بازسازی مقاله مکانیک آماری شبکه ها

اعضای گروه:

علیرضا آستانه

علی اکرامیان

فاطمه رمضان زاده

درس علم شبکه

استاد درس: دکتر سامان مقیمی

1. مقدمه:

در چند سال اخیر، حجم زیادی از کارها در مقالات فیزیک مرتبط با شبکه‌ها با انواع مختلف، به خصوص شبکه‌های کامپیوتری و اطلاعاتی مانند اینترنت و وب جهانی، شبکه‌های زیست‌شناسی مانند شبکه‌های غذایی و شبکه‌های متابولیک، و شبکه‌های اجتماعی، منتشر شده است[1-4]. این کارها بین مطالعات تجربی درباره ساختار شبکه‌های خاص و مطالعات تئوری که عمدتاً بر ایجاد مدل‌های ریاضی و محاسباتی تمرکز دارد، تقسیم شده است. ساخت مدل‌های شبکه موضوع این مقاله است.

مدل‌های شبکه می‌توانند به ما کمک کنند تا ویژگی‌های مهم ساختار شبکه و همچنین پیوند ساختار با فرایندهایی که در شبکه اتفاق می‌افتد، مانند جریان ترافیک در اینترنت یا گسترش یک بیماری در یک شبکه اجتماعی، را درک کنیم.

بیشتر مدل‌های شبکه که در جامعه فیزیک مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، از نوع کاربردی هستند. به طور معمول، هدف ایجاد یک شبکه است که برخی از ویژگی‌ها مشاهده شده در مطالعات تجربی را نشان دهد. رویکرد اصلی این است که مکانیسم‌های ممکنی که مسئول ایجاد این ویژگی‌ها هستند را فهرست کرده و سپس یک مدل با استفاده از برخی از آن‌ها یا همه آن‌ها ایجاد کنید. سپس یا شبکه‌های تولید شده توسط مدل را برای شباهت با سیستم‌های واقعی که ادعا شده‌اند که شبیه کننده آن‌ها هستند، بررسی می‌کند یا از آن‌ها به عنوان زیرساختی برای مدل‌های دیگر، به عنوان مثال در مورد جریان ترافیک یا گسترش بیماری، استفاده می‌کند.

نمونه‌های کلاسیک از مدل‌های این نوع، مدل دنیای کوچک [5] و مدل‌های پیوستگی ترجیحی مختلف [6-8] هستند که به ترتیب مدل‌های پیوستگی شبکه و توزیع‌های درجه نماینده هستند. با این حال، یک رویکرد دیگر به مدل‌سازی شبکه وجود دارد که تاکنون به اندازه کافی پیگیری نشده است.

یک شباهت آموزنده می‌تواند با تئوری گازها ایجاد شود. در واقع (حداقل) دو تئوری عمومی مختلف در مورد ویژگی‌های گازها وجود دارد. تئوری جنبشی به طور صریح مدل‌های مجموعه‌های جداگانه از اتم‌ها، حرکات و برخوردهای آن‌ها را نمایش می‌دهد و سعی دارد ویژگی‌های کلی سیستم حاصله را از اصول مکانیکی ابتدایی محاسبه کند.

به عنوان مثال، فشار از میانگین تکانه منتقل شده به دیوارهای یک مخزن توسط اتم‌ها محاسبه می‌شود. تئوری جنبشی، به طور قابل‌توجیهی، مفهوم است و برای هوشمندان و غیرهوشمندان هم معقول به نظر می‌آید. با این حال، تئوری کینتیک به سرعت پیچیده و دشوار در استفاده می‌شود اگر سعی کنیم آن را با اضافه کردن دقیق اندازه‌گیری‌های میان‌مولکولی و ویژگی‌های مشابه واقعی کنیم. در عمل، مدل‌های تئوری کینتیک تنها پیش‌بینی‌های نسبتاً خشک و بی‌کنترل ارائه می‌دهند یا از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری بزرگ برای دقت استفاده می‌کنند. بنابراین، اگر کسی ابزار محاسباتی خوبی برای مطالعه ویژگی‌های گازها می‌خواهد، از تئوری جنبشی استفاده نمی‌کند. به جای آن، از مکانیک آماری استفاده می‌کند. با اینکه مطمئناً کمتر شهودی است، مکانیک آماری بر مبنای استدلال‌های احتمالی دقیق است و پاسخ‌های دقیق و قابل اعتمادی را برای یک مجموعه بسیار گسترده از مسائل ارائه می‌دهد، از جمله مسائل زیادی که درباره جامعه کینتیکی مناسب نیستند، مانند مسائل مربوط به جامدات.

مکانیک تعادلی آماری یک چارچوب عمومی برای استدلال و یک ابزار محاسباتی قدرتمند برای بسیاری از مسائل فیزیک آماری فراهم می‌کند. ما ادعا می‌کنیم که مدل‌های کنونی متداول از شبکه مشابه تئوری کینتیک هستند. آن‌ها مکانیسم‌ها یا دینامیک‌های ممکنه را فرض می‌کنند و نتایجی با تطابق کیفی با واقعیت ارائه می‌دهند، حداقل در برخی از جوانب. آن‌ها آسان به فهم هستند و به ما درک فیزیکی خوبی می‌دهند. با این حال، مانند تئوری کینتیک، پیش‌بینی‌های دقیق کمی نمی‌کنند و چارچوب کلی برای مدل‌سازی فراهم نمی‌کنند، هر مدل به جای دیگری تمرکز دارد و تلاش نمی‌کند ویژگی‌های کلی سیستم مورد علاقه را توضیح دهد.

در این مقاله، ما در مورد گراف‌های تصادفی نمایی صحبت می‌کنیم که معادل مکانیک آماری برای مطالعه گازها می‌باشد - یک تئوری عمومی و مستند با توانایی پیش‌بینی واقعی. این مزایا با هزینه‌هایی همراه هستند: گراف‌های تصادفی نمایی، ریاضیاتی و مفهومی پیچیده هستند و درک آنها نیاز به تلاشی از سوی خواننده دارد. با این حال، ما اعتقاد داریم که این ارزش بیشتری از تلاش دارد.

تکنیک‌های تئوری‌ای بر مبنای اصول آماری قوی و قابلیت پیش‌بینی کمی، ارزش فوق‌العاده‌ای در مطالعه سیالات، جامدات، و سایر سیستم‌های فیزیکی داشته‌اند و هیچ دلیلی برای فکر کردن به این نیست که برای شبکه‌ها کم‌ارزش‌تر باشند.

ما به هیچ وجه نویسندگان اولیه‌ای که گراف‌های تصادفی نمایی را مطالعه کرده‌اند نیستیم، هرچند که رویکرد ما از آنی که توسط دیگران انجام شده است متفاوت است. گراف‌های تصادفی نمایی ابتدا در اواخر دهه ۱۹۸۰ توسط هلند و لاینهارت [9] پیشنهاد شد، با استفاده از اساس‌های آماری ارائه شده توسط بیساگ [10]. پیشرفت‌های قابل توجهی توسط فرانک و استراس [11–13] انجام شد و در دهه ۱۹۹۰ توسط دیگران نیز ادامه یافت [14،15]. در سال‌های اخیر، تعدادی از فیزیکدانان، از جمله خودمان، مطالعات تئوری در مورد موارد خاص [16–21] را انجام داده‌اند.

امروزه، گراف‌های تصادفی نمایی در جوامع آمار و تجزیه و تحلیل شبکه‌های اجتماعی به عنوان یک ابزار عملی برای مدل‌سازی شبکه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند و چندین ابزار کامپیوتری استاندارد برای شبیه‌سازی و مدیریت آنها، از جمله PREPSTAR، ERGM و SIENA [22]، در دسترس هستند.

هدف ما در این مقاله این است که چندین کار انجام دهیم. اولاً، ما مدل‌های گراف‌های تصادفی نمایی را بر یک پایه فیزیکی قوی قرار دهیم، نشان می‌دهیم که می‌توانند از اصول اولیه با استفاده از استدلال حداکثر آنتروپی مشتق شوند. با این کار، ما ادعا

می‌کنیم که این مدل‌ها به عنوان یک فرمولاسیون مطالعه شده اصولاً برای راحتی ریاضی تحصیل نشده‌اند، بلکه یک گسترش واقعی و صحیح از مکانیک آماری بولتسمن و گیبز به دنیای شبکه هستند.

ثانیاً، ما در کار خود اقدامات تقریباً تجزیه و تحلیلی را پیش می‌گیریم که با تفاوت با شبیه‌سازی‌های عددی که هسته اصلی بیشتر مطالعات قبلی را تشکیل می‌دهد. ما نشان می‌دهیم که تکنیک‌های تحلیلی مکانیک آماری تعادلی بسیار مناسب برای مطالعه این مدل‌ها هستند و می‌توانند نور زیادی بر ساختار و رفتار آنها انداخت. در طول مقاله، ما به ارائه بسیاری از مثال‌های مدل‌های خاص که به صورت دقیق یا تقریبی قابل حل هستند، از جمله چند مدل که تاریخچه طولانی‌تری در تجزیه و تحلیل شبکه دارند، می‌پردازیم. با این حال، مثال‌های خاص مطالعه شده در این مقاله تنها یک کسر کوچک از امکانات ارائه شده توسط این دسته از مدل‌ها هستند. بسیاری از مسیرهای جذاب برای تحقیقات آینده در مورد گراف‌های تصادفی نمایی برای اکتشاف باز هستند و ما در طول مقاله به برخی از این مسیرها تاکید می‌کنیم.

2. گراف‌های تصادفی نمایی:

سناریوی معمولی که در ایجاد یک مدل شبکه مد نظر است، این است: شما اندازه‌گیری‌هایی از ویژگی‌های شبکه را برای یک شبکه یا شبکه‌های واقعی دارید، مانند تعداد رأس‌ها یا یال‌ها، درجات رأس‌ها، ضرایب خوشه‌بندی، توابع همبستگی و غیره، و می‌خواهید یک شبکه مدل بسازید که مقادیر مشابه یا مشابه با این ویژگی‌ها را داشته باشد. به عنوان مثال، ممکن است متوجه شوید که یک شبکه دنباله درجات با توزیع قدرت قانونی دارد و می‌خواهید یک شبکه مدل بسازید که همان قانون قدرت را نشان دهد. یا ممکن است ضریب خوشه‌بندی بالایی را در یک شبکه اندازه‌گیری کرده و می‌خواهید یک شبکه مدل بسازید که همچنان دارای خوشه‌بندی با این میزان بالا باشد.

