معادلات لاپلاس و پواسون و روش‌های حل آن:

مسائلی که تاکنون مورد مطالعه قرار داده‌ایم به محاسبه میدان‌های الکتریکی ساکن که از توزیع بارهای معلوم ناشی می‌شوند محدود بوده است. در این مسائل به علت وجود تقارن‌های گوناگون و یا ویژگی‌های دیگری در توزیع بارهای الکتریکی، تغییرات میدان اغلب تابعی از یک مختصه بوده و بنابراین محاسبات میدان را اغلب تابعی از یک مختصه بوده و بنابراین محاسبات میدان با روش تحلیلی اغلب از نوعی سادگی برخوردار بوده است. در بسیاری از مسائل ممکن است توزیع بار الکتریکی در ابتدا نامعلوم باشد از این رو بکاربستن روش‌های مبتنی بر قانون کلمب که تاکنون آموخته‌ایم عملی نخواهد بود. به عنوان مثال وقتی یک جسم هادی در معرض میدان الکتریکی اولیه معلومی قرار گیرد، توزیع بارهای القا شده روی سطح جسم هادی معلوم نیست قبل از حل کامل مسئله به سادگی قابل محاسبه نباشد. روش مبتنی بر معادلات لاپلاس و پواسون از نوع دیفرانسیل پاره‌ای بوده و تابع پتانسیل حاکم باشد که شرایط مرزی معینی را برآورده می‌سازد.

معادلات پواسون و لاپلاس:

با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیلی گوس یا معادله‌ی اول ماکسول داریم:

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

در یک محیط خطی و همسانگرد $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$ است. با جایگذاری در رابطه بالا خواهیم داشت

$$\nabla\cdot\epsilon\vec{E}=\rho$$

اگر ϵ محیط همگن باشد (ϵ ثابت) می‌توان نوشت

$$\epsilon\nabla\cdot\vec{E}=\rho$$

طبیعت غیرچرخشی بودن $\vec{E}$ در الکتروستاتیک که از معادله‌ی دوم ماکسول ($\nabla\times\vec{E}=0$) نتیجه می‌شود ما را قادر می‌سازد که بتوانیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ را طبق معادله‌ی زیر از منفی گرادیان پتانسیل V بدست آوریم

$$E=-\vec{\nabla}V$$

با جایگذاری معادله‌ی بالا در معادله $\varepsilon\nabla\cdot E=\rho$ به نتیجه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$\nabla\cdot(\vec{\nabla}V)=-\rho/\varepsilon$$

دیورژانس گرادیان یک تابع را لاپلاسین آن تابع اصطلاحاً تعریف کردیم و لاپلاسین را با علامت « ∇^2 » نمایش دادیم. پس رابطه را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\nabla^2V=-\rho/\varepsilon$$ (معادله پواسون)

همگن (ثابت)

اگر $\rho=0 \Rightarrow \nabla^2V=0$

معادلات لاپلاس و پواسون معادلات مشتقات جزئی هستند که توام با شرایط مرزی معینی باید حل شود. شرایط مرزی عموماً به صورت پتانسیل‌های معلوم روی سطوح هادی و صفر بودن پتانسیل در بی‌نهایت برای توزیع بارهای محدود بیان خواهد شد

قضیه (یکتائی پاسخ): اگر پاسخی یافت شود که معادله‌ی لاپلاس یا پواسون صدق کند و شرایط مرزی را نیز برآورده سازد آن پاسخ تنها پاسخ ممکن مسئله خواهد بود. می‌توان اطمینان حاصل کرد که هرگاه پاسخی به هر ترتیب حتی از روی حدس برای معادله‌ی لاپلاس و پواسون بیابیم که شرایط مرزی را نیز ارضا نماید آن پاسخ، تنها پاسخ ممکن مسئله خواهد بود و اگر پاسخ‌های دیگری یافت شود با این پاسخ مساوی خواهد بود.

معادله‌ی لاپلاس و حل آن در دستگاه‌های مختلف مختصات :

دسته مهمی از مسائل میدان الکتریکی مسائلی که ممکن است دارای کاربردهای عملی نیز باشد مربوط است به یافتن پتانسیل ناشی از مسئله‌ای از بارهای الکتریکی که به سطوح اجسام هادی محدود می‌شوند در این دسته مسائل توزیع بار روی سطوح هادی که پتانسیل‌های کل یا انرژی از آن‌ها معلوم می‌باشد و هدف عبارت است از یافتن پتانسیل و آنگاه میدان الکتریکی در ناحیه‌ای بدون بار از فضا که به طور محدود می‌شوند واضح است که پتانسیل در ناحیه‌ی بدون بار در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند.

حل معادله لاپلاس در دستگاه‌های مختصات مختلف در حالت یک بعدی :

ابتدا با دستگاه مختصات کارتزین شروع می‌کنیم

الف) حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین در حالت یک بعدی :

(اسکالر)

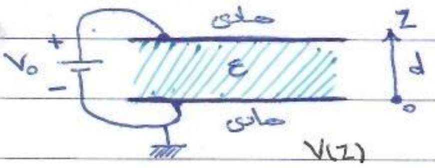
$(\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z)$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{h_1 \partial u_1} a_{u_1} + \frac{\partial V}{h_2 \partial u_2} a_{u_2} + \frac{\partial V}{h_3 \partial u_3} a_{u_3}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 V_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 V_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 V_{u_3})\right]$$

وقتی که پتانسیل فقط تابعی از یک مختصه باشد z و نسبت به x و y هیچ تغییری نداشته باشد مطابق شکل زیر معادله‌ی لاپلاس به صورت ساده در خواهد آمد.



