# Section 5: احتمال (Probability)

**1. آزمایش تصادفی (Random Experiment):** هر عملی که تصادف در آن دخیل باشد و نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نباشد.

پرتاب تاس، پرتاب سکه

**2. فضای نمونه‌ای (Sample Space):** مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن یک آزمایش تصادفی که آنرا با S نمایش می‌دهیم.

سکه‌ی نااریب: S={H,T}     تاس نااریب: S={1,2,3,4,5,6}     دو سکه نااریب: S={HH,HT,TH,TT}

دو تاس نااریب: S={(1,1) (1,2)……(1,6) (2,1) (2,2) ……(2,6)…….(6,1) (6,2) …. (6,6)}

**3. پیشامد (Event) :** زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه ای که آنرا با حروف بزرگ لاتین مثل A,B,C نمایش می‌دهیم.

در پرتاب تاس نااریب پیشامد مشاهده‌ی عدد بزرگتر از 3: A={4,5,6}

در پرتاب دو سکه‌ی نااریب پیشامد حداقل یک شیر: B={HT,TH,HH}

**4. قوانین شمارش:** فرض کنید کار A را به m طریق با نامهای $x_1, x_2, \dots, x_m$ و کار B را به n طریق ممکن با نامهای $y_1, y_2, \dots, y_n$ بتوان انجام داد. آنگاه داریم:

<u>قانون جمع</u>: اگر انجام کار L منوط به انجام کار A یا کار B باشد، آنگاه کار L را به $m + n$ طریق میتوان انجام داد.

<u>قانون ضرب</u>: اگر انجام کار L منوط به انجام پیاپی کار A و کار B باشد، آنگاه کار L را به $m \times n$ طریق میتوان انجام داد.

پرتاب دو سکه: $2 \times 2 = 4$     پرتاب سه سکه: $2 \times 2 \times 2 = 8$     پرتاب دو تاس: $6 \times 6 = 36$

**5. جایگشت (Permutation):** طرز قرار گرفتن n نفر یا n شیء متمایز (متفاوت) در یک ردیف از چپ به راست.

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

{I, M, A}:     IMA, IAM, MIA, MAI, AIM, AMI     ( $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ )

{I, M, A}:     IM, MI, AI, IA, MA, AM     ( $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ )

در حالت کلی اگر از بین n نفر یا n شیء متمایز r تا را انتخاب کرده وتشکیل صف دهیم، تعداد حالتهای ممکن برابر است با :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

<u>جایگشت دوری</u>: اگر n نفر یا n شیء متمایز دور یک میز یا دایره قرار گیرند، تعداد کل حالتهای ممکن برابر است با $(n-1)!$.

جایگشت اشیاء غیر متمایز: تعداد جایگشت های n شیء که $n_1$ تای آن از نوع اول و $n_2$ تای آن از نوع دوم است ، برابر است با

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$

**6. ترکیب (Combination):**

{I, M, A}: IM, ~~MI~~, AI, ~~IA~~, MA, ~~AM~~

در حالت کلی اگر از بین n نفر یا n شیء متمایز r تا را انتخاب کرده وتشکیل گروه دهیم، تعداد حالتهای ممکن برابر است با :

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

**مثال:** به چند طریق می توان از بین 8 نفر شرکت کننده در یک جلسه، یک رئیس، یک معاون و یک سخنگو انتخاب کرد؟

$$P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

**مثال:** از بین 4 پزشک و 3 پرستار میخواهیم یک کمیته 4 نفری تشکیل دهیم. الف) تعداد حالت هایی که کمیته شامل 2 پزشک و 2 پرستار باشد چندتاست؟ ب) به چند طریق کمیته شامل حداقل 2 پرستار است؟

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} = 18 \qquad , \qquad \left[\binom{4}{2} \times \binom{3}{2}\right] + \left[\binom{4}{1} \times \binom{3}{3}\right] = 18 + 4 = 22$$

**مثال:** میخواهیم 3 کتاب ریاضی، 2 کتاب حسابداری و 2 کتاب آمار را در یک قفسه کنار هم قرار دهیم. به چند حالت این کار امکان پذیر است؟

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

## احتمال(Probability)

احتمال یعنی شانس وقوع یک پیشامد.