تقریباً همه مدل‌های مورد بررسی در کارهای مدرن، و به ویژه از دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ به بعد، مدل‌های هنگردی بوده‌اند؛ به این معنی که یک مدل به تنهایی یک شبکه نیست، بلکه یک توزیع احتمال بر روی بسیاری از شبکه‌های ممکن است. ما این رویکرد را نیز در اینجا اتخاذ می‌کنیم. هدف ما انتخاب یک توزیع احتمال است به گونه‌ای که شبکه‌هایی که بهترین تطابق را با ویژگی‌های مشاهده شده دارند، در مدل احتمالاتی بیشتری اختصاص یابند.

تصور کنید یک مجموعه G از گراف‌ها داریم. می‌توانید هر مجموعه G را استفاده کنید، اما در بیشتر کارهای توضیح داده‌شده در این مقاله، G مجموعه تمام گراف‌های ساده بدون حلقه خودی در n رأس خواهد بود. (گراف ساده گرافی است که حداکثر یک یال بین هر زوج رأس دارد. حلقه خودی یک یال است که یک رأس را به خودش متصل می‌کند.) بدون شک دیگر انتخاب‌های ممکنی وجود دارد و ما برخی از آن‌ها را به طور خلاصه در بخش‌های C-3 و D-3مورد بررسی قرار می‌دهیم. گراف‌ها می‌توانند جهت‌دار یا بی‌جهت باشند و ما در این مقاله هر دو حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم، هرچند که بیشتر زمان ما به مورد بی‌جهت اختصاص خواهد یافت.

فرض کنید مجموعه‌ای از مشاهدات تجربی از یک شبکه واقعی داریم که به عنوان مشاهدات تجربی مجموعه قابل مشاهده ماشینی قابل اندازه‌گیری است. ما، به عنوان مثال، فرض می‌کنیم که تخمین <k> از مقدار میانگین هر مشاهده‌پذیر داریم. در عمل، اغلب

این گونه است که تنها یک اندازه‌گیری از یک مشاهده‌پذیر را داریم. به عنوان مثال، تنها یک اینترنت داریم، و بنابراین تنها یک اندازه‌گیری از ضریب خوشه‌بندی اینترنت داریم. در این حالت، با این حال، بهترین تخمین ما از مقدار میانگین ضریب خوشه‌بندی به سادگی برابر با یک اندازه‌گیری است که داریم.

گراف متعلق به geG گراف در مجموعه گراف‌های G ما است و P(G) احتمال آن گراف در مجموعه ما است. می‌خواهیم P(G) را به گونه‌ای انتخاب کنیم که امید مقدار هر یک از مشاهده‌پذیرهای گراف {xi} در محیط یکسان با مقدار مشاهده شده آن باشد، اما در اغلب موارد این یک مسأله بسیار آزاد است.

تعداد درجات آزادی در تعریف توزیع احتمالP(G) به مراتب بیشتر از تعداد محدودیت‌های اعمال‌شده توسط مشاهدات ما است؛ اما چنین مسائلی، معمولی در فیزیک آماری هستند و ما خوب می‌دانیم چگونه با آن‌ها برخورد کنیم. بهترین انتخاب توزیع احتمال، به یک معنی که آن را در لحظه مشخص خواهیم کرد، انی است که انتروپی گیبز را به حداکثر می‌رساند.

$$S = -\sum_{G \in \mathcal{G}} P(G) \ln P(G),$$

تحت محدودیت‌های شناخته‌شده:

$$\sum_{G} P(G) x_i(G) = \langle x_i \rangle,$$

به همراه شرط نرمال‌سازی:

$$\sum_{G} P(G) = 1.$$

در اینجا xi(G) مقدار xi در گراف G است.

با معرفی چند ضرب‌گر لاگرانژ {ϴ}،α ، متوجه می‌شویم که حداکثر انتروپی با احترام به توزیع زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial P(G)} \left[S + \alpha \left(1 - \sum_{G} P(G) \right) + \sum_{i} \theta_i \left(\langle x_i \rangle - \sum_{G} P(G) x_i(G) \right) \right] = 0 \qquad (4)$$

برای تمام گراف‌ها G. این معادله ما را به دست می دهد:

$$\ln P(G) + 1 + \alpha + \sum_{i} \theta_i x_i(G) = 0,$$

یا همانا

$$P(G) = \frac{e^{-H(G)}}{Z},$$

می‌رساند، که در آن H(G) همیلتونی گراف است

$$H(G) = \sum_{i} \theta_i x_i(G)$$

و Z تابع پارتیشن است.

$$Z = e^{\alpha+1} = \sum_G e^{-H(G)}.$$

معادلات (6) تا (8) مدل گراف تصادفی نمایی را تعریف می‌کنند. گراف تصادفی نمایی، توزیعی است بر روی یک هنگرد مشخص از گراف‌ها که انتروپی را به حداکثر می‌رساند با احترام به محدودیت‌های شناخته‌شده.

همچنین، این دقیقاً معادلی برای گراف‌ها با توزیع بولتزمن بر روی میکروحالت‌های یک سیستم فیزیکی در دماهای متناهی است. توزیع بولتزمن می‌تواند به همان وسیله، به عنوان توزیع آنتروپی بیشینه هماهنگ با مجموعه مشاهدات یک سیستم حرارتی، مشتق شود. این مشاهدات معمولاً مربوط به انرژی هستند، اگرچه نسخه‌های مبتنی بر سایر مشاهدات نیز قابل مشتق‌سازی و در موارد خاص مفیدند.

توزیع بولتزمن نیز می‌تواند به روش‌های دیگر مشتق شود، به عنوان مثال، با در نظر گرفتن یک سیستم در تعامل ضعیف با یک حمام گرما. برای مدل‌های شبکه معادله تصویری وجود ندارد و مناسب نیست که سیستم را به عنوان یک سیستم پویا در نظر بگیریم که ارگودیکاً از یک حالت به حالت دیگر حرکت می‌کند، همان‌طور که معمولاً در مکانیک آماری انجام می‌شود. اما یک جریان برجسته به نام "بیزین" وجود دارد، که ادوین جینز به عنوان معروف‌ترین نمونه آن به شمار می‌آید، که مکانیک آماری را از یک نقطه دید اصولاً آماری، به عنوان یک مسئله استنتاج از اطلاعات ناقص می‌پذیرد، و در آن تشکیل مشتق آنتروپی بیشینه به عنوان صحیح‌ترین محسوب می‌شود. مدل گراف تصادفی نمایی ما نیز به همین مکتب تعلق دارد و به این معنا معادل توزیع بولتزمن است.

استفاده از مدل گراف تصادفی نمایی شامل انجام میانگین‌گیری‌ها بر روی توزیع احتمال (6) است. مقدار مورد انتظار هر خاصیت گراف x در داخل مدل به سادگی به صورت زیر است:

$$\langle x \rangle = \sum_G P(G) x(G).$$

گراف تصادفی نمایی، مانند تمام هنگرد های آنتروپی بیشینه، بهترین پیش‌بینی برای یک متغیر ناشناخته x است، با داشتن یک مجموعه مشخص از مشاهدات، معادله (2). گراف تصادفی نمایی بهترین مدل انسمبلی است که می‌توانیم برای یک شبکه با داشتن یک مجموعه خاص از مشاهدات ساخته باشیم.

در بسیاری از موارد ممکن است نیاز به انجام جمع (9) نداشته باشیم؛ اغلب فقط نیاز به انجام جمع تابع پارتیشن معادله 8 داریم و مقادیر دیگر جمع ها را می‌توان به وسیله گرفتن مشتقات مناسب اخذ کرد.

همانطور که در مکانیک آماری تعادل سنتی است، با این حال، انجام حتی جمع تابع پارتیشن به شکل تحلیلی ممکن است آسان نباشد.

در چنین حالتی ممکن است لازم باشد به شبیه‌سازی مونته کارلو مراجعه کنیم که این مدل خود را به خوبی ارائه می‌دهد. همانطور که در این مقاله نشان می‌دهیم، با این حال، مجموعه‌ای از ابزارهایی وجود دارد که می‌توان برای حل دقیق یا تقریبی موارد مورد نظر استفاده کرد، از جمله نظریه میدان میانگین، تبدیلات جبری، و تئوری اختلال

3. مثال‌های ساده:

پیش از ورود به محاسبات پیچیده‌تر، اجازه دهید با چند مثال ساده از استفاده از گراف‌های تصادفی نمایی آشنا شویم.

الف. گراف‌های تصادفی

ابتدا موردی را بررسی می‌کنیم که شاید ساده‌ترین گراف تصادفی نمایی باشد، تعداد ثابتی از رئوس n در نظر گرفته‌شده است.

فرض کنید تنها تعداد مورد انتظار یال‌ها {m} که شبکه ما باید داشته باشد را بدانیم. در این صورت همیلتونی این فرم ساده را می‌پذیرد:

$$H(G) = \theta m(G).$$

ماتریس مجاورت را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ is connected to } j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (11)$$

بنابراین تابع پارتیشن برابر است با:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_G e^{-H} = \sum_{\{\sigma_{ij}\}} \exp\left(-\theta \sum_{i<j} \sigma_{ij}\right) = \prod_{i<j} \sum_{\sigma_{ij}=0}^{1} e^{-\theta\sigma_{ij}} \\ &= \prod_{i<j} (1 + e^{-\theta}) = [1 + e^{-\theta}]^{\binom{n}{2}}. \end{aligned} \qquad (12)$$

در نتیجه انرژی آزاد:

$$F = -\ln Z,$$

و در این مورد خاص:

$$F = -\binom{n}{2} \ln(1 + e^{-\theta}).$$

بنابراین، به عنوان مثال، تعداد مورد انتظار یال‌ها در مدل به صورت زیر است:

$$\langle m \rangle = \frac{1}{Z} \sum_G m e^{-H} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} = \binom{n}{2} \frac{1}{e^{\theta} + 1}. \qquad (15)$$

به طور معمول پارامتر θ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$p = \frac{1}{e^{\theta}+1},$$

تا $\langle m \rangle = p.nC2$.

احتمال P(G) یک گراف در این هنگرد می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$P(G) = \frac{e^{-H}}{Z} = \frac{e^{-\theta m}}{[1+e^{-\theta}]^{\binom{n}{2}}} = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}. \qquad (17)$$

به عبارت دیگر، P(G) به سادگی احتمال یک گراف است که هر یک از یال های احتمالی احتمال p دارند.

