (clos) et le montant déjà réglé de ces mêmes sinistres ». Elle comprend deux sous-ensembles :

- La provision pour sinistres connus : estimation des montants restant à régler sur les sinistres déjà connus à la date de l'inventaire.
- La provision pour sinistres non connus, les IBNR : estimation du coût des sinistres survenus mais non encore connus au moment de l'inventaire. Il s'agit en général de sinistres déclarés tardivement à l'assureur, ce qui est relativement fréquent en Responsabilité Civile.

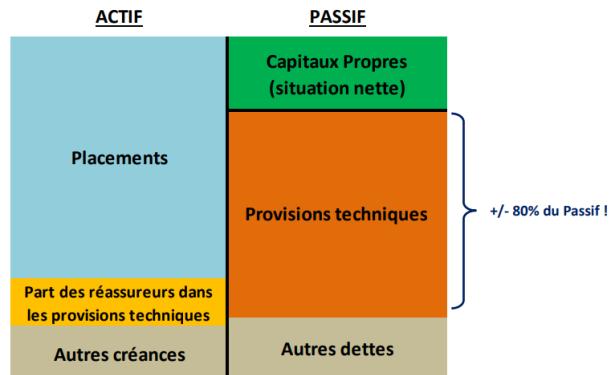
Les provisions pour risques et charges apparaissent au bilan de l'entreprise comme une dette (passif) tandis que dans le compte de résultats, elles représentent une charge. La réglementation impose aux entreprises de se protéger en constituant des provisions. En effet, l'article 33 de l'arrêté royal d'exécution du code des sociétés prévoit que toutes les entreprises doivent tenir compte de tous les risques prévisibles². De plus, la réforme de Solvabilité 2 vise à améliorer l'évaluation et l'appréciation des risques. C'est pourquoi la directive Solvabilité 2³ précise que les provisions techniques soient évaluées de manière cohérente avec le marché et sont calculées comme la somme de la meilleure estimation des flux futurs et d'une marge pour risque sauf si l'engagement est totalement réplicable par des instruments financiers. Les assureurs doivent donc répondre à des obligations strictes quant à la définition des flux futurs de manière à être en capacité de répondre à leurs engagements. Les provisions ont donc un double objectif qui est de garantir à la fois la

¹ <https://doc.cncc.fr/docs/consequences-des-effets-de-la-cr-5efeeb78a2ac8/attachments/faq-2-assurance>

² <https://www.cnc-cbn.be/fr/avis/provisions>

³ https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/201103-acp-solvabilite-2-enseignements-de-qis5_0.pdf

sécurité des assurés mais aussi des assureurs. Les provisions techniques peuvent représenter jusqu'à 80 % du passif.



Dans ce rapport nous allons dans une première partie présenter et appliquer les méthodes d'évaluations des provisions pour sinistres en se basant d'une part sur les méthodes déterministes telles que la méthode de Chain Ladder ou la méthode de Bornhuetter-Ferguson. D'autre part, nous nous aiderons des méthodes stochastiques de calcul des provisions en développant le modèle de Mack ainsi que l'utilisation d'un modèle linéaire généralisé.

I - Les méthodes déterministes de calcul des provisions pour sinistres

A - Présentation de la branche Responsabilité civile automobile

Notre étude porte sur le calcul des provisions en responsabilité civile automobile représentant une branche d'assurance non vie. Ainsi, la responsabilité civile est « l'obligation de réparer le dommage causé à autrui »⁴. La personne qui a causé le dommage doit donc réparer ce dernier s'il est causé par son propre fait ou par le fait d'une autre personne, d'animaux ou de choses dont elle a la responsabilité. Selon le code civil de l'assurance, la responsabilité nécessite la présente simultanée d'une faute, d'un dommage et d'un lien de causalité entre la faute et le dommage. Lorsque l'on parle de responsabilité civile automobile, il s'agit non seulement des dommages causés par une voiture mais il peut s'agir de dégâts matériels ou de blessures humaines.

L'assurance responsabilité civile automobile couvre également les dommages causés à des tiers sans intervention humaine. Pour autant cette assurance a des limites dans le sens où la garantie ne peut être invoquée lorsque le sinistre a été intentionnelle ou lorsque le sinistre est lié à l'activité professionnelle de

⁴ <https://www.index-habitation.fr/multirisque/garanties/responsabilite-civile-definition>

l'assuré.⁵ Il est important de notifier que l'obligation d'assurance pour l'automobile est remplie dès lors que l'individu souscrit une assurance garantissant sa responsabilité civile.

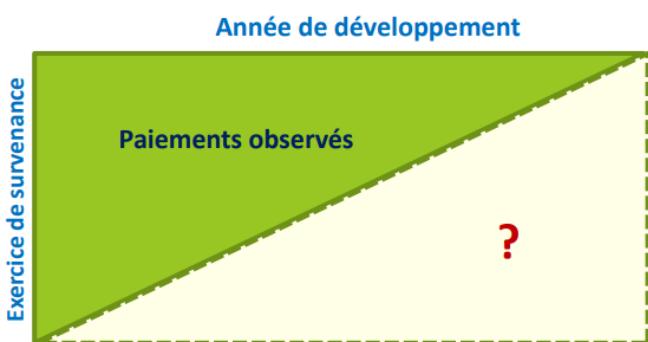
La responsabilité civile est une branche longue ce qui fait que les sinistres peuvent être réglés très lentement, notamment pour les cas de dommages corporels graves. Cela implique qu'on doit analyser les sinistres par exercice de survenance et non par exercice comptable. Cela permettra de connaître le cout réel d'un exercice et ainsi étudier la justesse du tarif correspondant.

En 2019, selon la Fédération française de l'assurance les cotisations récoltées pour l'assurance responsabilité civile générale étaient de 3 842 millions d'euros tandis que la charge de prestation s'établissait à 2 706 millions d'euros⁶.

