سوال ۱.

۱) بردارهای ذکر شده را می‌توان به صورت ترکیب خطی v_1-v_2 , v_2-v_3 , v_3-v_4 , v_4 نوشت:

$$v_1=(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+(v_3-v_4)+v_4$$

$$v_2=(v_2-v_3)+(v_3-v_4)+v_4$$

$$v_3=(v_3-v_4)+v_4$$

$$v_4=v_4$$

بنابراین فضای v را span می‌کنند.

2) چون $v_1+w,\dots,v_m+w$ مستقل خطی نیست، $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ وجود دارد که

$$a_1(v_1+w)+a_2(v_2+w)+\dots+a_m(v_m+w)=0$$

که با توجه به اینکه مستقل خطی نیستند، همه a_i ها صفر نیستند.
می‌شود نتیجه گرفت که:

$$a_1v_1+\dots+a_mv_m+(a_1+\dots+a_m)w=0$$

اگر $a_1+\dots+a_m=0$ باشد نتیجه می‌شود که $a_1v_1+\dots+a_mv_m=0$ است که از آن نتیجه می‌شود که $a_i=0$ است که مخالف با نتیجه‌ای است که بدست آوردیم. بنابراین نتیجه می‌شود که $a_1+\dots+a_m\neq 0$ است و:

$$w=-\frac{1}{a_1+\dots+a_m}(a_1v_1+\dots+a_mv_m)\in \text{span}(v_1,\dots,v_m)$$

Subject:
Date: Day: Time:

ج) صورت سوال معادل این است که نشان دهیم
$v_1, v_2, \dots, v_m, w$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر
$w \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$

اگر $v_1, v_2, \dots, v_m, w$ وابسته خطی باشد، $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}$
وجود دارد (که همگی صفر نیستند) به نحوی که:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m + bw = 0$$

اگر $b=0$ باشد، نتیجه می‌شود که $a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0$ است
که طبق آن نتیجه می‌شود که $a_i = 0$ است.
بنابراین $b \neq 0$ است و می‌توانیم نشان دهیم:

$$w = -\frac{1}{b}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m) \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$$

بالعکس، اگر $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ باشد، $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$
وجود دارد به صورتی که

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m \Longrightarrow$$

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m - w = 0$$

که طبق آن نتیجه می‌شود که $v_1, v_2, \dots, v_m, w$ مستقل خطی
هستند

SADAF

Subject:
Date: Day: Time:

۴) فرض می‌کنیم که لیست بردارهای $w_1, \ldots, w_m$ مستقل خطی هستند.
این بدین معنا است که هیچ ترکیب خطی غیر از صفر از این
بردارها وجود ندارد که به بردار صفر ختم شود. می‌خواهیم اثبات کنیم
که

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_m w_m = 0$$

طبق فرض سوال می‌توان معادله بالا را به صورت زیر نوشت:

$$a_1(v_1) + a_2(v_1+v_2) + \ldots + a_m(v_1 + \ldots + v_m) = 0$$

که می‌توان معادله بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)v_1 + (a_2 + \ldots + a_m)v_2 + \ldots + a_m v_m = 0$$

با توجه به فرض اولیه:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 0$$
$$a_2 + \ldots + a_m = 0$$
$$\vdots$$
$$a_m = 0$$

که از این نتیجه می‌شود که همه a_i ها باید صفر باشند،
بنابراین ~~$w_1, \ldots, w_m$~~ $(v_1, \ldots, v_m)$ مستقل خطی هستند.

Subject:
Date: Day: Time:

بالعکس، اگر $w_1, \dots, w_m$ مستقل خطی باشند، آنگاه اثبات

استقلال خطی $v_1, \dots, v_m$

۱- فرض کنیم که $w_1, \dots, w_m$ مستقل خطی هستند.

۲- اگر $v_1, \dots, v_m$ وابسته خطی باشند، ضرایبی غیر صفر وجود دارد که $a_1v_1+\dots+a_mv_m=0$ را برآورده کند.

۳- با توجه به صورت سوال ($w_k = v_1+\dots+v_k$)

این ضرایب را می‌توان به ترکیب خطی از $w_1, \dots, w_m$ تبدیل کرد که نتیجه صفر می‌شود، که با فرض استقلال خطی $w_1, \dots, w_m$ در تضاد است.

۴- بنابراین اگر $w_1, \dots, w_m$ مستقل خطی باشند، $v_1, \dots, v_m$ نیز باید مستقل خطی باشند.

5)

$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$

از آنجا که $\|u\| = \|v\| = 1$ $\Leftarrow$ $\langle u, v\rangle = \cos\theta$

از آنجا که $\langle u, v\rangle = 1$ $\Leftarrow$ $\cos\theta = 1$

بنابراین دو بردار در یک جهت هستند.

