1

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.1 Construction de $\mathbb{R}$ à l'aide des suites de Cauchy de nombres rationnels

On explique brièvement dans ce paragraphe comment construire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels peut être construit à partir de la notion de cardinal dans le cadre de la théorie des ensembles. Après avoir étudié la théorie des groupes, on construit l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs par symétrisation puis le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est construit comme le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Le corps $\mathbb{Q}$ étant totalement ordonné, on peut définir sur cet ensemble les notions de valeur absolue, de minorant, de majorant, de borne inférieure et de borne supérieure.

On note $\mathbb{Q}^+$ [resp. $\mathbb{Q}^{+,*}$] le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ formé des nombres rationnels positifs ou nuls [resp. strictement positif].

Dire que $M \in \mathbb{Q}$ est la borne supérieure d'une partie non vide X de $\mathbb{Q}$ signifie que M est le plus petit des majorants de X, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in X,\ x \leq M, \\ \forall a \in \mathbb{Q} \text{ tel que } a < M,\ \exists x \in X \mid a < x \leq M \end{cases}$$

et on note $M = \sup(X)$. Il n'est pas difficile de montrer l'unicité d'une telle borne supérieure quand elle existe.

Exercice 1.1 *Montrer que* 0 *est la borne supérieure du sous-ensemble* $X = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *de* $\mathbb{Q}$.

Solution 1.1 ♠♠♠

Exercice 1.2 *Montrer que le sous-ensemble* $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ *de* $\mathbb{Q}$ *n'a pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

Solution 1.2 ♠♠♠

Le but de ce chapitre est de donner les principales idées qui conduisent à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.1 *Il existe un corps totalement ordonné* $\mathbb{R}$ *qui contient* $\mathbb{Q}$ *dans lequel toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.*

Un tel corps est unique à isomorphisme près.

On rappelle que, si X est un ensemble non vide, alors une suite d'éléments de X est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans X. On note usuellement $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

L'ensemble $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels est un anneau commutatif unitaire pour les opérations classiques d'addition et de multiplication.

Définition 1.1 *On dit qu'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels est convergente s'il existe un nombre rationnel r tel que :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |r_n - r| < \varepsilon.$$

En cas de convergence il y a unicité de la limite et on écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Définition 1.2 *On dit qu'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{Q}$, on vérifie facilement qu'une suite convergente est de Cauchy et qu'une suite de Cauchy est bornée.

On vérifie aussi facilement, à partir de la définition, que s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels convergente vers 0 telle que $|r_m - r_n| < \varepsilon_n$ pour tous $m > n$, alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 1.3 *Montrer que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels telle que $|r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un rationnel strictement compris entre* 0 *et* 1, *alors cette suite est de Cauchy.*

Solution 1.3 *Il suffit d'écrire pour $m > n$:*

$$\begin{aligned}|r_m - r_n| &= \left|\sum_{k=n}^{m-1} (r_{k+1} - r_k)\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |r_{k+1} - r_k| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Exercice 1.4 *Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{r_n}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Solution 1.4 *On vérifie par récurrence que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$.*
On vérifie également par récurrence que $r_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il en résulte que $r_n r_{n+1} = r_n + 1 > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$|r_{n+1} - r_n| = \left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right| = \frac{|r_n - r_{n-1}|}{r_n r_{n-1}} < \frac{1}{2}|r_n - r_{n-1}|$$

pour $n \geq 1$ et par récurrence $|r_{n+1} - r_n| < \dfrac{1}{2^n}|r_1 - r_0| = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui implique que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

♠♠♠

Exercice 1.5 *Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Solution 1.5 *On vérifie facilement que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$.*
Pour $m > n > 2$, on a :

$$\begin{aligned}
|r_m - r_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(m-1)\,m}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2\,n!} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Supposons qu'elle soit convergente vers un rationnel $r = \frac{p}{q}$ où p, q sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Pour tout $n > q$, le nombre

$$p_n = n!\,(r - r_n) = n! \lim_{m\to+\infty} (r_m - r_n)$$

est un entier strictement positif avec :

$$0 < n!\,(r_m - r_n) \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$$

pour $m > n \geq 2$, ce qui implique $0 < p_n < 1$ dans $\mathbb{N}$ qui est impossible.
La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.6 *Montrer que, pour tout entier $a \geq 2$, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k^2}}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Solution 1.6 ♠♠♠

En notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnel, on vérifie facilement que c'est un sous-anneau de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Le fait que $\mathcal{C}$ est stable pour la multiplication se montre en utilisant fait qu'une suite de Cauchy est bornée.

