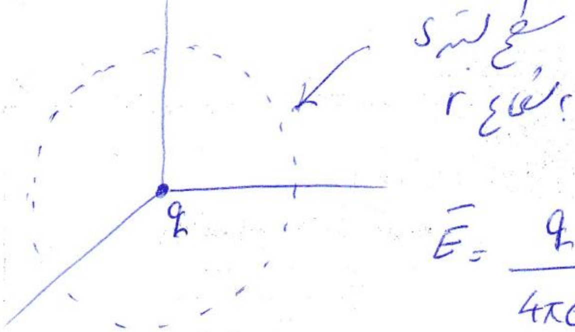
قانون گوس :



$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r \quad , \quad \bar{ds} = \bar{ds}_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{a}_r$$

شار بردار $\bar{E}$ که از سطح S می‌گذرد.

$$\Phi = \oint_S \bar{E}\cdot\bar{ds} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{a}_r$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{q}{4\pi}$$

حاصل Φ مستقل از شعاع کره است. لذا شعاع کره هرچه باشد میزان Φ برابر $\frac{q}{\epsilon_0}$ است.

- اگر S به جای کره هر سطح بسته دلخواهی باشد که بار q را در بر گیرد، حاصل Φ همان $\frac{q}{\epsilon_0}$ است.

$$\therefore \quad \oint_S \bar{E}\cdot\bar{ds} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum q = \frac{\text{بار محصور در سطح بسته S}}{\epsilon_0}$$

- اگر $\bar{E}$ و سطح بسته S مشخص باشد، بار محصور داخل سطح براحتی مشخص می‌گردد.

- عکس مطلب فوق در محاسبه میدان تحت شرایط خاص مفید است. بار محصور مشخص + سطح بسته مشخص

سطح بسته S ← روی سطح بسته $|\bar{E}|$ اندازه میدان الکتریکی ثابت باشد

اطلاعاتی راجع به جهت میدان الکتریکی روی سطح داشته باشیم

$$\bar{E} = |\bar{E}|\hat{a}_E$$

$$\oint_S \bar{E}\cdot\bar{ds} = \oint_S |\bar{E}|\hat{a}_E \cdot ds\,\hat{a}_n = |\bar{E}|\oint_S \hat{a}_E\cdot\hat{a}_n \, ds = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

جهت متداول برای $\hat{a}_E$ همان عمود بر سطح

در حالت کلی اگر $\hat{a}_E\cdot\hat{a}_n$ مشخص باشد

لذا $\oint_s \hat{a}_E\cdot\hat{a}_n\,ds$ مشخص است

سطحی با چنین مشخصاتی سطح گوسی نامیده می‌شود.

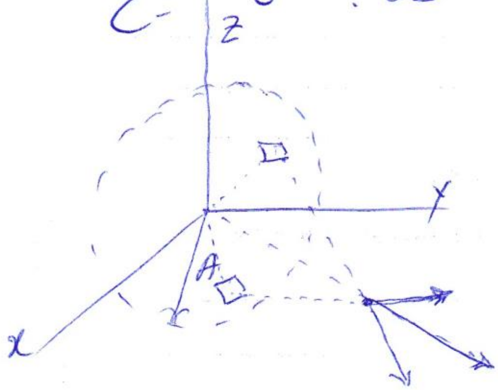
$$\therefore\ |\bar{E}| = \frac{\sum q}{\varepsilon_0 \oint_s \hat{a}_E\cdot\hat{a}_n\,ds}$$

* قانون گوس همواره برقرار است

فقط در صورت داشتن تقارن، می‌توان از آن برای محاسبه اندازه میدان الکتریکی بهره برد.

جهت میدان از روی تقارن بدست می‌آید.

مثال: بار با چگالی حجمی به صورت یکنواخت با چگالی ρ_{v_0} درون کره‌ای با شعاع A توزیع شده است. مطلوب است محاسبه میدان در تمام نقاط:



$\bar{E}=E_r\hat{a}_r$

حل: در دستگاه مختصات کروی $\bar{E}=\bar{E}(r,\theta,\varphi)$

برای تقارن ← جهت

$\bar{E}(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})=\bar{E}(r)$ اندازه

$$|\bar{E}(r)| = cte \rightarrow r = cte \equiv \text{کره‌ای با شعاع } r$$

$$\bar{ds} = \bar{ds}_r = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r$$

$$\oint \bar{E}\cdot\bar{ds} = \oint E(r)\hat{a}_r\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r = r^2E(r)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi r^2 E(r)$$

