

به نام حق



تحقیق در عملیات II

فاز تجمیعی پروژه

استاد درس:

دکتر مریم رادمان

نگارنده:

علیرضا دهقان

بهار 1403

متغیرهای تصمیم و پارامترها:

برای مدل‌سازی مسئله مطرح‌شده، ابتدا باید متغیر تصمیم و پارامترها را با دادن اندیس‌های مناسب، تعریف و شناسایی کرد. اندیس‌های در نظر گرفته‌شده برای این مسئله به شرح زیر است:

اندیس	توضیحات
i	نشان‌دهنده شماره ماشین است. - $i \in I: \{1, 2, 3, 4, 5\}$
j, k	نشان‌دهنده نوع محصول است. - $j, k \in J: \{A, B, C\}$

جدول 1- اندیس‌ها

با توجه به این اندیس‌ها می‌توان دو متغیر تصمیم تعریف کرد. و در ادامه دو متغیر تصمیم دیگر را از آنها استخراج کرد و در مدل‌سازی استفاده کرد. توضیحات تکمیلی آن‌ها در جدول زیر آمده است.

متغیر	توضیحات
x_{ijk}	متغیر باینری - ماشین شماره i محصول j را در جلوتر از محصول k انجام بدهد (1) یا خیر (0)
C_j	زمان اتمام و تکمیل محصول j
t_{ij}	زمان شروع ماشین‌کاری ماشین شماره i بر روی محصول j
Z	متغیر کمکی از جنس زمان برای نشان دادن makepan که برابر است با محصول دارای طولانی‌ترین زمان اتمام

جدول 2- متغیرهای تصمیم

هم‌چنین با توجه به مقادیر داده شده صورت مسئله، پارامترهای سوال نیز شناسایی و با نام و اندیس مناسب مشخص شده‌اند که در جدول زیر توضیحات آن‌ها آمده است.

پارامتر	توضیحات
$p_{i,j}$	نشان‌دهنده زمان لازم برای انجام فعالیت ماشین i به روی محصول j بر حسب دقیقه است.
d_i	نشان‌دهنده تاخیر هر ماشین برای شروع ماشین‌کاری بر روی محصول جدید یا بعدی است.

جدول 3 - پارامترها

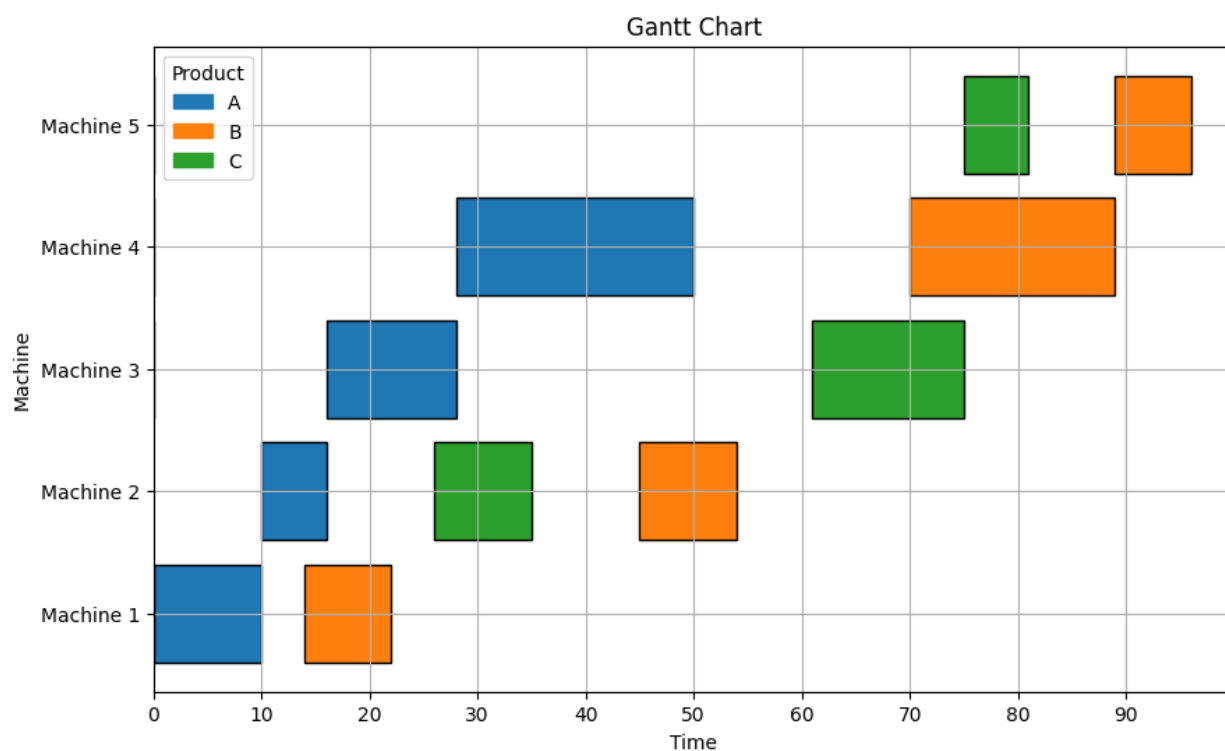
مدل سازی ریاضی:

برای مدل سازی باید محدودیت های موجود در سوال را تشخیص داده و ثبت کنیم. پس از بررسی های به عمل آمده، مدل نهایی به صورت زیر است، که در ادامه به توضیح تابع هدف و هر یک از محدودیت ها پرداخته خواهد شد. همچنین با توجه به نیاز از M به عنوان یک عدد خیلی بزرگ (مثلاً: 1000000) در نظر گرفته شده است.

- $$\begin{aligned}
 (0) \quad & \text{Min } Z \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 (1) \quad & C_j \leq Z \quad \forall j \in J \\
 (2) \quad & C_A \leq 60 \\
 (3) \quad & C_C + 15 \leq C_B \\
 (4) \quad & t_{ij} + p_{ij} \leq C_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J \\
 (5) \quad & t_{ik} + p_{ik} + d_i - M(1 - x_{ikj}) \leq t_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j, k \in J \\
 & \quad \quad \quad j \neq k \\
 (6) \quad & x_{ikj} + x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in I, \forall j, k \in J \\
 & \quad \quad \quad j \neq k \\
 (7) \quad & t_{(i-1)A} + p_{(i-1)A} \leq t_{iA} \quad \forall i \in I, i \neq 1, 5 \\
 (8) \quad & t_{4B} + p_{4B} \leq t_{5B} \\
 (9) \quad & t_{2B} + p_{2B} \leq t_{4B} \\
 (10) \quad & t_{1B} + p_{1B} \leq t_{2B} \\
 (11) \quad & t_{3C} + p_{3C} \leq t_{5C} \\
 (12) \quad & t_{2C} + p_{2C} \leq t_{3C} \\
 (13) \quad & t_{5A} = t_{3B} = t_{1C} = t_{4C} = 0 \\
 (14) \quad & Z, C_j > 0, \quad t_{ij} \geq 0, \quad x_{ikj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j, k \in J
 \end{aligned}$$

نتیجه:

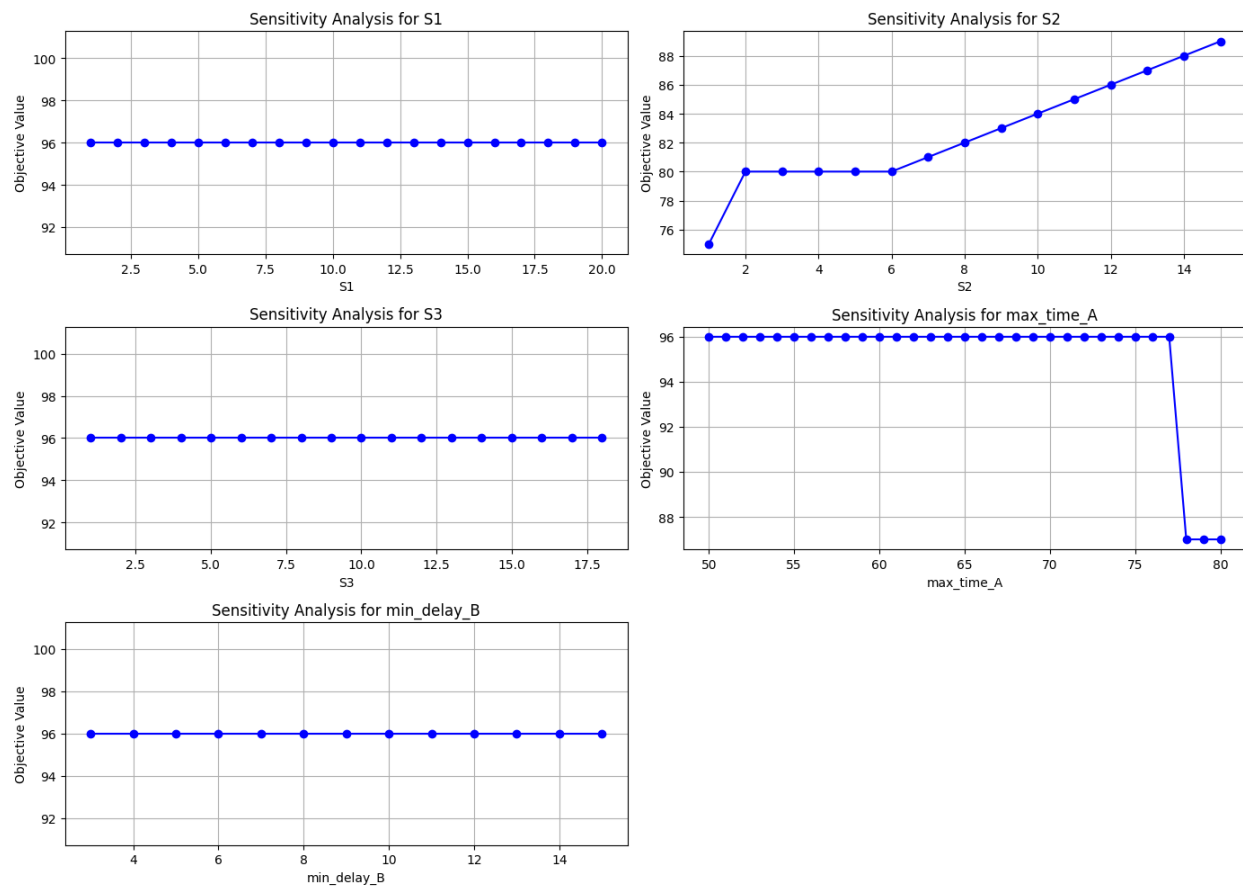
کدنویسی مساله با استفاده از هر دو کتابخانه Pyomo و Gurobipy انجام شد و در هر دو جواب بهینه یکسان و برابر 96 به دست آمد. در ادامه گانت چارت فرآیند آورده شده است که روند رسم آن و کدهای زده شده با کامنت گذاری مناسب در فایل پایتون، پیوست شده است.



نمودار 1- گانت چارت

تحلیل حساسیت:

مطابق خواسته پروژه پارامترهای مورد نظر جهت انجام تحلیل حساسیت بررسی شدند و تاثیر هر کدام بر تابع هدف محاسبه شد که نتیجه نهایی به شکل زیر به دست آمد.