B - Les provisions comptabilisées en RC automobile par exercice de survenance

Nous disposons d'ici de deux triangles de développement, un sur le paiement cumulé des sinistres et le second sur les charges cumulées des sinistres connus. Un triangle de développement est une table affichant l'évolution des sinistres à travers le temps. Ainsi, le premier triangle de développement traduit les paiements cumulés des sinistres comptabilisés de 2010 à 2019. De la même manière le second triangle de développement traduit les charges cumulées des sinistres connus entre 2010 et 2019. Dans ces deux tables, on distingue la date de survenance du sinistre, les délais de paiements ainsi que les montants des sinistres payés.

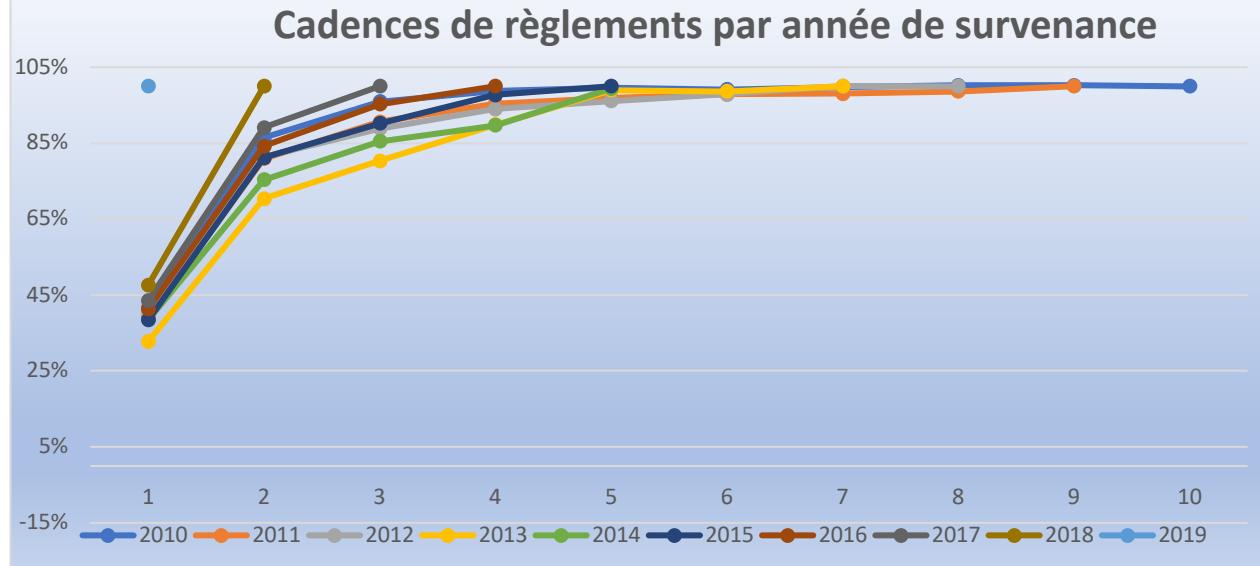
L'objectif de ces méthodes est donc de compléter la partie inférieure du triangle de liquidation, afin de déterminer la charge ultime des sinistres survenus (déjà déclarés ou non), par année de survenance.



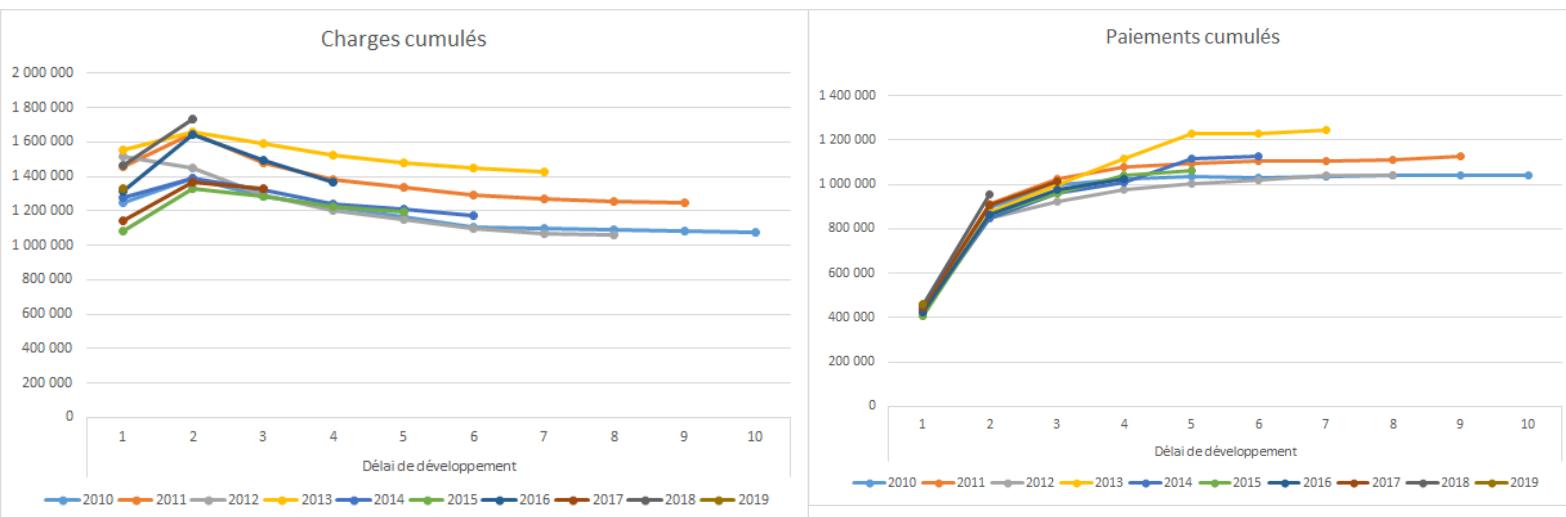
⁵ <https://www.service-public.fr/particuliers/vosdroits/F31258>