60

$$\frac{\sum q}{\varepsilon_0}: \longrightarrow \text{if } r < A \quad q = \int_v \rho_v \, dv \, , \quad dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\rho_v = \rho_{v_0}$$

$$q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r} \rho_{v_0} \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{v_0}$$

$$\text{if } r > A \quad q = \int \rho_v \, dv$$

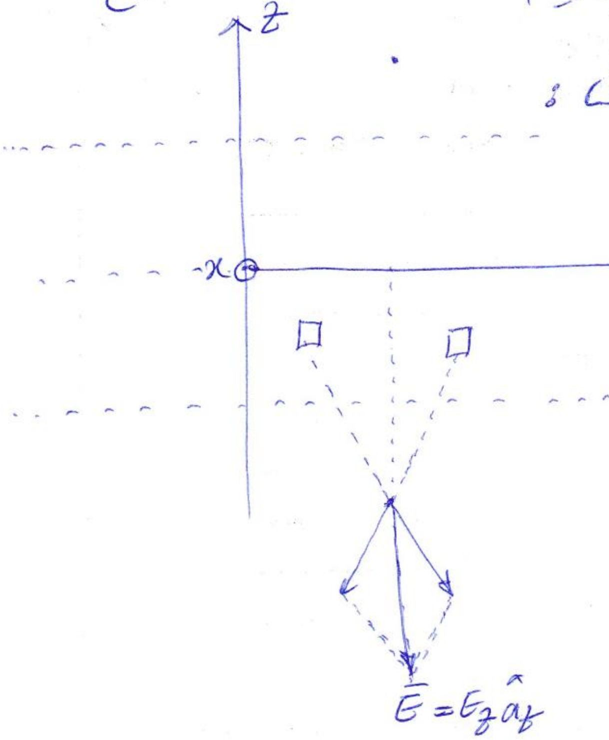
$$q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{A} \rho_{v_0} \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi A^3 \rho_{v_0}$$

$$\begin{cases} \text{for } r < A: \quad 4\pi r^2 E(r) = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{v_0}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \dfrac{\rho_{v_0} r}{3\varepsilon_0} \\ \text{for } r > A: \quad 4\pi r^2 E(r) = \dfrac{\frac{4}{3}\pi A^3 \rho_{v_0}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \dfrac{A^3 \rho_{v_0}}{3\varepsilon_0 r^2} = E(r) \end{cases}$$

$$\bar{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{v_0} r}{3\varepsilon_0} \hat{a}_r & r < A \\ \dfrac{\rho_{v_0} A^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > A \end{cases}$$

تمرین: مسأله فوق را با روش مستقیم حل کنید.

مثال: بار الکتریکی بصورت یکنواخت با چگالی حجمی ρ_{v0} بین دو صفحه $z=a$ و $z=-a$ توزیع شده است.
مطلوب است محاسبه میدان الکتریکی در تمام نقاط فضا:



حل: دستگاه مختصات کارتزین

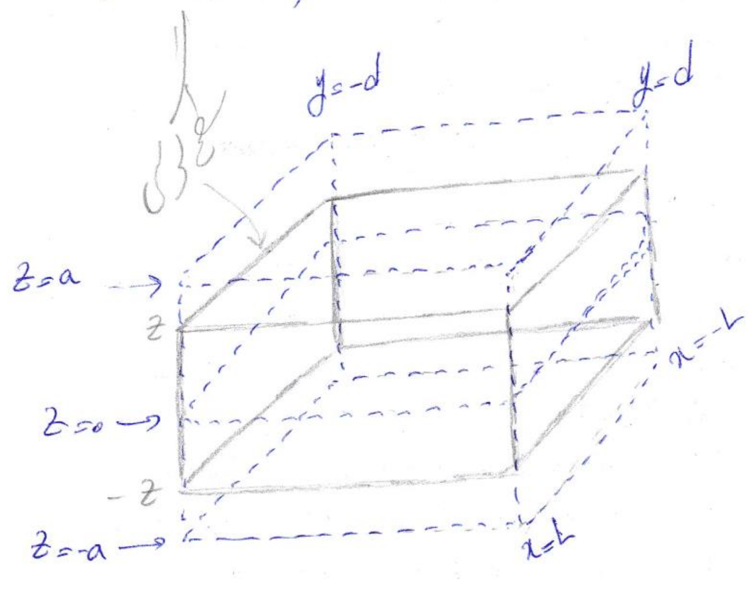
$\bar{E}(x,y,z)$

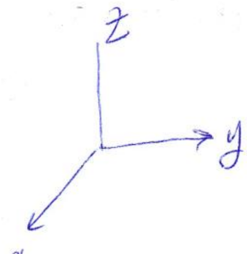
برای تقارن: $E(z>0) = -E(z<0)$

$\bar{E}(\cancel{x},\cancel{y},z) = \bar{E}(z)$

$\bar{E} = E(z)\,\hat{a}_z$

$|\bar{E}| = |E(z)| = cte \longrightarrow z = cte$





$$\oint \bar{E}\cdot\bar{ds} = \int_{z=cte} \bar{E}\cdot\bar{ds} + \int_{-z=cte} \bar{E}\cdot\bar{ds} + \int_{\text{سطوح جانبی}} \bar{E}\cdot\bar{ds}$$

صفر

در سطوح جانبی

$\bar{ds} = \bar{ds}_y = \pm dx\,dz\,\hat{a}_y$

or $\bar{ds} = \bar{ds}_x = \pm dy\,dz\,\hat{a}_x$

$\therefore\ \bar{E}\cdot\bar{ds} = 0$

$$\int_{z=cte} \bar{E}\cdot\bar{ds} = \int E(z)\hat{a}_z \cdot dx\,dy\,\hat{a}_z = E(z)\int_{-d}^{d}\int_{-L}^{L} dx\,dy = 2d.2L\,E(z)$$

$$\bar{ds} = \bar{ds}_z = \pm dx\,dy\,\hat{a}_z = +dx\,dy\,\hat{a}_z$$

$$\int_{-z=cte} \bar{E}\cdot\bar{ds} = \int -E(z)\hat{a}_z \cdot -dx\,dy\,\hat{a}_z = +\int_{-d}^{d}\int_{-L}^{L} E(z)\,dx\,dy = 2L\,2d\,E(z)$$

$$\bar{ds} = -dx\,dy\,\hat{a}_z$$

$$\oint_S \bar{E}\cdot\bar{ds} = 2(2L.2d)E(z)$$

$\sum q \rightarrow$ $z < a$ $\quad q = \int \rho_v\,dv = \int_v \rho_{v_0}\,dx\,dy\,dz = \rho_{v_0} \cdot 2z.2L.2d$

$z > a$ $\quad q = \int \rho_v\,dv = \rho_{v_0}\,2a.2L.2d$

for $z < a$: $\quad 2.2L.2d\,E(z) = \dfrac{\rho_{v_0}\,2z.2L.2d}{\varepsilon_0}$

$$E(z) = \frac{\rho_{v_0} z}{\varepsilon_0}$$

for $z > a$: $\quad 2.2L.2d.\,E(z) = \dfrac{\rho_{v_0}\,2a\,2d\,2L}{\varepsilon_0}$

$$E(z) = \frac{\rho_{v_0} a}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E}(z) = \begin{cases} z > a & \dfrac{\rho_{v_0} a}{\varepsilon_0}\hat{a}_z \\ -a < z < a & \dfrac{\rho_{v_0} z}{\varepsilon_0}\hat{a}_z \\ z < -a & -\dfrac{\rho_{v_0}}{a}\hat{a}_z \end{cases}$$

شکل نقطه ای قانون گوس :

کل بار داخل حجم V

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_v \, dv$$

فرم انتگرالی قانون گوس

طبق قضیه دیورژانس :

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_V (\nabla \cdot \bar{E}) \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_v \, dv$$

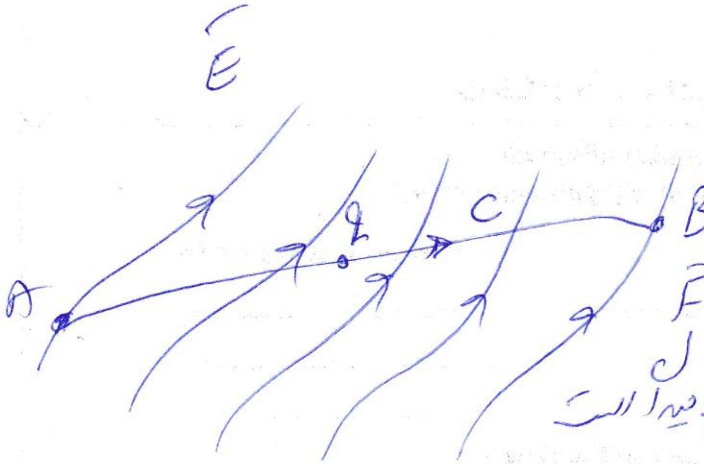
$$\therefore \quad \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