نتیجه گرفته می‌شود که u و v نه تنها هم اندازه هستند، بلکه هم جهت نیز هستند. در فضای برداری دو بردار که هم اندازه و هم جهت هستند برابر هستند $\Leftarrow$ $u = v$

SADAF

6) ۲ طرف را بسط می‌دهیم :

$$\|x-y\|^2 = \|x+y\|^2$$

$$\Longrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Longrightarrow x^T y = 0 \quad (\text{orthogonal})$$

7) یکی از خواص نرم‌ها این صورت است :

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \text{for all } \lambda \in F$$

$$\Longrightarrow \|y-x\| = \|-(x-y)\|$$

$$\Longrightarrow \|-(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\|$$

$$\Longrightarrow \|y-x\| = \|x-y\|$$

Subject:

Date: Day: Time:

(8)

$$\langle x, y\rangle \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

$$\Longrightarrow 2\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\Longrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \geq 0$$

$$\Longrightarrow \|x - y\|^2 \geq 0$$

که همیشه عبارت بالا صدق میکند .

سوال دهم

11)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1$$

Subject:
Date: Day: Time:

(2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{REF}(A) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Independent columns $\Longrightarrow$ # Rank = 2

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{RREF}(A^T A) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivots $\Longrightarrow$ Independent columns

$\Longrightarrow$ # Rank = 2

$$A A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{RREF}(A A^T) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivots $\longrightarrow$ # Rank = 2

Subject:
Date: Day: Time:

(1

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

باید معادله $\det(A - \lambda I) = 0$ حل شود

$$\det \begin{bmatrix} 20-\lambda & 6 & 8 \\ 6 & 3-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A - \lambda I) =$$

$$(20-\lambda)\left[(3-\lambda)(8-\lambda) - 0\right] -$$

$$6\left[6(8-\lambda) - 0\right] + 8\left[0 - (3-\lambda)(8)\right]$$

$$= -\lambda^3 + 31\lambda^2 - 144\lambda \Longrightarrow \lambda(-\lambda^2 + 31\lambda - 144)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 0 \xrightarrow{\text{Eigenvect}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \approx 5{,}6 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -,28 \\ -,64 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 \approx 25{,}3$$

Subject:
Date: Day: Time:

برای نشان دادن اینکه ماتریس A، positive semi definite است

باید به تعریف این مفهوم رجوع کنیم: با توجه به اینکه یک ماتریس

مثبت نیمه معین است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه آن نامنفی

باشد، مقادیر ویژه ماتریس A همگی ≥ بزرگتر مساوی

صفر هستند، بنابراین ماتریس A، مثبت نیمه معین است ∎

4- a) $T(x,y) = (x, 1+y)$ [تبدیل خطی نیست]

اگر $u = (x_1, y_1)$ و $v(x_2, y_2)$

$$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$= (x_1+x_2, \underline{1+y_1+y_2})$$

$$T(u)+T(v) = T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$$

$$= (x_1, 1+y_1) + (x_2, 1+y_2) =$$

$$(x_1+x_2, \underline{2+y_1+y_2})$$

$\Longrightarrow$ خاصیت Additivity را رعایت نمی‌کند

Subject:
Date: Day: Time:

ط) [تبدیل خطی است] $T(x,y) = (y,x)$

$\Rightarrow v = (x_1, y_1) \quad , \quad u = (x_2, y_2)$

$u+v = (x_1+x_2 , y_1+y_2)$

$T(u+v) = T(x_1+x_2 , y_1+y_2) = (y_1+y_2 , x_1+x_2)$

$T(u) + T(v) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$

$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = (y_1+y_2 , x_1+x_2)$

خاصیت additivity را برقرار کرد ✓

چک خاصیت multiplication :

$T(c \cdot u) = c \cdot T(u)$

اگر $u = (x, y)$ باشد :

$c u = c \cdot (x,y) = (cx, cy)$

$T(c \cdot u) = (cy, cx)$

$c \cdot T(u) = c \cdot (y, x) = (cy, cx)$

این خاصیت را نیز برقرار کرد ✓

SADAF

Subject:
Date: Day: Time:

$T(x,y)=(y,x)$ [تبدیل خطی نیست] (c

اگر $u=(x_1,y_1)$ و $v=(x_2,y_2)$ باشد

$u+v=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$T(u+v)=T(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$=(0, (x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2))$

$T(u)+T(v)=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$

$=(0, x_1y_1)+(0, x_2y_2)$

$=(0, x_1y_1+x_2y_2)$

$(x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2)\neq x_1y_1+x_2y_2$

بنابراین تبدیل خطی نیست

$T(x,y)=(x^2,y^2)$ [تبدیل خطی نیست] (d

$u+v=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$T(u+v)=((x_1+x_2)^2, (y_1+y_2)^2)$

$T(u)+T(v)=(x_1^2,y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)$

SADAF

$=(x_1^2+x_2^2, y_1^2+y_2^2)$

$(x_1+x_2)^2\neq x_1^2+x_2^2$

Subject:
Date: Day: Time:

ج) [تبدیل خطی نیست] $T(x,y) = (x, \sin y)$

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$T(u+v) = (x_1+x_2, \sin(y_1+y_2))$

$T(u) + T(v) = (x_1, \sin y_1) + (x_2, \sin y_2)$

$= (x_1+x_2, \sin y_1 + \sin y_2)$

$\sin y_1 + \sin y_2 \neq \sin(y_1+y_2)$

د) [تبدیل خطی است] $T(x,y) = (x+y, x-y)$

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$T(u+v) = ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2))$

$T(u)+T(v) = T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) =$

$(x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, x_2-y_2)$

$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2))$

خاصیت additivity را برقرار کرد.