این مدل، یک گراف تصادفی برنولی یا اغلب به عنوان گراف تصادفی شناخته می‌شود و به طور کاملاً متفاوت توسط سلومونوف و راپوپورت [25] در سال ۱۹۵۱ معرفی شد و سپس توسط اردوش و رنی [26،27] مورد مطالعه قرار گرفت. امروزه، این یکی از بهترین مدل‌های گراف است که با ویژگی‌های گراف‌های جهان واقعی هماهنگ نیست [1،3،5]. یکی از نکاتی که نقص این مدل را نشان می‌دهد که در تحقیقات شبکه در سال‌های اخیر بیش از حد تأکید شده است، توزیع درجات است. از آنجا که هر لبه در این مدل با احتمال مستقل p ظاهر می‌شود، درجه یک گره، یعنی تعداد لبه‌های متصل به آن گره، توزیع دودویی را دنبال می‌کند، یا در اندازه‌گیری n بی‌نهایت، توزیع پوآسون است.

با این حال، بیشتر شبکه‌های واقعی توزیع درجاتی دارند که از نظر پوآسونی فاصله دارند و معمولاً به طور شدیدی به سمت راست خمیده می‌شوند و تعداد کمی از گره‌ها درجات بسیار بالا دارند. برخی از جالب‌ترین شبکه‌ها، از جمله اینترنت و وب جهانی، به نظر می‌رسد که توزیع درجات آن‌ها از قانون توانی پیروی می‌کند [6،28،29]. در بخش بعدی، ما در مورد این صحبت خواهیم کرد که اگر این نوع مشاهدات را در مدل‌های خود گنجانده‌ایم، چه اتفاقی می‌افتد.

ب. گراف‌های تصادفی عمومی:

حال فرض کنید که به جای اندازه‌گیری تعداد کل یال ها در یک شبکه، ما درجات تمام گره‌ها را اندازه‌گیری کنیم. اجازه دهید ki درجه گره i را نشان دهد. مجموعه کامل ki را دنباله درجه شبکه می‌نامیم. توجه داشته باشید که ما نیازی به مشخص کردن مستقل تعداد یال ها m در شبکه نداریم، زیرا m = 0.5.Σki برای یک گراف بدون جهت است. مدل گراف تصادفی نمایی مناسب این مشاهدات، مدل با هامیلتونی که در آن برای هر گره i یک پارامتر ϴi داریم، است.

$$H = \sum_i \theta_i k_i,$$

با توجه به این که ki = Σjσij، این مدل را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$H = \sum_{ij} \theta_i \sigma_{ij} = \sum_{i<j} (\theta_i + \theta_j)\sigma_{ij}.$$

که در آن برای هر راس یک تتا داریم.

همچنین می توانیم بنویسیم:

$$Z = \sum_{\{\sigma_{ij}\}} \exp\left(-\sum_{i<j} (\theta_i + \theta_j)\sigma_{ij}\right)$$

$$= \prod_{i<j} \sum_{\sigma_{ij}=0}^{1} e^{-(\theta_i+\theta_j)\sigma_{ij}} = \prod_{i<j} (1 + e^{-(\theta_i+\theta_j)}),$$

پس تابع پارتیشن به صورت زیر است:

$$F = -\sum_{i<j} \ln(1 + e^{-(\theta_i+\theta_j)}).$$

و انرژی آزاد به صورت زیر می‌باشد:

$$F = -\sum_{i<j} \ln(1 + e^{-(\theta_i+\theta_j)}).$$

به طور کلی، می‌توانیم هامیلتونی را به صورت زیر مشخص کنیم:

$$H = \sum_{i<j} \Theta_{ij}\sigma_{ij},$$

با یک پارامتر Θ_{ij} جداگانه که به هر یال وصل می‌شود [11]. سپس

$$Z = \prod_{i<j} (1 + e^{-\Theta_{ij}}), \quad F = -\sum_{i<j} \ln(1 + e^{-\Theta_{ij}}). \qquad (23)$$

می‌توانیم به عنوان مثال احتمال وقوع p_{ij} یک یال بین گره‌های i و j را محاسبه کنیم:

$$p_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle = \frac{\partial F}{\partial \Theta_{ij}} = \frac{1}{e^{\Theta_{ij}} + 1}. \qquad (24)$$

مدل معادله (18) مورد خاصی را نشان می‌دهد که $\Theta_{ij} = \Theta_i + \Theta_j$ و گراف تصادفی عادی (برنولی) معادله (12) با موردی که همه پارامترهای یکسان اند متناظر است.

گاهی اوقات ممکن است مشخص کردن یک دنباله درجه نه، بلکه یک توزیع احتمال بر روی درجات گره‌ها مناسب باشد. این امکان با مشخص کردن یک توزیع معادل بر روی پارامترهای Θ_i در معادله (18) قابل دستیابی است. بگذارید $\rho(\Theta)d\Theta$ را به عنوان احتمال این که پارامتر Θ برای یک گره در بازه Θ تا $\Theta + d\Theta$ قرار دارد، تعریف کنیم. سپس با ایجاد میانگین از این اختلال، انرژی آزاد معادله (21) به صورت زیر می‌شود:

$$F = -\int \rho(\theta_1)d\theta_1 \cdots \rho(\theta_n)d\theta_n \sum_{i<j} \ln(1 + e^{-(\theta_i+\theta_j)})$$

$$= -\binom{n}{2} \int\int \ln(1 + e^{-(\theta+\theta')})\rho(\theta)\rho(\theta')d\theta\, d\theta'. \qquad (25)$$

بخش این انرژی آزاد که مربوط به یک گره تکی با پارامتر میدان Θ است به صورت زیر است:

$$\frac{1}{n}\frac{\delta F}{\delta\rho(\theta)} = -(n-1)\int \ln(1+e^{-(\theta+\theta')})\rho(\theta')d\theta', \quad (26)$$

و درجه مورد انتظار گره i با میدان Θi، مشتق این مقدار نسبت به Θ و سپس ارزیابی آن در Θi به دست می‌آید:

$$\langle k_i\rangle = -(n-1)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\int \ln(1+e^{-(\theta+\theta')})\rho(\theta')d\theta'\right]_{\theta=\theta_i}$$
$$= (n-1)\int \frac{\rho(\theta')d\theta'}{e^{\theta_i+\theta'}+1}. \quad (27)$$

با انتخاب مناسب ρ(Θ)می‌توانیم توزیع درجه مورد نظر را تولید کنیم. ما این مدل را به عنوان یک مدل برای همبستگی درجات در اینترنت و سایر شبکه‌ها در یک مقاله قبلی مطالعه کردیم [17]

ما می‌توانیم به جای اینکه یک دنباله درجه را مشخص کنیم، یک توزیع احتمال بر روی پارامترهای Θ ij در معادله (22) را مشخص کنیم که به یال ها وصل می‌شود. یا با پیشرفت در این زمینه، می‌توانیم توزیع‌های مشترک بر روی Θ ij بر روی لبه‌های مختلف را تعریف کنیم و در نتیجه همبستگی‌های نوع کلی میان یال ها در مدل را معرفی کنیم. در این زمینه تعدادی امکانات بسیار زیادی برای بررسی وجود دارد، اما ما اکنون از آن‌ها گذشته و علاقه‌مان در این مقاله در سایر جهات است.

می‌توانیم خصوصیات دیگر مدل‌های خود را محاسبه کنیم. به عنوان مثال، برای مدل معادله (18) می‌توانیم مقدار امید را برای هر حاصلضرب درجات گره‌ها از مشتق مناسب تابع پارتیشن محاسبه کنیم:

$$\langle k_i k_j \cdots\rangle = \frac{1}{Z}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\cdots\right]Z. \quad (28)$$

این‌ها توابع هم‌ارتباطی قطعی از درجات گره‌ها هستند. به همین ترتیب، مشتقات انرژی آزاد توابع هم‌ارتباطی متصل را به دست می‌دهند. برای مدل معادله (18) به عنوان مثال، هم‌ارتباطی متصل دو گره‌ای به صورت زیر است:

$$\langle k_i k_j\rangle_c = \frac{\partial^2 F}{\partial\theta_i\theta_j} = \begin{cases} \dfrac{e^{\theta_i+\theta_j}}{(e^{\theta_i+\theta_j}+1)^2} & \text{for } i\neq j, \\ (n-1)\dfrac{e^{2\theta_i}}{(e^{2\theta_i}+1)^2} & \text{for } i=j. \end{cases} \quad (29)$$

برای مدل گراف تصادفی برنولی که همه Θ i ها برابرند، این به این شکل ساده می‌شود:

kikj> = p(1-p)>

، که ازمعادله. (16) استفاده کرده‌ایم. بنابراین درجات رؤوس در گراف تصادفی به طور کلی همبستگی مثبت دارند.

می‌توان این را به عنوان اثر یک یال ممکن برای اتصال دو رأس i و j درک کرد. حضور یا عدم حضور این یال یک همبستگی بین دو درجه معرفی می‌کند. [برای یک گراف تنک که p=O(n^−1)، همبستگی در حد اندازه گراف بزرگ ناپدید می‌شود.]

برای اندازه‌گیری برخی از مشخصات در مدل‌های گراف تصادفی نمایی، ممکن است نیاز به معرفی اصطلاحات اضافی در هامیلتونیای سیستم باشد. به عنوان مثال، برای یافتن مقدار انتظارهای ضریب خوشه‌بندی [5] C، می‌خواهیم ارزیابی کنیم:

$$\langle C\rangle = \frac{\sum_G C(G)e^{-H}}{Z},$$

که می‌توانیم این کار را با معرفی یک اصطلاح اضافی خطی در هامیلتونی برای ضریب خوشه‌بندی انجام دهیم. به عنوان مثال، برای اندازه‌گیری خوشه‌بندی در شبکه (18) معادله، می‌توانیم تعریف کنیم:

$$H = \sum_i \theta_i k_i + \gamma C.$$

سپس:

$$\langle C\rangle = \left.\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0}.$$

لذا حتی در موارد ساده، مهم است که بتوانیم مدل‌های کلی‌تر را حل کنیم و بخش زیادی از باقی مقاله به توسعه تکنیک‌ها برای انجام این کار اختصاص دارد.