Le sous-ensemble $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{C}$ formé des suites qui tendent vers 0 est un idéal de $\mathcal{C}$ (là encore on utilise le fait qu'une suite de Cauchy est bornée).

On vérifie alors que $\mathcal{Z}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}$ et l'anneau quotient $\mathbb{R} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}}$ est un corps commutatif. L'application i qui associe à un nombre rationnel r la classe de la suite constante égal à r dans $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}}$ réalise une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à $i(\mathbb{Q})$.

On peut alors munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps.

On vérifie ensuite que dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide majorée dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente.

On consultera le livre de Doukhan et Sifre (Cours d'Analyse chez Dunod) ou celui de Boualem et Brouzet (La planète $\mathbb{R}$ chez Dunod) pour plus de détails.

Les suites réelles seront étudiées en détails au chapitre 3, mais nous en utiliserons quand même quelques propriétés de bases connues du Lycée.

1.2 La propriété de la borne supérieure

On peut définir sur $\mathbb{R}$ les notions de minorant, majorant, borne inférieure et supérieure. Les définitions étant analogues à celles données sur $\mathbb{Q}$.

Dans les définitions qui suivent X est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 *On dit qu'un réel m est un minorant de X si :*

$$\forall x \in X,\ m \leq x$$

On dit qu'un réel M est un majorant de X si :

$$\forall x \in X,\ x \leq M$$

On dit qu'un réel M est une borne inférieure de X si M est un minorant de X et si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid m \leq x \leq m + \varepsilon$$

(ce qui peut se traduire en disant que m est le plus grand des minorants de X).
On dit qu'un réel M est une borne supérieure de X si M est un majorant de X et si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid M - \varepsilon < x \leq M$$

(ce qui peut se traduire en disant que M est le plus petit des majorants de X).

Théorème 1.2 *Si X admet une borne inférieure [resp. supérieure] cette dernière est unique.*

Démonstration. Supposons que X admette deux bornes supérieures M et M' avec $M' < M$. Prenant $\varepsilon = M - M'$, on peut alors trouver $x \in X$ tel que $M' = M - \varepsilon < x \leq M$, ce qui contredit l'inégalité $x \leq M'$. L'ensemble X admet donc au plus une borne supérieure.

On procède de même pour la borne inférieure. ∎

En cas d'existence, on peut donc noter $m = \inf(X)$ la borne inférieure de X et $M = \sup(X)$ sa borne supérieure.

La borne inférieure ou supérieure de X quand elle existe n'est pas nécessairement un élément de X. Si $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] existe et est dans X, on dit alors que $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] est le plus petit [resp. plus grand] élément de X. Si $\inf(X) \in X$ [resp. $\sup(X) \in X$] on dit aussi que c'est le minimum [resp. maximum] de X et on le note $\min(X)$ [resp. $\max(X)$].

Exemple 1.1 *Si $X = [0, 1[$, alors 0 est le plus petit élément (et donc la borne inférieure) et 1 est la borne supérieure de X, mais cette borne supérieure n'est pas dans X, il n'y a donc pas de plus grand élément.*

Exemple 1.2 *$X = [0, +\infty[$ n'a ni plus grand élément ni borne supérieure.*

Dans le cas où X est une partie finie de $\mathbb{R}$, ses éléments peuvent être rangés dans l'ordre croissant et l'existence des bornes inférieure et supérieure est assurée sans référence au théorème précédent, ces bornes étant des éléments X. Dans ce cas de figure, on dit que $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] est le plus petit [resp. plus grand] élément de X, on le note aussi $\min(X)$ [resp. $\max(X)$].

On rappelle que la valeur absolue d'un réel x est définie par :

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et la majoration $|x| \leq \alpha$ est équivalente à $-\alpha \leq x \leq x$ ou encore à $x \in [-\alpha, \alpha]$. Plus généralement, les équivalences suivantes sont bien utiles :

$$|x - x_0| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x - x_0 \leq x \Leftrightarrow x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

ou encore :

$$|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x - x_0 < x \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

Exercice 1.7 *Montrer que pour réels a et b, on a :*

$$\begin{cases} \max(a,b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|b-a|}{2} \\ \min(a,b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|b-a|}{2} \end{cases}$$

On peut retenir ces égalités en remarquant que $\min(a,b)$ est la borne inférieure de l'intervalle d'extrémités a, b, $\max(a,b)$ la borne supérieure et $\dfrac{a+b}{2}$ le milieu de cet intervalle.

