دانشجویان مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

بسم الله الرحمن الرحیم

پروژه پایانی درس ارتعاشات

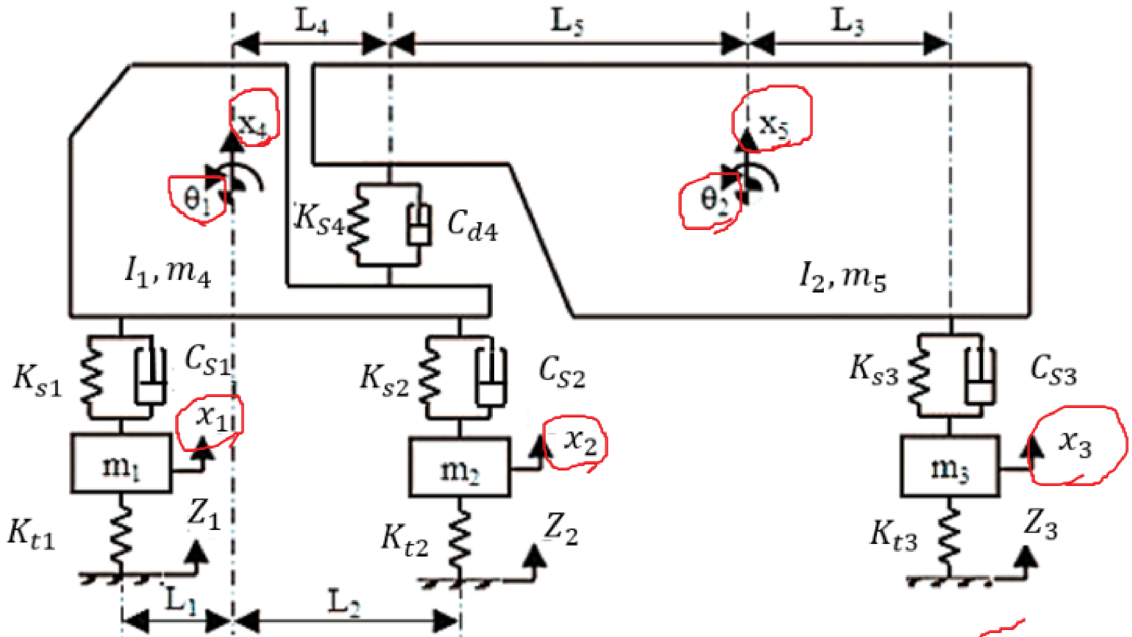
نام دانشجو : علی رزاقی آرانی(۹۹۲۶۰۵۶)

استاد : دکتر غفاری راد

تدریسیار : مهندس مجیبی / مهندس کریمی

زمستان ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بخش ۱



7 درجه آزادی

سیستم دارای درجات آزادی : x1 ,x2 ,x3 ,x4 ,x5 ,theta1 ,theta2 میباشد

که در مجموع سیستم ۷ درجه آزادی است.

بخش ۲

معادلات را به روش لاگرانژ بدست می آوریم :

* سیستم را ۷ درجه آزادی درنظر می گیریم ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \theta_1, \theta_2$)

برای پیدا کردن معادله دینامیک سیستم از روش لاگرانژ استفاده می کنیم :

انرژی جنبشی $\rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{x}_4^2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{x}_5^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$

* برای نوشتن رابطه انرژی پتانسیل سیستم فرض می کنیم $x_i > Z_i$:

انرژی پتانسیل $\rightarrow$

$$V = \frac{1}{2} K_{t_1} (x_1 - Z_1)^2 + \frac{1}{2} K_{t_2} (x_2 - Z_2)^2 + \frac{1}{2} K_{t_3} (x_3 - Z_3)^2 + \frac{1}{2} K_{s_1} \left[x_1 - (x_4 - L_1 \theta_1)\right]^2$$
$$+ \frac{1}{2} K_{s_2} \left[x_2 - (x_4 + L_1 \theta_1)\right]^2 + \frac{1}{2} K_{s_3} \left[x_3 - (x_5 + L_3 \theta_2)\right]^2$$
$$+ \frac{1}{2} K_{s_4} \left[(x_4 + L_4 \theta_1) - (x_5 - L_5 \theta_2)\right]^2$$

* چون در سیستم دمپر و میرایی وجود دارد ، باید تابع ریلی برای سیستم تعریف کنیم :

$$R = \frac{1}{2} C_{s_1} \left[\dot{x}_1 - (\dot{x}_4 - L_1 \dot{\theta}_1)\right]^2 + \frac{1}{2} C_{s_2} \left[\dot{x}_2 - (\dot{x}_4 + L_1 \dot{\theta}_1)\right]^2 + \frac{1}{2} C_{s_3} \left[\dot{x}_3 - (\dot{x}_5 + L_3 \dot{\theta}_2)\right]^2$$
$$+ \frac{1}{2} C_{d_4} \left[(\dot{x}_4 + L_4 \dot{\theta}_1) - (\dot{x}_5 - L_5 \dot{\theta}_2)\right]^2$$