پ)گراف‌های جهت‌دار:

قبل از اینکه به هامیلتونی‌های پیچیده‌تر بپردازیم، بیایید به طور خلاصه نگاهی به آنچه در صورت تغییر مجموعه گراف G که مجموعه‌ای است که ما مجموعه‌هایمان را روی آن انجام می‌دهیم، اتفاق می‌افتد، بیندازیم. اولین موردی که ما بررسی می‌کنیم، مورد گراف‌های جهت‌دار است. G را معرفی می‌کنیم تا مجموعه گراف‌های جهت‌دار ساده و بدون حلقه باشد، که توسط ماتریس مجاورت نامتقارن پارامتری شده است:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if there is an edge from } j \text{ to } i, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \qquad (33)$$

بنابراین، به عنوان مثال، هامیلتونی H=Θm منجر به یک تابع تقسیم و انرژی آزاد متناظر می‌شود:

$$Z = \prod_{i\neq j} \sum_{\sigma_{ij}=0}^{1} e^{-\theta\sigma_{ij}} = [1+e^{-\theta}]^{2\binom{n}{2}} \qquad (34)$$

معادل جهت‌دار مدل کلی‌ترمعادله 18 که طبق آن ما می‌توانیم درجه هر رأس را کنترل کنیم، مدلی است که در حال حاضر دو پارامتر جداگانه برای هر رأس θ_i و θ_j^{out} دارد که به درجه‌های ورودی و خروجی وصل می‌شوند:

$$H = \sum_i (\theta_i^{\text{in}} k_i^{\text{in}} + \theta_i^{\text{out}} k_i^{\text{out}}). \qquad (35)$$

سپس تابع تقسیم و انرژی آزاد به شکل زیر خواهد شد :

$$Z = \prod_{i \neq j} (1 + e^{-(\theta_i^{in} + \theta_j^{out})}), \qquad (36)$$

$$F = -\sum_{i \neq i} \ln(1 + e^{-(\theta_i^{in} + \theta_j^{out})}). \qquad (37)$$

از اینها می‌توانیم میانگین درجه‌های ورودی و خروجی یک رأس را محاسبه کنیم:

$$\langle k_i^{in} \rangle = \frac{\partial F}{\partial \theta_i^{in}} = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{e^{(\theta_i^{in} + \theta_j^{out})} + 1}, \qquad (38)$$

$$\langle k_i^{out} \rangle = \frac{\partial F}{\partial \theta_i^{out}} = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{e^{(\theta_j^{in} + \theta_i^{out})} + 1}. \qquad (39)$$

توجه داشته باشید که $\Sigma kin = \Sigma kout$ باید برای همه گراف‌های جهت‌دار صدق کند، چرا که هر یال در چنین گرافی باید دقیقاً از یک رأس شروع شود و به همان رأس خاتمه یابد.

همچنین می‌توانیم یک توزیع احتمال رأس) ρ , θ_i برای میدان های روی رئوس تعریف کنیم، و معادلات (25) و(27) را به صورت طبیعی تعمیم دهیم.

حال مثال پیچیده تری از یک گراف جهت دار ارائه می دهیم که در بخش 4 الف به حل مدل متقابل هالند و لینهاردت [9] می‌پردازیم.

انتخاب دیگری از مجموعه گراف G، مجموعه گراف‌های با تعداد مشخص n رأس و تعداد مشخص m یال است. مدل‌های این نوع به طور موقت در مقالات [16] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و اگر باز یال‌ها را در یک گراف به عنوان ذره در نظر بگیریم، آن‌ها را می‌توان به عنوان هنگرد کانونی مدل‌های شبکه در نظر گرفت، به طوری که مدل‌های با تعداد متغیر یال قسمت‌های قبلی هنگرد کانونی بزرگ هستند. همانطور که در مکانیک آماری مرسوم است، کار کردن با هنگرد بزرگ ساده تر است تا کانونی، اما گاهی اوقات با هنگرد کانونی و جمع همه گراف ها بدون توجه به تعداد یال‌ها و معرفی یک تابع δ برای اعمال محدودیت یال، نتیجه بهتری حاصل می‌شود؛ که این قسمت را در این مقاله ادامه نخواهیم داد.

ت)گراف‌های فرمیونی و بوزونی:

احتمالا تا الآن برای خوانندگان زیادی اتفاق افتاده است که نتایجی مانند معادلات 21 و 27 به شکلی به نتایج متناظر در مکانیک آماری سنتی برای سیستم‌های فرمیون‌های بدون برهمکنش مشابهت دارند. می‌توانیم به یال‌های شبکه‌هایمان به عنوان ذرات یک گاز کوانتومی، و جفت رأس ها را به عنوان حالت ها تک ذره در نظر بگیریم. گراف‌های ساده در اینجا متناظر با حالتی هستند که هر حالت تک ذره حداکثر توسط یک ذره قابل اشغال است، بنابراین این موضوع برای ما تعجبی ندارد که نتایج به شکلی به یک سیستم که طبق اصل طرد پائولی رفتار می‌کند شبیه باشد.

تمام شبکه‌ها نیازی به داشتن تنها یک یال بین هر جفت رئوس ندارند. برخی از آن‌ها می‌توانند چند یال یا به عبارتی یال‌های چندگانه داشته باشند. شبکه جهانی یک مثال است - ممکن است بیش از یک پیوند از یک صفحه به صفحه دیگر وجود داشته باشد. اینترنت، شبکه‌های هواپیما، شبکه‌های متابولیک، شبکه‌های عصبی، شبکه ارجاعات و شبکه‌های همکاری مثال‌های دیگری از شبکه‌هایی هستند که می‌توانند چند یال داشته باشند. مشکلی در تعمیم گراف‌های تصادفی نمایی به این موارد وجود ندارد و

همانطور که انتظار می‌رود، این منجر به یک فرمول‌نویسی می‌شود که به نظریه بوزون‌ها شباهت دارد. (این شباهت فقط یک شباهت ریاضی است؛ دلایل عملی که چرا یک شبکه معین ممکن است چند یال یا فقط یک یال داشته باشد با اصول فیزیکی زیربنای آمار کوانتومی کاملاً متفاوت است.)

بیایید مجموعه گراف G را به عنوان مجموعه گراف‌های غیر جهت‌دار با هر تعداد یال بین هر جفت رئوس (اما همچنان بدون یال‌های خودشان، اگرچه اصولاً هیچ دلیلی وجود ندارد که اینها نیز ممکن نباشند) تعریف کنیم. به عنوان مثال، هامیلتونی معادله (22)، و تعمیم دادن ماتریس مجاورت معادله (11) را در نظر بگیرید بنابراین s_{ij}اکنون برابر با تعداد یال‌های بین i و j است، حال داریم:

$$Z=\sum_{\{\sigma_{ij}\}}\exp\left(-\sum_{i<j}\Theta_{ij}\sigma_{ij}\right)=\prod_{i<j}\sum_{\sigma_{ij}=0}^{\infty}e^{-\Theta_{ij}\sigma_{ij}}=\prod_{i<j}\frac{1}{1-e^{-\Theta_{ij}}} \tag{40}$$

و

$$F=\sum_{i<j}\ln(1-e^{-\Theta_{ij}}).$$

معادل احتمال p_{ij}وقوع یک یال در حالت فرمیونیک حالا تعداد مورد انتظار یال‌ها n_{ij}بین رؤسای i و j است، که توسط رابطه زیر داده شده است:

$$n_{ij}=\langle\sigma_{ij}\rangle=\frac{\partial F}{\partial\Theta_{ij}}=\frac{1}{e^{\Theta_{ij}}-1}.$$

که ملاحظه کنید که این مقدار واگرا می‌شود اگر به Θij مجازی اجازه دهیم که به صفر برسد، یک پدیده مرتبط با چگالش بوز-ائینشتین در گازهای بوزی معمولی رخ می دهد.

برای موارد خاص معادلات (10) و (18) به ترتیب داریم:

$$F=\sum_{i<j}\ln(1-e^{-(\theta_i+\theta_j)}),\quad n_{ij}=\frac{1}{e^{\theta_i+\theta_j}-1}$$

و

$$F=\binom{n}{2}\ln(1-e^{-\theta}),\quad n_{ij}=\frac{1}{e^{\theta}-1}, \tag{44}$$

همبستگی اتصال بین درجات هر دو رأس در مورد آخری به صورت زیر است:

$$\langle k_ik_j\rangle_c=\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}=\frac{e^{\theta}}{(e^{\theta}-1)^2}$$

بنابراین دوباره درجات دارای همبستگی مثبت هستند و هنگامی که Θ به صفر میل می‌کند، همبستگی نیز به صفر میل می‌کند.

ث) حد تنک یا کلاسیک:

در اکثر شبکه‌های واقعی تعداد یال‌ها خیلی کم است. به طور معمول وقتی گراف بزرگ می‌شود، درجات رئوس یک ثابت هستند به طوری که تعداد کل یال‌ها به صورت n و نه n^2مقیاس پیدا می‌کند. به این‌گونه گراف‌ها تنک گفته می‌شود. (یک استثناء ممکن است شبکه‌های غذایی باشد که به نظر می‌رسد فشرده باشند و تعداد یال‌ها به صورت n2 مقیاس پیدا کند [30].) احتمال (p_{ij}) واقع شدن یک یال بین هر جفت رأس خاص si، jd در چنین شبکه‌هایی به صورت $\frac{1}{n}$است. بنابراین، به عنوان مثال، در مورد حالت فرمیونی شبکه‌ای که توسط هامیلتونی (22) توصیف می‌شود، معادله (24) به ما می‌گوید که e^Θij باید در مرتبه n در یک گراف تنک باشد. همین مسئله برای شبکه‌های بوزونی بخش قبل نیز صادق است. این به ما اجازه می‌دهد که اقرارات خود را با نادیده گرفتن جملات مرتبه 1 با مقایسه با جملات مرتبه e^Θij تخمین بزنیم. از این تخمینات به عنوان "حد تنک" یا "حد کلاسیک" یاد می‌کنیم، این گونه به عنوان نظیر پدیده مشابه در گازهای کوانتومی با چگالی پایین نامیده می شود. به ویژه، معادل معادله (22) برای هر دو گراف فرمیونی یا بوزونی در حالت کلاسیک pij=e^−Θij است. در مورد معادله (18) به این صورت است:

$$p_{ij} = e^{-\theta_i} e^{-\theta_j},$$

بنابراین هر یال با احتمالی ظاهر می‌شود که تنها یک ضریب مشغولیت یا "فوگاسیتی" e−Θi را در هر رأس تعریف کرده است. حد کلاسیکی این مدل پیش‌تر توسط چندین نویسنده مورد مطالعه قرار گرفته است[17,31–34]، هرچند اگرچه دوباره به روشی متفاوت از ارائه ما در اینجا توسعه یافته و توجیه شده است ؛ به طور کلی احتمال یال (46) به جای یک نتیجه به دست آمده،) به عنوان یک فرض گرفته شده است. برای یک توزیع داده ρ(Θ)dΘ خاص از u، انتظار می‌رود که درجه مورد انتظار یک رأس، معادله (27)، چنین باشد:

$$\langle k_i \rangle = (n-1) e^{-\theta_i} \int e^{-\theta'} \rho(\theta') d\theta',$$

که به سادگی با e−Θi متناسب است. بنابراین می‌توانیم با انتخاب توزیع متناظر برای Θ، هر توزیع درجه مورد نظر را تولید کنیم.