Solution 1.7 *Laissée au lecteur.*

Une partie de $\mathbb{R}$ qui admet un minorant [resp. majorant] est dite minorée [resp. majorée].

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est minorée et majorée. Une partie X de $\mathbb{R}$ bornée admet donc une borne inférieure et une borne supérieure et on a $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Les bornes inférieures et supérieures d'un ensemble peuvent aussi s'exprimer comme limites de suites de points de cet ensemble. Cette caractérisation est souvent utilisée.

Théorème 1.3 *Si X admet une borne inférieure [resp. supérieure], il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X qui converge vers $m = \inf(X)$ [resp. $M = \sup(X)$].*

Démonstration. Supposons que X admette une borne supérieure M. Pour tout entier naturel n, on peut trouver un élement x_n de X tel que $M - \dfrac{1}{n+1} < x_n \leq M$. De cet encadrement on déduit alors que $M = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. ∎

Si un ensemble X n'a pas de borne supérieure, on peut alors trouver pour tout entier $n \geq 1$ un élément x_n de X tel que $x_n > n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge alors vers $+\infty$. Il est alors naturel de noter dans ce cas là que $\sup(X) = +\infty$.

De manière analogue, on notera $\inf(X) = -\infty$ si X n'est pas minoré.

La construction de $\mathbb{R}$ esquissée au paragraphe précédent permet de montrer le théorème suivant que nous admettons.

Théorème 1.4 *Toute partie non vide minorée [resp. majorée] dans $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure [resp. supérieure].*

Exercice 1.8 *Soient A, B sont deux parties non vide et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :*

$$\begin{cases} \sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)) \\ \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)) \\ A \subset B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \ \textit{ et } \sup(A) \leq \sup(B) \end{cases}$$

Solution 1.8 *Supposons que* $\sup(A) \leq \sup(B)$. *Si* $x \in A \cup B$, *on a soit* $x \in A$ *et* $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, *soit* $x \in B$ *et* $x \leq \sup(B)$, *il en résulte que* $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$. *Pour* $\varepsilon > 0$ *donné, on peut trouver* $x \in B \subset A \cup B$ *tel que* $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$. *On a donc* $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.
On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
Supposons que $A \subset B$. *Pour tout* $x \in A$, *on a* $x \in B$ *et* $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, *ce qui entraîne, par définition des bornes inférieure et supérieure,* $\inf(B) \leq \inf(A)$ *et* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 1.9 *Si* A, B *sont deux parties non vide de* $\mathbb{R}$, *on définit l'ensemble :*

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Montrer que si A *et* B *sont majorés, il en est alors de même de* $A + B$ *et :*

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Solution 1.9 *Notons* $M = \sup(A)$ *et* $M' = \sup(B)$. *Pour tout* $z = x + y$ *avec* $(x, y) \in A \times B$, *on a :*

$$z = x + y \leq M + M'$$

L'ensemble $A + B$ *est donc non vide majoré et en conséquence admet une borne supérieure* $M'' \leq M + M'$. *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $x \in A$ *et* $y \in B$ *tels que* $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ *et* $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, *ce qui nous donne* $z = x + y \in A + B$ *tel que :*

$$M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'$$

Le réel $M + M'$ *est donc la borne supérieure de* $A + B$.

Exercice 1.10 *Déterminer, si elles existent les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants :*

$$A = \left\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$B = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$$
$$C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Solution 1.10 *On a* $2^0 \in A$ *et* $2^{-n} \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Il en résulte que* 1 *est la plus grand élément (et donc la borne supérieure) de* A. *Tous les éléments de* A *étant strictement positifs,* 0 *est un minorant de* X. *Comme pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver un entier naturel* n *tel que* $0 < 2^{-n} < \varepsilon$ *(c'est équivalent à* $n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$*), on déduit que* 0 *est la borne inférieure de* X.
L'ensemble B *étant contenu dans* $[0, 1]$ *est borné. Comme* $0 \in B$ *et minore* B, *on a* $0 = \min(B)$.
L'ensemble B *est majoré par* 1 *et pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver un entier* $n \geq 1$ *tel que* $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1$ *avec* $1 - \frac{1}{n} \in B$, *il en résulte que* $1 = \sup(B)$ *et* B *n'a pas de plus grand élément car* $1 \notin B$.
En séparant les entiers pairs des entiers impairs, on a $C = C_1 \cup C_2$ *avec :*