خازن با صفحات هادی و محیط عایق همگن ($\varepsilon = cte$)

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = 0 \rightarrow V(z) = K_1 z + K_2$$

K_1 و K_2 ضرایب ثابتی هستند که با کمک شرایط مرزی مسئله محاسبه می‌شود.

$$V(z=0) \Rightarrow V(z=0) = 0 \Rightarrow \boxed{K_2 = 0} \quad \text{و} \quad V(z=d) = V_0 = K_1 d \Rightarrow \boxed{K_1 = V_0/d}$$

$$V(z) = \frac{V_0}{d} z$$

پتانسیل در هر نقطه از محیط عایق بین صفحات های خازن را می توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد.

$$V(z) = \frac{V_0}{d} z \quad 0 \leq z \leq d \qquad \text{و} \qquad E = -\nabla V = -\frac{V_0}{d} a_z \quad 0 < z < d$$

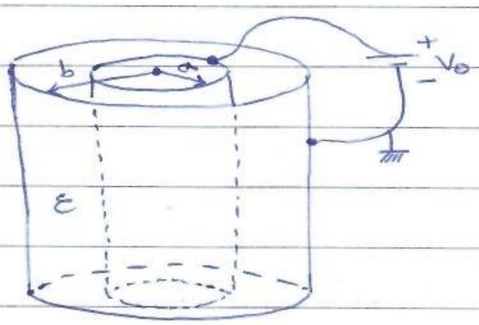
ب) حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای در حالت یک بعدی :

$(\hat{a}_r , \hat{a}_\phi , \hat{a}_z)$

✓ حالت اول: پتانسیل فقط تابعی از مختصه r استوانه است و نسبت به ϕ و z هیچ تغییراتی ندارد. به عنوان مثال

برای محاسبه ی پتانسیل و میدان الکتریکی بین سطوح هادی استوانه ای طویل هم محور به شعاع های

a و b طوری که در شکل زیر نشان داده شده است می توان به صورت زیر عمل نمود.



$$\nabla V = \frac{\partial}{\partial r} V \hat{a}_r + \frac{\partial}{r\partial \phi} V \hat{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} V \hat{a}_z$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1} h_2 h_3 V_{u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} h_1 h_3 V_{u_2} + \frac{\partial}{\partial u_3} h_1 h_2 V_{u_3}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial V}{\partial r} = K_1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{K_1}{r} \Rightarrow V = K_1 \operatorname{Ln} r + K_2$$

$$V(r) = K_1 \operatorname{Ln} r + K_2 \Rightarrow V(r=a) = V_0 = K_1 \operatorname{Ln} a + K_2 \quad \text{و} \quad V(r=b) = 0 = K_1 \operatorname{Ln} b + K_2$$

$$K_1 = \frac{-K_2}{\operatorname{Ln} b} , \quad V_0 = \frac{-K_2}{\operatorname{Ln} b}\operatorname{Ln} a + K_2 \Rightarrow V_0 = K_2\left(1 - \frac{\operatorname{Ln} a}{\operatorname{Ln} b}\right) \Rightarrow V_0 = K_2\left(\frac{\operatorname{Ln} b/a}{\operatorname{Ln} b}\right) \Rightarrow$$

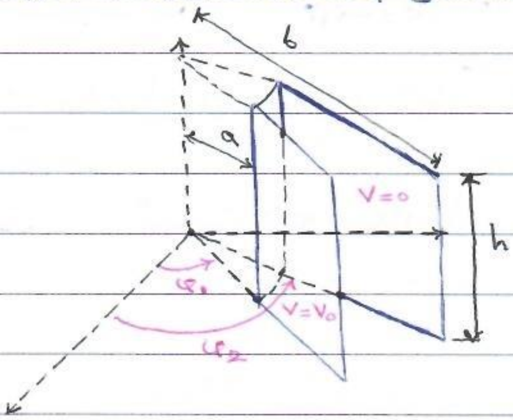
$$K_2 = \frac{V_0 \operatorname{Ln} b}{\operatorname{Ln} b/a} , \quad K_1 = \frac{-V_0 \operatorname{Ln} b / \operatorname{Ln} b/a}{\operatorname{Ln} b} = -\frac{V_0}{\operatorname{Ln} b/a} = K_1$$

$$V(r) = \frac{V_0}{\operatorname{Ln} a/b}\operatorname{Ln} r + \frac{V_0 \operatorname{Ln} b}{\operatorname{Ln} b/a} = \frac{V_0}{\operatorname{Ln} a/b}(\operatorname{Ln} r - \operatorname{Ln} b) = \frac{V_0}{\operatorname{Ln} a/b}\operatorname{Ln} r/b \qquad a < r < b$$

حالت دوم: پتانسیل فقط تابعی از مختصه φ استوانه‌ای است و نسبت به r و z هیچ تغییری ندارد. به عنوان مثال

برای محاسبه پتانسیل و رسیدن الگوی بین صفحات هادی نشان داده شده در شکل با فرض مرزها

می‌توان به صورت زیر عمل کرد.



خازن استوانه‌ای با صفحات هادی و محیط عایق همگن

با فرض $b, h \gg a$

دکارتی $\nabla V = \frac{\partial}{\partial x} V \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} V \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} V \hat{a}_z$

$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla V = 0$

استوانه‌ای $\nabla V = \frac{\partial}{\partial r} V \hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} V \hat{a}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} V \hat{a}_z$

کروی $\nabla V = \frac{\partial}{\partial R} V \hat{a}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta} V \hat{a}_\theta + \frac{\partial}{R\sin\theta\, \partial \varphi} V \hat{a}_\varphi$

فرمول کلی $\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 D_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 D_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 D_{u_3})\right]$

$(\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V)$

در مختصات استوانه‌ای $\Rightarrow$ $= \frac{1}{1 \times r \times 1}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} V\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} V\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial}{\partial z} V\right)\right]$

$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} V\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V + r\frac{\partial^2}{\partial z^2} V\right] =$

$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} V\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V = 0$

(تابعی (r, φ, z) r و z تغییر کند پتانسیل ثابت است پس تابعی از φ است.)