* در سیستم نیروی ناپایستار و تحریک خارجی نداریم ، بنابراین $Q_i^{n.c} = 0$ خواهد بود و رابطه لاگرانژ برای این سیستم بصورت روبرو خواهد بود :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

if $\boxed{i=1} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \; , \; \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \; , \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K_{t_1} (x_1 - Z_1) + K_{s_1} \left[x_1 - (x_4 - L_1 \theta_1)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = C_{s_1} \left[\dot{x}_1 - (\dot{x}_4 - L_1 \dot{\theta}_1)\right]$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (K_{t_1} + K_{s_1}) x_1 + (-K_{s_1}) x_4 + (K_{s_1} L_1) \theta_1 + (C_{s_1}) \dot{x}_1 + (C_{s_1} L_1) \dot{\theta}_1$$
$$+ (-C_{s_1}) \dot{x}_4 = K_{t_1} Z_1 \qquad \boxed{1}$$

if $\boxed{i=2}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = Kt_2 (x_2 - Z_2) + Ks_2 \left[x_2 - (x_4 + L_4 \theta_1)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = Cs_2 \left[\dot{x}_2 - (\dot{x}_4 + L_4 \dot{\theta}_1)\right]$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (Cs_2)\dot{x}_2 + (-Cs_2 L_2)\dot{\theta}_1 + (-Cs_2)\dot{x}_4 + (Kt_2 + Ks_2) x_2 + (-Ks_2) x_4$$

$$+ (-K_2 L_2)\theta_1 = Kt_2 Z_2$$

if $\boxed{i=3}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = m_3 \dot{x}_3$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = m_3 \ddot{x}_3$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = Kt_3 (x_3 - Z_3) + Ks_3 \left[x_3 - (x_5 + L_3 \theta_2)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_3} = Cs_3 \left[\dot{x}_3 - (\dot{x}_5 + L_3 \dot{\theta}_2)\right]^2$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + (Cs_3)\dot{x}_3 + (-Cs_3 L_3)\dot{\theta}_2 + (-C_3)\dot{x}_5 + (Kt_3 + Ks_3) x_3 + (-Ks_3) x_5$$

$$+ (-Ks_3 L_3)\theta_2 = Kt_3 Z_3$$

if $\boxed{i=4}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial x_4} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} = m_2 \dot{x}_4$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) = m_2 \ddot{x}_4$

$$\frac{\partial V}{\partial x_4} = Ks_2 (-1)\left[x_2 - (x_4 + L_4\theta_1)\right] + Ks_4 \left[(x_4 + L_4\theta_1) - (x_5 - L_5\theta_2)\right] + Ks_1 (-1)\left[x_1 - (x_4 - L_4\theta_1)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_4} = Cs_1 (-1)\left[\dot{x}_1 - (\dot{x}_4 - L_4\dot{\theta}_1)\right] + Cs_2 (-1)\left[\dot{x}_2 - (\dot{x}_4 + L_4\dot{\theta}_1)\right] + Cd_4\left[(\dot{x}_4 + L_4\dot{\theta}_1) - (\dot{x}_5 - L_5\dot{\theta}_2)\right]$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + (Cd_4 + Cs_2 + Cs_1)\dot{x}_4 + (-Cd_4)\dot{x}_5 + (-Cs_2)\dot{x}_2 + (-Cs_1)\dot{x}_1 + (Cd_4 l_5)\dot{\theta}_2$$

$$+ (Cd_4 L_4 + Cs_2 l_2 - Cs_1 l_1)\dot{\theta}_1 + (Ks_1 + Ks_2 + Ks_4) x_4 + (-Ks_4) x_5 + (-Ks_2) x_2 + (-Ks_1) x_1$$

$$+ (Ks_4 l_5)\theta_2 + (-Ks_1 l_1 + Ks_2 l_2 + Ks_4 l_4)\theta_1 = 0$$

if $\boxed{i=5}$ $\rightsquigarrow \dfrac{\partial T}{\partial x_5}=0 \;,\; \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_5}=m_5\,\dot{x}_5 \;,\; \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_5}\right)=m_5\,\ddot{x}_5$

$$\frac{\partial V}{\partial x_5}=-K_{S_3}\left[x_3-(x_5+l_3\theta_2)\right]-K_{S_4}\left[(x_4+l_4\theta_1)-(x_5-l_5\theta_2)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_5}=-C_{S_3}\left[\dot{x}_3-(\dot{x}_5+l_3\dot{\theta}_2)\right]-C_{d_4}\left[(\dot{x}_4+l_4\dot{\theta}_1)-(\dot{x}_5-l_5\dot{\theta}_2)\right]$$

$$m_5\ddot{x}_5+(C_{S_3}+C_{d_4})\dot{x}_5+(-C_{d_4})\dot{x}_4+(-C_{S_3})\dot{x}_3+(C_{S_3}l_3-C_{d_4}l_5)\dot{\theta}_2$$
$$+(-C_{d_4}l_4)\dot{\theta}_1+(K_{S_3}+K_{S_4})x_5+(-K_{S_4})x_4+(-K_{S_3})x_3+(K_3l_3-K_{S_4}l_5)\theta_2$$
$$+(-K_{S_4}l_4)\theta_1=0$$

if $\boxed{i=6}$ $\rightsquigarrow \dfrac{\partial T}{\partial \theta_1}=0 \;,\; \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}=I_1\dot{\theta}_1 \;,\; \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)=I_1\ddot{\theta}_1$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=l_1K_{S_1}\left[x_1-(x_4-l_1\theta_1)\right]+l_2K_{S_2}(-1)\left[x_2-(x_4+l_2\theta_1)\right]$$
$$+l_4K_{S_4}\left[(x_4+l_4\theta_1)-(x_5-l_5\theta_2)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1}=C_{S_1}l_1\left[\dot{x}_1-(\dot{x}_4-l_1\dot{\theta}_1)\right]+C_{S_2}l_2(-1)\left[\dot{x}_2-(\dot{x}_4+l_2\dot{\theta}_1)\right]$$
$$+C_{d_4}l_4\left[(\dot{x}_4+l_4\dot{\theta}_1)-(\dot{x}_5-l_5\dot{\theta}_2)\right]$$

$$I_1\ddot{\theta}_1+(-C_{S_1}l_1+C_{S_2}l_2+C_{d_4}l_4)\dot{x}_4+(-C_{d_4}l_4)\dot{x}_5+(-C_{S_2}l_2)\dot{x}_2+(C_{S_1}l_1)\dot{x}_1$$
$$+(C_{d_4}l_4l_5)\dot{\theta}_2+(C_{S_1}l_1^2+C_{S_2}l_2^2+C_{d_4}l_4^2)\dot{\theta}_1+(-l_4K_{S_4})x_5+(l_2K_{S_2}+l_4K_{S_4}-l_1K_{S_1})x_4$$
$$+(-l_2K_{S_2})x_2+(l_1K_{S_1})x_1+(l_4l_5K_{S_4})\theta_2+(K_{S_1}l_1^2+K_{S_2}l_2^2+K_{S_4}l_4^2)\theta_1=0$$