فرم نقطه ای قانون گوس

اگر بار نقطه ای، سطحی یا خطی بود ؟ از کدام دلتای دیراک بهره می‌بریم

توضیحاتش را بنویس

پتانسیل الکتریکی :



بار q در میدان $\vec{E}$ قرار گرفته است.

به بار q در این میدان نیروی $\vec{F}=q\vec{E}$ وارد می‌شود و جهت آن در جهت خطوط میدان است.

کاری که میدان الکتریکی $\vec{E}$ برای جابجایی بار q از نقطه A به B انجام می‌دهد (در امتداد مسیر C)

$$W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

if $W>0$ کار توسط میدان انجام می‌شود

if $W<0$ کار توسط عامل خارجی انجام می‌شود

پتانسیل الکتریکی: میزان کاری که میدان الکتریکی برای جابجایی واحد بار مثبت $q=+1C$ از نقطه A به نقطه B انجام می‌دهد

(یا کار لازم برای جابجایی واحد بار مثبت از نقطه B به نقطه A توسط عامل خارجی)

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

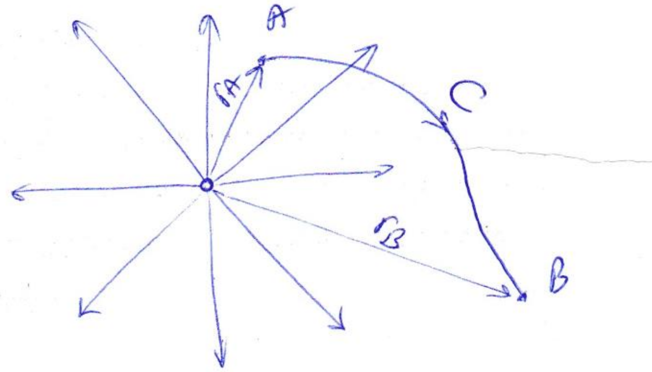
if $\vec{E}\perp d\vec{l} \rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \rightarrow V_A=V_B$ نقاط A و B هم پتانسیل‌اند

کار لازم برای حرکت بار در امتداد مسیر C صفر است. میدان بر سطوح هم پتانسیل عمود است.

مجموعه نقاطی که هم پتانسیل هستند، تشکیل سطوحی به نام سطوح هم پتانسیل می‌دهند.

پتانسیل بار نقطه‌ای

فرض کنید بار q در مبدا مختصات باشه



$$V_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot \bar{dl}$$

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r \quad , \quad \bar{dl} = \bar{dl_r} + \bar{dl_\theta} + \bar{dl_\varphi}$$

$$\bar{E} \cdot \bar{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r \cdot \bar{dl_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V_{AB} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\Bigg|_{r=r_A}^{r=r_B}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

اختلاف پتانسیل دو نقطه، فقط به فاصله آن تا محل بار وابسته است

و مستقل از مسیر است.

پتانسیل مطلق نسبی است. برای یک نقطه از فضا باید پتانسیل مبنا را در نظر گرفت و پتانسیل بقیه نقاط را نسبت به آن سنجید. پتانسیل مبنا = صفر ولت.

$$\text{if } r_B = \infty \rightarrow V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

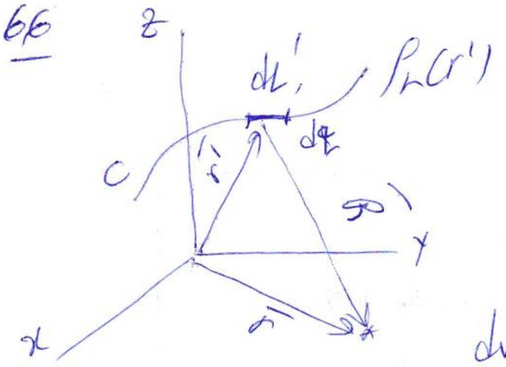
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$\underset{\text{مبنا}}{r} = \infty$ مبنای پتانسیل در بی‌نهایت است