نمودار 2- نتایج تحلیل حساسیت

همانطور که مشاهده می‌شود، جواب بهینه مساله به غیر از دو مورد، در هیچ کدام از سناریوها در بازه مورد انتظار تغییری نداشته و ثابت است که به اصطلاح نشان از **Robust بودن مدل** است. پر واضح است که زمان لازم برای ماشینکاری روی محصول A توسط ماشین 4 تاثیر ویژه و ملموسی بر روی مقدار تابع هدف یعنی حداقل زمان تولید همه محصولات دارد؛ به طوری که ابتدا مدل جواب بهینه‌اش افزایش سپس تا یک مقداری بدون تغییر اما بعد از آن دوباره با افزایش این زمان تابع هدف به سمت غیر مطلوب حرکت می‌کند، یعنی زمانی که تولید همه محصولات اتفاق افتاده باشد به تعویق می‌افتد. همچنین به نظر می‌رسد این روند صعودی حدودا ادامه خواهد داشت. از طرفی دیگر حداکثر زمان مجاز برای تکمیل محصول A عاملی بسیار پررنگ و مهم در جواب نهایی مدل دارد چرا که افزایش آن به عددی حدودا بزرگتر از 77 جواب مدل را بسیار کاهش داده و به مقداری کوچک تر از 88 می‌رساند که بسیار مطلوب است اما در فاصله 50 تا آن عدد حیاتی تغییری در جواب نهایی مدل دیده نمی‌شود.

رویکرد دیگری برای حل مسئله، بدون در نظر گرفتن فرض رعایت شدن ترتیب ماشینکاری‌ها؛ که در این حالت به واقعیت نیز نزدیک‌تر است.

متغیر	توضیحات
a_{ij}	متغیر کمکی - به نوعی حاصل ضرب x_{ij1} در t_{ij} را پوشش می‌دهد و جایگزین شده است.
u_j	متغیر کمکی - به نوعی حاصل ضرب x_{j2} در t_{2j} را پوشش می‌دهد و جایگزین شده است.

جدول 1- متغیرهای اضافه شده

$$\begin{array}{ll}
 (0) & \text{Min } Z \\
 \text{s.t.} & \\
 (1) & \sum_{j \in J} x_{ijt} \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall t \in T \\
 (2) & \sum_{t \in T} x_{ijt} \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall j \in J \\
 (3) & \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} x_{ijt} = 2 \quad \forall i \in I \neq 2 \\
 (4) & \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} x_{2jt} = 3 \\
 (5) & x_{ij3} = 0 \quad \forall i \in I \neq 2, \forall j \in J \\
 (6) & x_{5At} = 0 \quad \forall t \in T \\
 (7) & x_{3Bt} = 0 \quad \forall t \in T \\
 (8) & x_{iCt} = 0 \quad \forall t \in T, i = 1, 4 \\
 (9) & t_{5A} = 0 \\
 (10) & t_{4C} = 0 \\
 (11) & t_{3B} = 0 \\
 (12) & t_{1C} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(13) \quad & C_j \geq t_{ij} + p_{ij} & \forall i \in I, \forall j \in J \\
(14) \quad & C_A \leq 60 \\
(15) \quad & C_B \geq C_C + 15 \\
(16) \quad & t_{ij} \geq -M \times (1 - x_{ij2}) + \sum_{j \in J} (a_{ij} + x_{ij1} \times (p_{ij} + d_i)) & \forall i \in I, \forall j \in J \\
(17) \quad & a_{ij} \leq M \times x_{ij1} & \forall i \in I, \forall j \in J \\
(18) \quad & a_{ij} \leq t_{ij} & \forall i \in I, \forall j \in J \\
(19) \quad & a_{ij} \geq t_{ij} - M \times (1 - x_{ij1}) & \forall i \in I, \forall j \in J \\
(20) \quad & t_{2j} \geq -M \times (1 - x_{2j3}) + \sum_{j \in J} (u_{2j} + x_{2j2} \times (p_{2j} + d_2)) & \forall j \in J \\
(21) \quad & u_{2j} \leq M \times x_{2j2} & \forall j \in J \\
(22) \quad & u_{2j} \leq t_{2j} & \forall j \in J \\
(23) \quad & u_{2j} \geq t_{2j} - M \times (1 - x_{2j2}) & \forall j \in J \\
(24) \quad & Z \geq C_j & \forall j \in J \\
(25) \quad & Z, C_j > 0, \quad t_{ij} \geq 0, \quad x_{ijt} \in \{0, 1\} & \forall i \in I, \forall t \in T, \forall j \in J
\end{aligned}$$

توضیحاتی راجع به محدودیت‌ها:

محدودیت نخست، محدودیت عملکرد ماشین‌ها است و به طور خاص بیانگر آن است که یک ماشین می‌تواند در یک زمان فقط روی یک محصول کار کند. محدودیت دوم شرط "هر ماشین باید روند عمل یک محصول را قبل از آنکه محصول دیگری را شروع کند، تکمیل نماید." را برآورده می‌کند.