اصول احتمال: $\begin{cases} 0 \le P_i \le 1 \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \end{cases}$

S= {H, T}

1) $0 \le P(H), P(T) \le 1$
2) $P(T) + P(H) = 1$
3) $P(T) = P(H)$

$$\longrightarrow \quad P(T) = P(H) = \frac{1}{2}$$

S={1,2,3,4,5,6}

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1 \quad , \quad P(1)=P(2)=\cdots=P(6) \quad \rightarrow \quad P(1)=\cdots=P(6)=\frac{1}{6}$$

**احتمال یک پیشامد:**

$$P\left(\text{پیشامد}\right)=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}=\frac{\text{تعداد اعضای دارای ویژگی}}{\text{تعداد کل اعضا}}$$

**مثال:** در پرتاب دو سکه احتمال مشاهده‌ی حداکثر یک شیر را به دست آورید.

S={HH,HT,TH,TT}

A={HT,TH,TT} , $P(A)=\frac{3}{4}$

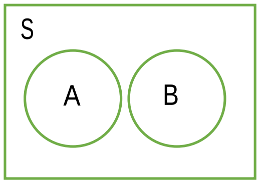
**مثال:** از جعبه‌ای که حاوی 5 مهره آبی، 3 مهره سفید و 4 مهره قرمز است، 6 مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه 2 مهره آبی و 1 مهره سفید باشد چقدر است؟

$$\frac{\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}}{\binom{12}{6}}=\frac{120}{924}$$

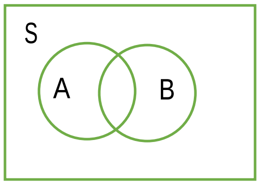
ب) احتمال اینکه از هر رنگ به تعداد مساوی مهره انتخاب شود چقدر است؟

$$\frac{\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}\times\binom{4}{2}}{\binom{12}{6}}=\frac{180}{924}$$

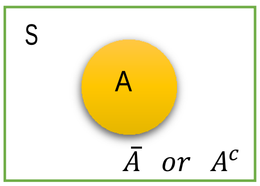



$A \cap B = \emptyset, \quad P(A \cap B) = 0 \quad \rightarrow \quad A, B$ ناسازگارند

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$




$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$




متمم : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

## احتمال شرطی:

تاس ناارییی را پرتاب میکنیم. احتمال مشاهده یک عدد زوج را به دست آورید وقتی بدانیم عدد مشاهده شده از 3 بیشتر است.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ,

$A =$ مشاهده عدد زوج $= \{2,4,6\}$ , $P(A) = \dfrac{3}{6}$ ,

$B =$ عدد بیشتر از 3 $= \{4,5,6\}$ , $P(B) = \dfrac{3}{6}$ ,

$P(A|B) = ?$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0 \qquad or \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0}$$

$A \cap B = \{4,6\}$ , $P(A \cap B) = \dfrac{2}{6}$

$$P(A|B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

**<u>مثال:</u>** خانواده ای 3 فرزند دارد. اگر فرزند اول و آخر از یک جنس باشند، احتمال همجنس بودن تمام فرزندان را بیابید.

S={BBB,GGG,BGG,GBG,GGB,BBG,BGB,GBB}

A=فرزند اول و آخر از یک جنس={BBB,GGG,GBG,BGB} , $P(A) = \frac{4}{8}$

B=همه از یک جنس={BBB,GGG} , $P(B) = \frac{2}{8}$

$A \cap B = \{BBB, GGG\}$ , $P(A \cap B) = \frac{2}{8}$ $\longrightarrow$ $P(B|A) = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$

**قانون ضرب احتمال:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

**مثال:** فرض کنید ظرفی حاوی 12 مهره است که 5 مهره آن قرمز و بقیه سبز هستند. اگر 2 مهره را بدون جایگزینی بیرون بیاوریم، احتمال اینکه هر دو قرمز باشند چقدر است؟

P(هردو قرمز)=P(اولی قرمز و دومی قرمز)=P(اولی قرمز).P(دومی قرمز وقتی اولی قرمز باشد)

$$P(RR) = P(R) \times P(RR|R) = \frac{5}{12} . \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

**شرط استقلال**: $\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

**قانون بیز:** $\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=0}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}}$

یک آزمایش تشخیص سرطان با احتمال 99 درصد برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت میدهد و با احتمال 5 درصد برای بیماران غیر سرطانی پاسخ مثبت میدهد. از بین بیماران یک بیمارستان که 7 درصد آنها سرطانی هستند بیماری را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش فوق برای وی پاسخ مثبت داده است. احتمال اینکه این بیمار سرطانی باشد را بیابید.

$P(y|s) = 0.99$ , $P(y|\bar{s}) = 0.05$ , $P(s) = 0.07$ , $P(\bar{s}) = 0.93$

$$P(s|y) = \frac{P(y|s)P(s)}{P(y|s)P(s) + P(y|\bar{s})P(\bar{s})} = \frac{0.99 \times 0.07}{(0.99 \times 0.07) + (0.05 \times 0.93)} = 0.598$$

دو جعبه داریم. از جعبه اول یک مهره چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم میاندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج میکنیم. مطلوب است: الف) احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد. ب) اگر مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد، احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه اول سفید بوده باشد چقدر است؟

الف) $\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}$

ب) $\frac{\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}}$

| | |
|---|---|
| 3 سفید و 4 قرمز | 2سفید و 3 قرمز |
| 2 | 1 |

(مثالها و تمرین های کتاب حتما حل شود)