

به نام خدا

عنوان:

گزارش پروژه درس بهینه سازی خطی

توضیح:

یک مسئله برنامه ریزی خطی (با حداقل بعد 10) در

محیط نرم افزاری OPL مدل سازی و حل شود

استاد:

دکتر سامان بابائی کفاکی

دانشجو:

علیرضا فرضی پور

از آنجایی که انتخاب مسئله با حداقل بعد 10 مد نظر بود، مسئله‌ای از مسائل حمل و نقل را انتخاب نمودم که همیشه دارای متغیرهای زیادی هستند. صورت مسئله به شکل زیر است:

مسئله حمل و نقل با 3 مبدا و 4 مقصد را در نظر بگیرید که اعداد داخل جدول هزینه ارسال از مبدا به مقصد موردنظر است.

عرضه مبدا \ مقصد	1	2	3	4	
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
تقاضا	5	15	15	10	Q = 45

فرمول بندی مسئله به صورت زیر است:

$$\text{Min } z = 10x_{11} + 0x_{12} + 20x_{13} + 11x_{14} + 12x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} + 20x_{24} + 0x_{31} + 14x_{32} + 16x_{33} + 18x_{34}$$

$$\text{S.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 15$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 25$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

مسائل حمل و نقل شامل یکسری مبدا و مقصد هستند. هر مبدا تعدادی موجودی (محصول برای ارسال) دارد و هر مقصدی یک تعداد تقاضا دارد. با در نظر گرفتن محدودیت ها، باید تقاضای تمامی مقصد ها تامین بشود. یعنی نباید برای مقصدی کمتر از تقاضایی که دارد محصول ارسال شود. درون جدول، 3 مبدا و 4 مقصد وجود دارد که در آن مقدار تقاضا و مقدار توانایی عرضه کننده در عرضه به همراه هزینه انتقال آن مشخص شده. برای مثال، هزینه ارسال از مبدا 1 به مقصد 2 برابر 0 است پس بهتر است تقاضا های مقصد 2 را تا حد امکان با مبدا 1 تامین کنیم تا هزینه به حداقل برسد.

تابع هدف هم می خواهد اعداد را مینیمم کند؛ برای مثال $10x_{11}$ یعنی هر واحد محصولی که از مبدا 1 به مقصد 1 ارسال می شود دارای هزینه 10 است، پس فرضاً اگر مقدار متغیر $x_{11} = 5$ بشود در کل 50 واحد هزینه خواهیم داشت.

هفت محدودیت نیز تعریف شده، که 3 تا برای مبدا است تا بیشتر از موجودی ارسال نشود و 4 تا برای مقصد است که تقاضای آنها به طول کامل برآورده شود.

مسئله 12 بعدی است. همانطور که مشخص است، متغیر های ما در این مسئله x_1 تا x_{34} می باشند (همه این متغیر های تعریف شده استفاده نشده اند).

پس در تعریف متغیر، $x[1..34]$ مورد توجه است و طبق مسئله مقدار آنرا مثبت در نظر بگیریم:

```
9 //define variable
10 dvar float+ x[1..34];
```

مسئله مینیمم سازی است پس صورت آنرا به شکل زیر می نویسیم:

```
13 // Model
14 minimize 10*x[11] + 0*x[12] + 20*x[13] + 11*x[14] + 12*x[21] + 7*x[22] +
15           9*x[23] + 20*x[24] + 0*x[31] + 14*x[32] + 16*x[33] + 18*x[34];
16
```