$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V = 0 \Rightarrow V(\varphi) = K_1 \varphi + K_2$ و $V(\varphi_1) = V_0 \rightarrow K_1 \varphi_1 + K_2 = V_0$

$V(\varphi_2) = 0 \qquad K_1 \varphi_2 + K_2 = 0$

$\rightarrow K_1(\varphi_1 - \varphi_2) + (K_2 - K_2) = (V_0 - 0) \Rightarrow K_1 = \frac{V_0}{\varphi_1 - \varphi_2}$

$K_2 = -K_1 \varphi_2 \Rightarrow K_2 = -\frac{V_0}{(\varphi_1 - \varphi_2)} \times \varphi_2 \rightarrow V(\varphi) = \frac{V_0}{\varphi_1 - \varphi_2}\varphi - \frac{V_0}{\varphi_1 - \varphi_2}\varphi_2$

$$V(\varphi) = -\frac{V_0(\varphi-\varphi_2)}{(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$$

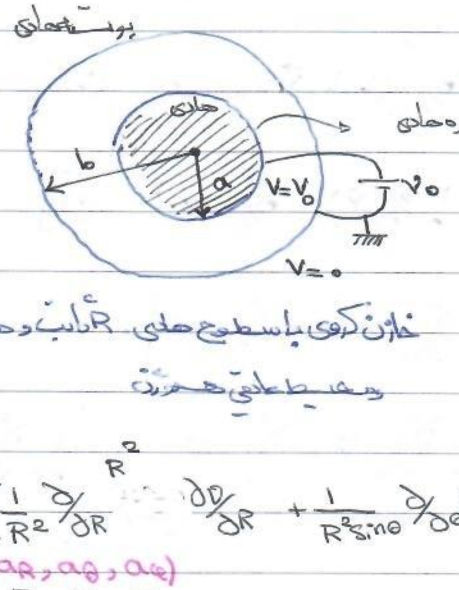
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}V(\varphi)\,\hat{a}_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{V_0}{(\varphi_2-\varphi_1)}\hat{a}_\varphi \quad \boxed{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2}$$

حالت سوم: پتانسیل فقط تابعی از مختصه z استوانه است و نسبت به r و φ هیچ تغییری ندارد.

چون صفحه z ثابت در دستگاه مختصات استوانه‌ای با دستگاه مختصات کارتزین یکی است مانند بند الف عمل می‌کنیم.

• حل معادله‌ی لاپلاس در دستگاه مختصات کروی در حالت یک بعدی؛

حالت الف) پتانسیل فقط تابعی از مختصات R کره است و نسبت به θ و φ هیچ تغییری ندارد به عنوان مثال برای محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی بین سطوح هادی کروی R ثابت هم مرکز به شعاع‌های a و b به طوری که در شکل نشان داده شده است می‌توان به صورت زیر عمل کرد.



خازن کروی با سطوح هادی R ثابت و هم مرکز و محیط عایق همگن

$$\nabla V = \frac{\partial}{\partial R}V\,\hat{a}_R + \frac{\partial}{R\partial\theta}V\,\hat{a}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V\,\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V = \frac{1}{1\times R\times R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin\theta)\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(R\sin\theta)}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}R\times\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin\theta)\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}V\right]$$

$$\nabla^2 V = \left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}V\right]$$

$(a_R, a_\theta, a_\varphi)$

فقط وابسته به شعاع است $\quad$ cte

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial R} = \frac{k_1}{R^2}$$

$$V = -\frac{k_1}{R} + k_2 \Rightarrow V(R) = -\frac{k_1}{R} + k_2 \Rightarrow V(b) = 0 = -\frac{k_1}{b} + k_2 \Rightarrow k_1 = bk_2$$

$$V(a) = V_0 = -\frac{k_1}{a} + k_2$$

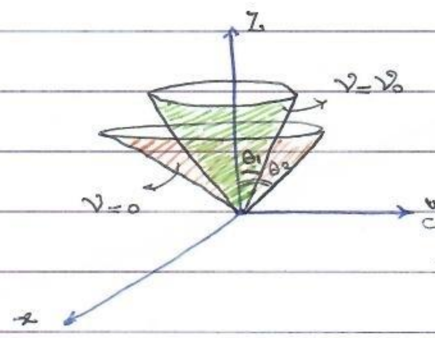
$$\Rightarrow -\frac{b}{a}k_2 + k_2 = V_0 \Rightarrow k_2\left(1-\frac{b}{a}\right) = V_0 \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{aV_0}{a-b}} \qquad \boxed{k_1 = \frac{abV_0}{a-b}}$$

$$V(R) = -\left(\frac{abV_0}{a-b}\right)\times\frac{1}{R} + \frac{aV_0}{a-b}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial R}\hat{a}_R = +\frac{1}{R^2}\left(\frac{abV_0}{a-b}\right)\hat{a}_R$$

حالت دوم: پتانسیل فقط تابعی از مختصه θ کره است و نسبت R و φ هیچ تغییری ندارد.

به عنوان مثال برای محاسبه پتانسیل میدان الکتریکی بین صفحات θ ثابت به طوری که در شکل زیر نشان داده شده است می توان به صورت زیر عمل نمود.



