به نام خدا

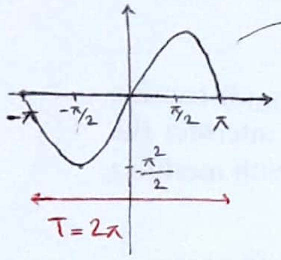
پاسخ تمرین سری ۴ ریاضی مهندسی (سری فوریه)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\dots \ ?$$

۱- سری فوریه سینوسی ، معادل سری

$$f(x)=\begin{cases} \pi x + x^2 & -\pi<x<0 \\ \pi x - x^2 & 0<x<\pi \end{cases}$$



فرد

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_n \checkmark \end{cases}$$

$$f(x)=\cancel{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x} + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{T_1} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi x-x^2)\sin\frac{2n\pi}{2\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi x\sin nx\,dx-\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\pi\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\cancel{\frac{1}{n^2}\sin nx}\right)_0^{\pi}-\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\cancel{\frac{2x}{n^2}\sin nx}+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)_0^{\pi}\right]$$

مشتق	انتگرال
x	$\sin nx$
1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\cancel{\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi}+\cancel{\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi}-\frac{2}{n^3}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}+\frac{2}{n^3}\right]=\boxed{\frac{4}{n^3\pi}\left(1-(-1)^n\right)}$$

مشتق	انتگرال
x^2	$\sin nx$
$2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$\Rightarrow b_n=\begin{cases} 0 & \text{زوج } n=2k \\ \frac{8}{n^3\pi} & \text{فرد } n=2k-1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^3\pi}\sin(2k-1)x$$

رابطه پارسوال:
$$\frac{2}{T}\int f^2(x)\,dx=\cancel{2a_0^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{a_n^2}+b_n^2$$

* توان ۲ زوج ← رابطه پارسوال

$$\Rightarrow \frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi x-x^2)^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{(2k-1)^3\pi}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2x^2+x^4-2\pi x^3)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{64}{(2k-1)^6\pi^2}$$

$$\rightarrow \frac{\pi^4}{15}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{64}{(2k-1)^6\pi^2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960} \checkmark$$

۱۲) $\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = 2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos nx)^2}{(n^2-1)^2}$ ، مقدار

$$\underbrace{\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots}_{\displaystyle\sum_{\substack{n=2\\ \text{زوج}}}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2(n+1)^2}} \ ?$$

رابطه پارسوال: $\frac{2}{T}\int f^2(x)\,dx = 2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2$

رابطه صورت سوال: $\underbrace{\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx}_{①} = 2+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos nx)^2}{(n^2-1)^2}}_{②}$

روش دوم: میتوانیم برای بدست آوردن طرف ① رابطه صورت بنویسیم که:

$$\frac{2}{2\pi}\times ? = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow ? = \frac{\pi^2}{4} \checkmark$$

$①: \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx\right)$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}x-\cancel{\frac{1}{2}\sin 2x}^{\,0}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

روش اول

$②: 2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos nx)^2}{(n-1)^2(n+1)^2}$

دقت کنید در رابطه پارسوال طرف دوم x ندارد بنابراین باید x را حذف کنیم یعنی مقدار دهیم.

$$\Rightarrow x=\pi:\ 2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\overset{(-1)^n}{\cos n\pi})^2}{(n-1)^2(n+1)^2} = \boxed{2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)^2}{(n-1)^2(n+1)^2}}$$

$$\xrightarrow{②,①}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2(n+1)^2}=\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)\times\frac{1}{2(1+(-1)^n)} = \frac{\pi^2-8}{8(1+(-1)^n)}$$

فقط n زوج قابل قبول است.

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{\substack{n=2\\ \text{زوج}}}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2(n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}} \checkmark$$

Scanned with CamScanner