

باسمه تعالی

مباحثی در آمار

سری دوم

۱. همزاد مخلوط!

الف) فرض کنید $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ خانواده‌هایی از توزیع‌های همزاد برای توزیع \mathcal{F} باشند. نشان دهید مخلوط این توزیع‌ها هم این چنین است:

$$\mathcal{G} = \{p_1 g_1 + p_2 g_2 + \dots + p_k g_k \mid g_i \in \mathcal{G}_i, p_i \geq 0, \sum p_i = 1\}$$

ب) فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_n مشاهداتی از توزیع گاوسی $\mathcal{N}(\mu, 1)$ باشند. توزیع پیشین μ مخلوطی از توزیع‌های گاوسی است:

$$\mu \sim \sum_{i=1}^k p_i \mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$$

توزیع پسین را محاسبه کنید.

۲. فاصله کولبک-لایبیلر توزیع‌های نرمال

فرض کنید $P : \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1)$ و $Q : \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2)$ دو توزیع گاوسی روی فضای \mathbb{R}^d باشند. $D_{KL}(P||Q)$ را محاسبه کنید.

۳. گاوس کامل!

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_k مشاهداتی از توزیع $\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{\tau})$ باشند. توزیع پیشین μ و τ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mu | \tau &\sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{1}{n_0 \tau}) \\ \tau &\sim \text{Ga}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

توزیع پسین را محاسبه کنید.

۴. توزیع کوشی

الف) نشان دهید میانگین دو متغیر تصادفی کوشی مستقل و هم‌توزیع، توزیعی یکسان با یکی از این متغیرها دارد.

ب) نشان دهید توزیع کوشی، $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2}$ ، عضوی از خانواده نمایی نیست!

۵. برآوردگر بیشترین درست‌نمایی و فاصله کولبک-لایبلر

فرض کنید داده‌های x_1, x_2, x_3, \dots از توزیع f می‌آیند و مدل $\{f_\theta | \theta \in \Theta\}$ است. $\hat{\theta}_n$ را برآوردگر بیشترین درست‌نمایی برای x_1, x_2, \dots, x_n در نظر بگیرید. نشان دهید: $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} D_{\text{KL}}(f || f_\theta)$. فرض کنید مینیمم وجود دارد و یکتاست. همگرایی در احتمال رخ می‌دهد.

۶. رگرسیون لاسو

در مدل رگرسیون خطی با منظم‌سازی لاسو، $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^p$ ستون‌های ماتریس \mathbf{X} متناظر با p متغیر مساله هستند. بردار پاسخ است. هدف مینیمم کردن تابع خطای $\frac{1}{N} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_1$ است. نشان دهید کمترین مقدار λ که تمام پارامترها را صفر می‌کند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_{\max} = \max_j \left| \frac{1}{N} \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{y} \rangle \right|$$

۷. متغیر گرفته شده پس داده نمی‌شود؟!

آیا تعداد پارامترهای برابر صفر در رگرسیون لاسو با افزایش λ صعودی است؟ آیا ممکن است یک پارامتر بعد از صفر شدن (یا برای مدتی صفر ماندن) ناصفر شود؟ فرض کنید ستون‌های ماتریس \mathbf{X} مستقل خطی هستند.

۸. انتخاب متغیر بیزی

چگونه می‌توان با انتخاب توزیع پیشین مناسب در رگرسیون بیزی انتخاب متغیر انجام داد؟ آیا می‌توانید توزیع پیشینی بیابید که کمابیش معادل در نظر گرفتن منظم‌ساز نرم صفر در رویکرد فراوانی‌گرایانه باشد؟

۹. AIC یا BIC؟ مساله این است!

اگر مدل‌هایی که برای داده در نظر می‌گیریم غلط باشند، با افزایش داده نتیجه انتخاب مدل با روش AIC و BIC چه خواهد شد؟