if $\boxed{i=7}$ $\rightsquigarrow \dfrac{\partial T}{\partial \theta_2}=0 \;,\; \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}=I_2\dot{\theta}_2 \;,\; \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right]=I_2\ddot{\theta}_2$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=K_{S_3}l_3\left[x_3-(x_5+l_3\theta_2)\right]+K_{S_4}l_5\left[(x_4+l_4\theta_1)-(x_5-l_5\theta_2)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2}=C_{S_3}l_3(-1)\left[\dot{x}_3-(\dot{x}_5+l_3\dot{\theta}_2)\right]+C_{d_4}l_5\left[(\dot{x}_4+l_4\dot{\theta}_1)-(\dot{x}_5-l_5\dot{\theta}_2)\right]$$

$$I_2\ddot{\theta}_2+(C_{S_3}l_3-C_{d_4}l_5)\dot{x}_5+(C_{d_4}l_5)\dot{x}_4+(-C_{S_3}l_3)\dot{x}_3+(C_{S_3}l_3^2+C_{d_4}l_5^2)\dot{\theta}_2$$
$$+(C_{d_4}l_5l_4)\dot{\theta}_1+(K_{S_3}l_3-K_{S_4}l_5)x_5+(K_{S_4}l_5)x_4+(-K_{S_3}l_3)x_3+(K_{S_3}l_3^2+K_{S_4}l_5^2)\theta_2+(K_{S_4}l_4l_5)\theta_1=0$$

بخش ۳

$$M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix} k_{t_1}+k_{s_1} & 0 & 0 & -k_{s_1} & 0 & L_1k_{s_1} & 0\\ 0 & k_{t_2}+k_{s_2} & 0 & -k_{s_2} & 0 & -L_2k_{s_2} & 0\\ 0 & 0 & k_{t_3}+k_{s_3} & 0 & 0 & 0 & -L_3k_{s_3}\\ -k_{s_1} & -k_{s_2} & 0 & k_{s_1}+k_{s_2}+k_{s_4} & 0 & L_2k_{s_2}-L_1k_{s_1}+L_4k_{s_4} & L_5k_{s_4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s_4}+k_{s_3} & -L_4k_{s_4} & L_3k_{s_3}-L_5k_{s_4}\\ L_1k_{s_1} & -L_2k_{s_2} & 0 & 0 & 0 & L_1^2k_{s_1}+L_2^2k_{s_2}+L_4^2k_{s_4} & L_5L_4k_{s_4}\\ 0 & 0 & -L_3k_{s_3} & L_5k_{s_4} & L_3k_{s_3}-L_5k_{s_4} & L_5L_4k_{s_4} & L_5^2k_{s_4}+L_3^2k_{s_3} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} Cs_1 & 0 & 0 & -Cs_1 & 0 & Cs_1L_1 & 0\\ 0 & Cs_2 & 0 & -Cs_2 & 0 & -Cs_2L_2 & 0\\ 0 & 0 & Cs_3 & 0 & -Cs_3 & 0 & -C_3L_3\\ -Cs_1 & -Cs_2 & 0 & Cs_1+Cs_2+Cd_4 & -Cd_4 & -Cs_1L_1+Cs_2L_2+Cd_4L_4 & Cd_4L_5\\ 0 & 0 & -Cs_3 & -Cd_4 & Cd_4+Cs_3 & -L_4Cd_4 & Cs_3L_3-Cd_4L_5\\ Cs_1L_1 & -Cs_2L_2 & 0 & -Cs_1L_1+Cs_2L_2+Cd_4L_4 & -Cd_4L_4 & Cs_1L_1^2+Cs_2L_2^2+Cd_4L_4^2 & L_5L_4Cd_4\\ 0 & 0 & -Cs_3L_3 & Cd_4L_5 & Cs_3L_3-Cd_4L_5 & L_5L_4Cd_4 & Cd_4L_5^2+Cs_3L_3^2 \end{bmatrix}$$

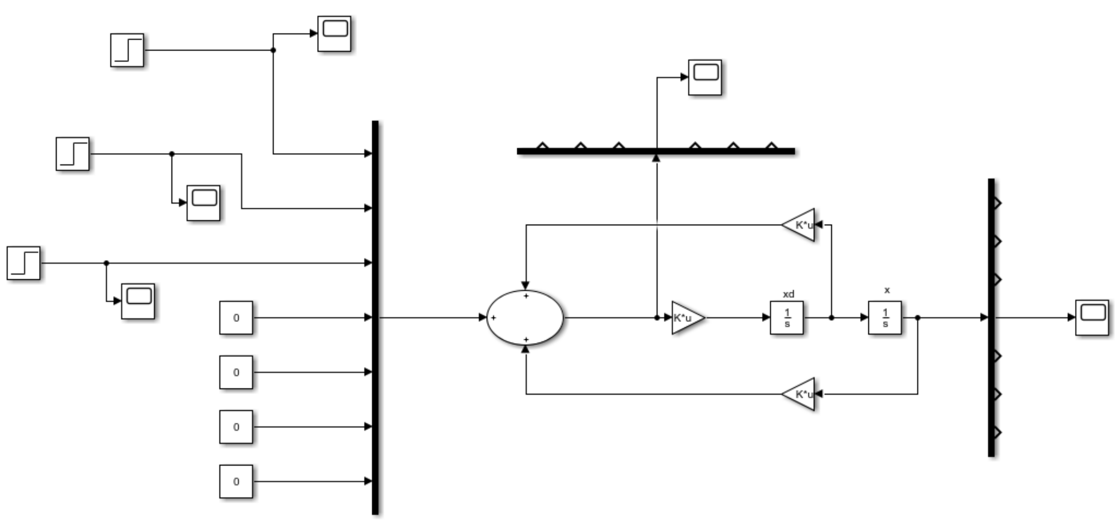
در این بخش با استفاده از تابع eig در نرم افزار متلب و ماتریس های ضرایب ، مقادیر ویژه (ω_n^2) سیستم را بدست می آوریم. سپس از این ماتریس جذر گرفته و ماتریس فرکانس های طبیعی سیستم پیدا میکنیم.