⁶ <https://www.ffa-assurance.fr/etudes-et-chiffres-cles/assurances-de-biens-et-de-responsabilite-donnees-cles-par-annee>

Année de survenance	Délai de développement									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2010	812 514	495 048	285 732	195 540	128 768	74 948	57 565	46 732	39 347	38 125
2011	1 015 853	736 756	458 650	302 912	245 981	183 609	159 697	142 880	118 436	
2012	1 096 987	601 918	366 050	224 887	152 671	76 371	28 631	20 213		
2013	1 148 459	784 061	593 737	403 485	244 476	221 923	182 496			
2014	846 374	540 062	358 443	230 039	89 405	50 869				
2015	675 137	462 768	321 905	185 770	133 199					
2016	894 576	776 566	519 006	338 426						
2017	699 192	461 970	313 960							
2018	1 012 204	776 985								
2019	865 184									



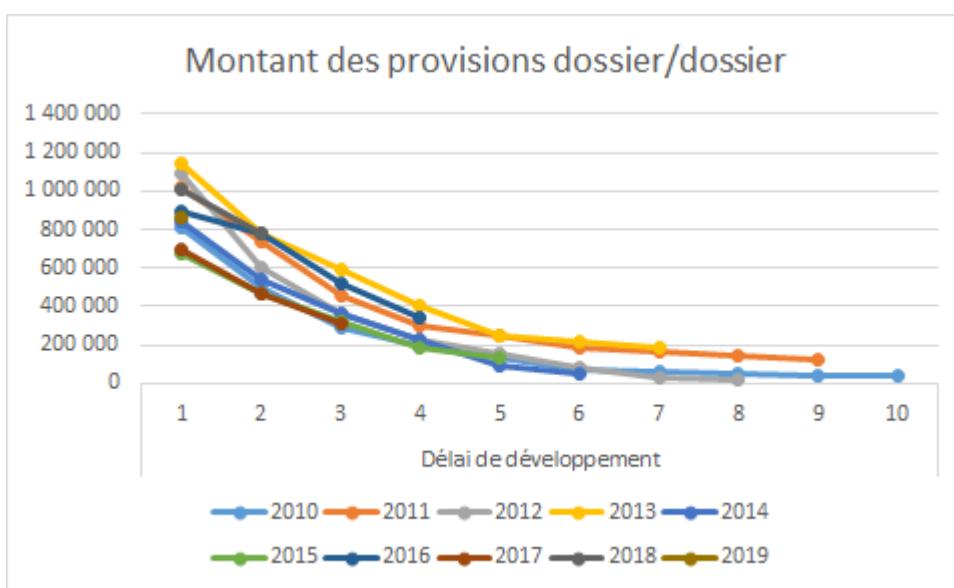
On constate que la cadence des règlements augmente lors des premières années de développement avant d'être quasi constante à partir de la cinquième année.



Grâce au graphique sur le montant des provisions estimées dossier/dossier par le gestionnaire, peut voir que ce le montant estimé suit la même tendance selon les différentes années de survenance. En effet, on observe une décroissance de ces provisions en général et aussi un niveau élevé de provisions pour les premières années de développement du triangle. C'est cela qui explique les montants élevés des charges cumulées des sinistres connus.

Au cours des années de développement, on voit que le montant des sinistres dossier/dossier semble mieux maîtrisé ce qui fait que les charges cumulées des sinistres vont à la baisse après avoir connu un choc brutal entre l'année de développement 1 et 2. Suite à cela, ils continuent à diminuer de manière constante.

Pour ce qui est des paiements cumulés, on voit qu'ils ont beaucoup augmentés entre l'année 1 et 2 ce qui signifie que l'assureur continue à verser des prestations élevées entre ces deux années. Ensuite, nous voyons qu'il y a toujours une augmentation suivant les années mais elle est moins forte. Il y a ainsi une stabilisation des paiements au niveau de l'année 5. Cela veut dire qu'on a déjà payé une bonne partie des sinistres.



C - Le calcul des provisions selon la méthode de Chain Ladder sur les charges de sinistres connus et sur les paiements de sinistres

La méthode de Chain Ladder est une méthode déterministe (appelé aussi méthode des cadences) permettant de calculer le montant des provisions de l'assureur pour faire face à ses engagements.

Elle est basée sur la construction de triangles de paiements dans lesquelles les règlements effectués apparaissent par année de survenance du sinistre. Il est nécessaire de tenir compte du temps passé. C'est ce qu'on appelle les années de développement. Il est possible de travailler sur les triangles de charges (=paiements cumulés + réserves estimées par le gestionnaire sinistre).

L'hypothèse sur laquelle se base cette méthode est le fait que la cadence des paiements (ou des charges) est la même pour les années de survenance. Cela revient donc à dire quelle que soit l'année de survenance, les sinistres sont déclarés et payés au même rythme.

Pour utiliser cette méthode, il est nécessaire d'utiliser le triangle de paiements cumulés des sinistres ainsi que le triangle de charges cumulées des sinistres. Dans ces derniers, il est précisé le montant cumulé des sinistres survenu l'année i jusqu'à l'année de développement k , C_{ik} représente donc cette valeur. C_{ik} peut également représenter le coût total estimé c'est-à-dire le paiement déjà réalisé plus le montant des réserves dossier à dossier. Toute la partie supérieure du triangle est déjà connue ainsi que l'anti-diagonale mais il faut pour connaître le montant des provisions en déduire la partie inférieure du triangle.

Pour calculer les provisions, plusieurs étapes sont alors nécessaires.

