بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات مهندسی

(جلد دوم)

مؤلف:

مهندس محمود کریمی

بسمه‌تعالی

سرشناسه	: کریمی، محمود، ۱۳۵۱
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضیات مهندسی (جلد دوم) / مؤلف محمود کریمی
مشخصات نشر	: تهران؛ سازمان بسیج دانشجویی، ۱۳۹۱
مشخصات ظاهری	: [۶۱۸] ص: مصور (رنگی)، جدول، نمودار
شابک	: ۶-۹۳-۸۲۹۰-۹۶۴-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: آزمون‌ها ـ دانشگاهها و مدارس عالی ـ ایران
موضوع	: ریاضیات مهندسی ـ آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	: ریاضیات مهندسی ـ راهنمای آموزشی (عالی)
شناسه افزوده	: سازمان بسیج دانشجویی
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۱ ۵م ۴۱۴ ک / LB ۲۳۵۳
رده‌بندی دیویی	: ۱۶۶۴/۳۷۸
شماره کتاب‌شناسی ملی	: ۲۹۹۷۸۳۸

نام کتاب	: ریاضیات مهندسی (جلد دوم)
مؤلف	: مهندس محمود کریمی
ناشر	: سازمان بسیج دانشجویی
با همکاری	: مرکز خدمات آموزشی نصیر
نوبت چاپ	: اول
سال و محل نشر	: تهران، ۱۳۹۱
ناظر فنی چاپ	: محسن کنگرانی فراهانی
تیراژ	: ۲۰۰۰ جلد
قیمت	: ۱۸۰۰۰ تومان
شابک	: ۶-۹۳-۸۲۹۰-۹۶۴-۹۷۸ ISBN

نشانی: خیابان شریعتی، نرسیده به پل سید خندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، مرکز خدمات آموزشی نصیر
تلفن: ۸۸۴۶۴۷۸۰-۸۸۴۶۶۹۳۵

مقدمه مولف

با سپاس از خداوند متعال، خوشحالم که فرصتی ایجاد شد تا بتوانم به یکـی دیگـر از نیازهـای دانشـجویان پاسـخ مثبت دهم. کتاب حاضر که تحت عنوان جلد دوم کتاب ریاضیات مهندسی خدمتتان تقدیم می‌گردد، شـامل تمـام تستهای کنکور گرایشهای مهندسی برق، مهندسی کامپیوتر و مهندسی مکانیک از سال ۶۷ تـاکنون و گرایشـهای هوافضا، مواد، ابزار دقیق، نفت، هسته ای، ریاضی محض، نانو مواد و چند گرایش دیگر از سال ۷۹ تاکنون به همراه پاسخ تشریحی آنها است. علاوه بر آن پاسخ تشریحی آزمونهای آزمایشی که در جلد اول آمده است را نیـز شـامل می شود.

توصیه می شود پس از مطالعه جلد اول اقدام به حل تستهای این جلد بفرمائید.

چون توضیح کامل روشها در جلد اول آورده شده است، درصورت مطالعه نکـردن جلـد اول شـاید پاسـخ بعضـی از تستها برایتان مبهم باشد.

خوشحال می شوم نظرات، پیشنهادات، انتقادات و نواقص کتاب را به اینجانب گوشـزد فرمائیـد تـا در ویرایشـهای بعدی مدنظر قرار گیرند.

از همکاری مرکز خدمات آموزشی نصیر بویژه آقایان مهندس پوریعقـوبی و محسـن فراهـانی بـه جهـت تـلاش و همراهی آنها در آماده سازی کتاب سپاسگزارم.

سپاس از سرکار خانم بحری به جهت تایپ و صفحه آرائی کتاب، و سپاس فراوان از همسرم که بدون همراهـی او انجام کار میسر نمی شد.

محمود کریمی
پاییز ۱۳۹۱
Web-site: m-karimi.ir
E-mail: mahmud_karimy@yahoo.com, karimi@m-karimi.ir

مقدمه ناشر

پس از استقبال فراوان از جلد اول کتاب ریاضیات مهندسی تألیف استاد گرانقدر جناب آقای مهندس محمود کریمی بار دیگر این فرصت در اختیار ما قرار گرفت تا با چاپ جلد دوم این کتاب خدمت دیگری به دانشجویان مشتاق دانش و داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد ارائه نماییم.

«مرکز خدمات آموزشی نصیر» وابسته به بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، اولین مرکز آموزشی در حیطه‌ی آمادگی آزمون‌های کارشناسی ارشد در کشور است که از شروع فعالیت‌های آن قریب به بیست سال می‌گذرد. این مرکز که در سال ۱۳۷۱ توسط دانشجویان بسیجی دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی راه‌اندازی شد در طی این سال‌ها همواره در حال رشد، ترقی و تعالی بوده است و علاوه بر توسعه حیطه فعالیت‌ها و گسترش کمّی مخاطبان، کیفیت آموزش و سطح علمی آن همواره روند رو به رشدی را داشته است. با توجه به این‌که این مرکز زیرمجموعه بسیج دانشجویی می‌باشد، اصلی‌ترین هدف خود را خدمت‌رسانی، عدالت آموزشی و ارتقاء علمی دانشجویان قرار داده است و از این جهت شاخص‌ترین مرکز آموزشی در میان مؤسسات مشابه است. این حقیقت فراتر از یک ادعا می‌باشد؛ از این‌رو همواره به‌عنوان مرکزی خوش‌نام و موفق در میان اساتید و دانشجویان محترم مطرح بوده است. بعلاوه چون مسئولین و کادر این مرکز خود نیز اغلب از دانشجویان دانشگاه‌های تهران هستند؛ بیشترین ارتباط را با دانشجویان مخاطب دارند و همواره از نقطه‌نظرات آنان استفاده می‌کنند. در زیر نکاتی برای آشنایی بیشتر شما مخاطب گرامی با این مرکز ذکر می‌شود:

۱) استفاده از اساتید مجرب و طراز اول دانشگاه‌های تهران که به‌لحاظ علمی جزو سرآمدترین اساتید کشور می‌باشند؛ از اصلی‌ترین نقاط قوت این مرکز است. اعتقاد ما این است که به این هدف مقدس و والا و این موفقیت هرگز نائل نمی‌شدیم مگر با مساعدت و تلاش و همکاری صادقانه اساتید گران‌قدر که در این راه، تمامی پتانسیل و انگیزه‌ی خود را سرلوحه‌ی فعالیت‌های مرکز قرار داده‌اند.

۲) رویکرد ما همواره افزایش سطح کیفی فعالیت‌ها در عین ارائه آن با کمترین هزینه می‌باشد که با تحقق آن هدف اصلی ما که خدمت‌رسانی و ارتقاء هرچه بیشتر علمی دانشجویان این مرز و بوم در کنار عدالت آموزشی می‌باشد محقق می‌شود.

۳) با توجه به برگزاری ۲۰ سال کلاس‌های آموزشی و ۱۰ سال آزمون‌های آزمایشی، تجربه‌ی گران‌بهایی اندوخته‌ایم که یکی از عوامل اصلی موفقیت روزافزون ما است. این تجربیات که سایر مؤسسات نیز در پاره‌ای از موارد از آن استفاده کرده و الگو گرفته‌اند، همواره مرکز خدمات آموزشی نصیر را در جایگاه پیشروترین مؤسسه آموزشی کارشناسی ارشد قرار داده است.

۴) با توجه به اهداف مذکور هزینه خدمات ارائه شده کمترین مقدار را در میان تمامی مؤسسات مشابه دارا می‌باشد، که این اختلاف عمیق بعضاً باعث تعجب و ایجاد سؤال برای مخاطبانی که تازه با این مرکز آشنا شده‌اند ولی پس از آشنایی بیشتر با این مجموعه پاسخ سؤال خود را دریافت نموده‌اند.

با عطف به سابقه درخشان این مرکز در طی این سال‌ها و ضعف موجود در زمینه‌ی کتاب‌های کارشناسی ارشد به لحاظ کیفی، این مجموعه تصمیم گرفت که در این زمینه نیز وارد شده و افتخاری دیگر به افتخارات خود بیفزاید.

«مجموعه کتاب‌های کارشناسی ارشد نصیر» که از این پس به تدریج در اختیار علاقمندان قرار خواهد گرفت،

مجموعه‌ای بی‌نظیر با رویکردی نوین و ویژگی‌های منحصربه‌فرد به‌طوری که داوطلبان بعد از مراجعه به آن نیازی به استفاده از منابع دیگر نخواهند داشت. نظر به همکاری اساتید گران‌قدری که با خود کوله‌باری از تجربه ارزشمند علمی در سطح دانشگاه‌ها و کلاس‌های مرکز خدمات آموزشی نصیر را دارند و رعایت بالاترین کیفیت در صفحه‌آرایی و چاپ، دانشجویان عزیز لذت واقعی یادگیری را خواهند چشید. در این جا لازم است از زحمات فراوان استاد گران‌قدر جناب آقای مهندس محمود کریمی در تألیف این اثر ارزشمند کمال قدردانی را بنماییم.