$$\omega_n=\begin{bmatrix} 4.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 13.49 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 65.36 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75.51 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 79.63 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 173.01 \end{bmatrix}$$

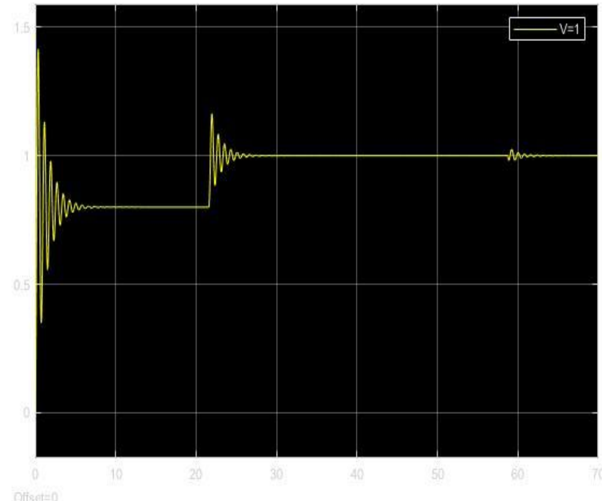
بخش ۴

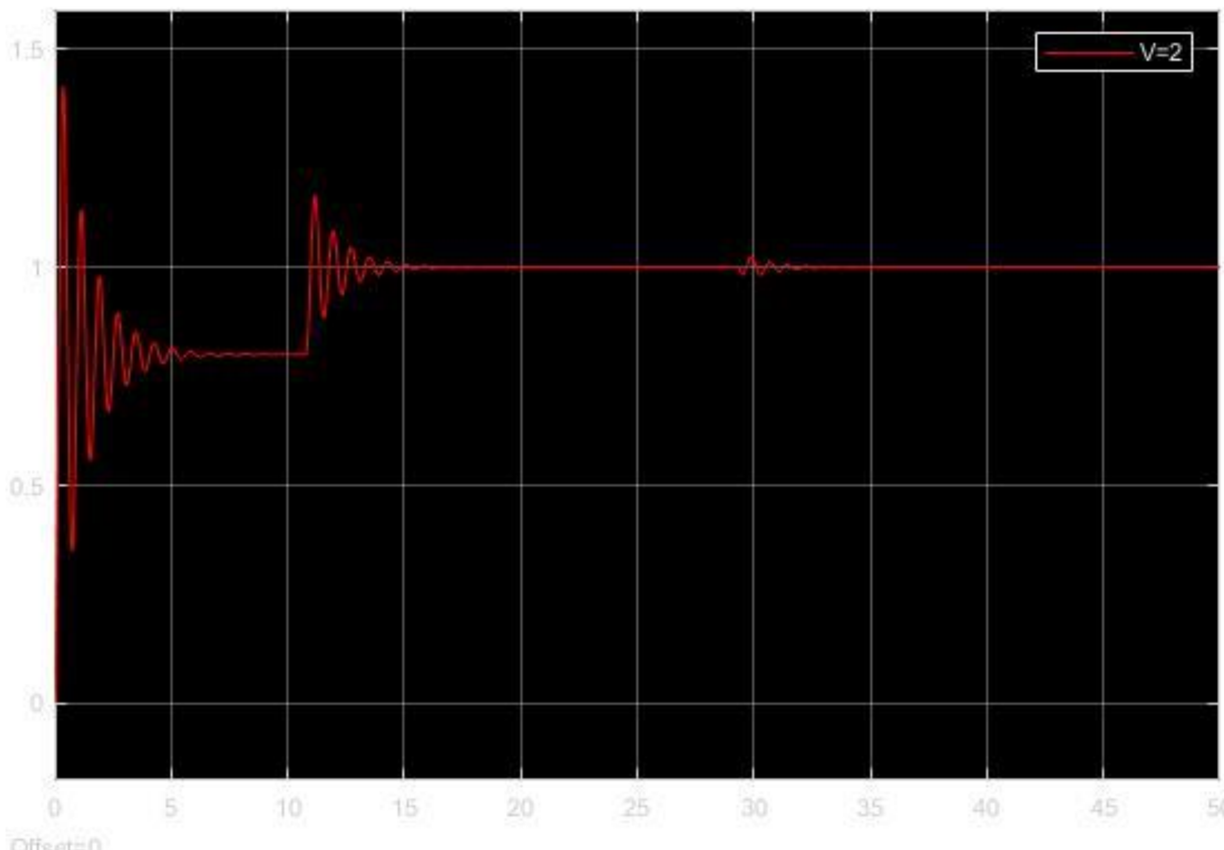
در این بخش برای راحتی کار در سیمولینک مقادیر را بصورت پارامتری در سیمولینک در نظر میگریم و مقادیر را در فایل کد تعریف کرده و از آنجا میخوانیم.