اگر چندین بار نقطه‌ای داشته باشیم:

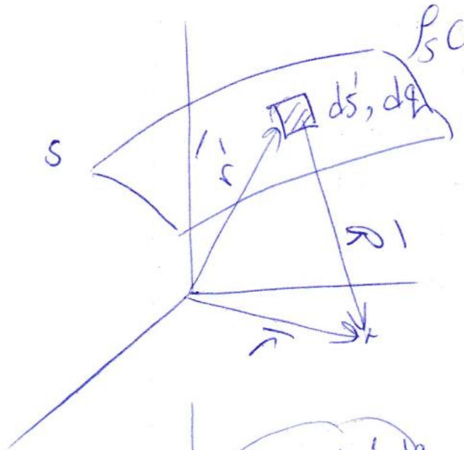
$$V(r) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |r - r_j|}$$

پتانسیل برای توزیع‌های پیوسته خطی، سطحی، حجمی :



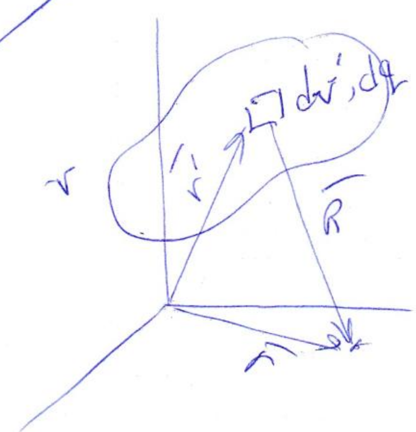
$$dq = \rho_L(r')\,dl'$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow V = \int \frac{\rho_L(r')\,dl'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|}, \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$



$$dq = \rho_S(r')\,ds'$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow V = \int_S \frac{\rho_S(r')\,ds'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|}, \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

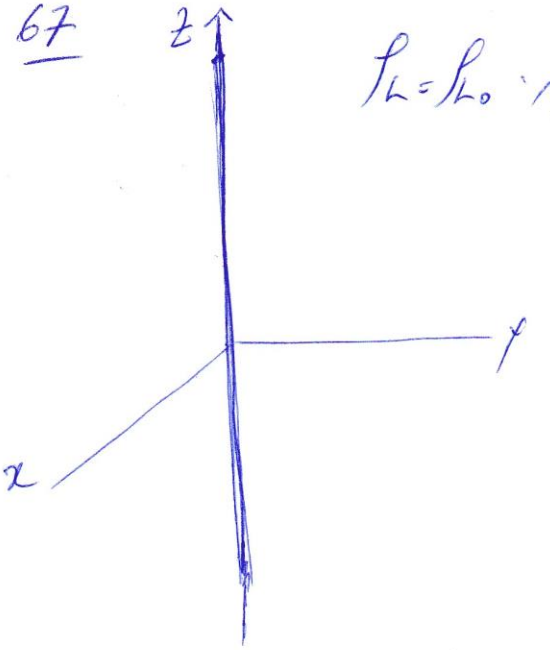


$$dq = \rho_v(r')\,dv'$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow V = \int_v \frac{\rho_v(r')\,dv'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|}, \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

تمام فرمول‌های فوق با شرطی صحیح است که مرجع پتانسیل $r = \infty$ باشد

ممکن است مرجع $r = \infty$ نباشد لذا باید دقت کرد



مثال: پتانسیل حاصل از یک خط با طول بینهایت را بدست آورید: $\rho_L = \rho_{L0}$

دستگاه مختصات استوانه‌ای $V(r,\varphi,z)$

بررسی تقارن: $V(r,\cancel{\varphi},\cancel{z}) = V(r)$

حل به کمک انتگرال:

$$V = \int_C \frac{\rho_L \, dl'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|}$$

$$\rho_L = \rho_{L0} \quad , \quad \bar{dl'} = \bar{dl'_z} = dz'\hat{a}_z \longrightarrow dl' = dz'$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \; , \; r = r\hat{a}_r + \underbrace{z\hat{a}_z}_{\text{صفر به خاطر تقارن}} \; , \; \bar{r}' = \underbrace{r'\hat{a}_{r'}}_{\text{صفر}} + z'\hat{a}_z$$

$$\bar{R} = r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z \; , \; |\bar{R}| = (z'^2 + r^2)^{1/2}$$

$$V = \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{L0} \, dz'}{4\pi\epsilon_0 (z'^2 + r^2)^{1/2}} = \underbrace{\infty - \infty}_{\text{مبهم}}$$