$(a_R, a_\theta, a_\varphi)$

$$\nabla V = \frac{\partial}{\partial R}V\,\hat{a}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}V\,\hat{a}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V\,\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V = \frac{1}{1\times R\times R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial R}V\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(R\sin\theta\times\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}V\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}R\times\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V\right]$$

$$\frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}V\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}V = 0 \Rightarrow \quad \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}V = K_1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}V = \frac{K_1}{\sin\theta} \Rightarrow dV = \frac{K_1}{\sin\theta}d\theta$$

$$V = K_1\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = K_1\int\frac{d\theta}{2\sin\theta/2\cos\theta/2} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\theta/2}}{\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}} = \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta/2)}{\tan\theta/2} = \frac{u'}{u} \Rightarrow Ln(\tan\theta/2)$$

$$V = K_1 Ln(\tan\theta/2) + K_2$$

✓ $V(\theta=\theta_1) = K_1 Ln(\tan\theta_1/2) + K_2 = V_0$

✓ $V(\theta=\theta_2) = K_1 Ln(\tan\theta_2/2) + K_2 = 0 \Rightarrow \quad K_1 = \frac{-K_2}{Ln(\tan\theta_2/2)}$

$$\frac{-K_2}{Ln(\tan\theta_2/2)}Ln(\tan\theta_1/2) + K_2 = V_0 \Rightarrow K_2\left[1 - \frac{Ln(\tan\theta_1/2)}{Ln(\tan\theta_2/2)}\right] = V_0$$

$$K_2 = \frac{V_0}{1-\frac{Ln(\tan\theta_1/2)}{Ln(\tan\theta_2/2)}} = \underbrace{\frac{V_0 Ln(\tan\theta_2/2)}{Ln(\tan\theta_2/2) - Ln(\tan\theta_1/2)}}\,, \quad K_1 = \frac{-V_0}{Ln(\tan\theta_2/2) - Ln(\tan\theta_1/2)}$$

$$K_1 = \frac{V_0}{Ln(\tan\theta_1/2) - Ln(\tan\theta_2/2)} \qquad E = -\nabla V(\theta) = -\frac{1}{R}\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}\hat{a}_\theta = \frac{V_0}{Ln\left((\tan\theta_2/2)/\tan\theta_1/2\right)}\times\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\theta$$

s.a.m

جلسه سیزدهم
ص ۱
و
جلسه چهاردهم

حل معادله لاپلاس در دستگاه‌های مختصات مختلف در حالات دو بعدی و سه بعدی:

الف) حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین در حالات دو بعدی و سه بعدی:

با استفاده از رابطه زیر معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla^2 v = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

یکی از روش‌هایی که اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به کار گرفته می‌شود روش تفکیک متغیرها است. در این روش تابع V به صورت حاصل‌ضرب سه تابع $X(x)$ و $Y(y)$ و $Z(z)$ که به ترتیب توابعی فقط از x و y و z هستند در نظر گرفته می‌شود.

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

با جایگزین شدن رابطه‌ی بالا در معادله‌ی لاپلاس خواهیم داشت.

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

به جای استفاده از مشتقات پاره‌ای از مشتقات کامل استفاده شده است زیرا X و Y و Z هر یک فقط تابعی از یک متغیر است. با تقسیم طرفین رابطه بر XYZ معادله لاپلاس به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\text{تابعی از } x} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{\text{مستقل از } x} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\text{مستقل از } x} = 0$$

بررسی رابطه بالا نشان می‌دهد که جملات دوم و سوم در سمت چپ آن مستقل از x هستند و چون مجموع سه جمله در کلیه نقاط باید همواره برابر صفر باشد جمله اول آن نیز باید مستقل از x باشد. بنابراین جمله‌ی اول برابر مقدار ثابتی خواهد بود.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k_1 =$$ مقدار ثابتی است.

s.a.m

با استدلال های مشابهی می توان نتیجه گرفت که عبارات دوم و سوم نیز هر یک باید برابر مقدار ثابتی باشند

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k_2 = \text{مقدار ثابت}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = k_3 = \text{مقدار ثابت}$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

بدین ترتیب مسئله بالا به حل سه معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم با رعایت شرایط ($k_1+k_2+k_3=0$)

ساده می شوند سه معادله $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k_1$ و $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k_2$ و $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = k_3$ هر سه مشابه یکدیگرند

بنابراین کافی است فقط حل یکی از آن ها را مورد بررسی قرار دهیم، در حالا که تابع پتانسیل دو بعدی یا سه بعدی

باشد، k_1 مقداری مثبت، صفر یا منفی خواهد داشت (نوع مسئله مثبت، صفر یا منفی بودن k_1 را تعیین می کند)

در حالتی که $k_1=0$ باشد معادله به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

همان طور که در حالت یک بعدی هم بررسی شد پس از دو بار انتگرال گرفتن از طرفین رابطه جواب به دست خواهد آمد

$$X(x) = A_1x + A_2$$

که A_1 و A_2 ضرایب ثابت هستند. در صورتی که $k_1 \neq 0$ مثبت و یا منفی باشد برای سادگی در انجام محاسبات $k_1 = \pm k^2$

در نظر گرفته می شود. آن گاه معادله و انواع پاسخ های آن به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \pm k^2 X$$

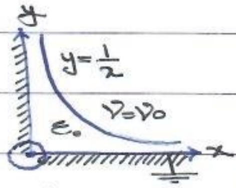
$$X(x) = \begin{cases} A_1e^{kx} + A_2e^{-kx} & k_1 = k^2 > 0 \xrightarrow{\text{به شکل هذلولی}} X(x) = A_5\sinh(kx) + A_6\cosh(kx) \\ A_3\sin kx + A_4\cos kx & k_1 = -k^2 < 0 \end{cases}$$

بدین ترتیب در یک مسئله ی دو بعدی، انواع پاسخ های معادله لاپلاس $(V(x,y))$ با توجه به شرط $k_1+k_2=0$ به یکی از شکل های زیر می باشد.

$$V(x,y)=\begin{cases} 1)\ (A_1x+A_2)(B_1y+B_2) & k_1=-k_2=0 \\ 2)\ (A_3\sinh x+A_4\cosh x)(B_3\sin ky+B_4\cos ky) & k_1=-k_2=k^2>0 \\ 3)\ (A_5\sin kx+A_6\cos kx)(B_5\sinh ky+B_6\cosh ky) & k_1=-k_2=-k^2<0 \end{cases}$$

نکته هشتم: شکل های مختلف پاسخ بدست آمده ی تابع پتانسیل در رابطه بالا بر اساس این فرض بوده است که تابع پتانسیل به حاصل ضرب دو تابع $X(x)$ و $Y(y)$ تفکیک پذیر باشد و این فرض ممکن است همیشه فرض صحیحی نباشد.