Première étape : Calculer le facteur de développement avec la formule suivante :

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Par exemple F4 est le facteur de passage de l'année de développement 4 à 5. Les calculs nous donnent ainsi le résultat suivant :

$$F_4 = \frac{1\ 164\ 264 + 1\ 339\ 858 + 1\ 153\ 978 + 1\ 476\ 118 + 1\ 206\ 974 + 1\ 198\ 003}{1\ 222\ 759 + 1\ 380\ 109 + 1\ 203\ 932 + 1\ 522\ 083 + 1\ 239\ 109 + 1\ 226\ 133}$$

Le même raisonnement est donc utilisé pour les différentes années de développement jusqu'à obtenir 9 facteurs étant donné que $k=10$.

LDF	FACTEUR	DE	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9
	DEVELOPPEMENT		1,1279	0,9328	0,9395	0,9673	0,9644	0,9839	0,9925	0,9929	0,9964
	PRODUIT		1,0521	0,8764	0,9088	0,9328	0,9489	0,9765	0,9855	0,9893	0,9964

Deuxième étape : Estimation des montants inconnus de la partie inférieure du triangle

$$\hat{C}_{ik} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{k-1} \quad i+k > n+1$$

Pour compléter le triangle, on utilise la formule suivante :

Pour chaque année de développement, on multiplie alors le montant le coefficient de développement de l'année précédente par le montant de paiement réalisé à l'année précédente. Si l'on renouvelle ce raisonnement, nous obtenons un triangle complet.

Troisième étape : Calcul de la charge ultime

Le triangle étant complet à cette étape, on peut ainsi calculer la charge ultime de sinistre pour chaque année de survenance avec cette formule :

$$\hat{C}_{in} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} \quad 2 \leq i \leq n$$

En utilisant les charges ultimes de sinistre calculé précédemment, nous pouvons alors en déduire le montant des provisions pour chaque année c'est-à-dire le reste à payer pour les sinistres survenus à l'année i.

$$\hat{R}_i = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} - C_{i,n+1-i} \quad 2 \leq i \leq n$$

Voici ce que l'on a obtenu à partir du triangle des paiements cumulés des sinistres.

Le montant de provision est alors de 1 295 315,22 euros et si l'on rajoute l'IBNR obtient alors une provision totale de 1 494 449,22 euros. L'IBNR correspond au montant estimé des sinistres survenus mais encore inconnus au moment de l'inventaire du fait d'une déclaration tardive. Les provisions sont de plus en plus importante d'année en année. La provision de 2019 représente plus de 55% de la provision totale. Tandis

que la provision la première année, c'est-à-dire en 2010 est nulle. Il est intéressant de constater que les facteurs de développement baissent au fur et à mesure des années de développement.

Voici maintenant ce que l'on obtient pour les charges cumulées des sinistres connus.

Charges cumulées des sinistres connus (paiements + provisions dossier à dossier)										
Année de survenance	Délai de développement									Provision
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2010	1 245 296	1 393 172	1 283 063	1 222 759	1 164 264	1 105 788	1 095 652	1 089 077	1 081 644	1 077 726
2011	1 457 612	1 650 747	1 481 550	1 380 109	1 339 858	1 289 025	1 266 666	1 256 568	1 247 416	1 242 898
2012	1 516 436	1 449 934	1 291 319	1 203 932	1 153 978	1 095 327	1 070 724	1 061 630	1 054 124	1 050 305
2013	1 556 421	1 660 104	1 593 591	1 522 083	1 476 118	1 449 604	1 427 291	1 416 578	1 406 562	1 401 467
2014	1 278 959	1 387 655	1 320 005	1 239 109	1 206 974	1 175 470	1 156 573	1 147 892	1 139 776	1 135 648
2015	1 084 325	1 327 360	1 282 673	1 226 133	1 198 003	1 155 310	1 136 738	1 128 206	1 120 229	1 116 171
2016	1 318 756	1 640 878	1 496 936	1 365 069	1 320 420	1 273 365	1 252 895	1 243 491	1 234 699	1 230 226
2017	1 141 778	1 367 948	1 330 510	1 249 998	1 209 113	1 166 024	1 147 279	1 138 668	1 130 617	1 126 522
2018	1 467 315	1 732 294	1 615 889	1 518 108	1 468 454	1 416 123	1 393 358	1 382 900	1 373 122	1 368 148
2019	1 327 945	1 497 771	1 397 126	1 312 582	1 269 651	1 224 405	1 204 721	1 195 679	1 187 225	1 182 924
										provision -1 011 318,24 €
										IBNR -812 184,24 €
coeff de passage	1,127886554	0,932803117	0,93948767	0,967292031	0,964363482	0,983924066	0,992944412	0,99292945	0,996377736	

La provision pour ces charges devra donc être de – 1 011 318,24 euros (sans prise en compte de l'IBNR). Le gestionnaire qui avait auparavant estimé les réserves a ainsi surestimer ces dernières c'est donc pour cela que le montant de la provision est négatif.

Le principale avantage de cette méthode est que celle-ci est très souvent utilisé pour sa simplicité de calcul et de mise en œuvre. De plus elle peut être utilisé sur différents types de données (charges de sinistres, paiements cumulés...). Pour autant cette méthode a des inconvénients car elle repose sur des hypothèses qui si elles ne sont pas vérifiées peuvent biaiser le montant des provisions calculés.

D - Le calcul des provisions selon la méthode de Bornhuetter Ferguson sur les paiements et les charges de sinistres connus

La méthode de Bornhuetter Ferguson est également une méthode permettant d'estimer le montant des provisions. Cette méthode combine à la fois la méthode de Chain Ladder en s'appuyant sur les triangles de paiements et la méthode du Loss ratio. Cette dernière consiste à calculer le ratio Sinistre ultime/Prime ultime pour chaque année de survenance de sinistre. Elle compense les faiblesses de la méthode de Chain Ladder.