4. هامیلتونی‌های پیچیده‌تر

مدل‌های بخش‌های قبل همگی مدل‌های شبکه با یال‌هایی بدون برهمکنش هستند: هیچ اصطلاحی از درجه دو یا بالاتر در عناصر ماتریس مجاورت در هامیلتونی آن‌ها ظاهر نمی‌شود و این ویژگی است که این مدل‌ها را ساده به حل می‌رساند. در نیمه دوم مقاله به مدل‌های برهمکنشی نگاه می‌اندازیم و به طور خاص دو مثال را بررسی می‌کنیم، هر دو از قبل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و هر دو، همانطور که نشان می‌دهیم، دقیقاً قابل حل هستند. اولین مثال "مدل متقابل" هالند و لاینهارت [9] و دومین مثال مدل "دو ستاره" نامیده می‌شود.

الف. مدل متقابل

در جهان واقعی، بسیاری از گراف‌های جهت‌دار اظهارنظر تعاملاتی دارند: یک یال جهت‌دار از رأس A به رأس B، شبکه را مجاب می کند تا یک یال دیگر از B به A نیز داشته باشد. به عبارت دیگر، شبکه دارای نسبت بالاتری از جفت رؤسایی است که به هر دو

جهت متصل هستند ("دوتایی های متقابل" به زبان تجزیه و تحلیل شبکه‌های اجتماعی) نسبت به انتظار است. این نوع رفتار، به عنوان مثال، در وب جهانی، شبکه‌های ایمیل و شبکه‌های عصبی و متابولیک مشاهده می‌شود [35-37].

هالند و لاینهارت [9] یک مدل گراف تصادفی نمایی از متقابل بودن پیشنهاد کردند که ما اینجا به یک شکل ساده آن را مطالعه می‌کنیم. هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = H_0 + H_1 = \theta m - \alpha r,$$

که در آن $m=\Sigma\sigma_{ij}+\sigma_{ji}$ تعداد کل یال‌های (جهت‌دار) در گراف است و $r= \Sigma\sigma_{ij}.\sigma_{ji}$ تعداد جفت رؤسا با یال‌های متصل به هر دو جهت است. (نشان منفی در مقابل α به صورت کاملاً برای راحتی وارد شده است.) یال‌ها بین هر جفت رؤسایی سیستم‌های مستقل و یکسانی را تشکیل می‌دهند که تعامل ندارند و بنابراین تابع پارتیشن برای سیستم کامل به شکل زیر جدا می‌شود:

$$Z = Z_1^{\binom{n}{2}},$$

که تابع پارتیشن $Z1$ برای یک جفت تکرارشونده به شکل زیر است:

$$Z_1 = 1 + 2e^{-\theta} + e^{-2\theta+\alpha}. \qquad (50)$$

از عبارت $p=1/(e^{\Theta}+1)$ برای احتمال یک یال استفاده کرده و سپس می‌یابیم

$$Z = \left[\frac{1+(e^{\alpha}-1)p^2}{(1-p)^2}\right]^{\binom{n}{2}}.$$

از این عبارت می‌توانیم تعداد میانگین یال‌ها <m>و تعداد میانگین:

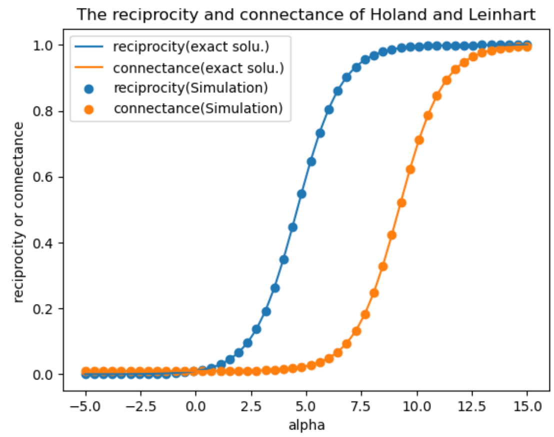
<r> از رؤوس متصل به هر دو طرف را بدست آوریم:

$$\langle m\rangle = \frac{\partial F}{\partial \theta} = p(p-1)\frac{\partial F}{\partial p}, \quad \langle r\rangle = -\frac{\partial F}{\partial \alpha}. \qquad (52)$$

یک مقدار مورد توجه در شبکه‌های جهت‌دار متقابل، پارامتر تقابل است [36] که نسبت یال‌های بازگشتی است. این مقدار حدود ده درصد در شبکه‌هایی مانند وب جهانی است. پارامتر تقابل برای مدل هالند و لاینهارت به صورت زیر است

$$\frac{2\langle r\rangle}{\langle m\rangle} = \frac{pe^{\alpha}}{1-p+pe^{\alpha}}.$$

در شکل 1، پارامتر تقابل را همراه با ارتباط شبکه به عنوان یک تابع از a برای مورد $p=0.01$ نشان می‌دهیم. خطوط متصل نتایج دقیق.معادله ی (51) را نشان می‌دهند و نقاط، نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای سیستم‌هایی با $n=1000$ رأس هستند.



. توجه داشته باشید که یک دامنه قابل توجه از مقادیر α وجود دارد که در آن اتصال پایین است و گراف به واقعیت کم گسترده و تنک نگاه داشته می‌شود، اما پارامتر تقابل هنوز هم بالاست و مشابه مقداریست که در شبکه‌های واقعی دیده می‌شوند

ب) مدل دوستاره:

در این مقاله، اصلی‌ترین موضوع ما، مدل‌های تصادفی شبکه تصادفی نمایی حل‌شده دقیق است. اما اشتباه است فرض کنیم که همه یا اکثر مدل‌های گراف تصادفی تمایی قابل حل دقیق هستند.

 بیشتر این مدل‌ها قابل حل نیستند و برای پیشرفت باید به روش‌های تقریبی روی آورد. حداقل سه نوع تکنیک وجود دارد که می‌تواند حل تقریبی تحلیلی برای مدل‌های گراف تصادفی نمایی ارائه دهد. اولین و ساده‌ترین روش نظریه میدان میانگین است که در بسیاری از موارد به خوبی عمل می‌کند به دلیل بُعدیت درونی مدل‌های شبکه؛ معمولاً این مدل‌ها بُعدیت مؤثری دارند که با افزایش تعداد گره‌ها n افزایش می‌یابد، به طوری که حد انرژی آزاد!n` همخوانی دارد .در حد بالایی بعد نظریه میدان میانگین دقیق می‌شود.

 رویکرد دوم استفاده از روش‌های غیر اختلالی مبتنی بر تبدیل هابارد-استراتونوویچ یا تبدیل‌های مشابه ادغامی است که بسیار مؤثر و دقیق هستند اما فقط برای مدل‌هایی با هامیلتونی‌های خاصی که چندجمله‌ای در ماتریس مجاورت هستند، مناسب هستند. به طور کلی می‌توان از نظریه اختلال استفاده کرد که ممکن است شامل تقریبات بزرگ‌تر باشد (هرچند معمولاً کنترل شده‌اند) اما برای هامیلتونی‌هایی اساساً به هر شکل قابل استفاده است.

در بخش‌های زیر هرکدام از این تکنیک‌ها را با استفاده از یک مدل دیگر از تاریخ علم مطالعه می‌کنیم، مدل دوستاره. همانطور که خواهیم دید، این مدل با استفاده از نظریه میدان میانگین قابل حل دقیق است، و نوسانات اطراف نظریه میدان میانگین می‌تواند با استفاده از روش‌های نوعی هابارد-استراتونوویچ مشتق گردد. همچنین یک نظریه اختلالی برای این مدل با استفاده از روش‌های دیاگرامی توسعه داده‌ایم. در مرتبه محدود، نظریه اختلالی البته تقریباً تنها تقریبی است. استفاده از آن برای مدل دوستاره، که برای

آن هم یک حل دقیق داریم، به ما فرصت می‌دهد تا به اثربخشی و دقت آن در زمینه‌ی یک سیستمی که قبلاً به خوبی درک شده است، نگاهی بیندازیم.

مدل دوستاره یک مدل از یک شبکه بدون جهت است، با هامیلتونی:

$$H = \theta m - \alpha s,$$

که در آن Ө و α پارامترهای مستقل هستند، m تعداد یال‌ها در شبکه است، و s تعداد "دوستاره‌ها" است. یک دوستاره دو یال است که به یک گره مشترک وصل هستند.

مقادیر m و s می‌توانند با استفاده از دنباله درجه مجدداً نویسی شوند:

$$m = \tfrac{1}{2}\sum_i k_i, \quad s = \tfrac{1}{2}\sum_i k_i(k_i - 1).$$

با جایگذاری این عبارات در معادله (54)، هامیلتونی را می‌توان به صورت

$$H = -\frac{J}{n-1}\sum_i k_i^2 - B\sum_i k_i,$$

نوشت که $J = 0.5(n-1)\alpha$,$B = 0.5(\Theta+\alpha)$

با دوباره توجه به اینکه $k_i=\Sigma_j\sigma_{ij}$ ، جایگذاری این مقدارها را هم می‌توانیم نویسیم:

$$H = -\frac{J}{n-1}\sum_{ijk} \sigma_{ij}\sigma_{ik} - B\sum_{ij} \sigma_{ij}. \qquad (57)$$

این مدل را در حالت فرمیونی بررسی می‌کنیم که در آن هر جفت گره می‌تواند حداکثر توسط یک یال به یکدیگر وصل شود، و در چارچوب هنگرد کانونی بزرگ که تعداد کل یال‌ها ثابت نیست مورد مطالعه قرار می‌گیرد. البته تعمیم‌هایی به سایر موارد توصیف‌شده بالا ممکن است، اگرچه همیشه ساده نیستند.