مثال ۱: شکل زیر سطح مقطع محفظه ای متشکل از سطح ها را نشان می دهد. پتانسیل سطح $y=x^{-1}$ برابر V_0 و دو سطح دیگر زمین شده اند. سطح های در امتداد محور z از دو طرف تا بی نهایت ادامه دارند. تابع پتانسیل را در فضای محصور بین سطح ها تعیین نمایید.



سطح متشکل از نیم صفحه های $x=0$ و $y=0$ با پتانسیل صفر و سطح های $y=x^{-1}$ با پتانسیل V_0

حل: چون سطح های از دو طرف در جهت z ادامه دارند، تابع پتانسیل مستقل از z و نسبت به x و y تغییرات دارد بنابراین پتانسیل دو بعدی است. حال با فرض اینکه تابع پتانسیل به صورت $V(x,y)=X(x)Y(y)$ قابل نوشتن باشد، پاسخ لاپلاس باید حالت های رابطه بالا انتخاب شود. ابتدا ساده ترین شکل پاسخ را به صورت $V(x,y)=(A_1x+A_2)(B_1x+B_2)$ است را در نظر خواهیم گرفت. اگر این شکل پاسخ قادر به برآوردن کلیه شرایط مرزی مسئله باشد انتخاب شکل پاسخ صحیح بوده است، در غیر اینصورت باید شکل های دیگر پاسخ را بررسی کنیم و در صورتی که هیچ کدام از

شکل کلی رابطه قابل قبول نباشد می توان نتیجه گرفت که حل مسئله به روش تفکیک متغیرها در دستگاه مختصات کارتزین میسر نیست. حل با توجه به شرایط مرزی این مسئله که عبارتند از:

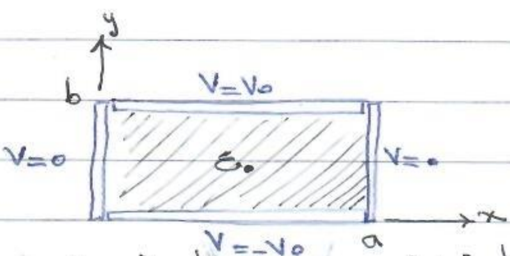
الف) $V=0 \quad y>0$ و $x=0$

ب) $V=0 \quad x>0$ و $y=0$

ج) $V=V_0 \quad y>0$ و $x>0$ و $y=\frac{1}{x}$ در

با ساده ترین پاسخ یعنی رابطه $(A_1x+A_2)(B_1y+B_2)$ شروع می کنیم. اعمال شرط (الف) نتیجه $A_2=0$ را و اعمال شرط (ب) نتیجه $B_2=0$ را به دنبال خواهد داشت. با استفاده از این نتایج پتانسیل به صورت $V(x,y)=A_1B_1xy=Axy$ ضریب A را می توان با اعمال شرط (ج) محاسبه کرد و پاسخ مطلوب را به صورت $V(x,y)=V_0xy$ نوشت.

مسئله ۲: شکل زیر سطح مقطع سیستمی متشکل از چهار هادی و پتانسیل هر سطح را نشان می دهد. هر چهار سطح در امتداد محور z از دو طرف تا بی نهایت ادامه دارند. پتانسیل نقاط محصور بین چهار سطح هادی را محاسبه نمایید.



با توجه به اینکه سطوح هادی در امتداد محور z از دو طرف تا بی نهایت ادامه دارند، تابع پتانسیل مستقل از z می باشد. بنابراین تابع پتانسیل دو بعدی می باشد و پاسخ آن را می توان از یکی از شکل های زیر در نظر گرفت.

$$V(x,y)=\begin{cases}(A_1x+A_2)(B_1y+B_2) & k_1=-k_2=0\\ (A_3\sinh x+A_4\cosh x)(B_3\sin ky+B_4\cos ky) & k_1=-k_2=+k^2>0\\ (A_5\sin kx+A_6\cos kx)(B_5\sin ky+B_6\cosh ky) & k_1=-k_2=-k^2<0\end{cases}$$

اگر همانند مثال قبل با ساده ترین پاسخ شروع کنیم درخواهیم یافت که سعی ما در یافتن پاسخی که تمام شرایط مرزی را برآورده سازد بیجا خواهد بود. پس می بایست یکی از پاسخ های متناظر با $k\neq 0$ را در نظر بگیریم. ضمناً چون پتانسیل

در استدلال محور x دارای دو نقطه صفر است پس لازم است که پاسخ برگزیده شده بر حسب x سینوسی باشد زیرا توابع سینوسی می‌توانند دارای صفرهای متعدد باشند بنابراین می‌توان نوشت:

$$X(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$$

$$Y(y) = B_1 \sinh ky + B_2 \cosh ky$$

که در آن A_1، A_2 و B_1، B_2 و k ضرایب ثابتی هستند که باید محاسبه شوند. برای محاسبه این ضرایب از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم. شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$V=0 \quad , \quad 0<y<b \quad , \quad x=0$ ✓

$V=0 \quad , \quad 0<y<b \quad , \quad x=a$ ✓

$V=V_0 \quad , \quad 0<x<a \quad , \quad y=0$

$V=+V_0 \quad , \quad 0<x<a \quad , \quad y=b$

برای اینکه در $x=0$، $V=0$ شود ضریب A_2 در رابطه $X(x)$ باید صفر شود همچنین در $x=a$ و $V=0$ شود باید داشته باشیم:

$$A_1 \sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \qquad n=1,2,3,\dots \qquad \Rightarrow k=\frac{n\pi}{a}$$