در پایان اجر معنوی فعالیت‌های این مرکز را به شهدای دفاع مقدس، این شمع‌های همیشه فروزان بشریت که با مقاومت مردانه خود حماسه‌ای جاوید آفریدند. تقدیم می‌کنیم

مرکز خدمات آموزشی نصیر

فهرست مندرجات

فصل ۱

فوریه

بخش اول

تست‌های سری فوریه

۱) (برق ۶۹) اگر سری فوریه تابع $f(x)=x^{۲},\ -\pi \le x \le \pi$ به صورت زیر باشد بسط فوریه تابع $\int_{\circ}^{x} f(x)dx$ تابع کدام است؟

$$x^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۳} + ۴\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}} \cos(nx)$$

۱) $\frac{x^{۳}}{۳} = \frac{\pi^{۲}}{۳}x + ۴\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}} \cos(nx)$

۲) $\frac{x^{۳}}{۳} = \frac{\pi^{۲}x}{۳} + ۴\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n} \sin(nx)$

۳) بسط فوریه $\int_{\circ}^{x} f(x)dx$ با انتگرال‌گیری از بسط فوریه $f(x)=x^{۲}$ به دست نمی‌آید.

۴) $\frac{x^{۳}}{۳} = ۴\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n} \sin(nx)$

۲) (برق ۷۰) اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد، آنگاه سری فوریه تابع $f(t)$ عبارت

است از $f(t+۲)=f(t)$ و
$$f(x)=\begin{cases} t & ۰\leq t<۱ \\ ۲-t & ۱\leq t<۲ \end{cases}$$

۱) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi}{۲}t$

۲) $\frac{۱}{۲}-\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۴}{(۲k-۱)^۲\pi^۲}\cos(۲k-۱)\pi t$

۳) $\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}\left(۲\sin\frac{n\pi}{۲}\right)\cos n\pi t$

۴) $\frac{۱}{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi}{۲}\right)\cos\frac{n\pi}{۲}t$

۳) (برق ۷۱ - ابزاردقیق ۸۳) سری فوریه تابع $f(x)=\frac{x}{۲},\ -\pi<x<\pi$ به صورت زیر است.

$$F(x)=\sin x-\frac{\sin ۲x}{۲}+\frac{\sin ۳x}{۳}-\cdots$$

آنگاه سری فوریه تابع $T=۲\pi$ و $g(x)=x^۲$ عبارتست از:

۱) $g(x)=۲(\cos x-\frac{\cos ۲x}{۲^۲}+\cdots)$

۲) $g(x)=۴\left[\frac{\pi^۲}{۱۲}-\cos x+\frac{cos ۲x}{۲^۲}-\cdots\right]$

۳) $g(x)=۴(-\sin x-\frac{\sin x}{۲^۲}+\cdots)$

۴) $g(x)=(-\sin x-\frac{\sin ۲x}{۲^۲}+\cdots)$

۴) (برق ۷۱) هرگاه $f(x)=\begin{cases} \sin x & ۰<x<۲\pi \\ -\sin & -۲\pi<x<۰ \end{cases}$ و $f(x+۴\pi)=f(x)$ آنگاه در سری فوریه $f(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیر صفر باشند؟

۱) زوج کسینوسی ۲) فرد کسینوسی ۳) زوج سینوسی ۴) فرد سینوسی

۵) (برق ۷۱ - ابزاردقیق ۸۴) داریم

$$\frac{\pi}{۴}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^۲ x dx=۲+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۱+\cos n\pi)^۲}{(n^۲-۱)^۲}$$

آنگاه مقدار عبارت

$$\frac{۱}{۱^۲\times ۳^۲}+\frac{۱}{۳^۲\times ۵^۲}+\frac{۱}{۵^۲\times ۷^۲}+\cdots$$

برابر است با

۱) $\dfrac{\pi^2-8}{16}$ ۲) $\dfrac{\pi^2}{16}$ ۳) $\dfrac{\pi^2+8}{16}$ ۴) π^2

۶) (برق ۷۲) اگر بسط به سری فوریه کسینوسی $f(x)=\sin x,\ 0<x<\pi$ به صورت زیر باشد

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\cos nx$$

مقدار سری

$$\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots$$

برابر است با

۱) $\dfrac{\pi^2-8}{8}$ ۲) $\dfrac{\pi^2-8}{4}$ ۳) $\dfrac{\pi^2-8}{16}$ ۴) $\dfrac{\pi^2-8}{2}$

۷) (برق ۷۳) هرگاه سری فوریه مثلثاتی $(T=2\pi)$ و $-\pi<x<\pi$، $y=f(x)$ به صورت

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

باشد آنگاه برای $f(x)=(\sin x+\cos 2x)^2$ مقدار b_3 برابر است با:

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) 10 ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) 1

۸) (دکترای مهندسی برق و پزشکی ۷۳) سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t)=|\sin t|$، $0<t<2\pi$ برابر است با

۱) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{2n-1}$ ۲) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$

۳) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{2n+1}$ ۴) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{4n^2-1}$

۹) (برق ۷۴) در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n با روابط زیر به دست آمده است

$$a_n=\frac{2(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2},\quad n\neq 0 \qquad b_n=\frac{4n\pi(1-e^{-1})}{1+4\pi^2n^2}$$

۱) تابع $f(x)$ و مشتقات اول و دوم آن پیوسته بوده وی مشتقات مراتب بالاتر ناپیوسته می‌باشند.

۲) عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای یک تابع پریودیک باشند.

۳) تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود می‌باشد.

۴) ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع پریودیک را مشخص نمایند.

۱۰) (برق ۷۴) سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب f با یک دوره‌ی تناوب

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \frac{L}{2}\le x\le \frac{3L}{2} \\ 0 & 0\le x\le \frac{L}{2} \text{ ، } \frac{3L}{2}< x< 2L \end{cases}$$

عبارت است از:

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)\pi}\cos\frac{2m-1}{L}x$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+2}}{(2m-1)\pi}\cos\frac{2m-1}{L}x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sin\frac{2m\pi}{L}x$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sin\frac{2m\pi}{L}x$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi}\cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{L}x\right)$

۱۱) (برق ۷۶) در نمایش سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t)=\sin^2 t\cos 2t$ (با پریود 2π) به شکل

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

۱) $a_4=-\frac{1}{4},\ a_2=\frac{1}{2},\ a_0=-\frac{1}{4}$

۲) $a_4=-\frac{1}{4},\ a_2=\frac{1}{2},\ a_0=-\frac{1}{2}$

۳) $a_4=4,\ a_2=2,\ a_0=4$

۴) $a_4=4,\ a_2=2,\ a_0=8$

۱۲) (برق ۷۶) حاصل کدامیک از سریهای زیر را می‌توان از بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در فاصله‌ی $(-1,1)$ به دست آورد.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

۱۳) (برق ۷۷) در بسط فوریه تابع

$$f(t) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{۳}t + b_n \sin\frac{n\pi}{۳}t$$

اگر در یک پریود (دوره‌ی تناوب)

$$f(t) = \begin{cases} -t-۳ & -۳ \le t \le -۲ \\ -۱ & -۲ \le t \le -۱ \\ t & -۱ \le t \le ۱ \\ ۱ & ۱ \le t \le ۲ \\ -t+۳ & ۲ \le t \le ۳ \end{cases}$$

باشد آنگاه ضرایب غیر صفر فقط عبارتند از

۱) a_n و n فرد ۲) a_n و n زوج ۳) b_n و n زوج ۴) b_n و n فرد

۱۴) (برق ۷۸) دوره‌ی تناوی و ضرایب a_n در بسط فوریه $f(x) = |\sin \pi x|$ کدامند

۱) تناوب ۱ و $a_n = \frac{۴}{\pi(۱-۴n^۲)}$ ۲) تناوب π و $a_n = \frac{۴}{\pi(۱-۴n^۲)}$

۳) تناوب π و $a_n = \frac{\pi}{۴n^۲-۱}$ ۴) تناوب ۱ و $a_n = \frac{\pi}{۴n^۲-۱}$

۱۵) (برق ۷۸) اگر بسط به سری کسینوسی فوریه $f(x) = x,\ \circ < x < \pi$ به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}\left(\cos x + \frac{۱}{۳^۲}\cos ۳x + \frac{۱}{۵^۲}\cos ۵x + \cdots\right)$$

بسط به سری فوریه سینوسی $g(x) = x(\pi - x)\frac{\pi}{۸},\ \circ < x < \pi$ برابر است با

۱) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin ۲nx}{(۲n)^۳}$ ۲) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲n+۱)x}{(۲n+۱)^۳}$

۳) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin ۲nx}{n^۳}$ ۴) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۳}$

۱۶) (برق ۷۹) از میان کلیه توابع مجموعه‌ی $\{\alpha + \beta\cos x + \gamma \sin x : \forall \alpha, \beta, \gamma \in R\}$ کدامیک

به تابع زیر نزدیکتر هستند. (به معنی کمترین مربعات)

$$f(x)=\begin{cases} \circ & -\pi<x<-\frac{\pi}{۲} \\ -a(x+\frac{\pi}{۲}) & -\frac{\pi}{۲}<x<\circ \\ a(x-\frac{\pi}{۲}) & \circ<x<\frac{\pi}{۲} \\ \circ & \frac{\pi}{۲}<x<\pi \end{cases}$$

(a یک ثابت حقیقی است.)