با توجه به تکنولوژی تولید مشخص شده در شکل صورت سوال، هر ماشین به استثناء ماشین دو تنها وظیفه ماشین کاری دو محصول را دارد لذا فقط نوبت اول و دوم برایش صادق است در همین راستا محدودیت‌های منطقی سه تا دوازده لحاظ شده است.

محدودیت سیزدهم، به تعریف زمان تکمیل می‌پردازد، به طوری که زمان تکمیل برای هر محصول با زمان پایان آخرین عملیات در هر ماشینی تعریف می‌شود که حاصل زمان شروع به علاوه‌ی پراسسینگ تایم آن است.

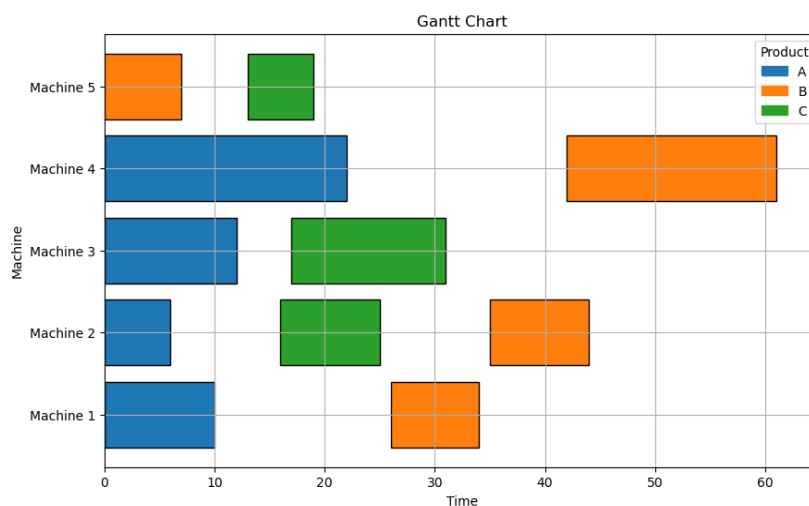
محدودیت‌های چهاردهم و پانزدهم، مهلت‌های خاص تولید هر محصول را نشان می‌دهد. به طوری که محصول A باید در مدت یک ساعت (60 دقیقه) تکمیل شود و محصول B باید حداقل 15 دقیقه پس از محصول C تکمیل شود.

محدودیت شانزدهم تا نوزدهم که به نوعی از مهم‌ترین محدودیت‌ها نیز است، هم محدودیت‌های خرابی ماشین‌ها و تاخیرشان در شروع به کار بر روی محصول جدید یا بعدی را لحاظ می‌کند (از آنجایی که هر ماشینی پس از اتمام یک محصول، قبل از اینکه بتواند یک محصول جدید را راه اندازی کند، دارای محدودیت‌های عملیاتی خاص است). و همینطور زمان شروع نوبت دوم ماشین را مشخص می‌کند. محدودیت بیستم تا بیست و سوم دقیقاً با همان ایده محدودیت قبل اما به طور خاص برای نوبت سوم ماشین دوم طراحی شده است. لازم به ذکر است که خطی‌سازی شده‌اند.