Voici les étapes permettant d'accéder à l'estimation des provisions :

Première étape : On doit premièrement calculer les coefficients de développement non cumulé et cumulé

Étape 2 : A l'aides des primes acquises et de la charge sinistre ultime de 2010, on peut calculer le S/P (loss ratio) commun quel que soit l'année de survenance du sinistre. Pour trouver le montant des autres sinistres ultimes, il suffit de multiplier le S/P par la prime acquise de l'année. Soit :

$$\text{LossRatio } i = \frac{\text{Sinistre } i}{\text{Prime Acquise } i}$$

$$\text{Sinistre ultime } i = \text{Prime Acquise } i * \text{LossRatio } i$$

Etape 3 : il convient maintenant de calculer la part de la charge ultime non déclarée de chaque année de survenance. Nous pouvons la calculer avec la formule suivante : 1/(1-CDF)

Etape 4 : En multipliant la part de la charge ultime non déclarée par le montant du sinistre ultime, on obtient les provisions non cumulées. $Provision\ i = Sinistre\ ultime\ i * \left(\frac{1}{1-CDF_i} \right)$

Enfin la somme de ces provisions et l'IBNR fournit les provisions totales.

Voici ce que nous avons obtenu lorsque l'on effectue cette méthode sur les paiements des sinistres :

coff de passage	2,062798498	1,120181961	1,063182207	1,046901284	1,005037144	1,011191466	1,003232042	1,007070393	0,997413405					
CDF	2,633969522	1,276891332	1,139896353	1,07215522	1,024122558	1,018989759	1,007711985	1,00446551	0,997413405					
Primes acquises														
Année de survenance	Primes acquises	Sinistre ultime	S/P (loss ratio)											
2010	2 299 983	1 039 601,0000	0,452003776											
2011	2 429 825	1 098 290,0742	0,452003776	CDF	1	0,997413405	1,00446551	1,007711985	1,018989759	1,024122558	1,07215522	1,139896353	1,276891332	2,633969522
2012	2 587 198	1 169 423,2644	0,452003776	1-1/CDF	0	-0,002593303	0,004445658	0,007652965	0,018635869	0,023554366	0,067299229	0,122727257	0,216848	0,620344886
2013	2 592 068	1 171 624,5228	0,452003776	perte initiale ultime	1 039 601,0000	1 098 290,0742	1 169 423,2644	#####	1 205 558,7063	1 208 232,3086	1 195 028,8263	1 206 243,0400	1 222 427,0352	1 264 325,5252
2014	2 667 143	1 205 558,7063	0,452003776	provision	0	-2848,19853	5198,855353	8966,401482	22466,63385	28459,14604	80424,51923	148038,9001	265080,8583	784317,8734
2015	2 673 058	1 208 232,3086	0,452003776	somme provision	1 340 104,99 €									
2016	2 643 847	1 195 028,8263	0,452003776	IBNR	199134									
2017	2 668 657	1 206 243,0400	0,452003776	SOMME net	1 539 238,99 €									
2018	2 704 462	1 222 427,0352	0,452003776											
2019	2 797 157	1 264 325,5252	0,452003776											

Le montant des provisions s'établit alors à 1 340 104,98 € ce qui constitue un montant important en vue de faire face aux engagements pris envers les assurés. La provision totale quant à elle, est de 1 539 238 €.

Voici ce que l'on obtient si l'on effectue la méthode de Bornhuetter Ferguson sur les charges de sinistres connus :

coff de passage	1,127886554	0,932803117	0,93948767	0,967292031	0,964363482	0,983924066	0,992494412	0,99292945	0,996377736					
CDR	0,890793252	0,789789762	0,846684308	0,90121918	0,931692966	0,966122196	0,98190727	0,9893328	0,99637774					
Primes acquises														
Année de survenance	Primes acquises	Sinistre ultime	S/P (Loss ratio)											
2010	2299983	1 077 726	0,468579985	CDF	1	0,99637774	0,9893328	0,98190727	0,9661222	0,93169297	0,90121918	0,84668431	0,78978976	0,890793252
2011	2429825	1138567,362	0,468579985	1-1/CDF	0	-0,00363543	-0,01078222	-0,01842611	-0,03506575	-0,07331496	-0,10960799	-0,18107775	-0,26615974	-0,122594942
2012	2587198	1212309,2	0,468579985	perte initiale ultime	1 077 726	1138567,36	1212309,2	1214591,18	1249769,83	1252541,48	1238853,79	1250479,26	1267256,76	1310691,786
2013	2592068	1214591,185	0,468579985	provision	0	-4139,18466	-13071,3827	-22380,1854	-43824,1221	-91830,031	-135788,269	-226433,974	-337292,732	-160684,184
2014	2667143	1249769,827	0,468579985	somme provision	-1 035 444,06 €									
2015	2673058	1252541,478	0,468579985	IBNR	199134									
2016	2643847	1238853,788	0,468579985	Somme net	-836 310,00 €									
2017	2668657	1250479,257	0,468579985											
2018	2704462	1267256,764	0,468579985											
2019	2797157	1310691,786	0,468579985											

La provision totale est négative ce qui veut dire que le gestionnaire avait estimé une trop grande provision vis-à-vis des paiements effectifs réalisés.