۱) $-\frac{a\pi}{۴}-\frac{۲a}{\pi}\cos x$

۲) $-\frac{a\pi}{۸}-\frac{۲a}{\pi}\cos x$

۳) $-\frac{a\pi}{۸}+\frac{۲a}{\pi}\cos x$

۴) $\frac{-a\pi}{۸}-\frac{۲a}{\pi}\cos x+\frac{۲a}{\pi}\sin x$

۱۷) (برق ۸۰) چنانچه تابع $f(x)$ در یک دوره‌ی تناوب به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x)=\begin{cases} \circ & -۳<x<\circ \\ \sin\frac{\pi x}{۳} & \circ\leq x\leq ۳ \end{cases}$$

در بسط فوریه آن به صورت

$$f(x)=a_\circ+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{۳}+b_n\sin\frac{n\pi}{۳}x)$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a_\circ=\frac{۲}{\pi}$

۲) همه‌ی a_n ها به جز $a_\circ$ صفرند.

۳) بجز $b_۱$ که مساوی $\frac{۱}{۲}$ است، بقیه‌ی b_n ها صفرند.

۴) بجز $b_۱$ که مساوی $\frac{۱}{۲}$ و $b_۲$ که مساوی $\frac{۱}{۸}$ است، بقیه‌ی b_n ها صفرند.

۱۸) (برق ۸۱) سری فوریه تابع دوره‌ای $f(t)$ با دوره‌ی T: $T=۴$، $f(t)=\begin{cases} ۲, & -۱<t<۱ \\ \circ, & ۱<t<۳ \end{cases}$

کدام است؟

۱) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲}t+\cdots\right]$

۲) $۱+\frac{۲}{\pi}\left[\cos\pi t-\frac{۱}{۳}\cos ۳\pi t+\cdots\right]$

۳) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}t+\cdots\right]$

۴) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}t+\cdots\right]$

۱۹) (برق ۸۲) در بسط فوریه تابع $f(t)$ با دوره‌ی تناوب $T = ۲$ که به شکل زیر معرفی شده است:

$$f(t) = \begin{cases} ۱ + t & -۱ \leq t \leq ۰ \\ ۱ - t & ۰ < t \leq ۱ \end{cases}$$

ضریب $a_۳$ در

$$f(t) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$

کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۹\pi^۲}$ ۲) $\frac{۲}{۹\pi^۲}$ ۳) $\frac{-۴}{۹\pi^۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹\pi^۲}$

۲۰) (برق ۸۳) در سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x \leq L \\ ۲L - x & L < x \leq ۲L \end{cases}$، با دوره‌ی تناوب $۲L$، یعنی

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x]$$

داریم

۱) $a_k = ۰$ که در آن $k = ۰, ۱, ۲, ۳, \dots$

۲) $a_{۲k} = ۰$ و $b_n = ۰$ به ازای $k, n \in N$

۳) $a_{۲k-۱} = ۰$ و $b_n = ۰$ به ازای $n, k \in N$

۴) $b_n = ۰$ و $a_n \neq ۰$ به ازای هر $n \in N$ و هر $k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \dots$

۲۱) (برق ۸۳) هرگاه بسط فوریه یک تابع تناوبی برای دوره‌ی تناوب $T = ۲\pi$ به صورت

$$f(x) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

باشد، مقدار $b_۳$ برای $f(x) = \left(\cos^۲ x + \sin x - \frac{۱}{۲}\right)^۲$ کدام خواهد بود؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۲) (برق ۸۴) اگر برای $۰ < x < ۲$ داشته باشیم

$$x = \frac{۴}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{۲} x - \frac{۱}{۲} \sin \frac{۲\pi}{۲} x + \frac{۱}{۳} \sin \frac{۳\pi x}{۲} \cdots \right)$$

در این صورت ضریب جمله $\cos \pi x$ در بسط عبارت $x(x-۱)$ عبارت است از

۱) $\frac{۲}{\pi^۲}$ ۲) $\frac{۴}{\pi^۲}$ ۳) $\frac{۸}{\pi^۲}$ ۴) $\frac{۱۶}{\pi^۲}$

۲۳) (برق ۸۴) اگر $f(x)=\begin{cases} x & \circ \leq x < \frac{L}{۳} \\ \frac{۱}{۲}(L-x) & \frac{L}{۳} < x < L \end{cases}$ و $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}x$ در آن b_n ها ضرایب ثابت‌اند، آنگاه این رابطه سری ایجاب می‌کند که کدام یک از روابط زیر صحیح باشند.

۱) $$f(x)=\begin{cases} -x & -\frac{L}{۳} \leq x \leq \circ \\ \frac{۱}{۲}(L+x) & -L < x < -\frac{L}{۳} \end{cases}$$

۲) $$f(x)=\begin{cases} x & -\frac{L}{۳} \leq x \leq \circ \\ \frac{۱}{۲}(L-x) & -L < x < -\frac{L}{۳} \end{cases}$$

۳) $$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}(L-x) & L < x \leq \frac{۵L}{۳} \\ x & \frac{۵L}{۳} < x \leq ۲L \end{cases}$$

۴) $$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}(L-x) & L \leq x \leq \frac{۵L}{۳} \\ x-۲L & \frac{۵L}{۳} < x \leq ۲L \end{cases}$$

۲۴) (برق ۸۵) سری فوریه‌ی کسینوسی نیم دامنه تابع f را بنویسید هرگاه در ناحیه‌ای که f غیر صفر است تعریف آن به صورت $f(x)=H(-x)-۲H(۱-x)+H(۲-x)$ باشد که در آن $H(x)=\begin{cases} ۱ & x>\circ \\ \circ & x<\circ \end{cases}$

۱) $$f(x)\sim \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)} \cos\left(\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}\right)$$

۲) $$f(x)\sim \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)} \cos \frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$$

۳) $$f(x)\sim \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{-۴(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)} \cos \frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$$

۴) $$f(x)\sim \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{m}}{\pi(۲m-۱)} \cos \frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$$

۲۵) (برق ۸۵) هرگاه $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^۲}$ باشد، حاصل $\int_\circ^\pi f(x)\sin^۳ x dx$ کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳\pi}{۳۶}$

۲۶) (برق ۸۶) ضرایب بسط فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب ۲π، $\{a_۰, a_n, b_n\}$ می‌باشد، اگر ضرایب بسط فوریه تابع $g(x) = f(x)\cos x$ برابر با $\{a'_۰, a'_n, b'_n\}$ باشد، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $a'_۰ = \frac{a_۱}{۲},\ a'_n = \frac{a_{n+۱} - a_{n-۱}}{۲},\ b'_n = \frac{b_{n+۱} - b_{n-۱}}{۲}$

۲) $a'_۰ = \frac{a_۱}{۲},\ a'_n = \frac{a_{n+۱} + a_{n-۱}}{۲},\ b'_n = \frac{b_{n+۱} + b_{n-۱}}{۲}$

۳) $a'_۰ = \frac{a_۰}{۲},\ a'_n = \frac{a_{n+۱} + a_{n-۱}}{۲},\ b'_n = \frac{b_{n+۱} + b_{n-۱}}{۲}$

۴) $a'_۰ = \frac{a_۰}{۲},\ a'_n = \frac{a_{n+۱} + b_{n+۱}}{۲},\ b'_n = \frac{a_{n+۱} + b_{n-۱}}{۲}$

۲۷) (برق ۸۷) در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = x^۲$، $-L \le x \le L$ به صورت

$$\frac{۱}{۳}L^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴L^۲}{(n\pi)^۲}(-۱)^n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

باشد آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{x}{۳}\left(\frac{x^۲}{L^۲} - ۱\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{L}{\pi n^۳}(-۱)^n \sin\frac{n\pi x}{L}$ ۲) $\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۳) $\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$ ۴) $\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n L}{n^۲\pi^۲}(-۱)^n \sin\frac{n\pi x}{L}$

۲۸) (برق ۸۸) هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x) = x + \cos ۲x$ به ازای $۰ \le x \le \pi$، آن‌گاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ ضریب $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $۱ - \frac{۱}{۲\pi}$ ۴) $۱ + \frac{۱}{۲\pi}$

۲۹) (برق ۸۹) تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره‌ی تناوب به صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & -\alpha < x < \alpha \\ ۰ & -\pi < x < -\alpha\ ,\ \alpha < x < \pi\ ,\ (۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}) \end{cases}$$

است. اگر بسط فوریه تابع به صورت

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha}{۱}\cos x + \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\cos ۲x + \frac{\sin ۳\alpha}{۳}\cos ۳x + \cdots\right)$$

باشد در این صورت حاصل $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{۲}$ ۲) $\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\alpha)}{۲}$

۳) $\alpha(\pi-\alpha)$ ۴) $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$

۳۰) (برق ۹۰) اگر تابع $f(x,y)$ را در ناحیه $۰<x<a$ و $۰<y<b$ به صورت سری

$$f(x,y)=\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

نمایش دهیم، ضرایب A_{mn} چگونه خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{ab}\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dydx$

۲) $\frac{۴}{ab}\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dydx$

۳) $\frac{۱}{ab}\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dydx$

۴) $\frac{۴}{ab}\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dydx$

۳۱) (برق ۹۱) در صورتی‌که سری فوریه مثلثاتی تابع $g(x)=x^{۲}$، $-\pi\leq x\leq\pi$ به صورت زیر باشد:

$$g(x)=۴\left(\frac{\pi^{۲}}{۱۲}-\cos x+\frac{\cos ۲x}{۲^{۲}}-\frac{\cos ۳x}{۳^{۲}}+\cdots\right)$$

آن‌گاه سری فوریه مثلثاتی $\cdots-\frac{\sin ۳x}{۳^{۳}}+\frac{\sin ۲x}{۲^{۳}}-\sin x$ مربوط به کدام تابع است؟

۱) $\frac{x}{۴}(\pi^{۲}-x^{۲})$ ۲) $\frac{x}{۱۲}(\pi^{۲}-x^{۲})$ ۳) $\frac{x^{۲}}{۱۲}(\pi^{۲}-x)$ ۴) $\frac{x^{۳}}{۱۲}$

۳۲) (مکانیک ۶۸) تابع $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=\cos ax$، α عدد ثابت نادرست، مفروض است.