محدودیت بیست و چهارم به سادگی حداکثر زمان تکمیل همه محصولات به عنوان Z در نظر می‌گیرد تا در نهایت در تابع هدف مینیمم‌اش کند. محدودیت آخر نیز محدودیت‌های علامت هست که به طور منطقی و همانطور که پیش‌تر اشاره شد Z, C_j, t_{ij}, x_{ijt} به ترتیب از این قرار هستند: متغیر صفر و یک یا باینری، متغیری از جنس زمان (دقیقه) و بزرگتر مساوی صفر، و دو متغیر آخر نیز از جنس زمان (دقیقه) اما باید بزرگتر از صفر باشند.

نتیجه:

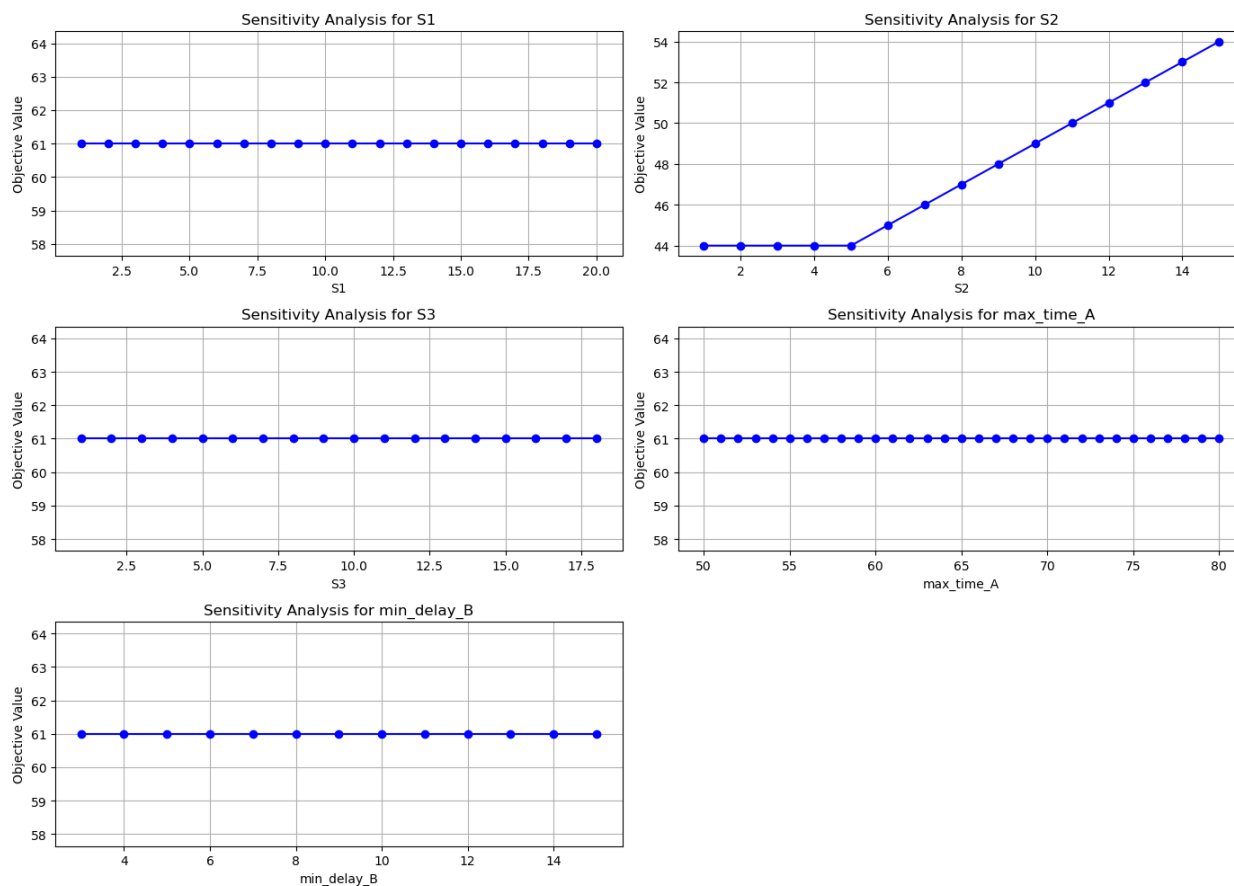
کدنویسی مساله با استفاده از هر دو کتابخانه Pyomo و Gurobi انجام شد و در هر دو جواب بهینه یکسان و برابر 61 به دست آمد. در ادامه گانت چارت فرآیند آورده شده است که روند رسم آن و کدهای زده شده با کامنت‌گذاری مناسب در فایل پایتون، پیوست شده است.