II - Les méthodes stochastiques de calcul des provisions

A - Estimation de l'erreur de prédiction du montant total des prévisions selon le modèle de Mack

Le modèle stochastique de Mack est un modèle semi-paramétrique se référant à la méthode de Chain Ladder et qui introduit la notion d'incertitude. Ce dernier s'applique sur le triangle des montants cumulés et a pour but d'estimer la volatilité des provisions. Le modèle de Mack s'appuie sur trois hypothèses :

- H1 : L'indépendance des sinistres entre les années d'origine. Cette hypothèse indique que les montants cumulés des règlements sont indépendants pour chaque année de survenance. $(C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,n})$ et $(C_{h,1}, C_{h,2}, \dots, C_{h,n})$ sont indépendants pour tout $i \neq h$

- H2 : L'espérance conditionnelle est sans biais : $E(C_{ij+1}/C_{i,1}, \dots, C_{ij}) = \lambda_j C_{ij}$.
- H3 : La variance conditionnelle de C_{ij} est donnée par $V(C_{ij+1}/C_{i,1}, \dots, C_{in}) = \sigma_j^2 C_{ij}$.

Le modèle de mack consiste à calculer des facteurs de développement, à estimer le montant de la provision puis à mesurer l'incertitude sur le calcul des provisions et à estimer la variance du processus. Enfin il permet de construire un intervalle de confiance.

Nous reprenons les mêmes facteurs de développement que ceux précédemment calculé à l'aide la méthode de Chain Ladder.

La provision pour l'année de survenance se calcule comme suivant :

$\tilde{C}_{i,n}$: charge ultime (inconnue à la date n)

$$\hat{R}_i = \tilde{C}_{i,n} - C_{i,n-1}$$

Ensuite, il convient de mesurer l'incertitude des provisions en utilisant le Mean Squares Error Prediction.

$$\begin{aligned} mse(\hat{C}_{i,n}) &= E[(\hat{C}_{i,n} - \tilde{C}_{i,n})^2 / \mathcal{F}] \\ &= E[(\hat{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n})) - (\tilde{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))]^2 \\ &= E(\hat{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))^2 + E(\tilde{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))^2 - 2[(\hat{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))(\tilde{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))] \\ &= E(\hat{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))^2 + E(\tilde{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))^2 \\ \underbrace{mse(\hat{C}_{i,n})}_{\text{erreur de prédiction}} &= \underbrace{V(\hat{C}_{i,n})}_{\text{variance du processus}} + \underbrace{E(\tilde{C}_{i,n} - E(\hat{C}_{i,n}))^2}_{\text{variance d'estimation}} \end{aligned}$$

$$V(C_{ij+1}/C_{i,1}, \dots, C_{ij}) = \sigma_j^2 C_{ij} \quad \sigma_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,i+1}}{C_{i,i}} - \hat{\lambda}_{ij} \right)^2 \quad 1 \leq j \leq n-1$$

La variance du processus est estimée par

$$\hat{\sigma}_j^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right)$$

On peut alors obtenir l'incertitude des provisions pour l'année de survenance i mesuré par le MSE :

$$\hat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left[\frac{1}{C_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right]$$

Enfin, l'estimation du MSEP pour la provision totale est alors donnée par :

$$\hat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ (\hat{se}(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{jn} \right) \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}}{\sum_{j=1}^{n-j} C_{j,k}} \right\}$$

Pour éviter d'obtenir un intervalle de confiance négatif, il est préférable de supposer la distribution log-normale des provisions. En faisant cette supposition, nous pouvons en déduire la valeur des paramètres de cette loi :

$$v_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} ;$$

$$\sigma_i^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{se(\hat{R}_i)}{R}\right)^2\right)$$

Pour terminer la résolution de cette méthode stochastique, il est possible de construire un intervalle de confiance donné par la formule suivante :

$$IC_{0,95} = [\exp(v_i - 2\sigma_i)] ; \exp(v_i + 2\sigma_i)$$

$$= \left[\hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 2\sigma_i\right); \hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 2\sigma_i\right) \right]$$

Notre estimation du modèle de Mack a été faite avec le logiciel R notamment avec l'aide la fonction MackChainLadder de la librairie ChainLadder. Les résultats se trouvent ci-dessous et nous pouvons voir que l'erreur de prédiction estimée est de 180 189.43 €. Comparé à la valeur de la provision calculé, on peut dire que cette erreur n'est pas très grande. Cela peut être confirmé par le coefficient de variation (CV) qui est égale à 0.14. Nous retrouvons également les mêmes résultats concernant le calcul des provisions que l'on avait fait avec les méthodes déterministes.

	Latest	Dev	To, Date	Ultimate	IBNR	Mack, S, E	CV(IBNR)	Totals
2010	1,039,601			1,000 1,039,601	0	0	NaN	Latest: 10,105,461,00
2011	1,128,980			1,003 1,126,060	-2,920	5,464	-1,871	Dev: 0,89
2012	1,041,417			0,996 1,046,067	4,650	13,555	2,915	Ultimate: 11,400,776,22
2013	1,244,795			0,992 1,254,395	9,600	16,060	1,673	IBNR: 1,295,315,22
2014	1,124,601			0,981 1,145,957	21,356	18,869	0,884	Mack, S, E 180,189,43
2015	1,064,804			0,976 1,090,490	25,686	21,366	0,832	CV(IBNR): 0,14
2016	1,026,643			0,933 1,100,721	74,078	56,175	0,758	
2017	1,016,550			0,877 1,158,762	142,212	66,921	0,471	
2018	955,309			0,783 1,219,826	264,517	71,173	0,269	
2019	462,761			0,380 1,218,898	756,137	78,444	0,104	

B - Le calcul des quantiles de la distribution des sinistres

Afin de calculer les quantiles demandés, nous sommes passés par plusieurs étapes. D'abord, nous avons utilisé l'approche des modèles linéaires généralisés afin de calculer les provisions. Pour cela, il faut en amont calculer le triangle non cumulé des paiements des sinistres. Le triangle de liquidation possède trois directions : année de survenance, délai de développement, et année calendaire (μ) représenté par la constante du modèle estimé. L'objet de notre étude est d'obtenir les paiements incrémentaux à partir des années d'origine et du délai de développement en supposant que les paiements suivent la loi log-normale. Les estimations des paiements futurs sont donc obtenues par la formule suivante : $e(\mu+A+B)$. Les résultats obtenus avec la PROC GENMOD sont présentés ci-dessous.