سری فوریه این تابع به صورت کدامیک از روابط زیر خواهد بود؟

۱) $\cos\alpha x=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۲\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^{۲}-n^{۲})}\cos(nx)$

۲) $\cos\alpha x=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi(\alpha^{۲}-n^{۲})}\cos(nx)$

۳) $\cos\alpha x=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}۲\alpha\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^{۲}-n^{۲}}\cos(nx)$

۴) $\cos\alpha x=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2\alpha\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nx)$

۳۳) (مکانیک ۷۰) اگر $-\pi<x<\pi$، $f(x)=2x+1$ دارای سری فوریه

$$f(x)=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$$

باشد، کدامیک از عبارات زیر درست است؟

۱) با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوق می‌توان سری فوریه $F(x)=x^2+x$، $-\pi<x<\pi$ را به دست آورد.

۲) با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق می‌توان سری فوریه تابع $g(x)=2$، برای $-\pi<x<\pi$ را به دست آورد.

۳) حد سری متناوب $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌شود.

۴) مقدار تابع f در نقطه ناپیوستگی $x=\pi$ برحسب سری فوریه برابر $f(\pi)=2$ خواهد بود.

۳۴) (مکانیک ۷۱ - مواد ۸۴) تابع $f=\cos^2 t$ در بازه $[0,\pi]$ تعریف شده است. در این صورت سری فوریه کسینوسی نیم دامنه f برابر است با

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(nt)$

۲) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nt)}{n}$

۴) هیچکدام

۳۵) (مکانیک ۷۲ - هوافضا ۸۵) اگر f تابعی با دوره‌ی تناوب 2π باشد که با ضابطه $f(x)=|x|$ به ازای $x\in[-\pi,\pi]$ تعریف شده است آنگاه سری فوریه f برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{m}$

۲) $2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin(mx)}{m}$

۳) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۴) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۳۶) (مکانیک ۷۴) بسط نیم دامنه سری فوریه کسینوسی تابع $f(t)=1-\frac{t}{2}$ $(0<t<2)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{2}$

۲) $\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}\cos\frac{(۲n-۱)\pi t}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}\cos\frac{n\pi t}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}\cos\frac{(۲n-۱)\pi t}{۲}$

۳۷) (مکانیک ۷۵) سری فوریه تابع زیر کدام است؟

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\pi t}{۴} & -\frac{\pi}{۲}\le t<\frac{\pi}{۲}\\ \frac{\pi(\pi-t)}{۴} & \frac{\pi}{۲}\le t<\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

۱) $\sum_{n=۱,۳,۵,\ldots}^{\infty}-\frac{۱}{n^۲}\sin(nt)$

۲) $\sum_{n=۱,۳,۵,\ldots}^{\infty}\frac{-۱}{n\pi}\sin(nt)$

۳) $\sum_{n=۱,۳,۵,\ldots}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}\sin nt$

۴) $\sum_{n=۱,۳,۵,\ldots}^{\infty}\frac{-(-۱)^{\frac{n+۱}{۲}}}{n^۲}\sin nt$

۳۸) (مکانیک ۷۶) شرط بسط تابع $f(x)$ در فاصله $a<x<b$ به وسیله سری فوریه این است که تابع ......

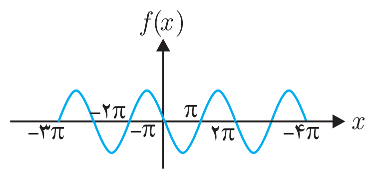
۱) باید پیوسته باشد.

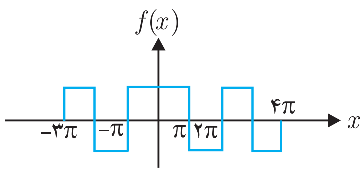
۲) می‌تواند در این فاصله نامحدود باشد.

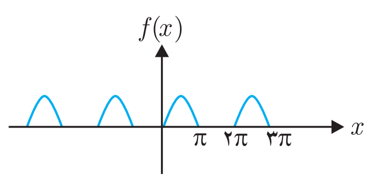
۳) می‌تواند دارای ناپیوستگی محدود باشد.

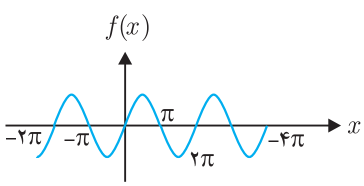
۴) باید در مرزها پیوسته و محدود باشد.

۳۹) (مکانیک ۷۷) تابع سری فوریه $f(x)=\begin{cases}\sin x & ۰\le x\le\pi\\ ۰ & \pi<x<۲\pi\end{cases}$ با پریود ۲π مفروض است. کدام یک از منحنی‌های زیر محدوده‌ی مفروض مشخص کننده‌ی تابع می‌باشد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴۰) (مکانیک ۷۸ - معماری کشتی ۷۹) در بسط فوریه تابع پریودیک $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x<\pi \end{cases}$ کدام گزینه درست است.

۱) ضرایب جملات فرد سینوسی صفر است.

۲) ضرایب جملات سینوسی صفر است.

۳) ضرایب جملات سینوسی و کسینوسی غیر صفر است.

۴) ضرایب جملات کسینوسی صفر است.

۴۱) (مکانیک ۷۸) ضریب $\sin 5x$ در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}$ و $-\pi<x<\pi$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۴۲) (مکانیک ۷۹ - ابزاردقیق ۹۰) سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $2\sin x+3\cos 2x$ ۲) $2\sin x+3\sin 3x$

۳) $\sin x+\cos 2x$ ۴) $\sin x+\sin 3x$

۴۳) (مکانیک ۸۰) مطلوبست بسط $f(x)=x^2,\ 0<x<2\pi$ برحسب یک سری فوریه با دوره‌ی تناوب 2π.

۱) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx+\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$

۲) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^3}\cos nx+\frac{4\pi}{n^2}\sin nx\right)$

۳) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$

۴) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^3}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$

۴۴) (مکانیک ۸۰ - هوافضا ۸۵) مطلوبست بسط $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x<\pi \end{cases}$ برحسب یک سری سینوسی فوریه.

۱) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$
۲) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n}$
۳) $f(x)=\frac{-۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n}$
۴) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n-۱}$

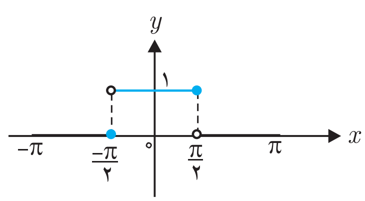
۴۵) (مکانیک ۸۱) سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}+x & -\pi<x<۰\\ \frac{\pi}{۲}-x & ۰<x<\pi\end{cases}$ به کدام صورت است.

۱) $\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}(-۱)^{n+۱}\cos nx$
۲) $\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}((-۱)^{n+۱}+۱)\cos nx$
۳) $\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}[۱-(-۱)^n]\sin(nx)$
۴) $\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}[\sin nx+(-۱)^n\cos nx]$

۴۶) (مکانیک ۸۲) مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب $p=۲\pi$ و $f(x)=x^۲+x,\ -\pi<x<\pi$ در نقطه $x=\pi$ کدام است؟

۱) π
۲) $\pi^۲$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\pi^۲+\pi$

۴۷) (مکانیک ۸۲) در بسط فوریه تابع متناوب شکل روبرو ضریب $\cos ۴x$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲\pi}$
۲) ۰
۳) $\frac{۱}{۲\pi}$
۴) $\frac{۱}{۴\pi}$

۴۸) (مکانیک ۸۲) ضرایب $a_۲$ و $a_۳$ در سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}۱; & ۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\\ ۲; & \frac{\pi}{۲}\le x\le\pi\end{cases}$ کدامند؟

۱) $a_۲=۰,\ a_۳=\frac{۲}{۳\pi}$
۲) $a_۲=\frac{۲}{۳\pi},\ a_۳=\frac{-۲}{۵\pi}$
۳) $a_۲=\frac{۲}{۳\pi},\ a_۳=۰$
۴) $a_۲=۰,\ a_۳=\frac{-۲}{۵\pi}$

۴۹) (مکانیک ۸۰) مطلوبست بسط $f(x)=\sin x,\ ۰<x<\pi$ برحسب یک سری کسینوسی

فوریه.