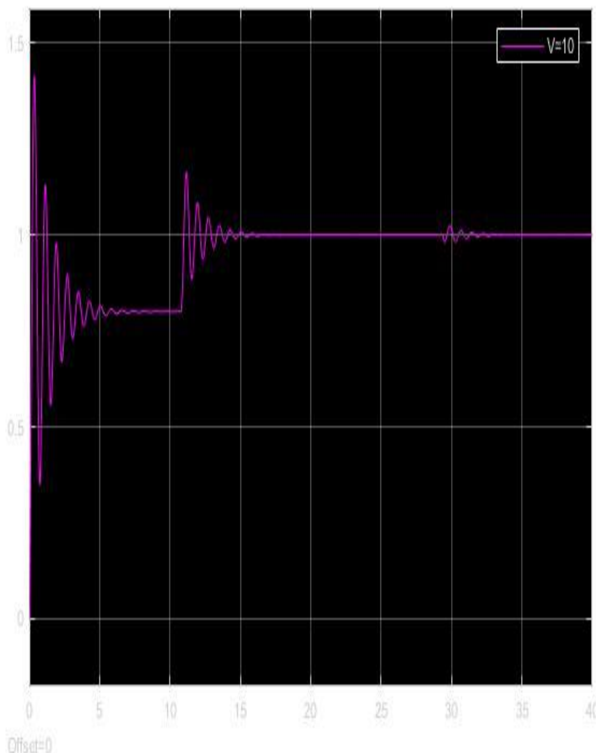
برای تشکیل پروفیل دست انداز (پله) در سیمولینک از المان step استفاده میکنیم. ارتفاع پله ۱ متر در نظر گرفته شده است. همچنین برای هر کدام از چرخ ها که تحریک میشوند ، تاخیر زمانی نیز در نظر گرفته میشود به گونه ای که چرخ اول بدون تاخیر از روی دست انداز عبور میکند و چرخ دوم به اندازه نسبت فاصله اش تا چرخ اول به سرعت کامیون تاخیر زمانی دارد. برای چرخ سوم هم همچین فرضی برقرار است با این تفاوت که این چرخ شامل تاخیر زمانی چرخ دوم نیز میشود. برای مدل کردن معادلات دینامیکی نیز یک لوپ بسته تشکیل میدهیم. چون که در ای بخش تنها میخواهیم x4 را تحلیل کنیم با استفاده از المان Demux پلات مخصوص به x4 را بدست می آوریم. با توجه به پلات های بدست آمده پی میبریم که با افزایش سرعت ، فرکانس کاهش یافته است.همچنین چرخ اول با دامنه بیشتری نسبت به دیگر چرخ ها ارتعاش میکند.