$$C_1 = \left\{1 + \frac{1}{2p} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\},\ C_2 = \left\{-1 + \frac{1}{2p + 1} \mid p \in \mathbb{N}\right\}$$

et comme pour l'ensemble A*, on vérifie que* $\inf(C_1) = 1 \notin C_1$, $\sup(C_1) = \frac{3}{2} \in C_1$, $\inf(C_2) = -1 \notin C_2$, $\sup(C_2) = 0 \in C_1$, *soit :*

$$\sup(C) = \max(\sup(C_1), \sup(C_2)) = \frac{3}{2} \in C$$
$$\inf(C) = \min(\inf(C_1), \inf(C_2)) = -1 \notin C$$

Exercice 1.11 *Soit* X *une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$*. Montrer que si* $M = \sup(X) \notin X$*, il existe alors pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *une infinité d'éléments de* X *dans l'intervalle* $]M - \varepsilon, M[$*.*

Solution 1.11 *On se donne* $\varepsilon > 0$*. Par définition de la borne supérieure* M *il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $M - \varepsilon < x_0 < M$ *(on a* $x_0 < M$ *du fait que* $M \notin X$*). Toujours par définition de* M*, on peut trouver* $x_1 \in X$ *tel que* $x_0 < x_1 < M$*. Et par récurrence on construit ne suite strictement croissante* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans l'intervalle* $]M - \varepsilon, M[$*. En effet,* x_0 *et* x_1 *ont été trouvés et supposant trouvés* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ *dans* $]M - \varepsilon, M[\cap X$*, on peut trouver* x_{n+1} *dans* X *tel que* $x_n < x_{n+1} < M$*.*

Une conséquence importante du théorème de la borne supérieure est la propriété d'Archimède qui suit.

Théorème 1.5 *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels est archimédien, c'est-à-dire que :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall b \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N}^*;\ na > b.$$

Démonstration. Si $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A = \{na,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (par b), elle admet donc une borne supérieure α. On a alors $(n+1)a \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne $na \leq \alpha - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha - a$ est un majorant de A strictement inférieur à α, ce qui est impossible. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $na > b$.
■

De ce théorème on déduit le résultat important suivant sur l'existence de la partie entière d'un réel.

Théorème 1.6 *Pour tout réel* x *il existe un unique entier relatif* n *tel que :*

$$n \leq x < n + 1. \tag{1.1}$$

Démonstration. Pour x entier relatif, il suffit de prendre $n = x$. On suppose donc x non entier.

Supposons d'abord que x est strictement positif.

En prenant $a = 1$ dans le théorème précédent, on déduit que :

$$\forall x > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid m > x$$

et en conséquence, l'ensemble des entiers $m > 0$ vérifiant $m > x$ est non vide. Il admet donc un plus petit élément p qui vérifie :

$$p > x,\ p - 1 \leq x.$$

Il suffit alors de poser $n = p - 1$.

Pour $x < 0$ en raisonnant avec $-x$ on aboutit à l'existence d'un entier p vérifiant :

$$p \leq -x < p + 1.$$

On a alors $-(p+1) < x < p$ (x n'est pas entier) et $n = -(p+1)$ convient.

Si pour x réel il existe deux entiers n et p vérifiant (1.1), on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \leq x < n+1, \\ -p-1 < -x \leq -p, \end{array} \right.$$

donc $n-p<1$, soit $n-p \leq 0$ et $n-p > -1$, soit $n-p \geq 0$. Et nécessairement $n = p$. D'où l'unicité de n vérifiant (1.1). ■

Définition 1.4 *Avec les notations du théorème précédent, l'entier n est appelé la partie entière de x. On le note $[x]$ ou $E(x)$.*

L'existence de cette fonction partie entière nous suffit pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels. L'étude détaillée des suites numériques est faite au paragraphe suivant.