۱) $f(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱+\cos n\pi}{n^{۲}-۱}\cos nx$

۲) $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱+\cos n\pi}{n^{۲}-۱}\cos nx$

۳) $f(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱+\cos n\pi}{n^{۲}+۱}\cos nx$

۴) $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱+\cos n\pi}{n^{۲}+۱}\cos nx$

۵۰) (مکانیک ۸۳) تابع $f(x)=x\sin\left(\frac{۱}{x}\right)$ را در محدوده $-\pi<x<\pi$ در نظر بگیرید در این صورت می‌توان گفت این تابع؛

۱) دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون دارای ناپیوستگی در محدوده است.

۲) دارای بسط کسینوسی فوریه در محدوده است چون تابع زوج می‌باشد.

۳) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تابع نوسانی (پریودیک) نیست.

۴) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تعداد حداکثر و حداقل آن محدود نمی‌باشد.

۵۱) (مکانیک ۸۵) بسط کسینوسی تابع $\sin x$ در محدود $\circ<x<\frac{\pi}{۲}$ به صورت زیر است؟

۱) $\sin x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-\frac{۴}{\pi}}{۴n^{۲}-۱}\cos(nx)$

۲) $\sin x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-\frac{۴}{\pi}n}{۴n^{۲}-۱}\cos(۲nx)$

۳) $\sin x=\frac{۲}{\pi}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-\frac{۴}{\pi}}{۴n^{۲}-۱}\cos(۲nx)$

۴) تابع دارای بسط مذکور نمی‌باشد چون تابع فرد و بسط زوج است.

۵۲) (مکانیک ۸۶) سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases} e^{x} & \circ<x<L \\ \circ & x=\circ \\ -e^{-x} & -L<x<\circ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^{L}\cos n\pi}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1+e^{L}\cos n\pi}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۳) $\frac{1}{L}(e^{L}-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^{L}\cos n\pi}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{(n\pi)^{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{L}{n\pi^{2}}\right)}\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^{L}\cos n\pi}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۵۳) (مکانیک ۸۶) تابع f در بازه $0< x < L$ فقط دارای یک نقطه ناپیوستگی در $C \in (0, L)$ است به قسمی که قبل از آن خطی است و بعد از آن نیز خطی می‌باشد و $f'(+0) = f'(L-0)$.
در این صورت ضرایب سری فوریه کسینوسی نیم دامنه این تابع کدام هستند؟

۱) $a_n=\frac{2L}{(n\pi)^{2}}[f'(c-0)-f'(c+0)]$

۲) $a_n=\frac{2}{n\pi}[f(c-0)-f(c+0)]$

۳) $a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}[f(c-0)-f(c+0)]+\frac{2L}{(n\pi)^{2}}(\cos n\pi-1)f'(+0)$

۴) $a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}[f(c-0)-f(c+0)]+\frac{2L}{(n\pi)^{2}}\cos\frac{n\pi c}{L}[f'(c-0)-f'(c+0)]$

۵۴) (مکانیک ۸۷) فرض کنیم $\frac{d^{2}u}{dx^{2}}+k^{2}u=f(x)$ که در آن $k\neq 0$ ثابت حقیقی و $-L\leq x\leq L$ ($L>0$ ثابت) و

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

در این صورت

$$u(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi x}{L}+B_n\frac{n\pi x}{L}\right]$$

که در آن

۱) $A_0=\frac{a_0}{k^{2}},\ B_n=\frac{a_n}{k^{2}-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2}},\ A_n=\frac{b_n}{k^{2}-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2}}$

۲) $A_0 = \frac{a_0}{k^2},\ B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2},\ A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

۳) $A_0 = 0,\ B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2},\ A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

۴) $A_0 = \frac{a_0}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2},\ B_n = \frac{b_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2},\ A_n = \frac{a_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

۵۵) (مکانیک ۸۸) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x) = x$ و L $0 \le x < L$ کدام است؟

۱) $\frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L}{(2m-1)^2\pi^2} \cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۲) $L + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2} \cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $\frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2} \cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2} \cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۵۶) (مکانیک ۸۹) تابع $f(x)$ با دوره‌ی تناوب 2π بر بازه‌ی $(0, 2\pi)$ دارای سری فوریه به صورت

$$1 + \cos x + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \cdots$$

می‌باشد، $f(x)$ برابر است با:

۱) $e^{\sin x}\cos[\sin x]$ ۲) $e^{\sin x}\sin[\cos x]$

۳) $e^{\cos x}\sin[\cos x]$ ۴) $e^{\cos x}\cos[\sin x]$

۵۷) (مکانیک ۹۰) با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & , -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & , 0 \le t \le \pi \end{cases}$ مقدار

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \cdots$$

کدام است؟

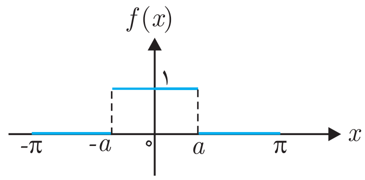
۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۵۸) (مکانیک ۹۰) سری فوریه تابع $f(x) = \cos(2x)$، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

۱) سینوسی ۲) سینوسی - کسینوسی

۳) کسینوسی ۴) سری فوریه ندارد

۵۹) (کامپیوتر ۷۷) به کمک تابع نشان داده شده در شکل مقدار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}$ برابر است با:



۱) πa ۲) $\pi - a$ ۳) $\frac{\pi - a}{2}$ ۴) $a(\pi - a)$

۶۰) (مهندسی کامپیوتر ۸۰) اگر بسط فوریه تابع پریودیک $f(x) = |x|,\ -\pi \le x \le \pi$ برابر باشد با

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

در این صورت $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{\pi^3}{32}$ ۲) $\frac{\pi^2}{32}$ ۳) $\frac{\pi^3}{16}$ ۴) $\frac{3\pi^3}{32}$

۶۱) (کامپیوتر ۸۱) اگر برای $-\pi < x < \pi$ داشته باشیم $x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right]$؛ در این صورت عبارت $(\pi - x)(\pi + x)$ در بازه‌ی $-\pi < x < \pi$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\pi^2 - 4\left(\sin^2 x - \frac{\sin^2 2x}{4} + \frac{\sin^2 3x}{9} - \cdots\right)$

۲) $\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$

۳) $\frac{2\pi^2}{3} + 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$

۴) $\frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$

۶۲) (کامپیوتر ۸۲) سری فوریه $f(x) = \begin{cases} -1; & -4 \le x \le 0 \\ 1; & 0 < x < 4 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$

۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2n-1)}\sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi x\right)$　۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin\frac{2n-1}{4}\pi x$

۶۳) (کامپیوتر ۸۴) سری فوریه تابع پیوسته تکه‌ای $f(x)$ در بازه‌ی $[-3,3]$ به صورت

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\right\}$$

تعریف می‌شود. اگر تابع $f(x)$ برابر با $f(x)=\begin{cases}0 & -3\le x\le 0\\ x & 0\le x\le 3\end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه به ترتیب a_0 و a_n و b_n برابرند با

۱) $\frac{3}{2},\ \frac{3\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right]}{n^2\pi^2},\ \frac{-3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$

۲) $\frac{3}{4},\ \frac{3(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2},\ \frac{-3\cos(n\pi)}{n\pi}$

۳) $\frac{3}{4},\ \frac{3\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right]}{n^2\pi^2},\ \frac{-3\cos(n\pi)}{n\pi}$

۴) $\frac{3}{2},\ \frac{3(\cos(n\pi)-1)}{n^2\pi^2},\ \frac{-3\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}$

۶۴) (کامپیوتر ۸۷) اگر سری فوریه تابع $f(x)=2x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر با $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$ باشد سری فوریه تابع $g(x)=x^2-\pi^2$ کدام است؟

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}[\cos(nx)+(-1)^n]$

۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}[\sin(nx)-(-1)^n]$

۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}[\cos(nx)+(-1)^n]$

۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}[\sin(nx)+(-1)^n]$

۶۵) (کامپیوتر ۸۸) سری فوریه سینوسی دوگانه تابع $f(x,y)$ در دامنه‌های $0<x<L$ و $0<y<K$ عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{mn}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right)$$

سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y)=xy$ برای $0<x<\pi$ و $0<y<\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4nm}{\pi^2}\sin(nx)\sin(my)$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm}{4}\sin(nx)\sin(my)$

۶۶) (کامپیوتر ۸۹) اگر برای $0 < x < 2$ داشته باشیم

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

در این صورت دو جمله‌ی اول بسط فوریه تابع متناوب $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ در فاصله‌ی $0 < x < 2$ عبارت است از:

۱) $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

۲) $\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

۳) $\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

۴) $\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

۶۷) (کامپیوتر ۹۱) تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi - a \\ 1 & \pi - a < x < \pi + a; \ \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \pi + a < x < 2\pi \end{cases}$$

اگر بسط فوریه آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\cos x}{1} - \frac{\sin 2\alpha\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3\alpha\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$

حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ چقدر است؟

۱) $\pi - 1$

۲) $\pi^2 - 1$

۳) $\frac{\pi - 1}{2}$

۴) $\frac{\pi^2 - 1}{2}$

۶۸) (هوافضا ۸۰) تابع $f(x) = x$ ،$0 < x < L$ دارای سریهای فوریه زوج و فرد زیر می‌باشد.