Analyse des paramètres estimés du maximum de vraisemblance								
Paramètre		DDL	Estimation	Erreur	Intervalle de		Khi-2 de Wald	Pr > khi-2
				type	de Wald à 95%			
Intercept		1	9,0127	1,7923	5,4999	12,5255	25,29	<,0001
Annee	2010	1	-0,0741	0,0533	-0,1787	0,0304	1,93	0,1646
Annee	2011	1	-0,0498	0,0529	-0,1535	0,0539	0,89	0,3465
Annee	2012	1	-0,1299	0,0544	-0,2365	-0,0233	5,71	0,0169
Annee	2013	1	-0,0641	0,053	-0,168	0,0399	1,46	0,2269
Annee	2014	1	-0,112	0,0541	-0,2179	-0,006	4,29	0,0384
Annee	2015	1	-0,101	0,0537	-0,2063	0,0043	3,53	0,0602
Annee	2016	1	-0,0996	0,0538	-0,2051	0,0059	3,43	0,0642
Annee	2017	1	-0,0526	0,0531	-0,1566	0,0514	0,98	0,3216
Annee	2018	1	0,0008	0,0523	-0,1018	0,1033	0	0,9881
Annee	2019	0	0	0	0	0	,	,
Developpement	1	1	4,0323	1,7918	0,5204	7,5441	5,06	0,0244
Developpement	10	1	-15,4818	9920,452	-19459,2	19428,25	0	0,9988
Developpement	2	1	4,0941	1,7918	0,5823	7,606	5,22	0,0223
Developpement	3	1	2,6394	1,7929	-0,8747	6,1535	2,17	0,141
Developpement	4	1	2,1107	1,7957	-1,4088	5,6301	1,38	0,2398
Developpement	5	1	1,8705	1,7991	-1,6557	5,3968	1,08	0,2985
Developpement	6	1	-0,3364	2,4178	-5,0752	4,4024	0,02	0,8893
Developpement	7	1	0,4631	1,9666	-3,3913	4,3175	0,06	0,8138
Developpement	8	1	-0,759	3,6616	-7,9355	6,4175	0,04	0,8358
Developpement	9	0	0	0	0	0	,	,
Echelle		1	19545,97	1863,635	16214,3	23562,21		

Grâce à ces estimations, on complète le triangle avant de cumuler les paiements puis réappliquer de nouveau la démarche de Chain Ladder pour obtenir le triangle suivant :

Paiements cumulés des sinistres d'après l'estimation par un GLM											Cout ultime	Provisions		
Année de survenance	Délai de développement													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
2010	432 782	898 124	997 331	1 027 219	1 035 496	1 030 840	1 038 087	1 042 345	1 042 297	1 039 601	1 039 601 €	0 €		
2011	441 759	913 991	1 022 900	1 077 197	1 093 877	1 105 416	1 106 969	1 113 688	1 128 980	1 128 980	1 128 980 €	0 €		
2012	419 449	848 016	925 269	979 045	1 001 307	1 018 956	1 042 093	1 041 417	1 048 624	1 048 624	1 048 624 €	7 207 €		
2013	407 962	876 043	999 854	1 118 598	1 231 642	1 227 681	1 244 795	1 248 398	1 256 095	1 256 095	1 256 095 €	11 300 €		
2014	432 585	847 593	961 562	1 009 070	1 117 569	1 124 601	1 136 260	1 139 694	1 147 031	1 147 031	1 147 031 €	22 430 €		
2015	409 188	864 592	960 768	1 040 363	1 064 804	1 070 103	1 081 891	1 085 363	1 092 782	1 092 782	1 092 782 €	27 978 €		
2016	424 180	864 312	977 930	1 026 643	1 074 866	1 080 173	1 091 977	1 095 455	1 102 883	1 102 883	1 102 883 €	76 240 €		
2017	442 586	905 978	1 016 550	1 080 817	1 131 361	1 136 923	1 149 295	1 152 940	1 160 726	1 160 726	1 160 726 €	144 176 €		
2018	455 111	955 309	1 070 333	1 138 125	1 191 442	1 197 309	1 210 360	1 214 205	1 222 418	1 222 418	1 222 418 €	267 109 €		
2019	462 761	955 040	1 069 972	1 137 710	1 190 984	1 196 846	1 209 886	1 213 728	1 221 935	1 221 935	1 221 935 €	759 174 €		
												1 315 614 €		

Ensuite, sachant que nous avons les estimations de l'erreur de prédiction par année grâce au modèle de Mack, nous avons effectué pour chaque année 1000 simulations sur R suivant une loi log-normal. L'écart type étant représenté par l'erreur de prédiction et l'espérance étant la provision estimée par année de survenance. Enfin, nous nous sommes aidés de la PROC UNIVARIATE de SAS pour calculer les différents quantiles.

	q50	q75	q80	q90	q95	q99	q99_5
2011	-	-	-	-	-	-	-
2012	3 704	8 232	10 058	16 937	28 302	48 893	57 004
2013	6 226	12 481	15 439	24 521	37 021	74 208	103 004
2014	17 305	27 081	30 940	43 551	56 904	97 831	117 953
2015	21 881	33 753	37 512	51 904	64 106	120 941	159 584
2016	59 927	95 850	108 328	152 353	189 866	292 392	315 474
2017	129 499	173 253	187 133	235 256	282 912	412 630	445 796
2018	258 929	308 536	322 849	358 122	383 515	460 889	488 047
2019	753 413	805 717	820 948	854 247	882 964	949 778	985 280
	1 306 266	1 393 192	1 424 854	1 491 187	1 562 627	1 740 236	1 859 309

Les différents quantiles nous permettent d'obtenir les provisions à constituer avec les différents niveaux de suffisance. Par exemple, le quantile à 95% permet de déduire le montant de provision à constituer pour que la probabilité de suffisance de provision soit supérieure à 95%, ce montant est de 1 562 627 € soit un peu plus que ce qui a été estimé par la méthode Chain Ladder (1 295 315 €). Le quantile à 99 % permet de déduire le montant de provision à constituer pour que la probabilité d'insuffisance de provision soit inférieure à 1%.