مقدار $n=0$ باید حذف شود زیرا در این حالت پتانسیل در همه جا صفر خواهد شد

$$X(x) = A_1 \sin \frac{n\pi}{a}x \quad , \quad n=1,2,3,\dots$$

حال تابع $Y(y)$ را می‌خواهیم بنویسیم که اکنون به صورت زیر نوشته خواهد شد

$$Y(y) = B_1 \sinh \frac{n\pi}{a}y + B_2 \cosh \frac{n\pi}{a}y$$

برای اینکه شرایط مرزی برقرار باشد باید $B_2=0$ باشد چون تابع کسینوس هیپربولیک یک تابع زوج و همیشه مثبت است در ضمن تابع سینوس هیپربولیک یک تابع فرد است که مقدار آن در $y=0$ صفر می‌شود و نمی‌تواند شرایط مرزی این مسئله که پتانسیل در $y=0$ قرینه پتانسیل در $y=b$ است را فراهم سازد. برای تحقق این امر کافیست متغیر y را در ابتدا

تابع سینوس هیپربولیک را به مقدار $b/2$ شیفت دهیم. پس تابع پتانسیل در مجموع به صورت زیر خلاصه خواهد شد.

$$V_n(x,y) = C_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}(y-b/2)$$

که C_n ضریب ثابت جدیدی است که برابر $C_n = A_n B_n$ خواهد بود.

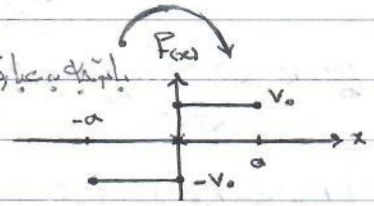
چون دستگاه راست رابطه به ازای هر یک از مقادیر $n=1,2,3,\dots$ یک پاسخ معادله دیفرانسیل است. طبق خاصیت معادلات دیفرانسیل خطی، ترکیب خطی این پاسخ‌ها نیز پاسخ معادله خواهد بود. از این رو پاسخ کامل را می‌توان به شکل یک سری بی‌نهایت به صورت زیر نوشت.

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b/2)\right)$$

با استفاده از شرایط مرزی بدست خواهیم آورد:

$$V(0<x<a,\ y=b) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \sin\frac{n\pi}{a}x$$

با توجه به عبارت بالا می‌توان دریافت



تابع توسعه فرد داده خواهد شد بنابراین خواهیم داشت.

✓ چون ضریب sin خواهد بود به همین خاطر توسیع فرد داده خواهد شد

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} F(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{2a}\int V_0 \sin\frac{2n\pi}{2a}x\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx =$$

$$\frac{1}{a}\times 2\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx = \frac{2V_0}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx =$$

$$-\frac{2V_0}{a}\times\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}x\Big|_0^a = \frac{2V_0}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{a}x\right]_0^a = -\frac{2V_0}{n\pi}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2V_0}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

فرد $n \rightarrow \frac{4V_0}{n\pi}$

زوج $n \rightarrow 0$

$$b_n = C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) = \frac{4V_0}{n\pi}\ (\text{برای } n \text{های فرد}) \Rightarrow C_n = \frac{4V_0}{n\pi\left(\sinh\frac{n\pi b}{2a}\right)}$$ nهای فرد

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi\left(\sinh\frac{n\pi b}{2a}\right)} & n\ \text{فرد} \\ 0 & n\ \text{زوج} \end{cases}$$

با جایگذاری C_n در رابطه‌ی بالا پتانسیل هر نقطه داخل محفظه یا هر سطح مستطیلی شکل از تابع پتانسیل زیر قابل محاسبه است.

$$V(x,y,z) = \sum_{\substack{n=1 \\ (\text{فرد})}}^{\infty} \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)} \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi}{a}(y-b)$$

حل معادلات لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای در حالات دوبعدی و سه‌بعدی:

معادله‌ی لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \vec{\nabla} V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

از روش تفکیک متغیرها برای حل معادله‌ی لاپلاس استفاده می‌کنیم در حالت دوبعدی. اگرچه بسته به اینکه پتانسیل تابعی از کدام دو متغیر باشد، پاسخ معادله شکل‌های متفاوتی به خود می‌گیرد. لیکن بررسی یک مورد مشخص وقتی که پتانسیل فقط تابعی از r و φ است آشنایی و تحلیل لازم را برای مطالعه‌ی سایر موارد به ما خواهد داد. حال با فرض اینکه V مستقل از z بوده و به صورت $V = R(r)\phi(\varphi)$ قابل نوشتن باشد معادله‌ی لاپلاس را می‌توان پس از جایگزینی V با $R\phi$ و سپس تقسیم طرفین آن بر $R\phi/r^2$ به صورت زیر مرتب کرد.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}(R\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}R\phi = \frac{1\times\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}R + \frac{1\times R}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\phi}{r}\left[1\times\frac{\partial}{\partial r}R + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}R\right] + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\phi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}R + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}R\right] + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{r^2}{R\phi}\times\left[\frac{\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r}R + \phi\frac{\partial^2}{\partial r^2}R\right] + \frac{R}{r^2}\times\frac{r^2}{R\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{R}\left[r\frac{\partial}{\partial r}R + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}R\right] + \frac{1}{\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{R}\left[r\frac{d}{dr}R + r^2\frac{d^2}{dr^2}R\right] + \frac{1}{\phi}\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = 0$$

در این معادله هر یک از دو عبارت درون کروشه فقط تابعی از یک متغیر است. بنابراین برای آنکه معادله‌ی بالا برای جمیع مقادیر r و φ صادق باشد این دو عبارت باید برابر مقدار ثابتی که قرینه‌ی یکدیگرند باشند. در نتیجه رابطه‌ی بین دو معادله

s.a.m

دیفرانسیل معمولی ساده می‌شود که عبارتند از :

$$\frac{1}{R}\left[r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}\right]=n^2$$

