بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات هوش مصنوعی و علم داده

نیم‌سال اول ۰۳-۰۲

مدرس: امیر نجفی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین اول | **جبرخطی** | مهلت ارسال: ۲۶ آبان

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت **۲۳:۵۹** روز مشخص‌شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر تمرین‌ها بدون کسر نمره تا سقف ۸ روز وجود دارد. محل بارگزاری جواب تمرین‌ها بعد از ۴ روز بسته خواهد شد و پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال‌شده پذیرفته نخواهند شد.
- هم‌فکری در انجام تمرین مانعی ندارد، فقط توجه داشته باشید که پاسخ تمرین حتما باید توسط خود شخص نوشته شده باشد. همچنین در صورت همفکری در هر تمرین، در ابتدای جواب تمرین نام افرادی که با آن‌ها هم‌فکری کرده اید را حتما ذکر کنید.
- برای پاسخ به سوالات نظری در صورتی که از برگه خود عکس تهیه می‌کنید، حتما توجه داشته باشید که تصویر کاملا واضح و خوانا باشد. درصورتی که خوانایی کافی را نداشته باشد، تصحیح نخواهد شد.
- به منظور بارگذاری بایستی پاسخ تمارین در یک فایل زیپ با نام hw[HW-Number]_[First-Name]_[Last-Name].zip بارگذاری شوند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام یا مشکل، در کوئرای درس آن مشکل را بیان کنید و از پیغام دادن مستقیم به دستیاران آموزشی خودداری کنید.

سوالات (۱۰۰ + ۵ نمره)

۱. سوال اول (۴۰ نمره)

موارد زیر را اثبات کنید

۱) اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید که اگر v_1, v_2, v_3, v_4 فضای V را span کنند،در نتیجه

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

نیز فضای V را span می‌کند (۵ نمره).

۲) فرض کنید $v_1, \ldots, v_m$ در فضای V مستقل خطی باشند؛ همچنین $w \in V$. اثبات کنید اگر $v_1+w, \ldots, v_m+w$ مستقل خطی نباشند، خواهیم داشت $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ (۵ نمره).

۳) فرض کنید $v_1, \ldots, v_m$ در فضای V مستقل خطی باشند؛ همچنین $w \in V$. اثبات کنید (۵ نمره):

$$v_1, \ldots, v_m, w \text{ مستقل خطی است } \iff w \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

۴) می‌دانیم بردارهای $v_1, \ldots, v_m$ مربوط به فضای V هستند. برای $k \in \{1, \ldots, m\}$ داریم:

$$w_k = v_1 + \cdots + v_k$$

نشان دهید لیست بردارهای $v_1, \ldots, v_m$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر لیست بردارهای $w_1, \ldots, w_m$ مستقل خطی باشند (۵ نمره).

۵) فرض کنید $u, v \in V$ و $\|u\|=\|v\|=1$ و $< u, v >= 1$ برقرار باشد. ثابت کنید $u = v$ است (۵ نمره).

۶) فرض کنید $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ که $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2$. مقدار $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ را به دست آورید (۵ نمره).

۷) توضیح دهید چرا عبارت $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$ برای همه نرم‌ها برقرار است؟ (۵ نمره)

۸) برای دو بردار x و y، اثبات کنید رابطه‌ی $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \frac{\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2}{2}$ برقرار است (۵ نمره).

۲. سوال دوم (۳۵ نمره)

۱) با استفاده از روش Gaussian Elimination دستگاه معادلات زیر را حل کنید (۴ نمره).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

۲) نشان دهید که $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)$ برای ماتریس زیر برقرار است (۵ نمره):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

۳) برای ماتریس زیر بردارهای ویژه و مقادیر ویژه را به دست آورده و سپس نشان دهید مثبت نیمه معین[۱] است (۱۰ نمره):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

۴) نشان دهید که هرکدام از توابع زیر یک عملیات خطی روی $\mathbb{R}^2$ است یا خیر (۶ نمره).

(a) $\mathbf{T}(x, y) = (x, 1+y)$
(b) $\mathbf{T}(x, y) = (y, x)$
(c) $\mathbf{T}(x, y) = (0, xy)$
(d) $\mathbf{T}(x, y) = (x^2, y^2)$
(e) $\mathbf{T}(x, y) = (x, \sin y)$
(f) $\mathbf{T}(x, y) = (x+y, x-y)$

۵) مقدار t را به نحوی بیابید که بردارهای $(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 6, t)$ در$\mathbb{R}^3$ مستقل خطی نباشد (۳ نمره).

۶) معادله‌ی زیر یک دوران در $\mathbb{R}^3$ را نشان می‌دهد. مقادیر a و b را بیابید و توضیح دهید که دوران داده شده بر بردارهای هم‌راستا با کدام یک از ۳ بردار یکه [۲] $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ اثر نمی‌گذارد (۴ نمره).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

[۱] Positive semi-definite
[۲] Unit vector

۷) نرم‌های منهتن [۳] (ℓ_1) و اقلیدسی [۴] (ℓ_2) را برای $x^\top = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ بدست آورید (۳ نمره).

۳. سوال سوم (۳۰ نمره)

۱) نشان دهید موارد زیر برقرار است:

الف) فرض کنید یک ماتریس $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ داریم که دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ است. ثابت کنید ماتریس $B + \alpha I_m$ دارای مقادیر ویژه $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_m + \alpha$ است (۵ نمره).

ب) با توجه به بخش الف، نشان دهید که آیا ماتریس زیر تکین[۵] است یا غیرتکین (۵ نمره):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

۲) فرم ماتریسی دنباله‌ی فیبوناچی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} f_{k+2} \\ f_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا به بیانی دیگر:

$$\vec{F}_{k+1} = A\vec{F}_k, \quad \vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با تجزیه‌ی ویژه [۶] ماتریس A، فرم بسته‌ی جمله‌ی nام دنباله‌ی فیبوناچی (f_n بر حسب n) را بدست آورید (۱۰ نمره).

۳) فرض کنید θ زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در یک فضای برداری باشد. نشان دهید:

الف) $\cos\theta = 1$ اگر و تنها اگر $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ (به ازای یک $\alpha > 0$) (۵ نمره).

ب) اثبات کنید $\cos\theta = -1$ اگر و تنها اگر $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ (به ازای یک $\alpha < 0$)(۵ نمره).

[۳] Manhattan Norm
[۴] Euclidean Norm
[۵] Singular (ویژه مقدار صفر دارد)
[۶] Eigen decomposition