یعنی انتخاب بینهایت به عنوان مرجع درست نیست

لذا دو راه داریم: ← مرجع را در $r = r_0$ انتخاب می‌کنیم

← استفاده از فرمول $V = \int \bar{E} \cdot \bar{dl}$

$$V_r - V_{r_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_{L_0}\, dz'}{4\pi\epsilon_0 (z'^2 + r^2)} - \frac{\rho_{L_0}\, dz'}{4\pi\epsilon_0 (z'^2 + r_0^2)} \right] =$$

$$V_r - V_{r_0} = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln r - \left(-\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0\right) = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$V_{r_0} = 0 \longrightarrow -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 = 0 \longrightarrow r_0 = 1$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r \quad , \quad \bar{dl} = \bar{dl_r} + \bar{dl_\varphi} + \bar{dl_z}$$

$$V_r - V_{r_0} = \int_{r=r}^{r=r_0} \bar{E} \cdot \bar{dl} = \int_{r=r}^{r_0} \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_r^{r_0} = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

در این مثال انتخاب مرجع در $r_0=\infty$ انتخاب درستی نبود.

معادله کرل ماکسول برای میدان الکتریکی ساکن :

- میدان برای نقطه‌ای مستقل از مسیر است، لذا برای توزیع پیوسته نیز چنین است.
بنابراین برای میدان الکتریکی ساکن، پتانسیل الکتریکی مستقل از مسیر است.

$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$$

قضیه استوکس : $\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_S (\nabla\times\bar{E})\cdot d\bar{s} = 0$

$\int_S (\nabla\times\bar{E})\cdot d\bar{s}$ برای هر سطح دلخواه که مسیر بسته C مرز آن است

باید صادق باشد، لذا $\nabla\times\bar{E} = 0$

معادله کرل میدان الکتریکی ساکن $\nabla\times\bar{E} = 0$

- طبق قضیه هلمهولتز، میدان $\bar{E}$ تا حد یک بردار ثابت مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{E} = 0 \\ \nabla\cdot\bar{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

معیار ساکن بودن میدان الکتریکی

منبع میدان (شار فوران)

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{E} = 0 \\ \nabla\cdot\bar{E} = \rho_v/\varepsilon_0 \end{cases}$$

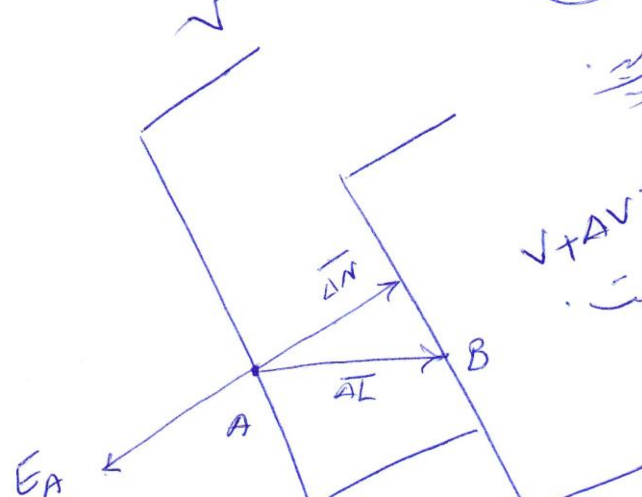
ارتباط پتانسیل و شدت میدان الکتریکی ؟

$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 \longrightarrow \bar{E} = \nabla \varphi$$

تابع اسکالر φ وجود دارد که

$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_S (\nabla \times \bar{E})\cdot d\bar{S} = 0 \longrightarrow \nabla \times \bar{E} = 0 \longrightarrow \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$\bar{E}$ را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت.



- دو سطح هم پتانسیل V و $V+\Delta V$ را در نظر بگیرید.
- جهت میدان در جهت کاهش پتانسیل است.
- میدان در راستای عمود صفحات حول میدان نقطه A است.

$$V_{AB} = \int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l} = \bar{E}_A\cdot \overline{\Delta L} = V-(V+\Delta V) = -\Delta V$$

$$\bar{E}_A\cdot \Delta L = -E_A \Delta N = -\Delta V$$

$$\bar{E}_A = -\frac{\Delta V}{\Delta N}\hat{a}_n \qquad \boxed{\bar{E} = -\nabla V}$$