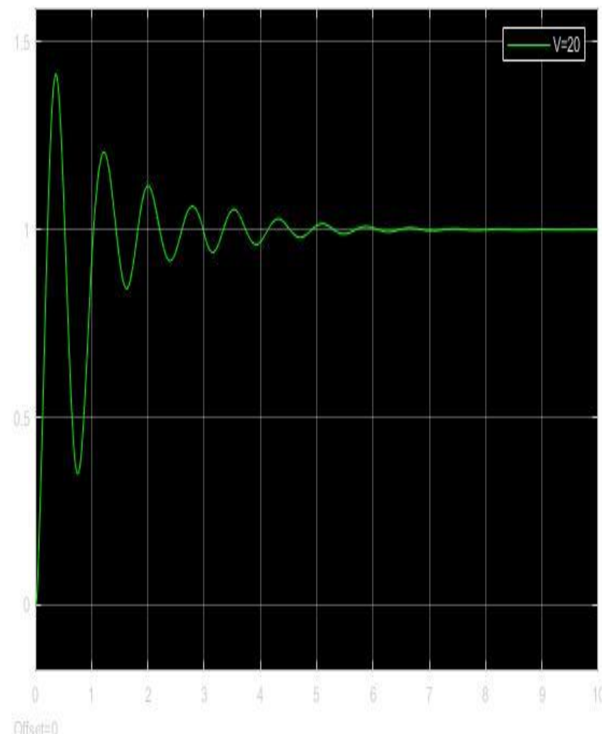


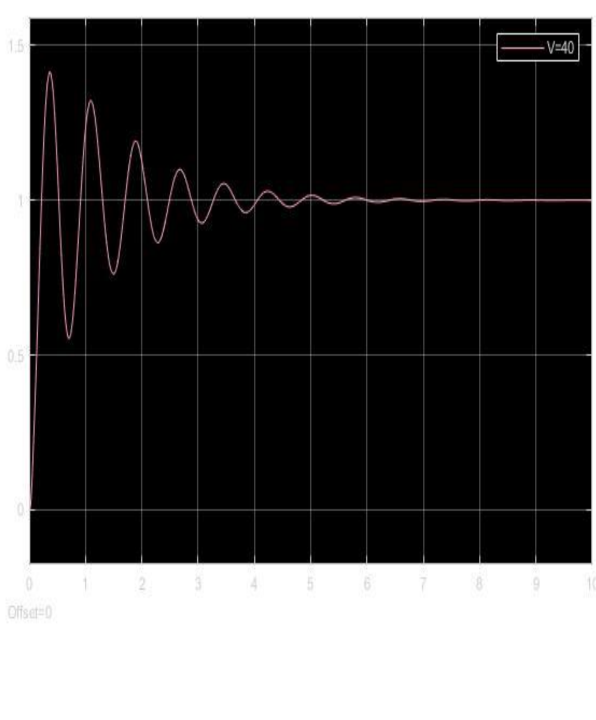
نتایج مربوط به بخش ۴

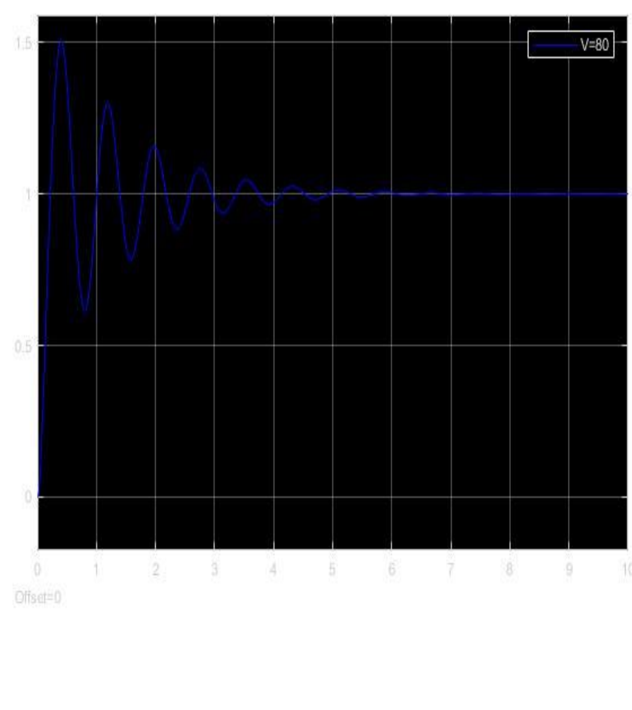





V=10
Offset=0

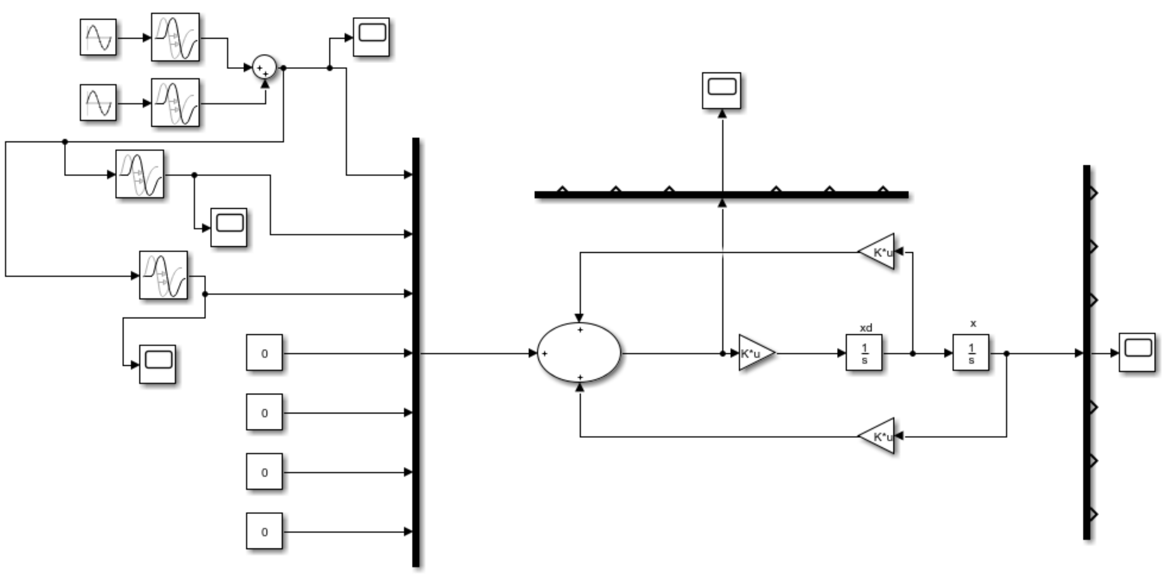

V=20
Offset=0


V=40
Offset=0

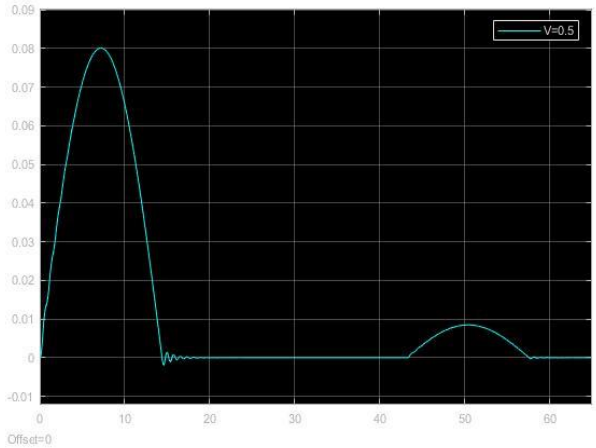

V=80
Offset=0

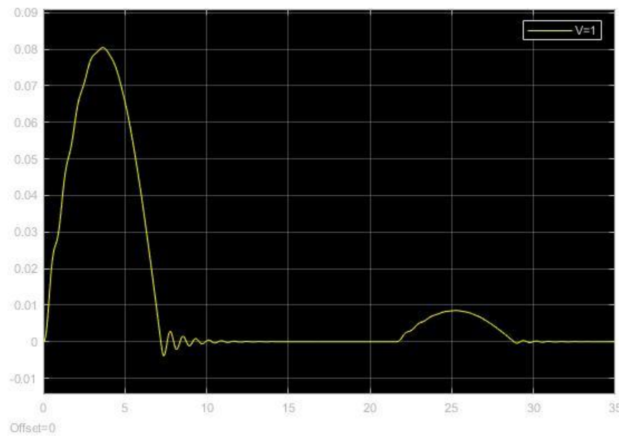
بخش ۵

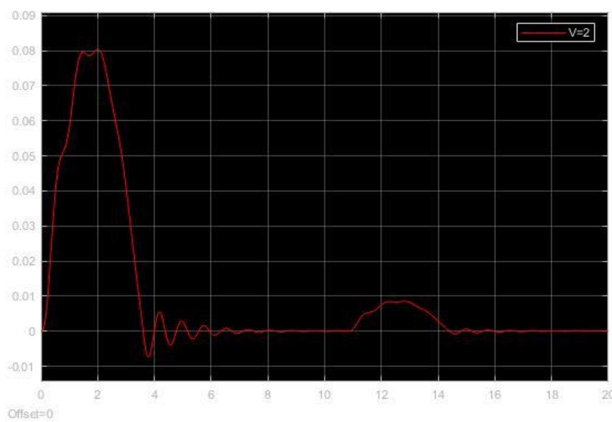
این بخش نیز همانند بخش ۴ انجام میشود با این تفاوت که برای ساخت پروفیل مورد نظر از المان sin wave استفاده کرده ایم. بر خلاف قسمت قبل در این قسمت چونکه پروفیل به مبدا مکانی خود باز میگردد باید یک موجی بر خلاف موج اصلی تشکیل دهیم تا دنباله نمودار سینوسی را خنثی کند. برای این کار از المان Transport Delay استفاده کرده ایم. ماکزیمم ارتفاع پروفیل ۰,۱ متر در نظر گرفته شده است. همچنین طول پروفیل نیز ۲ متر اختیار شده است. تاخیر زمانی هایی که در این قسمت در نظر گرفته شده است برابر همان تاخیر زمانی های قسمت قبل است بعلاوه نسبت طول پروفیل به سرعت. باز هم به مانند قسمت قبل برای مدل کردن معادلات دینامیکی یک لوپ بسته تشکیل میدهیم. چون که در این بخش تنها میخواهیم x4 را تحلیل کنیم با استفاده از المان Demux پلات مخصوص به x4 را بدست می آوریم. طبق نتایج بدست آمده میتوان پی برد که این سیستم برای سرعت های بالا با چنین پروفیل هایی مناسب نیست زیرا در سرعت های بالا خودرو بطور کامل دمپ نمیشود.