$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=-n^2$$

n^2 ثابت تفکیک است، پاسخ معادله وقتی که $n=0$ و $n\neq 0$ باشد شکل کلی متفاوتی به خود خواهد گرفت.

$$R(r)=\begin{cases} A_1\operatorname{Ln} r + A_2 & n=0 \quad \text{الف)} \\ A_3 r^n + A_4 r^{-n} & n\neq 0 \quad \text{ب)} \end{cases}$$

اثبات الف)

$$n=0 \Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}=0 \Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2}=-r\frac{dR}{dr} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{d^2R}{dr^2}}{\frac{dR}{dr}}=-\frac{1}{r} \Rightarrow \operatorname{Ln} R' = -\operatorname{Ln} r \Rightarrow$$

$$\operatorname{Ln} R' = \operatorname{Ln} 1/r \Rightarrow R'=\frac{1}{r} \Rightarrow R = A_1\operatorname{Ln} r + A_2$$

اثبات ب)

$$\phi(\varphi)=\begin{cases} B_1\varphi + B_2 \Rightarrow & n=0 \quad \text{الف)} \\ B_3\sin n\varphi + B_4\cos n\varphi \Rightarrow & n\neq 0 \quad \text{ب)} \end{cases}$$

در این پاسخ‌ها ضرایب A_1 تا A_4 و B_1 تا B_4 ثابت‌هایی هستند که با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند ثابت n در

s.a.m

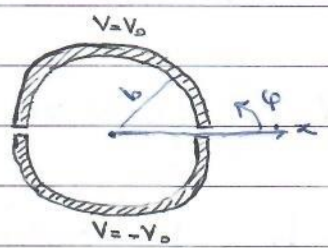
حالت کلی ممکن است عددی صحیح، حقیقی یا حتی موهومی باشد نیز به کمک شرایط مرزی معادله تعیین گردد.

پس به طور خلاصه تابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای دو بعدی (r, ϕ) با فرض تفکیک‌پذیر بودن به حاصل‌ضرب توابعی از r و ϕ به شکل کلی زیر (یا ترکیبی خطی چنین توابعی به صورت سری محدود یا نامحدود) برای $n \neq 0$ نوشته می‌شود.

$$V_n(r,\varphi) = \begin{cases} (A_1 \ln r + A_2)(B_1\varphi + B_2) & n = 0 \\ (A_3 r^n + A_4 r^{-n})(B_3 \sin n\varphi + B_4 \cos n\varphi) & n \neq 0 \end{cases}$$

نکته مهم: در اغلب مسائل فیزیکی که منجر به مقادیر صحیح n باشد کفایت می‌کند و ما نیز به ذکر مثال‌هایی از این قبیل می‌پردازیم:

مثال ۱: یک استوانه دور جدار نازک بی‌نهایت طویل به شعاع b به دو نیمه تقسیم شده است. نیمه بالایی در پتانسیل $V = V_0$ و نیمه پایینی در پتانسیل $V = -V_0$ است. در شکل زیر مقطع عرضی آن نشان داده شده است. توزیع پتانسیل را در درون و بیرون استوانه تعیین کنید.

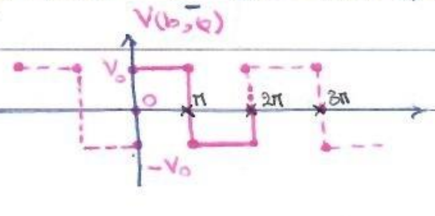


چون استوانه در راستای z بی‌نهایت طویل فرض می‌شود، روشن است که پتانسیل تغییری نسبت به z نداشته و فقط تابعی از r و φ می‌باشد.

از طرفی دیگر شرایط مرزی این مسئله عبارت‌اند از:

$$V(b,\varphi) = \begin{cases} V_0 & 0 < \varphi < \pi \\ -V_0 & 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

این شرایط در شکل زیر رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $V(b,\varphi)$ تابع فردی از φ است.



قبلاً برای محاسبه‌ی پتانسیل در درون و بیرون استوانه از پاسخ رابطه‌ی زیر شروع می‌کنیم.

$$V_n(r,\varphi) = \left(A_3 r^{n} + A_4 r^{-n}\right)\left(B_3 \sin n\varphi + B_4 \cos n\varphi\right)$$

الف) در درون استوانه $(r<b)$

چون این ناحیه $r=0$ را شامل می‌شود حتماً عامل r^{-n} نمی‌توانند موجود باشند. همچنین چون $V(r,\varphi)$ تابع فردی از φ است شکل مناسب جواب به صورت زیر خواهد شد

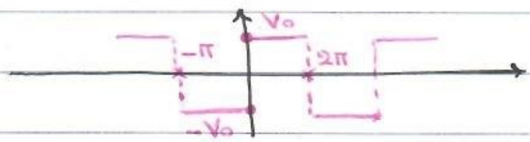
$$V_n(r,\varphi) = A_n r^{n} \sin(n\varphi)$$

چون سمت راست رابطه‌ی بالا به ازای هر یک از مقادیر $n=1,2,3,\ldots$ پاسخ معادله‌ی لاپلاس است، ترکیب خطی این پاسخ‌ها نیز پاسخ معادله خواهد بود. پس داریم

$$V(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{n} \sin n\varphi$$

برای محاسبه ضرایب A_n، لازم است معادله‌ی بالا در $r=b$ شرایط مرزی را برآورده سازد یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n b^{n} \sin n\varphi = \begin{cases} V_0 & 0<\varphi<\pi \\ -V_0 & \pi<\varphi<2\pi \end{cases}$$