نمودار 1- گانت چارت

تحلیل حساسیت:

مطابق خواسته پروژه پارامترهای مورد نظر جهت انجام تحلیل حساسیت بررسی شدند و تاثیر هر کدام بر تابع هدف محاسبه شد که نتیجه نهایی به شکل زیر به دست آمد.



نمودار 2- نتایج تحلیل حساسیت

همانطور که مشاهده می‌شود، جواب بهینه مساله به غیر از یک مورد، در هیچ کدام از سناریوها در بازه مورد انتظار تغییری نداشته و ثابت است که به اصطلاح نشان از **Robust بودن مدل** است. پر واضح است که زمان لازم برای ماشینکاری روی محصول A توسط ماشین 4 تاثیر ویژه و ملموسی بر روی مقدار تابع هدف یعنی حداقل زمان تولید همه محصولات دارد؛ به طوری که تا یک مقداری (5) مدل جواب بهینه‌اش بدون تغییر اما بعد از آن با افزایش این زمان تابع هدف به سمت غیر مطلوب حرکت می‌کند، یعنی زمانی که تولید همه محصولات اتفاق افتاده باشد به تعویق می‌افتد. می‌توان گفت این روند حدودا ادامه خواهد داشت چرا که مقدار اولیه و اصلی این پارامتر که 22 بوده است و در آن وضعیت می‌دانیم که جواب بهینه 61 به دست آمده است و از 54 که در نمودار مصور شده است بیشتر است.

❖ بیان مساله

سه محصول A، B و C قرار است توسط پنج ماشین تولید گردند. ترتیب تکنولوژی در شکل ۱ نشان داده شده است. زمان لازم برای انجام فعالیت هر یک از ماشین‌ها به روی هر محصول (بر حسب دقیقه) در فایل اکسل "Time Data" آورده شده است. هر ماشین در هر زمان فقط روی یک محصول می‌تواند کار کند. به علاوه هر ماشین باید روند عمل یک محصول را قبل از آنکه محصول دیگری را شروع کند، تکمیل نماید. محصول A باید در مدت حداکثر ۱ ساعت پس از شروع برنامه زمانی تکمیل گردد. همچنین اتمام محصول B باید حداقل ۱۵ دقیقه بعد از اتمام محصول C باشد. به دلیل ترافیک بر روی ماشین ۲ می‌بایست این ماشین بعد از اتمام ماشین‌کاری روی هر محصول، شروع کار بر روی محصول جدید را حداقل ۱۰ دقیقه پس از اتمام ماشین‌کاری روی محصول قبل انجام دهد. همچنین ماشین ۱ به دلیل گرم شدن می‌بایست بعد از اتمام ماشین‌کاری روی هر محصول، شروع کار بر روی محصول جدید را حداقل ۴ دقیقه پس از اتمام ماشین‌کاری روی محصول قبل انجام دهد. ماشین ۳ نیز به دلیل تعویض قالب می‌بایست بعد از اتمام ماشین‌کاری روی هر محصول، شروع کار بر روی محصول جدید را حداقل ۵ دقیقه پس از اتمام ماشین‌کاری روی محصول قبل انجام دهد و ماشین ۴ به دلیل فرسودگی می‌بایست بعد از اتمام ماشین‌کاری روی هر محصول، شروع کار بر روی محصول جدید را حداقل ۲۰ دقیقه پس از اتمام ماشین‌کاری روی محصول قبل انجام دهد. مسئله عبارت است از تعیین ترتیبی که در آن محصولات مختلف در ماشین‌ها تکمیل شده و در حداقل زمان همه محصولات تولید گردند.