الف) $0 < x < L,\ f(x) = x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x$

ب) $0 < x < L,\ f(x) = x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۱) سری الف سریعتر از سری ب همگراست.

۲) سری ب سریعتر از سری الف همگراست.

۳) هر دو سری دارای سرعت همگرایی یکسانی می‌باشند.

۴) معدل سریهای الف و ب نیز سری فوریه برای تابع است.

۶۹) (هوافضا ۸۱) سری فوریه تابع $-\pi \leq x \leq \pi$ و $f(x)=\cos\frac{x}{۲}$ عبارتست از

۱) $f(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۲) $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۴)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۳) $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۴) $f(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۷۰) (هوافضا ۸۳) تابع متناوب $f(x)=x$ در فاصله‌ی $-\pi < x < \pi$ را به صورت سری فوریه بسط می‌دهیم ضریب $\cos nx$ کدام است؟

۱) $\circ$ ۲) $\frac{(-۱)^n}{n}$ ۳) $\frac{۲(-۱)^n}{n}$ ۴) $\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}$

۷۱) (هوافضا ۸۴) سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}\circ & -\pi \leq x < \circ\\ ۱ & \circ \leq x \leq \pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲kx}{۲k}$

۲) $\frac{۱}{۲}+\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{۲\sin(۲k+۱)x}{\pi(۲k+۱)}$

۳) $\frac{\pi}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{k}\sin kx$

۴) $\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲k+۱}\sin(۲k+۱)x+\frac{۱}{k}\cos kx\right)$

۷۲) (هوافضا ۸۴) کدام سری، سری فوریه‌ی تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است؟

۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$

۳) $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n) \cos nx$ ۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}}$

۷۳) (هوافضا ۸۴) سری فوریه‌ی تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{2k}$

۲) $\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$

۳) $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$

۴) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x + \frac{1}{k} \cos kx\right)$

۷۴) (هوافضا ۸۵) سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq L \\ 2L - x & L \leq x < 2L \end{cases}$ به صورت

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi}{L} x]$$

است کدام گزاره صحیح است؟

۱) $b_k = 0,\ a_0 = L$ ۲) $b_k = \frac{2L}{k\pi},\ a_0 = \frac{L}{2}$

۳) $b_k = 0,\ a_0 = 2L$ ۴) $b_k = \frac{2L}{k\pi},\ a_0 = L$

۷۵) (هوافضا ۸۶) سری فوریه تابع $f(x) = x,\ x \in (-\pi, \pi)$ کدام است؟

۱) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ۲) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$

۳) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n}$ ۴) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$

۷۶) (هوافضا ۸۶) سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ سری فوریه‌ی کدام تابع است؟

۱) $\frac{x}{\ln x}$ ۲) e^x ۳) $\ln x$ ۴) هیچ تابعی

۷۷) (هوافضا ۸۷) ضرایب سری فوریه تابع متناوب

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & -\pi<x<۰\\ ۲ & ۰<x<\pi\end{cases}$$

$f(x+۲\pi)=f(x)$ کدامند؟

۱) $a_n=b_n=\frac{۸}{n\pi}$ به ازای هر n

۲) $a_n=۰$ و $b_n=\frac{۸}{n\pi}$ به ازای هر n

۳) $a_n=\frac{۲n}{\pi}$ و $b_n=۰$ به ازای هر n

۴) $a_n=۰$ به ازای هر $n\geq ۰$ و $b_n=\begin{cases}\frac{۸}{n\pi} & n \text{ فرد}\\ ۰ & n \text{ زوج}\end{cases}$

۷۸) (هوافضا ۸۷) با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}۰ & -۲<x<-۱\\ ۱ & -۱<x<۱\\ ۰ & ۱<x<۲\end{cases}$ و $f(x+۴)=f(x)$ کدام برابری حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{\pi^۲}{۶}=۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots$
۲) $\ln ۲=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots$

۳) $\frac{\pi^۲}{۸}=۱+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\cdots$
۴) $\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots$

۷۹) (هوافضا ۸۹) برابری $\frac{\pi^۲}{۶}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ از بسط فوریه کدام تابع حاصل می‌شود؟

۱) $f(x)=x$
۲) $f(x)=x^۲$
۳) $f(x)=x^۳$
۴) $f(x)=x^۴$

۸۰) (هوافضا ۹۱) اگر سری فوریه تابع $-\pi\leq x\leq \pi$ ،$f(x)=x^۲$ به صورت $\frac{\pi^۲}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{n^۲}(-۱)^n\cos nx$ باشد، مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^۲}{۶}$
۲) $\frac{\pi^۲}{۱۲}$
۳) $\frac{\pi^۲}{۱۶}$
۴) $\frac{\pi^۴}{۹۰}$

۸۱) (نانومواد ۸۸) اگر تابع f در یک دوره تناوب به صورت $f(x)=\frac{L}{۲}-x$ ،$۰<x<L$ تعریف شده باشد، آن‌گاه

۱) $\frac{L}{۲}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{۱}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۲) $\frac{L}{۲} - x = \frac{L}{\pi} \sum \frac{۱}{n} \cos \frac{۲n\pi}{L} x$

۳) $\frac{L}{۲} - x = \frac{L}{\pi} \sum \frac{۱}{n} \sin \frac{۲n\pi}{L} x$

۴) $\frac{L}{۲} - x = \frac{L}{\pi} \sum \frac{۱}{n} \cos \frac{۲n\pi}{L} x + \frac{۱}{n} \sin \frac{۲n\pi}{L} x$

۸۲) (نانو مواد ۸۸) اگر داشته باشیم

$$\sin x = \frac{۲}{\pi} - \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{\cos ۲nx}{sn^۲ - ۱} \right); \quad ۰ \leq x \leq \pi$$

آن‌گاه حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۱۶n^۲ - ۱}$ برابر است با

۱) $\frac{\pi^۲}{۸}$ ۲) $۱ - \frac{\pi\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $۱ - \frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲} - \frac{\pi\sqrt{۲}}{۸}$

۸۳) (نانومواد ۸۸) اگر $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n \cos nx}{n^۲}$، آن‌گاه $\int_۰^{\pi} f(x) \sin^۲ x dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $-\frac{\pi}{۸}$ ۳) صفر ۴) $+\frac{\pi}{۴}$

۸۴) (نانومواد ۸۹) بسط فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < \pi \\ -۱ & -\pi < x < ۰ \end{cases}$ به صورت

$$f(x) = \frac{۴}{\pi} \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲k-۱)x}{۲k-۱}$$

می‌باشد. به کمک آن حاصل عبارت

$$S = \frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۵^۲} + \cdots$$

کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۸}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۹۰}$

۸۵) (نانومواد ۸۹ - هوافضا ۹۰) اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π، $f(x) = \cos \frac{x}{۲}, \ |x| < \pi$
مقدار $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲ - \frac{۱}{۴}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۲} - ۲$ ۲) $\frac{\pi}{۲} - ۱$ ۳) $\pi - ۲$ ۴) $\pi - ۱$

۸۶) (نانومواد ۹۰) ثابت بسط به سری تابع ۱ $|a|<1$, $f(\theta)=\frac{1}{1-a\cos\theta}$ را به دست آورید؟

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{2^n}$ ۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n}}{(2n)!}$ ۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}$ ۴) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{n}$

۸۷) (نانومواد ۹۰ - شیمی ۹۰) اگر سری فوریه تابع f در بازه $|x|<\pi$ به صورت $f(x)=1+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx$ باشد، ضریب b_3 در بسط فوریه $f(x)\sin x$ با دوره تناوب 2π در بازه $|x|<\pi$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{8\pi}$ ۲) $-\frac{1}{8\pi}$ ۳) $\frac{1}{8\pi}$ ۴) $\frac{3}{8\pi}$

۸۸) (نانومواد ۹۰ - مهندسی شیمی ۹۰) در صورتی که برای $0<x\leq 2$ داشته باشیم

$$x^2=\frac{4}{3}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$$

مقدار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi^4}{30}$ ۲) $\frac{\pi^4}{32}$ ۳) $\frac{\pi^4}{90}$ ۴) $\frac{\pi^4}{96}$

۸۹) (نانومواد ۹۰ - شیمی ۹۰) سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leq x\leq 0 \\ -x+1 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$، $f(x+2)=f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots\right)$

۲) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots\right)$

۳) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 6\pi x+\cdots\right)$

۴) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 6\pi x+\cdots\right)$

۹۰) (مواد ۹۰) در رابطه زیر ضریب $\sin(2\pi x)$ کدام است؟

$$x-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)=0;\quad x\in[0,2]$$

۱) $-\frac{4}{\pi}$ ۲) $-\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

۹۱) (مواد ۷۸) در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} ۱+\frac{۲}{\pi}x & -\pi\le x<۰ \\ ۱-\frac{۲}{\pi}x & ۰\le x\le\pi \end{cases}$

۱) $a_۳=۰,\ b_۲=\frac{۱}{۳}$
۲) $a_۳=\frac{۱}{۸\pi^۲},\ b_۲=۰$
۳) $a_۳=\frac{۸}{۹\pi^۲},\ b_۲=۰$
۴) $a_۳=-\frac{۹}{\pi^۲},\ b_۲=\frac{۱}{۴\pi}$

۹۲) (مواد ۸۰) هرگاه $f(x)=x+\sin x$ و $-\pi<x<\pi$، در بسط فوریه مثلثاتی f، ضریب جمله $\sin x$ برابر است با:

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۰

۹۳) (مواد ۸۳) در بسط تابع $f(x)=x^۲$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ به سری فوریه ضریب $\cos ۸x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$
۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) $-\frac{۱}{۱۶}$
۴) $-\frac{۱}{۸}$

۹۴) (مواد ۸۴) در سری فوریه مثلثاتی تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi<x<-\frac{\pi}{۲} \\ -a(x+\frac{\pi}{۲}) & -\frac{\pi}{۲}<x<۰ \\ a(x-\frac{\pi}{۲}) & ۰<x<\frac{\pi}{۲} \\ ۰ & \frac{\pi}{۲}<x<\pi \end{cases}$$

ضریب $\sin nx$ کدام است.