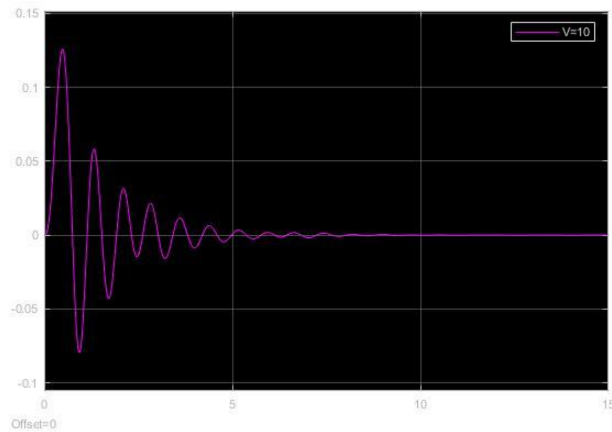


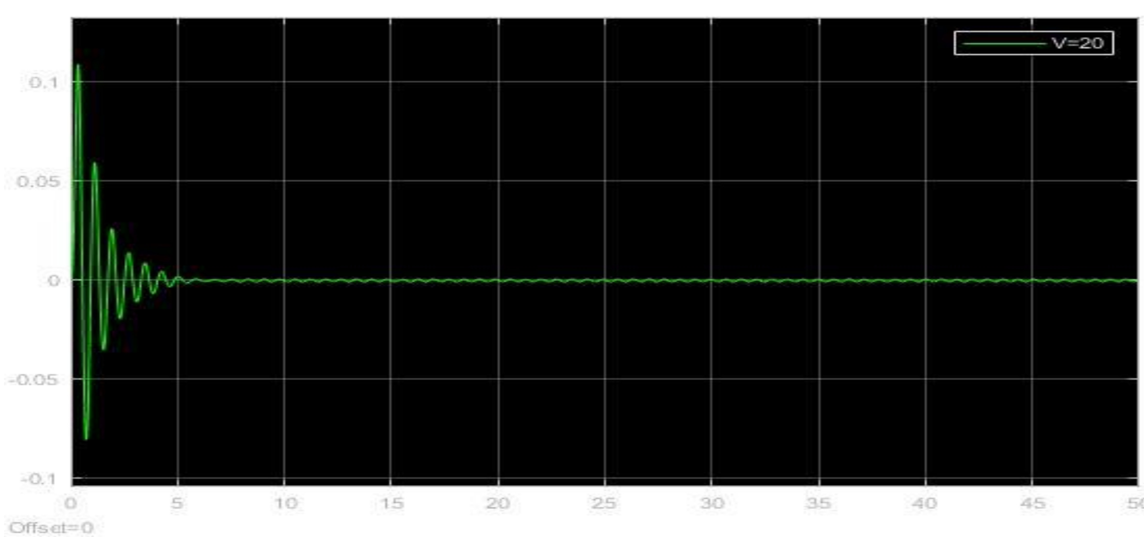
نتایج مربوط به بخش۵

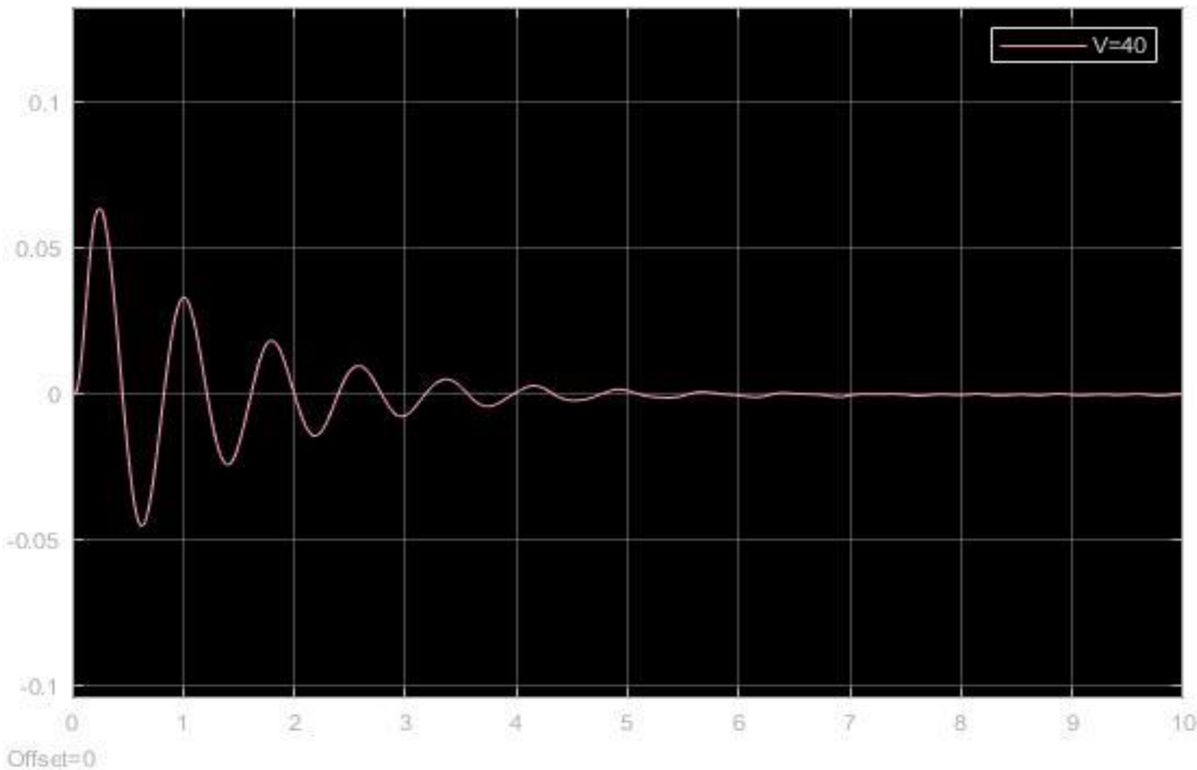


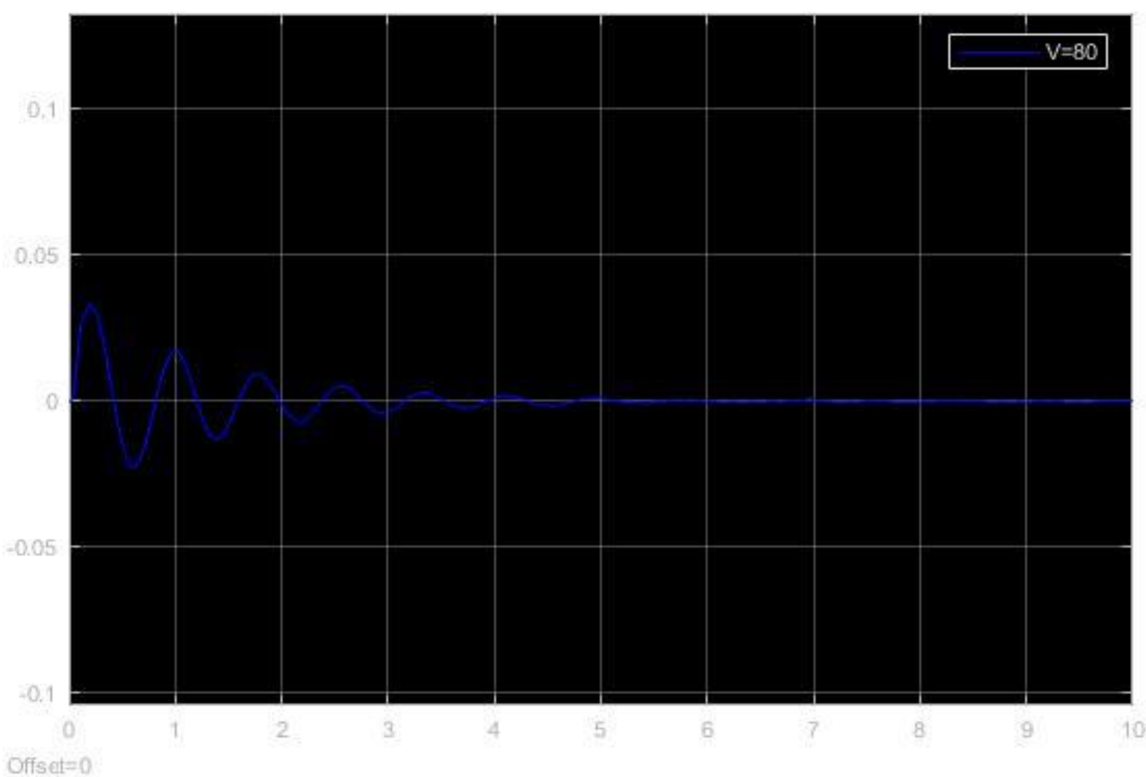









V=40
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Offset=0


V=80
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Offset=0

بخش ۶

برای بدست آودن ماکزیمم شتاب ها در این قسمت ، یک خروجی قبل از gain ($\ddot{x}$) میگیریم و با اتصال آن به Demux خروجی شتاب x4 را بدست می آوریم . حال برای پیدا کردن نقاط پیک نمودار از قسمت Peak finder در جعبه ابزار نرم افزار متلب استفاده میکنیم. سپس مقادیر ماکزیمم را یادداشت کرده و به فایل کد ها انتقال میدهیم . در انتها با یک دستور پلات ساده نمودار شتاب های ماکزیمم بر حسب سرعت را بدست می آوریم.

```
V_a=[0.5,1,2,10,20,40,80];
a_4max=[4.92e+05,4.92e+05,4.92e+05,4.92e+05,4.92e+05,4.92e+05,4.92e+05];
a_5max=[5.71e+02,1.14e+03,2.27e+03,2.33e+04,2.35e+04,2.94e+04,4.15e+04];

subplot(2,1,1);
plot(V_a,a_4max)
title('part4')
xlabel('velocity(m/s)')
ylabel('maximum acceleration(m/s^2)')

subplot(2,1,2);
plot(V_a,a_5max)
title('part5')
xlabel('velocity(m/s)')
ylabel('maximum acceleration(m/s^2)')
```