Subject:
Date: Day: Time:

ادامه اثبات سوال ج ←

$u = (x_1, y_1)$

$T(c \cdot u) = T(cx_1, cy_1) = (cx_1 + cy_1, cx_1 - cy_1)$

$c \cdot T(u) = c \cdot (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (cx_1 + cy_1, cx_1 - cy_1)$

خاصیت multiplication را نیز صدق می‌کند، پس

تبدیل خطی است. ■

5) می‌توانیم فرض کنیم:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} y &= \frac{-13}{11} \\ x &= \frac{27}{11} \end{aligned}$$

$$t = 4 \cdot \left(\frac{27}{11}\right) - 5\left(\frac{13}{11}\right) = \frac{43}{11}$$

بنابراین اگر $t = \frac{43}{11}$ باشد، این ۳ بردار

وابسته خطی می‌شوند.

Subject:
Date: Day: Time:

6) پس از انجام multiplication داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3a - 4b \\ 3b + 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3a - 4b = 5 \\ 3b + 4a = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 4/5 \\ a = -3/5 \end{matrix}$$

در ماتریس همانی، تنها بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه ۱ تغییر نمی‌کند که در این سوال این بردار

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

است.

7) L1 Norm: $\|v\|_1 = \sum_{i}^{n} |v_i|$

L2 Norm: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i} v_i^2}$

$\Rightarrow L_1 = |-3| + |4| + |0| = 7$

$L_2 = \sqrt{9+16} = 5$

SADAF

Subject:
Date: Day: Time:

سوال سوم

۱) فرض کنیم v، بردار ویژه B متناظر با آن است

$$Bv = \lambda v$$

فرض کنیم:

$$A = B + aI$$

$$\Rightarrow Av = (B + aI)v$$

$$\Rightarrow Av = Bv + aIv = Bv + av$$

$$\xrightarrow{Bv = \lambda v} Av = \lambda v + av = (\lambda + a)v$$

این نشان میدهد که (v) بردار ویژه برای ماتریس A است و $\lambda + a$ مقدار ویژه متناظر با آن است.

این اثبات میکند که با افزودن (a) به عناصر قطری ماتریس B، مقادیر ویژه جدید $\lambda_1 + a, \dots, \lambda_m + a$ خواهند شد.

Subject:
Date: Day: Time:

ب) فرض کنیم که:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

(غیر تکین است)

اثبات:

$$A = (J - I_n) + n I_n \quad (*)$$

طبق فرض سوال قبل، اثباتی که انجام شد.

برای اینکه اثبات کنیم ماتریس singular است یا خیر، کافی است که اثبات کنیم که آیا مقدار ویژه صفر جز مقدار ویژه ماتریس A است یا خیر.

ماتریس J، یک مقدار ویژه برابر با n دارد و $n-1$ مقدار ویژه برابر با صفر دارد.

اگر I_n را از آن کم کنیم نتیجه می‌شود که این ماتریس یک مقدار ویژه برابر با $n-1$ دارد و $n-1$ مقدار ویژه برابر با (-1) دارد.

طبق اثبات سوال قبل و معادله $(*)$ ماتریس A یک مقدار ویژه متناظر با $(2n-1)$ و $n-1$ مقدار ویژه برابر با $(n-1)$ دارد.

که با توجه به اینکه $n>0$ است نتیجه می‌شود که ماتریس A غیر تکین است.

Subject:
Date: Day: Time:

2)

$$F_n = AF_{n-1} = A(AF_{n-2}) = A^2F_{n-2}$$

اگر این پروسه را ادامه دهیم :

$$F_n = A^n F_0$$

طبق تجزیه ویژه ، $A = PDP^{-1}$

$$A^n = (PDP^{-1})^n$$

$$= PD^nP^{-1}$$

$$\Rightarrow F_n = PD^nP^{-1}F_0$$

Subject:
Date: Day: Time:

ج)

الف) $\cos\theta = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|x\|\|y\|}$

اگر $\cos\theta = 1$ باشد یعنی زاویه بین x و y برابر با صفر است که یعنی این دو بردار در یک جهت هستند. این تنها در حالتی صدق می‌کند که y، ضریبی مثبت از x باشد که یعنی $y = ax$ برای $a>0$.

بالعکس، اگر $y = ax$ برای $a>0$، یعنی x و y در یک جهت هستند و این یعنی زاویه بین این دو برابر با صفر است و بنابراین $\cos\theta = 1$ است #

ب) اگر $\cos\theta = -1$ یعنی زاویه بین x و y، 180° است که یعنی x و y در جهات خلاف هستند و این در حالتی پیش می‌آید که y، ضریبی منفی از x باشد ($y = ax$ for some $a<0$)

بالعکس اگر $y = ax$ برای $a<0$، یعنی x و y در جهات خلاف هستند و این یعنی زاویه بین آن‌ها 180° است به نتیجه $\cos\theta = -1$ #