۱. نظریه میدان میانگین

متغیرهای σ_{ij} می‌توانند به عنوان اسپین‌های ایزینگ در یال های یک گراف کاملاً متصل در نظر گرفته شوند، و بنابراین مدل دوستاره می‌تواند به عنوان یک مدل ایزینگ در گراف مکمل یال گراف متصل به تمامی یال ها (21) در نظر گرفته شود. (گراف مکمل یال یک گراف G است که در آن هر یال در G با یک گره در G* جایگزین شده است و دو گره در G* اگر یال های متناظر در G یک گره را به اشتراک داشته باشند، توسط یک یال به هم متصل هستند.) با استفاده از این معادله، نظریه میدان میانگین مدل دوستاره را می‌توان به دقت همانند مدل ایزینگ مبتنی بر گره تخته توسعه داد. ما با نوشتن تمامی اصطلاحات در معادله (57) که در آن یک اسپین خاص σ_{ij} وجود دارد، شروع به نظریه میدان میانگین می‌کنیم:

$$H(\sigma_{ij}) = -\sigma_{ij}\left[\frac{J}{n-1}\sum_k (\sigma_{ik} + \sigma_{ki} + \sigma_{jk} + \sigma_{kj}) + 2B\right], \qquad (58)$$

که ما به صورت صریح با تمام راه‌هایی که σij می‌تواند به ترم اول در هامیلتونی وارد شود، حساب کرده‌ایم. [ما همچنین ترم 2J.σij/(n-1)را که برای صحیح شمردن ترم‌های قطری در σij لازم است و در حد بزرگ‌شدن ناپدید می‌شود، حذف کرده‌ایم.]

سپس، به شیوه کلاسیک نظریه میدان میانگین، میدان محلی را با میانگین آن تقریب می‌زنیم

$$\frac{J}{n-1}\sum_{k}(\sigma_{ik}+\sigma_{ki}+\sigma_{jk}+\sigma_{kj})+2B\rightarrow 4Jp+2B, \quad (59)$$

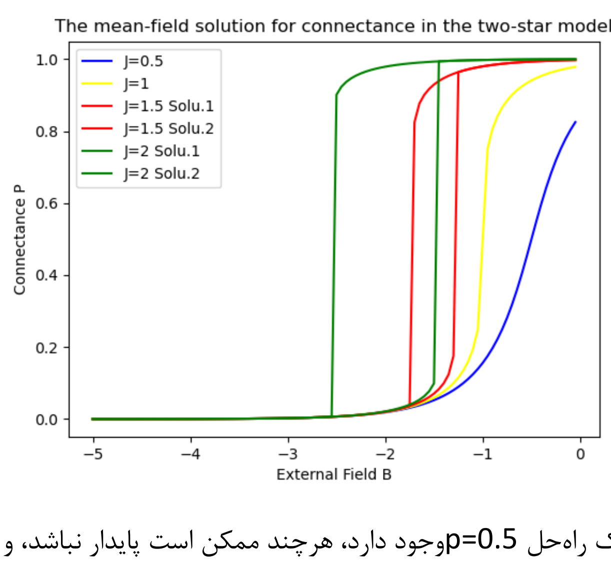
که p = < σ >میانگین احتمال وجود یک یال بین هر زوج گره است، که همچنین پارامتر اتصال گراف نامیده می‌شود. سپس، H(σij) = -(4Jp+2B)σij و می‌توانیم یک شرط خودهمانی برای p به صورت زیر بتویسیم

$$\frac{p}{1-p}=\frac{e^{-H(\sigma_{ij}=1)}}{e^{-H(\sigma_{ij}=0)}}=e^{4Jp+2B}.$$

در نتیجه:

$$p=\frac{e^{4Jp+2B}}{1+e^{4Jp+2B}}=\tfrac{1}{2}[\tanh(2Jp+B)+1].$$

برای J<=1این معادله تنها یک راه‌حل دارد، اما برای J>1 ممکن است یک راه‌حل یا اگر B به اندازه‌ی کافی به -Jنزدیک باشد، سه راه‌حل داشته باشد که دوتای اطرافی پایدار هستند. بنابراین هنگامی که B به -J نزدیک است، یک دوگانی در Jc = 1 داریم، یک گذار فاز پیوسته به یک حالت شکسته به تقارن با دو فاز، یکی با چگالی بالا و یکی با چگالی پایین. در شکل ۲ یک نمودار از راه حل معادله 61را نشان می‌دهیم که به وضوح حلقه گزینشی مشخص حالت شکسته به تقارن را نشان می‌دهد.



در "خط تقارنی" B = -J همیشه یک راه‌حل p=0.5وجود دارد، هرچند ممکن است پایدار نباشد، و در امتداد این خط می‌توانیم p-0.5را به عنوان یک پارامتر تظم برای مدل تعریف کنیم که در فاز با تقارن بالا صفر است و در فاز شکسته به تقارن غیرصفر است. می‌توانیم یک نمای بحرانی beta را به شکل معمول مطرح کنیم:

$$\left|p-\tfrac{1}{2}\right|\sim(J-1)^{\beta},$$

همانطور که از بالا به پایین J !1 نزدیک می‌شویم، beta =0.5به دست می‌آید که مقدار معمول میدان میانگین ایزینگ است. می‌توان دیگر نمایانگرهای بحرانی را نیز تعریف کرد که همچنان مقادیر میدان میانگین ایزینگ را دارا هستند. به عنوان مثال، همانطور که در [18] نشان دادیم، واریانس اتصال، که نقش یک آسیب‌پذیری را ایفا می‌کند، به شکل (J-1)^-ϒکه در اطراف گذر فاز با ϒ = 1 تغییر می‌کند.

هرچه تعداد گره‌ها به طور نامحدود افزایش پیدا می‌کند، هر یال در شبکه ما با تعداد نامحدودی دیگر تعامل دارد، که نظریه میدان میانگین را دقیق‌تر می‌کند. در حد n به بی نهایت تئوری دقیق می‌شود و ما اعتقاد داریم که مقدار p داده‌شده در بالا در این حد درست است. نظریه میدان میانگین نمی‌تواند همه چیز را درباره مدل ما بگوید: به عنوان مثال، ارزیابی از تابع پارتیشن یا انرژی آزاد ارائه نمی‌دهد و تنها به صورت غیر مستقیم اطلاعاتی درباره نوسانات در دور داده‌های میانگین ارائه می‌دهد. با این حال، این نقاط ضعف را می‌توان با انجام گسترش‌ها حول حل میدان میانگین، همانطور که اکنون شرح می‌دهیم، برطرف کرد.

۲. گسترش‌های اطراف نظریه میدان میانگین

می‌توانیم با استفاده از تکنیک‌های اقتباس شده از تئوری میدان‌های چند ذره ای، به اطراف نظریه میدان میانگین برویم. توسعه‌های این بخش به طور نزدیکی دنباله توسعه‌های مقاله گذشته ما در این زمینه [18] می‌شود و به جای تکرار بی‌مورد مطالب، خواننده را به آن مقاله برای جزئیات محاسبات ارجاع می‌دهیم. اینجا تنها نتایج مهم را خلاصه می‌کنیم.

ارزیابی تابع پارتیشن برای مدل دوستاره شامل یک جمع از اصطلاحات به شکل e^{k^2} است. مطالعه سیستم‌های کوانتوم تعاملی به ما آموخته است که چنین جمعی می‌تواند با استفاده از تبدیل هابارد-استراتونوویچ حل شود. ما با یادآوری نتیجه‌ای خوب شناخته‌شده برای انتگرال گوسی شروع می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\phi^2}d\phi=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

با جایگذاری a = (n-1)J وphi = phi_i-ki/(n-1)، و بازآرایی، این شکل را می‌گیرد:

$$e^{Jk_i^2/(n-1)}=\sqrt{\frac{(n-1)J}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)J\phi_i^2+2J\phi_i k_i}d\phi. \qquad (64)$$

سپس تابع پارتیشن به شکل زیر می شود

$$\begin{aligned} Z&=\sum_G \exp\left(-\frac{J}{n-1}\sum_i k_i^2-B\sum_i k_i\right)\\ &=\left[\frac{(n-1)J}{\pi}\right]^{n/2}\int \mathcal{D}\phi\,\exp\left(-(n-1)J\sum_i \phi_i^2\right)\\ &\quad\times\sum_G \exp\left(\sum_i (2J\phi_i+B)k_i\right), \end{aligned} \qquad (65)$$

که در آن ترتیب جمع و انتگرال را با یکدیگر عوض کرده‌ایم. حالا جمع روی گراف‌ها دقیقاً شکل تابع پارتیشن برای مدل معادله (۱۸) دارد و از معادله (۲۰) می‌توانیم فوراً تابع پارتیشن را بنویسیم:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\mathcal{H}(\phi)},$$

که مقدار

$$\mathcal{H}(\phi) = (n-1)J\sum_i \phi_i^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{i\neq j} \ln(1 + e^{2J(\phi_i+\phi_j)+2B}) - \tfrac{1}{2}n\ln[(n-1)J] \quad (67)$$

هامیلتونی موثر نامیده می‌شود.

به این ترتیب، ما جمع جمات برای مدل دوستاره را انجام داده‌ایم، اما با قیمت فیلدهای کمکی phi_iکه برای کامل کردن محاسبه باید بیرون کشیده شوند. ما نمی‌توانیم این انتگرال را به صورت دقیق باز کنیم. با این حال، همانطور که در [18] نشان دادیم، می‌توانیم آن را با استفاده از یک گسترش نقطه‌ای ارتعاشی ارزیابی کنیم که در حد اندازه‌ی سیستم بزرگ به دقت میل می‌کند، به طوری که می‌توانیم یک عبارت دقیق برای انرژی آزاد در این حد بگیریم. ما می‌یابیم

$$F = n(n-1)J\phi_0^2 - \tfrac{1}{2}n(n-1)\ln(1 + e^{4J\phi_0+2B}) + \tfrac{1}{2}(n-1)\ln[1 - 2J\phi_0(1-\phi_0)], \quad (68)$$

که در آن

$$\phi_0 = \tfrac{1}{2}[\tanh(2J\phi_0 + B) + 1] \quad (69)$$

موقعیت نقطه زینی است، یعنی بیشینه هامیلتونی در خط phi حقیقی.

توجه داشته باشید که معادله (۶۹) با معادله میدان میانگین (۶۱) برای اتصالات p مدل دوستاره یکساناست. بنابراین، phi0پارامتر اتصال مدل در نظریه میدان میانگین و گسترش نقطه زینی است، همانطور که معمولاً در چنین محاسباتی است. از انرژی آزاد می‌توانیم مشتق‌های متفاوتی به دست آوریم. به عنوان مثال، ما در [18] نشان دادیم که واریانس درجه گره در مدل به شکل

$$\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2 = (n-1)\frac{\phi_0(1-\phi_0)}{1 - 2J\phi_0(1-\phi_0)}, \quad (70)$$

که گسستگی گرادیان دارد اما در گذر فاز هیچ انفجاری ندارد.