Ainsi, pour répondre à la question posée, nous pouvons dire que la probabilité que le montant des provisions comptabilisées soit insuffisant pour payer les sinistres survenus mais non encore réglés est d'au moins 50% sachant que le montant pour que la probabilité de suffisance soit à 75% est de 1 393 192€ et que le montant pour que cette probabilité soit à 50% est de 1 306 266€ ce qui est inférieur à la provision estimée par les GLM.

Conclusion

L'estimation des provisions pour une entreprise telle qu'une compagnie d'assurance est indispensable et nécessaire pour la pérennisation de l'activité de celle-ci. Pour autant, il existe différentes méthodes à leur disposition qui diffèrent des hypothèses émises ainsi que des données utilisées.

L'entreprise doit donc choisir celle qui est le plus en adéquation avec ces besoins selon les avantages et inconvénient qu'elle présente. Lorsque l'on dispose de triangle contenant peu d'année et donc peu d'historique il est préférable d'utiliser la méthode Bornhuetter-Ferguson car elle intègre une information exogène de l'expert. Pour autant, dès lors que le nombre d'année est suffisant, il est plus simple et plus courant pour les entreprises de choisir la méthode de Chain Ladder.

Concernant le modèle de Mack qui est le plus utilisé et les méthodes stochastiques en général, ils peuvent être utilisé en parallèle des méthodes déterministes dans le but d'évaluer l'erreur d'estimation des réserves qui est faite et ainsi avoir un intervalle de confiance. Cela est important car dans le domaine de l'assurance non vie, la volatilité est forte et donc la mesure du risque d'erreur est primordiale.

Bibliographie

Provisionnement et mesure de risque en assurance dommage dans le cadre de Solvabilité II,
<https://www.cairn.info/revue-gestion-2000-2017-3-page-137.htm>

Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II,
[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/7fdacf2fe3d62060c1257841003bf878/\\$FILE/%20M%C3%A9moire_HCOMPAIN.pdf/](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/7fdacf2fe3d62060c1257841003bf878/$FILE/%20M%C3%A9moire_HCOMPAIN.pdf/)

Crédibilisation des méthodes provisionnement non vie, [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/2cda52c6eb16f735c1257899004cce5d/\\$FILE/Memoire%20H%20Gibello_B.%20Lebrun.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/2cda52c6eb16f735c1257899004cce5d/$FILE/Memoire%20H%20Gibello_B.%20Lebrun.pdf)

Apport des méthodes d'apprentissage statistique pour le provisionnement individuel en assurance non vie,
[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/e5d712ee1c1ad101c12583db0027086e/\\$FILE/Memoire.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/e5d712ee1c1ad101c12583db0027086e/$FILE/Memoire.pdf)

Estimation de l'erreur de prédiction dans le cas de l'utilisation d'une combinaison de méthodes pour le calcul de provisions ' en assurance IARD, https://euria.univ-brest.fr/digitalAssets/27/27606_BE-Estimationdele erreurdeprediction-dans.pdf

Modélisation des provisions pour sinistres à payer en assurance non vie,
<https://www.actuarialab.net/storage/dramekaba.pdf>

Provisionnement en assurance non-vie pour des contrats à maturité longue et à prime unique : application à la réforme Solvabilité 2, <https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751162/document>

Conséquences des effets de la crise liée au Covid-19 sur les comptes au 30 juin 2020 des organismes d'assurance, <https://doc.cncc.fr/docs/consequences-des-effets-de-la-cr-5efeeb78a2ac8/attachments/faq-2-assurance>

Commission des normes comptables, <https://www.cnc-cbn.be/fr/avis/provisions>

Analyse quantitative de l'impact de SII, https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/201103-acp-solvabilite-2-enseignements-de-qis5_0.pdf

Responsabilité civile : définition et généralités, <https://www.index-habitation.fr/multirisque/garanties/responsabilite-civile-definition>

Fédération française de l'assurance, <https://www.ffa-assurance.fr>

Assurance auto : qu'est-ce que la garantie responsabilité civile ? <https://www.service-public.fr/particuliers/vosdroits/F31258>

Annexe

A - Synthèse des résultats des différentes méthodes d'estimations des provisions

Triangle	Paiements cumulés				Charges cumulés	
Méthode	Chain Ladder	Bornhuetter- ferguson	Mack	GLM	Chain Ladder	Bornhuetter- ferguson
2010	-	-	-	-	-	-
2011	- 2 920	- 2 848	- 2 920	0	- 4 518	- 4 139
2012	4 650	5 199	4 650	7 207	- 11 325	- 13 071
2013	9 600	8 966	9 600	11 300	- 25 824	- 22 380
2014	21 356	22 467	21 356	22 430	- 39 822	- 43 824
2015	25 686	28 459	25 686	27 978	- 81 832	- 91 830
2016	74 078	80 425	74 078	76 240	- 134 843	- 135 788
2017	142 212	148 039	142 212	144 176	- 203 988	- 226 434
2018	264 517	265 081	264 517	267 109	- 364 146	- 337 293
2019	756 137	784 318	756 137	759 174	- 145 021	- 160 684
Total	1 295 315	1 340 105	1 295 315	1 315 614	- 1 011 318	- 1 035 444