Exercice 1.12 *On se donne un entier $b \geq 2$ et pour tout entier naturel non nul n, on définit l'ensemble :*

$$Q_n = \left\{ \frac{k}{b^n} \mid k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq b^n \right\}.$$

Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel non nul n, il existe $r_n \in Q_n$ tel que :

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{b^n}.$$

En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution 1.12 *Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, on a :*

$$[b^n x] \leq b^n x < [b^n x] + 1$$

et :

$$r_n = \frac{[b^n x]}{b^n} \leq x < r_n + \frac{1}{b^n}.$$

Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq [b^n x] < b^n$ et $r_n \in Q_n$.
De $0 \leq x - r_n < \frac{1}{b^n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{b^n} = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$, $(r_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de nombres rationnels. Pour $b = 10$, $(r_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'approximations décimales par défaut de x.
Tout réel x pouvant s'écrire sous la forme $x = p + y$ avec $p = E[x]$ entier et $y \in [0,1]$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Pour $b = 10$, on a en fait montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ peut aussi se montrer directement comme conséquence du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Théorème 1.7 *Entre deux nombres réels distincts il existe un nombre rationnel.*

Démonstration. Soient x, y deux réels distincts. On peut supposer que $y > x$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $n(y - x) > 1$ et un entier naturel $m \geq 1$ tel que $m\frac{1}{n} > |x|$. Il en résulte que l'ensemble E des entiers relatifs k tels que $\frac{k}{n} \leq x$ est non vide puisque $-m \in E$ (on a $-\frac{m}{n} < -|x| \leq x$) et majoré par m (on a $\frac{k}{n} \leq x \leq |x| < \frac{m}{n}$ et donc $k \leq m$ puisque $n > 0$). Cet ensemble E admet donc un plus grand élément p et on a :

$$\frac{p}{n} \leq x < \frac{p+1}{n}$$

(p est tout simplement la partie entière de nx).

Enfin avec $n(y - x) > 1$, on déduit que :

$$y > \frac{1}{n} + x \geq \frac{1}{n} + \frac{p}{n}$$

et :

$$x < \frac{p+1}{n} < y.$$

■

Corollaire 1.1 *Tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels.*

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver un rationnel r_n tel que $x < r_n < x + \frac{1}{n+1}$. De cet encadrement on déduit que $x = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$. ■

Dans la démonstration précédente les rationnels r_n sont tels que $x < r_n$ pour tout n. On peut aussi trouver une suite de rationnels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x et telle que $s_n < x$ en utilisant l'existe d'un rationnel s_n tel que $x - \frac{1}{n+1} < s_n < x$.

Ces résultats peuvent être utilisés pour déterminer toutes les fonctions monotones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.2}$$

Cette équation (1.2) est l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Exercice 1.13 *On désigne par f une fonction monotone vérifiant l'équation* (1.2).

1. *Montrer que :*
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(ra) = rf(a).$$
2. *Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout réel x.*
3. *Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x) f(y)$ pour tous réels x, y.*

Solution 1.13

1. *En prenant $(x, y) = (0, 0)$ dans* (1.2), *on obtient $f(0) = 2f(0)$, ce qui équivaut à $f(0) = 0$.*
En prenant $(x, y) = (x, -x)$ dans (1.2), *on obtient $f(x) + f(-x) = 0$. On a donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que la fonction f est impaire.*
De (1.2) *on déduit par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(na) = nf(a).$$

En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et le supposant vrai pour $n \geq 0$, on a :

$$f((n+1)a) = f(na) + f(a) = nf(a) + f(a) = (n+1)f(a),$$

il est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que $f(a) = f\left(n\frac{a}{n}\right) = nf\left(\frac{a}{n}\right)$, on déduit que $f\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{n}f(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$f(ra) = f\left(p\frac{a}{q}\right) = pf\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{p}{q}f(a) = rf(a).$$

Enfin avec l'imparité de f, on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs. On a donc $f(ra) = rf(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$.
Pour $a = 1$, en notant $\lambda = f(1)$, on obtient $f(r) = \lambda r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

2. *On suppose que f est croissante. On a $\lambda = f(1) \geq f(0) = 0$.*
   En notant, pour $x \in \mathbb{R}$, par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de rationnels qui convergent vers x avec $r_n < x < s_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = \lambda s_n$$

   et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $f(x) = \lambda x$.
   On procède de manière analogue pour f décroissante.
3. *Avec $f(1) = (f(1))^2$, on déduit que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Si $f(1) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(x)f(1) = 0$ et f est identiquement nulle.*
   Si on suppose que f n'est pas identiquement nulle, on a alors $f(1) = 1$.
   Avec $f(x^2) = (f(x))^2 \geq 0$, on déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et pour $x \geq y$ dans $\mathbb{R}$, on a $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$, ce qui signifie que f est croissante. On déduit alors de la question précédente que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lambda = f(1) = 1$).

Exercice 1.14 *Montrer que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Solution 1.14 *Soient $x < y$ des réels. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un nombre rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$ et on a alors $x < r^3 < y$. D'où la densité de E dans $\mathbb{R}$.*