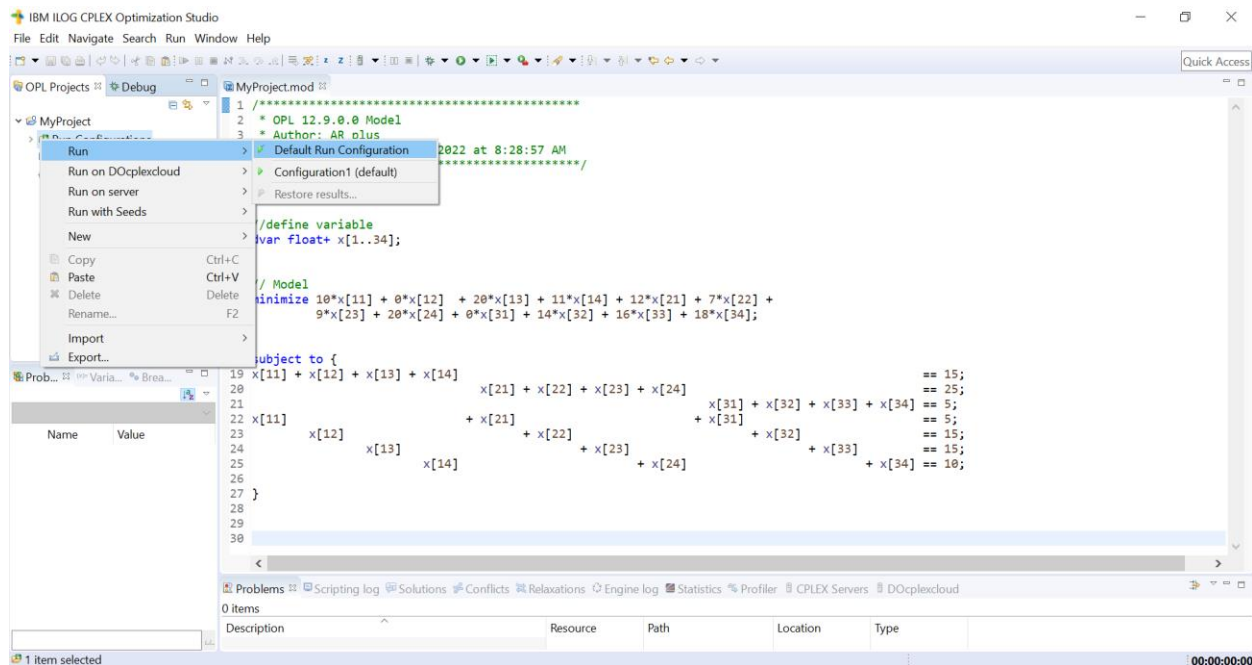
محدودیت هارا نیز در قالب یک بلوک دستور مشخص می نماییم:

```
18 subject to {
19 x[11] + x[12] + x[13] + x[14] == 15;
20           x[21] + x[22] + x[23] + x[24] == 25;
21           x[31] + x[32] + x[33] + x[34] == 5;
22 x[11]           + x[21]           + x[31] == 5;
23           x[12]           + x[22]           + x[32] == 15;
24           x[13]           + x[23]           + x[33] == 15;
25           x[14]           + x[24]           + x[34] == 10;
26
27 }
```

در نهایت کل برنامه به شکل زیر خواهد بود:

```
MyProject.mod
1 /*****
2  * OPL 12.9.0.0 Model
3  * Author: AR_plus
4  * Creation Date: May 22, 2022 at 8:28:57 AM
5  *****/
6 using CPLEX;
7
8
9 //define variable
10 dvar float+ x[1..34];
11
12
13 // Model
14 minimize 10*x[11] + 0*x[12] + 20*x[13] + 11*x[14] + 12*x[21] + 7*x[22] +
15           9*x[23] + 20*x[24] + 0*x[31] + 14*x[32] + 16*x[33] + 18*x[34];
16
17
18 subject to {
19 x[11] + x[12] + x[13] + x[14] == 15;
20           x[21] + x[22] + x[23] + x[24] == 25;
21           x[31] + x[32] + x[33] + x[34] == 5;
22 x[11]           + x[21]           + x[31] == 5;
23           x[12]           + x[22]           + x[32] == 15;
24           x[13]           + x[23]           + x[33] == 15;
25           x[14]           + x[24]           + x[34] == 10;
26
27 }
28
29
30
```

از قسمت Run Configuration اقدام به اجرای برنامه می‌کنیم:



پس از اجرا، مقدار x ها بدست آمده و به شرح زیر است:

Solution with objective 315	
Name	Value
Decision variables (1)	
x	[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 10 0 0 0 0 0 0 10 15 0 0 0 0 0 0 5 0 0 0]

برای مشاهده جزئیات بیشتر به قسمت data value مراجعه می‌کنیم¹:

1..34 (size 34)	Value	Reduced cost	Sensitivity range
11	0	10	[0..0] [0..∞]
12	5	0	[-∞..5] [5..∞]
13	0	18	[-10..5] [0..∞]
14	10	0	[-∞..10] [10..∞]
21	0	5	[0..0] [0..∞]
22	10	0	[-∞..10] [10..∞]
23	15	0	[-∞..15] [15..∞]
24	0	2	[-5..10] [0..∞]
31	5	0	[-∞..5] [5..∞]
32	0	14	[0..0] [0..∞]
33	0	14	[0..0] [0..∞]
34	0	7	[0..0] [0..∞]

برای مثال هزینه تقلیل یافته متغیرهای 12 و 14 و 22 و 23 و 31 برابر با صفر است.