۳. تئوری اختلال

گراف‌های تصادفی نمایی نیز به طور طبیعی با استفاده از تئوری اختلال قابل انجام هستند. ما اینجا توضیح این تئوری ساده را ارائه می‌دهیم که به طور خودکار معادل گسترش‌های دمای بالا در مکانیک آماری حرارتی معمول است.

گسترش‌های این نوع پیش‌تر توسط بوردا و همکاران [۱۹،۲۰] برای مدل استراوس از یک شبکه ترتیبی [۱۲،۱۳] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اینجا ما این تئوری را برای گراف‌های تصادفی نمایی کلی تر توسعه داده و کاربرد آن را با مدل دوستاره به عنوان یک مثال نشان می‌دهیم.

ایده اصلی تئوری اختلال برای گراف‌های تصادفی مشابه تئوری‌های اختلال دیگر است: ما از یک مدل قابل حل به صورت توانی از پارامترهای جفت Ɵi در همیلتونی برای مدل کامل گسترش می‌دهیم. ما هامیلتونی را برای مدل کامل به شکل H = H0+H1 می‌نویسیم،که \(H_0\) هامیلتونی برای مدل قابل حل است H1هر شکلی که برای به‌دست آوردن عبارت صحیح H لازم است را دارد. بنابراین تابع پارتیشن به صورت [۱۹،۲۰] خواهد بود:

$$Z = \sum_G e^{-(H_0+H_1)} = Z_0 \sum_G \frac{e^{-H_0}}{Z_0} e^{-H_1} = Z_0 \langle e^{-H_1} \rangle_0, \qquad (71)$$

که Z0 = Σe^-H0تابع پارتیشن برای هامیلتونی بی‌اختلال است و <...> میانگین هنگردی در مدل قابل حل بیان شده است.

تنها حالتی که با هر جزئیاتی مورد بررسی قرار گرفته است، حالتی است که ما اطراف یک گراف تصادفی را گسترش می‌دهیم، H0 = Ɵm

بنابراین میانگین‌ها در معادله (۷۱) میانگین در اندیس هنگرد گراف تصادفی هستند. (ممکن است Ɵصفر باشد، لذا این انتخاب برای H0 هیچ محدودیتی بر روی شکل همیلتونی کل نمی‌گذارد. اگر Ɵ0=باشد، گسترش دقیقاً معادل یک سری دمای بالا عادی است.) با این حال، برای هامیلتونی‌های H که احتمال زیادی به ایجاد شبکه‌های بسیار متفاوت از گراف‌های تصادفی می‌دهند، انتظار نمی‌رود که تئوری اختلال پاسخ‌های دقیقی در دنباله‌های پایین بدهد. در تئوری، دلیلی وجود ندارد که چرا نتوان اطراف یک مورد قابل حل دیگر را گسترش داد، اگرچه تا جایی که ما می‌دانیم چنین محاسباتی انجام نشده‌اند. یک امکان واضح که اینجا به آن پرداخته نمی‌شود، این است که اطراف یکی از اشکال گراف تصادفی عمومی را گسترش دهیم،

معمولاً برای پیشرفت در معادله (۷۱)، ما تابع نمایی را به صورت یک سری توانی از شکل

$$\frac{Z}{Z_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \langle H_1^l \rangle_0.$$

گسترش می دهیم.

در عمل، معمولاً H1 شامل یک ثابت جفت سازی حاصلضربی است، مانند ثابت αدر مدل دوستاره از معادله (۵۴)، و بنابراین عبارت ما برای تابع پارتیشن اختلال در توان‌های این ثابت خواهد بود.

برای نشان دادن این روش، ما اکنون آن را به مدل دوستاره اعمال می‌کنیم و نتایج گسترش‌های متناهی را با نتایج دقیقی که قبلاً ارائه شده است، مقایسه می‌کنیم. هامیلتونی H = Ɵm-αsرا می‌توان به دو قسمت طبقه‌بندی کرد: بخش بی‌اختلال H0 = Ɵm

که گراف تصادفی عادی برنولی است، و هامیلتونی اختلال که H1 = -αs است. سپس، با ادامه‌ی معادله (۷۲)، تابع پارتیشن برای مدل کامل به شکل

$$\frac{Z}{Z_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha^l}{l!} \langle s^l \rangle_0.$$

تعداد دوستاره‌ها برابر است با

$$s = \sum_i \sum_{j<k} \sigma_{ij}\sigma_{ik},$$

بنابراین

$$\langle s^l \rangle_0 = \sum_{i_1 j_1 < k_1} \cdots \sum_{i_l j_l < k_l} \langle \sigma_{i_1 j_1}\sigma_{i_1 k_1} \cdots \sigma_{i_l j_l}\sigma_{i_l k_l} \rangle_0. \quad (75)$$

استراتژی ما این است که سری (۷۳) را تا یک مرتبه متناهی در αارزیابی کنیم تا یک راه حل تقریبی برای Z بدست آوریم، اما یک مشکل وجود دارد. هر عبارت در این سری متناظر با حالت‌های گراف است که دارای تعداد متناظر دوستاره می‌باشد: به عنوان مثال، عبارت <s>0تعداد گراف‌ها را می‌شمارد که دارای یک دوستاره در هر موقعیت در گراف هستند. با این حال، این برای اهداف ما کافی نیست. گراف‌های واقعی تعداد متناظر دوستاره‌ها در آن‌ها را نه به صورت متناهی بلکه به صورت چگالی متناظر دارند،

و تعداد چنین گراف‌هایی توسط عباراتی که در توسعه‌ی اختلال در حد n! نشان داده می‌شوند می‌شمارد. بنابراین بدون گسترش تابع پارتیشن به توان بی‌نهایت، ما هیچ وقت نتایج معناداری از گسترش خود بدست نخواهیم آورد.

مشکلات مشابه در مکانیک آماری عادی ظاهر می‌شوند و راه حل به خوبی شناخته شده است. به جای گسترش تابع پارتیشن، یک گسترش برای انرژی آزاد ایجاد می‌کنیم. می‌توانیم انرژی آزاد را به شکل زیر بنویسیم:

$$F = -\ln Z = -\ln Z_0 - \ln\frac{Z}{Z_0} = F_0 + F_1, \quad (76)$$

که F0 = - ln(Z0) انرژی آزاد شبکه بی‌اختلال است وF1 = -ln(z1/z0)استفاده کنیم. حالا ما F1 را به صورت یک سری توانی از αگسترش می‌دهیم :

$$F_1 = -\alpha f_1 - \frac{\alpha^2}{2!} f_2 - \frac{\alpha^3}{3!} f_3 - \cdots, \quad (77)$$

که از اینکه F1=0هنگامی که α=0ستفاده کرده‌ایم. با جایگذاری درZ/Z0=e^{-F1}، می یابیم:

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + \alpha f_1 + \frac{\alpha^2}{2!}(f_2 + f_1^2) + \frac{\alpha^3}{3!}(f_3 + 3f_2 f_1 + f_1^3) + O(\alpha^4),$$

و مقایسه جملات با معادله 73 میابیم:

$$f_1 = \langle s \rangle_0,$$

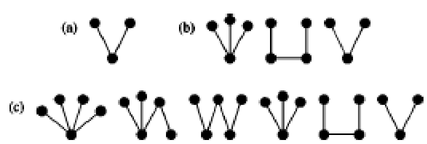
$$f_2 = \langle s^2 \rangle_0 - f_1^2,$$

$$f_3 = \langle s^3 \rangle_0 - 3 f_2 f_1 - f_1^3,$$

اینها توابع مولفه‌های s در هنگرد تعریف شده توسط شبکه بی‌اختلال هستند. اگر s را به شکل معادله 74گسترش دهیم، این‌ها هم‌بستگی‌های اتصال عناصر ماتریس مجاورت هستند - "اتصال" زیرا عناصر ماتریس مجاورت با یکدیگر هم‌بستگی ندارند. (توجه داشته باشید که به اشتراک گذاری یک رأس، همانند مدل‌های اسپین معمول مکانیک آماری، شرط کافی برای اتصال نیست. درجه آزادی اساسی در یک شبکه، یال‌ها هستند.)

سپس به این ترتیب ادامه می‌دهیم. انرژی آزادی F1 را به صورت همبندی‌های مرتبط تا یک مرتبه متناهی در α محاسبه می‌کنیم و از این به بعد تابع پارتیشن Z=Z0e^−F1 را محاسبه کنیم. حتی اگر F1 تنها تا یک مرتبه متناهی شناخته شود، عبارت ما برای Z از طریق توسعه نمایی شامل عبارات با تمام توان‌های همبندی‌های متصل در آن خواهد بود؛ بنابراین گراف‌ها از نه تنها تعداد متناهی بلکه از تراکم متناهی از دوستاره‌ها شامل می‌شود.

این ایده، که برای افراد آشنا با نظریه اختلال دیاگرامی سنتی عادی است، کاملاً کلی است و می‌توان آن را بر روی هر مدلی، نه تنها مدل دوستاره، به کار برد. در اصل، سری داده شده توسط e^−F1 یک تجمیع جزئی به تمام دستورها برای تابع پارتیشن است، که شامل برخی از بخش های Z از همبندی‌های جدا از هر مرتبه‌ای است.



شکل 3. دیاگرام‌هایی که به حساب سه مرتبه در گسترش اختلال انرژی آزاد مدل دوستاره در توان‌های α کمک می‌کنند.

بیایید ببینیم چگونه محاسبه برای مدل دوستاره به مرتبه α3 ادامه می‌یابد. جمله اساسی O(α) در F1 ساده است:

$$f_1 = \langle s \rangle_0 = \sum_i \sum_{j<k} \langle \sigma_{ij} \sigma_{ik} \rangle_0 = n \binom{n-1}{2} p^2. \qquad (80)$$

از آنجایی که ما عمدتاً به شبکه‌های بزرگ علاقه داریم، می‌توانیم این عبارت را به تخمین مقدار آن به مرتبه اول n تقریب بزنیم که برابر با 1

0,5n^3.p^2 است.