۱) ۰
۲) $\frac{a}{\pi n^۲}$
۳) $\frac{۲a}{\pi n^۲}$
۴) $\frac{۲a(-۱)^n}{\pi n^۲}$

۹۵) (مواد ۸۵) سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x-[x]$ را بعد از تشخیص دوره‌ی تناوب آن بنویسید.

۱) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n\pi x)}{n\pi}$
۲) $\frac{۱}{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n\pi x)}{n\pi}$
۳) $۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n\pi x)}{n\pi}$
۴) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos(۲n\pi x)}{(n\pi)^۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n\pi x)}{n\pi}$

۹۶) (مواد ۸۵) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=۱+\cos\frac{x}{۲}$، $۰\le x\le\pi$ کدام است؟

۱) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

۲) $1+\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

۳) $2+\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

۴) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m(2m-1)}\cos\frac{2m-1}{2}x$

۹۷) (مواد ۸۵) اگر تابع تکه‌ای هموار $f(x)$، $-\pi<x<\pi$ به گونه‌ای باشد که $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nx)$ آنگاه برای

$$|f(x)|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

داریم:

۱) $a_n=0$ به ازای هر $n\in N$

۲) $b_n=0$ به ازای هر $n\in N$

۳) $b_n=0$ به ازای هر $n\in N$ و $a_0=0$

۴) $a_{2k-1}=0$ و $b_{2k}=0$ به ازای هر $k\in N$

۹۸) (مواد ۸۵) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x-\frac{\pi}{2}$، $0\le x<\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{1}{\pi m^2}\cos(2mx)$

۲) $\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

۹۹) (مواد ۸۶) سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}x(\pi+x) & -\pi\le x\le 0\\ x(\pi-x) & 0<x<\pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3} \sin(nx)$ ۲) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m-1)^3} \sin(2m-1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2m-1)^3} \sin(2m-1)x$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}(\sin(nx)+\cos(nx))$

۱۰۰) (مواد ۸۶) سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\cos^2 \pi x$ در نیم دامنه $[0,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x$ ۲) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$ ۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

۱۰۱) (مواد ۸۶) اگر $f(x)=\begin{cases} 2-x & 1<x\leq 2 \\ x & -1\leq x\leq 1 \\ -2-x & -2\leq x<-1 \end{cases}$، آنگاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی این تابع، مجموع سری $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi^4}{64}$ ۲) $\frac{\pi^4}{96}$ ۳) $\frac{\pi^4}{128}$ ۴) $\frac{\pi^4}{192}$

۱۰۲) (مواد ۸۶) اگر f تابع متناوبی با دوره‌ی تناوب 2π و به ازای $|x|<\pi$ داشته باشیم $f(x)=\cos\frac{x}{2}$، آنگاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع f مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) ۲

۱۰۳) (مواد ۸۷) بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos^3 x$، $0<x<2\pi$ را بیابید.

۱) $\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ ۲) $\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$

۳) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ ۴) $\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$

۱۰۴) (مواد ۸۷) اگر سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $g(x)=x$، $0\leq x\leq L$ به صورت

$$x=\frac{L}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right)$$

باشد، آنگاه سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=px+q$، $0\leq x\leq L$ کدام است

(p و q ثابت حقیقی)

۱) $\left(\frac{pL}{2}+q\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۲) $\left(\frac{pL}{2}+q\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}+q\right)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $\left(\frac{pL}{2}+\frac{q}{2}\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}-q\right)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴) $\left(\frac{pL}{2}+\frac{q}{2}\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}+q\right)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۱۰۵) (مواد ۸۷) در صورتی که در تابع $f(x)=x$ مقدار x بین π و $-\pi$ تغییر کند، مطلوبست مقدار ثابت بسط مثلثاتی فوریه این تابع:

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۰۶) (مواد ۸۷) بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\sin^3 x$، $0<x<2\pi$ را بیابید.

۱) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kx$ ۲) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{2}\sin 3x$

۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin kx$ ۴) $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

۱۰۷) (مواد ۸۷) اگر

$$x=\frac{L}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right),\quad 0\le x<L$$

آنگاه سری فوریه سینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x(L-x)$ کدام است؟

۱) $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8L^2}{\pi^3(2m-1)^3}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8L^2}{\pi^3(2m-1)^3}\sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right)$

۳) $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2L}{\pi(2m-1)}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8L}{\pi^2(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۱۰۸) (مواد ۸۹) سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(0,2\pi)$ به صورت زیر است:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

اگر سری فوریه $\int_{۰}^{x} f(y)dy$ در همان بازه به صورت

$$\frac{A_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

باشد، در این صورت B_n برابر است با:

۱) $\frac{a_n}{n}$ ۲) $\frac{b_n}{n}$ ۳) $\frac{۱}{n}(a_n - a_۰)$ ۴) $\frac{۱}{n}(b_n - a_n)$

۱۰۹) (مواد ۸۹) فرض کنید $-L<x<L$ ،$f(x)=x$ و سری فوریه تابع f به صورت زیر باشد

$$f(x)=-\frac{۲L}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

در این صورت مقدار سری زیر $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi^۳}{۲۰}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۴) $\frac{۲\pi^۲}{۳}$

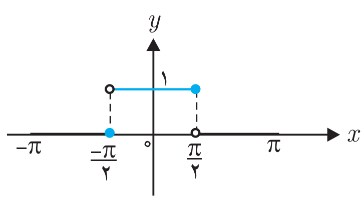
۱۱۰) (ابزار دقیق ۸۲) با فرض

$$f(x)=a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x))$$

در بسط تابع متناوب $f(x)=\begin{cases} ۰ & -۲<x<-۱ \\ k & -۱<x<۱ \\ ۰ & ۱<x<۲ \end{cases}$ مقدار $b_۵$ کدام است؟

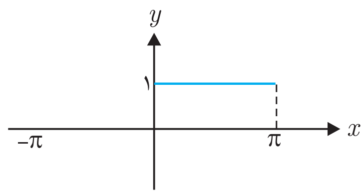
۱) $-\frac{۲}{۵\pi}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۲}{۵\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۵\pi}$

۱۱۱) (ابزار دقیق ۸۲) در بسط فوریه تابع متناوب شکل روبرو ضریب $\cos ۳x$ برابر است با:



۱) ۰ ۲) $-\frac{۲}{۳\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۳\pi}$ ۴) $\frac{۲}{۳\pi}$

۱۱۲) (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳) در بسط فوریه تابع متناوب شکل زیر ضریب $\sin 5x$ کدام است؟



۱) 0 ۲) $\frac{1}{5\pi}$ ۳) $\frac{2}{5\pi}$ ۴) $-\frac{2}{5\pi}$

۱۱۳) (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴) سری فوریه تابع $f(x+4)=f(x)$، $f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<-1\\ 1 & -1<x<1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$ به کدام شکل است؟

۱) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{3}+\cdots\right)$

۲) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{3}+\cdots\right)$

۳) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x+\cdots\right)$

۴) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x+\cdots\right)$

۱۱۴) (ابزار دقیق ۸۵) سری فوریه $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ و $0<x<L$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L}+\frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{L}+\frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L}+\cdots\right)$

۲) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L}+\frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi}{L}x+\frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L}+\cdots\right)$

۳) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L}-\frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi}{L}x+\frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L}+\cdots\right)$

۴) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L}-\frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{L}+\frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L}+\cdots\right)$

۱۱۵) (ابزار دقیق ۸۵) می‌دانیم بسط فوریه‌ی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر} \quad 0<x<\pi\\ 0 & \text{اگر} \quad -\pi<x<0\end{cases}$ به شکل

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

می‌باشد مقدار سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ عبارتست از:

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{\pi}{2}$ ۴) $\dfrac{\pi}{4}$

۱۱۶) (ابزار دقیق ۸۶) ضریب $\cos\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right)$ در بسط فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)=x, 0< x < L$ عبارتست از

۱) $\dfrac{-9L}{4\pi^2}$ ۲) $\dfrac{-4L}{9\pi^2}$ ۳) $\dfrac{4L}{9\pi^2}$ ۴) $\dfrac{9L}{4\pi^2}$

۱۱۷) (ابزار دقیق ۸۶) با توجه به سری فوریه برای تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ برای $|x|<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ که به شکل

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}-2(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\frac{1}{16}\cos 4x\cdots)$$