از قسمت Solutions می‌توان باز هم جزئیات بیشتری از مسئله را مشاهده کرد:

```

Problems Scripting log Solutions Conflicts Relaxations Engine log Statistics Profiler CPLEX Servers DOcplexcloud
// solution (optimal) with objective 315
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Maximum Ax-b residual          = 0
// Maximum c-B'pi residual        = 0
// Maximum |x|                    = 15
// Maximum |pi|                   = 11
// Maximum |red-cost|              = 18
// Condition number of unscaled basis = 9.0e+00
//
x = [0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 10 0 0 0 0 0 0 10 15 0 0 0 0 0 0 0 5 0 0
      0];

```

برای مثال باقی مانده (فاصله Ax از b) صفر است که در مسائل کوچک عموماً به همین صورت است.

¹ متغیرهایی مانند x[1..10] که از آنها استفاده‌ای نشده از درون جدول حذف شده‌اند

در پروژه ای دیگر داریم:

محصولات یک شرکت بزرگ کنسرو سازی در سه کارخانه تولید می شود و به وسیله کامیون به چهار انبار مستقر می شوند. چون هزینه انتقال مبلغ قابل توجهی است، لذا مدیریت به دنبال کمینه کردن این هزینه ها است. اطلاعات مربوط به هزینه حمل در جدول زیر آمده است:

انبار کارخانه	1	2	3	4	میزان تولید (عرضه) برحسب کامیون
1	464	513	654	867	75
2	352	416	690	791	125
3	995	682	388	685	100
میزان احتیاج (تقاضا) برحسب کامیون	80	65	70	85	

مدل برنامه ریزی خطی مسئله فوق به شکل زیر است:

$$\text{Min } 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}$$

s.t.

$$\begin{array}{llllllll} (1) & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & = 75 \\ (2) & & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & = 125 \\ (3) & & & & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & = 100 \\ (4) & x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & = 80 \\ (5) & & x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & = 65 \\ (6) & & & x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & = 70 \\ (7) & & & & x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & = 85 \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 4.$$

همانند قبل، اطلاعات را درون نرم افزار وارد کردیم:

```

MyProject.mod  MyProject2.mod
1  /*****
2  * OPL 12.9.0.0 Model
3  * Author: AR_plus
4  * Creation Date: Jun 20, 2022 at 10:20:16 AM
5  *****/
6  using CPLEX;
7
8
9  //define variable
10 dvar float+ x[1..34];
11
12
13 // Model
14 minimize 464*x[11] + 513*x[12] + 654*x[13] + 867*x[14] + 352*x[21] + 416*x[22] +
15           490*x[23] + 791*x[24] + 995*x[31] + 682*x[32] + 388*x[33] + 685*x[34];
16
17
18 subject to {
19 x[11] + x[12] + x[13] + x[14] == 75;
20                               x[21] + x[22] + x[23] + x[24] == 125;
21                               x[31] + x[32] + x[33] + x[34] == 100;
22 x[11] + x[21] + x[31] == 80;
23 x[12] + x[22] + x[32] == 65;
24 x[13] + x[23] + x[33] == 70;
25 x[14] + x[24] + x[34] == 85;
26 }

```

سپس اجرا کرده و به جواب های فوق دست می یابیم:

Problem browser	
Solution with objective 152,535	
Name	Value
Decision variables (1)	
x	[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 20 0 55 0 0 0 0 0 80 45 0 0 0 0 0 0 0 0 70 30]

:Data value

1..34 (size 34)	Value	Reduced cost	Sensitivity range
11	0	15	[-45..20] [0..∞]
12	20	0	[-∞..20] [20..∞]
13	0	84	[-30..55] [0..∞]
14	55	0	[-∞..55] [55..∞]
21	80	0	[-∞..80] [80..∞]
22	45	0	[-∞..45] [45..∞]
23	0	17	[-20..45] [0..∞]
24	0	21	[-20..45] [0..∞]
31	0	728	[-45..20] [0..∞]
32	0	351	[-55..20] [0..∞]
33	70	0	[-∞..70] [70..∞]
34	30	0	[-∞..30] [30..∞]

:Solutions

```

Problems Scripting log Solutions Conflicts Relaxations Engine log Statistics Profiler CPLEX Servers
// solution (optimal) with objective 152535
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Maximum Ax-b residual          = 0
// Maximum c-B'pi residual        = 0
// Maximum |x|                    = 80
// Maximum |pi|                   = 770
// Maximum |red-cost|             = 728
// Condition number of unscaled basis = 1.2e+01
//
x = [0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 20 0 55 0 0 0 0 0 0 80 45 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      70 30];

```