جمله دوم، در مرتبه α^2، پیچیده‌تر است زیرا چندین راه مختلف وجود دارد که دو دوستاره ممکن است به اشتراک یک یا چند یال بروند. برای پیگیری این بخش های مختلف، از یک نمایش دیاگرامی استفاده می‌کنیم که مشابه آنچه است که توسط Burda و همکاران برای مدل همسانی استراوس به کار گرفته شده است. شکل 3 (الف) نمایش یک دیاگرام واحد که به f1 برمی گردد را نشان می‌دهد که نتیجه را در معادله (80) نشان می‌دهد. شکل 3 (ب) سه دیاگرام را نشان می‌دهد که به f2 برمی گردد. این یک

فرض نشانه‌گذاری ماست که هر یالی که در یک دیاگرام ظاهر می‌شود، متمایز است. بنابراین، دیاگرام سوم در شکل 3 (ب)، که نشان‌دهنده حالتی است که دو دوستاره به یکدیگر می‌افتد، باید به طور جداگانه نشان داده شود، به جای اینکه به عنوان یک حالت خاص از دیاگرام در شکل 3 (الف) در نظر گرفته شود. به نظر می‌رسد که این ایده خوب است، چرا که این جمله فرم تابع متفاوتی نسبت به 3 (الف) دارد و هیچکدام از دو دیاگرام نسبت به دیگری به طور ضروری قابل نادیده‌گرفتن نیستند.

قوانین اصلی "فاینمن" برای تفسیر دیاگرام‌ها به صورت زیر است.

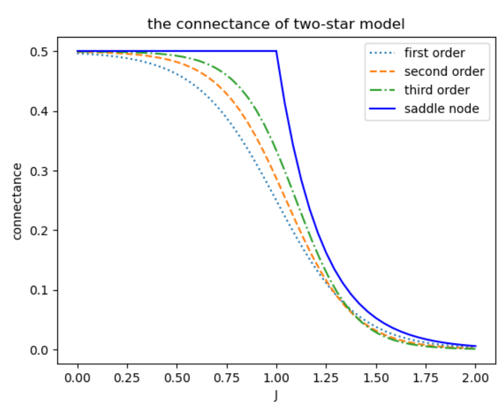
1. هر یال به یک عامل p می‌افزاید.

2. هر یال به یک عامل n می‌افزاید.

3. ضریب عددی، تعداد راه‌های متمایز در هر دیاگرام است که می‌توان آن را به دوستاره‌های همپوشانی داد به نحوی که هر یال حداقل یک‌بار رخ دهد، تقسیم بر عامل هماهنگی دیاگرام .(عامل هماهنگی تعداد جواب‌های متفاوت از گره‌ها است که دیاگرام را بدون تغییر نگاه می‌دارد.)

سپس برای توابع همبندی اتصال باید تمام راه‌های دیگر ترکیب دیاگرام‌های پایین درجه تر را برای ساخت دیاگرام داده شده را کم کنید، همانند معادله 79

برای دیدن اینکه این قوانین چگونه در عمل کار می‌کنند، آنها را به دیاگرام اول در شکل 3 (ب) اعمال می‌کنیم. این دیاگرام چهار گره و سه لبه دارد که عامل n^4p^3 را توسط قوانین اول و دوم به دست می‌دهد. می‌توان دیاگرام را به دو دوستاره به شش روش متفاوت تجزیه کرد، اما عامل هماهنگی همچنین 6 است، بنابراین نتیجه n^4p^3 خواهد بود. ارجاع به دیاگرام از محل n^4p^4− است، بنابراین مقدار نهایی دیاگرام n^4sp^3−p^4^d در مرتبه n خواهد بود.



شکل 4. پارامار اتصال مدل دوستاره محاسبه شده از نظریه میدان میانگین Sec. IV B 1 (خط مستقیم)، و از گسترش اختلالی مرتبه اول (خط چین خطی)، مرتبه دوم (خط چین خط چین) و مرتبه سوم (خط چین خط چین خط چین). محاسبات بر روی خط متقارن B=−J انجام شد، جایی که گراف نیم‌پر با پارامتر اتصال ۰.۵

همیشه یکی از حل‌های معادله میدان میانگین (61) است. برای J.1 علاوه بر گراف نیم‌پر، دو راه‌حل پایدار متقابل معادله وجود دارد. ما فقط یکی از آنها را نشان می‌دهیم.

به همین ترتیب، دیاگرام‌های دیگر در شکل ۳ (ب) به ترتیب (n^4(p^3-p^4 و 0.5n^3*p^2-p^4)نیز مشارکت دارند. دیاگرام‌های مربوط به اساس 3α^در شکل ۳ (ج) نشان داده شده‌اند و پیچیده‌تر هستند، اما با استفاده از قوانین فوق تقریباً به راحتی قابل ارزیابی هستند. عبارت نهایی برای f ها به شرح زیر است:

$$f_1 = \tfrac{1}{2} n^3 p^2, \qquad (81a)$$

$$f_2 = \tfrac{1}{2} n^3 (1-p) p^2 (1+4np), \qquad (81b)$$

$$f_3 = \tfrac{1}{2} n^3 (1-p) p^2 (1 + 14np + 32n^2p^2 - 40n^2p^3). \qquad (81c)$$

توجه کنید که در هر مرتبه از p ترم‌های مرتبه اول n را به طور جداگانه حفظ کرده‌ایم، زیرا ما از پیش در مورد نسبت n و pاطلاعی نداریم. در یک گراف تنک، انتظار داریم که p از مرتبه n/1 باشد و در این صورت ممکن است بتوانیم برخی از عبارات را نادیده بگیریم.

با داشتن بست F1 میانگین های اماری آماری از مشتقات انرژی آزاد به صورت عادی قابل محاسبه اند. به عنوان مثال، تعداد مورد انتظار دوستاره‌ها در شبکه توسط

$$\langle s \rangle = -\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = f_1 + \alpha f_2 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 f_3 + O(\alpha^3), \quad (82)$$

و تعداد مورد انتظار یال‌ها توسط

$$\langle m \rangle = \frac{\partial F}{\partial \theta} = p(p-1)\left(\frac{\partial F_0}{\partial p} + \frac{\partial F_1}{\partial p}\right) = \tfrac{1}{2}n^2 p + n^3(1-p)p^2\alpha\Big[1 + \tfrac{1}{2}(1+6np-8np^2)\alpha + \tfrac{1}{6}(1+21np+64n^2p^2 - 180n^2p^3 + 120n^2p^4)\alpha^2\Big]. \qquad (83)$$

محاسبه می‌شود.

در شکل ۴، و پارامتر اتصال m>/n^2<2 و چگالی دوستاره‌ها s>/n^3<2به دست آمده از روش دقیق میدان متوسط در بخش IV ب 1 و از عبارات فوق به ترتیب از مراتب اول، دوم و سوم نمایش داده شده است. همانطور که این شکل نشان می‌دهد، گسترش اختلال با راه‌حل دقیق در ارتفاع و پایین ارزیابی خوبی ارائه می‌دهد، به خصوص برای تقریب سوم بهتر از تقریب اول و دوم است. با این حال، در منطقه گذار فازی در Jc=1 اتفاق متفاوتی رخ می‌دهد، همانطور که انتظار می‌رود.

در این منطقه نوسانات بحرانی بزرگی وجود دارد و احتمالاً با گسترش دادن سری اختلال، ما می‌توانیم به تدریج پاسخ‌های دقیق‌تری در منطقه بحرانی به دست آوریم.

همچنین توجه داشته باشید که گسترش اختلال تنها نتایج را برای فاز تنک در منطقه‌ای که از شکست تقارن برخوردار است، ارائه می‌دهد.

ما در اینجا به تحلیل جزئیات مدل دوستاره با استفاده از تئوری اختلال پرداخته‌ایم. با این حال، این تکنیک‌ها به طور کامل عمومی هستند و تئوری‌های دیاگرامی مشابه با قوانین فاینمن ساده می‌توانند برای مثال‌های دیگری نیز ارائه شوند.

5. نتیجه‌گیری

در این مقاله، شبکه‌های تصادفی نمایی را بررسی کرده‌ایم که به معنای تصویری و کمّی نقش یک هنگرد بولتزمان برای مطالعه شبکه‌ها ایفا می‌کنند. شبکه‌های تصادفی نمایی یک چارچوب معتبر برای پیش‌بینی ویژگی‌های مورد انتظار شبکه‌ها با توجه به اندازه‌گیری‌های خاص ولی ناقص از این شبکه‌ها هستند.

ما نشان داده‌ایم چگونه می‌توان شبکه‌های تصادفی نمایی را به شیوه‌ای به معنایی معتدل از فرض‌های بیشینه آنتروپی در مورد توزیع احتمال در مورد هنگرد های گراف به دست آورد. همچنین، ما مثال‌های زیادی از محاسبات خاص با شروع از مدل‌های ساده با هامیلتونی‌های خطی با استفاده از شبکه‌های تصادفی نمایی ارائه داده‌ایم، بسیاری از این مدل‌ها قبلاً توسط سایر نویسندگان اگرچه با انگیزه‌های متفاوت ارائه شده بوده‌اند، در اکثر موارد این مدل‌های خطی می‌توانند به دقت حل شوند، به این معنا که می‌توانیم تابع پارتیشن یا همان انرژی آزاد هنگرد گراف را به صورت دقیق در اندازه‌ی بزرگ حل کنیم.

برای هامیلتونی‌های غیرخطی انتظار داریم که در اکثر موارد حل دقیق امکانپذیر نباشد، اما چندین روش وجود دارد که می‌تواند به توضیح رفتار آن‌ها کمک کند. با گرفتن مثال خاص از مدل دوستاره، نشان دادیم چگونه می‌توان ویژگی‌های آن را با استفاده از تئوری میدان متوسط، تئوری اختلال و روش‌های غیراختلال مبتنی بر تبدیل هابارد-استراتونوویچ درک کرد.

نتایج ارائه شده در این مقاله تنها یک جزء اندک از آن چه با شبکه‌های تصادفی نمایی انجام می‌شود است. بسیاری از چالش‌های جالب، به هر دو صورت عملی و ریاضی، توسط این دسته از مدل‌ها ایجاد می‌شوند. بررسی رفتار و پیش‌بینی مدل‌های خاص به عنوان توابعی از پارامترهای آزاد خود، توسعه روش‌های دیگر یا توسعه‌ی تلفیقی از آن‌هایی که اینجا ارائه شده‌اند، و توسعه مدل‌ها برای مطالعه پدیده‌های شبکه از جمله همبستگی رأس-رأس، متغیرهای پنهان، توزیع درجه، یا میزان انتقال، همه جهات عالی برای تحقیقات آتی هستند. امیدواریم که بخشی از این موضوعات را در آینده نزدیک مشاهده کنیم.