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x}_{0} + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \Rightarrow b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin nx\,dx = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} V_0 \sin nx\,dx =$$

$$\frac{4V_0}{2\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{-4V_0}{2\pi n}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{4V_0}{2\pi n}\left[1-\cos n\pi\right] \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi n} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$A_n b^{n} = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi n} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \Rightarrow A_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi n b^{n}} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$V(r,\varphi) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{b}\right)^{n} \sin(n\varphi) \qquad r<b$$

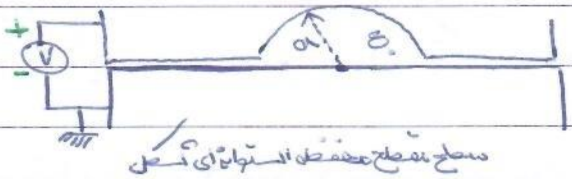
s.a.m

مثال (صفحه ای): شکل زیر سطح مقطع یک محفظه استوانه ای شکل به طول بی نهایت را نشان می دهد

اختلاف پتانسیل V_0 را بین سطح های استوانه ای و صفحه ای (سطح عمود بر محور z) به وجود می آوریم. پتانسیل

نقاط درون محفظه را تعیین نمایید:

$$V(r,\varphi)=\begin{cases} ① (A\ln r+B)(C\varphi+D) & n=0 \\ ② (A'r^{n}+B'r^{-n})(C'\sin n\varphi+D'\cos n\varphi) & n\neq 0 \end{cases}$$



سطح مقطع محفظه استوانه ای شکل

روشن است که پتانسیل تغییری نسبت به z ندارد و فقط تابعی از r و φ می باشد و تابع پتانسیل به شکل

رابطه زیر فرض می کنیم

$$V(r,\varphi)=(Ar^{n}+Br^{-n})(C\sin n\varphi+D\cos n\varphi)$$

شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

① $V=V_0$, $r=a$ $r=0$ پتانسیل (محدود) $\longrightarrow B=0$

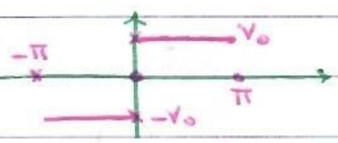
② $V=0$, $\varphi=0$ $\longrightarrow D=0$

③ $V=0$, $\varphi=\pi$ $C\sin n\varphi=0 \begin{cases} \nearrow C=0 \text{ جواب بدیهی است} \\ \searrow \sin n\varphi \text{ n عدد صحیح است} \end{cases}$

$$V_{(r,\varphi)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^{n}\sin n\varphi\right)$$

شرط الف $\longrightarrow$ $V(r=a,\ 0<\varphi<\pi)=V_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^{n}\sin n\varphi \Rightarrow V_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^{n}\sin n\varphi$

$$V_0=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{A_n a^{n}}_{b_n}\sin n\varphi$$



تابع فرد است

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx \Rightarrow b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx \Rightarrow$$

$T=2\pi$

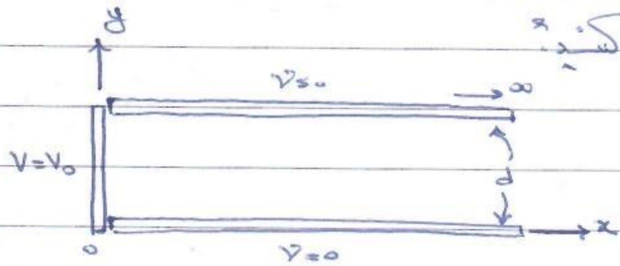
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}V_0\sin nx\,dx=\frac{2V_0}{\pi n}\left(-\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$-\frac{2V_0}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2V_0}{\pi n}(\cos n\pi - \cos 0) = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi n} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{4V_0}{\pi n} = A_n a^n \Rightarrow A_n = \frac{4V_0}{\pi n a^n}$$

$$V(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi n a^n} r^n \sin n\varphi = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\varphi$$

مثال: شکل زیر سطح مقطع سیستمی متشکل از سه صفحه رسانا و پتانسیل هر سه سطح را نشان می‌دهد. هر سه سطح در راستای محور z از دو طرف و دو سطح موازی در راستای x و در جهت مثبت تا بی‌نهایت ادامه دارند. پتانسیل را در ناحیه محصور بین سه سطح را محاسبه کنید.



$$X(x) = A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx}$$

$$Y(y) = A_2 \sin ky + B_2 \cos ky$$

* سیستمی متشکل از دو نیم صفحه‌های موازی با پتانسیل صفر و سطح‌های $x=0$ عمود بر آن‌ها با پتانسیل V_0

(A_1, A_2, B_1, B_2, k) ضرایب ثابتی هستند که باید محاسبه شوند.

شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

1. $V=0$, $x>0$, $y=0$ $\qquad B_2 = 0$
2. $V=0$, $x>0$, $y=d$ $\qquad A_2 \sin kd = 0$, $A_2 = 0$ ✗ ; $kd = n\pi \rightarrow k = n\pi/d$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $V=V_0$, $0<y<d$, $x=0$
4. $V=0$ $\quad x \rightarrow \infty$

مقدار A_1 باید حذف شود چون پتانسیل در جهت x به صفر خواهد رسید

$$\rightarrow X = \underbrace{A_1}_{\text{به شرط ۴ صفر}} e^{\frac{n\pi}{d}x} + B_1 e^{-\frac{n\pi}{d}x}$$

$$V(x,y) = A_n \sin\frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d}$$

توجه: پاسخی که تاکنون به دست آوردیم شرایط مرزی در روابط (۱ و ۲ و ۴) به جز ۳ را ارضا می‌کند ولی در شرط 3 صدق نمی‌کند. به منظور رفع این نقص مجموع پاسخ‌ها پاسخ معادله لاپلاس است.

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d}$$

s.a.m

$$V_0 = V(x=0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}$$