مقدار عددی $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{4}$ ۲) $\dfrac{\pi^2}{4}$ ۳) $\dfrac{\pi^2}{6}$ ۴) $\dfrac{\pi^2}{12}$

۱۱۸) (ابزار دقیق ۸۶) با توجه به سری فوریه $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{\pi(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$ برای تابع $f(x)=\begin{cases} x(\pi+x) & -\pi<x<0 \\ x(\pi-x) & 0<x<\pi\end{cases}$ و با استفاده از تساوی پارسوال مجموع سری عددی $1+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{1}{7^6}+\cdots$ عبارتست از

۱) $\dfrac{\pi^6}{960}$ ۲) $\dfrac{\pi^4}{90}$ ۳) $\dfrac{\pi^4}{960}$ ۴) $\dfrac{\pi^6}{90}$

۱۱۹) (ابزار دقیق ۸۷) سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=\dfrac{x}{|x|},\ 0<|x|<\pi$ با دوره‌ی تناوب $p=2\pi$ عبارت است از:

۱) $\dfrac{4}{\pi}(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x+\cdots)$

۲) $\dfrac{\pi}{4}(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x+\cdots)$

۳) $\dfrac{4}{\pi}(\sin x-\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x-\cdots)$

۴) $\dfrac{\pi}{4}(\sin x-\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x-\cdots)$

۱۲۰) (ابزار دقیق ۸۷) اگر سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=\sin \pi x,\ ۰<x<۱$ با دوره‌ی تناوب $p=۱$

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times ۳}\cos ۲\pi x+\frac{۱}{۳\times ۵}\cos ۴\pi x+\cdots\right)$$

باشد، آنگاه سری فوریه تابع تناوبی $|x|<\frac{۱}{۲}$ و $g(x)=\cos \pi x$ با دوره‌ی تناوبی $P=۱$ عبارت است از؟

۱) $g(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times ۳}\sin ۲\pi x+\frac{۱}{۳\times ۵}\sin ۴\pi x+\cdots\right)$

۲) $g(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times ۳}\cos ۲\pi x+\frac{۱}{۳\times ۵}\cos ۴\pi x+\cdots\right)$

۳) $g(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times ۳}\sin ۲\pi x+\frac{۱}{۳\times ۵}\sin ۴\pi x+\cdots\right)$

۴) $g(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times ۳}\cos ۲\pi x+\frac{۱}{۳\times ۵}\cos ۴\pi x+\cdots\right)$

۱۲۱) (ابزار دقیق ۸۸) اگر سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & ۰<x<۱\\ ۲ & ۱<x<۲\end{cases}$ و $P=۲L=۴$، برابر با

$$f(x)=\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{۲}-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi x}{۲}+\cdots)$$

باشد آنگاه جمله‌ی $a_۰$ در سری فوریه کسینوسی $g(x)=\begin{cases}۲ & ۰<x<۱\\ ۳ & ۱<x<۲\end{cases}$ و $P=۲L=۴$ عبارتست از

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲۲) (ابزار دقیق ۸۸) در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin ۲x & -\pi<x<-\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & -\frac{\pi}{۲}\le x\le ۰\\ \sin ۲x & ۰<x\le \pi\end{cases}$ با دوره تناوب $P=۲\pi$ به صورت

$$f(x)=a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$a_۲$ و $b_۲$ به ترتیب عبارتند از

۱) ۰ و ۱ ۲) ۰ و $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ و ۱ ۴) $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$

۱۲۳) (ابزار دقیق ۸۹) سری فوریه مختلط تابع $f(x) = \begin{cases} \pi & |x| < 1 \\ 0 & 1 < |x| < \pi \end{cases}$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{0 \neq n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n}{n\pi} e^{inx}$

۲) $f(x) = 1 + \sum_{0 \neq n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{inx}$

۳) $f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{0 \neq n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos n}{n\pi} e^{inx}$

۴) $f(x) = 1 + \sum_{0 \neq n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos n}{n\pi} e^{inx}$

۱۲۴) (ابزار دقیق ۸۹) اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ و $0 < x < 2\pi$ آنگاه جواب صحیح کدام است؟

۱) $f(x) = \frac{\pi + x}{2}$ ۲) $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ ۳) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ۴) $f(x) = \frac{\pi}{2} + x$

۱۲۵) (ابزار دقیق ۸۹) اگر $r(t)$ تابع متناوب $r(t) = \frac{\pi}{4}|\sin t|$، $-\pi < t < \pi$ و $r(t+2\pi) = r(t)$ باشد و $y'' + 9y = r(t)$ آنگاه جواب خصوصی معادله (یعنی: y_p) کدام است؟

سری فوریه تابع $r(t)$ به صورت زیر است:

$$r(t) = \frac{\pi}{4}|\sin t| = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{1\times 3}\cos 2t + \frac{1}{3\times 5}\cos 4t + \frac{1}{5\times 7}\cos 6t + \cdots\right)$$

۱) $y_p = \frac{1}{18} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9} \cos 2nt$

۲) $y_p = \frac{1}{18} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9} \cos 2nt$

۳) $y_p = \frac{1}{18} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)} \cos 2nt$

۴) $y_p = \frac{1}{18} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)} \cos 2nt$

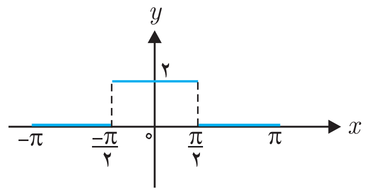
۱۲۶) (ابزاردقیق ۹۰) ضریب جمله $\cos\frac{3\pi x}{2}$ در بسط فوریه کسینوسی تابع متناوب $f(x) = (2 - x)$ و $0 < x < 2$ عبارتست از:

۱) $\frac{1}{9\pi^2}$ ۲) $\frac{2}{9\pi^2}$ ۳) $\frac{7}{9\pi^2}$ ۴) $\frac{8}{9\pi^2}$

۱۲۷) (ابزاردقیق ۹۱) جمله a_0 در بسط فوریه تابع تناوبی $0 < x < 2$، $f(x) = 2 - x$ با دوره تناوب $p = 2$ عبارتست از:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۲۸) (پلیمر ۷۲) بسط فوریه تابع f با نمودار زیر برابر است:



۱) $۱+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos nt}{t}$ ۲) $۱+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos(۲n-۱)t}{۲n-۱}$

۳) $۱+\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos nt}{t}$ ۴) $۱+\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos(۲n-۱)t}{۲n-۱}$

۱۲۹) (مهندسی شیمی ۷۴) تابع $f(x)$ به فرم زیر داده شده است. مقدار این تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ برابر کدامیک از پاسخها می‌باشد؟ (به کمک بسط فوریه)

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x<\frac{۱}{۲} \\ ۱ & x>\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱) از طریق سری فوریه جواب ندارد. ۲) مقدار تابع یک می‌شود.

۳) مقدار تابع صفر می‌شود. ۴) مقدار تابع از طریق سری فوریه $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۱۳۰) (مواد سرامیک ۸۰) هرگاه $a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ سری فوریه تابع $f(x)=\sin ۲x+\cos ۳x$ و $-\pi<x<\pi$ با دوره‌ی تناوب ۲π باشد، آنگاه $a_۳$ و $b_۲$ به ترتیب برابراند با

۱) ۳,۲ ۲) ۱,۱ ۳) ۲,۳ ۴) ۰,۰

۱۳۱) (مهندسی هسته‌ای ۸۰) مقدار $a_۲$ در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi<x<۰ \\ x^۲ & ۰<x<\pi \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) -۱

۱۳۲) (معماری کشتی ۸۰) سری فوریه $f(x)=\sin x$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ و دوره‌ی تناوب 2π عبارتست از:

۱) $\cos x$

۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin x$ که هیچ یک از a_n ها صفر نیستند.

۳) $\sin x$

۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos x$ که هیچ یک از b_n ها صفر نیستند.

۱۳۳) (هسته‌ای ۸۰) در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi<x<0\\ \cos x & 0<x<\pi\end{cases}$، مقدار a_1 کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۳۴) (هسته‌ای ۸۱) در بسط به سری فوریه تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi<x<0\\ 0 & 0<x<\pi\end{cases}$ مقدار b_1 کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۳۵) (هسته‌ای ۸۲) ضریب بسط فوریه a_n، $n\neq 0$ برای تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -5<x<0\\ 3 & 0<x<5\end{cases}$ اگر پریود $T=10$ $(L=5)$ باشد کدام است؟

۱) 0 ۲) 3 ۳) $\cos\frac{n\pi x}{5}$ ۴) $\sin\frac{n\pi x}{5}$

۱۳۶) (معماری کشتی ۸۳) با استفاده از بسط فوریه $f(x)=x^2$ در محدوده $-\pi<x<\pi$ می‌توان نشان داد که:

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}$ ۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2$ ۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}$

۱۳۷) (معماری کشتی ۸۴) اگر سری فوریه $f(t)=\begin{cases}t^2 & 0<t<2\\ f(t+2)=f(t) & \end{cases}$ به

صورت

$$\frac{۴}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{۴}{n^۲\pi^۲}\cos n\pi t+\left(\frac{-۴}{n\pi}\right)\sin n\pi t\right]$$

باشد مطلوبست محاسبه $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}$.

۱) $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۹}$ ۳) $\frac{\pi^۴}{۹۰}$ ۴) $\frac{\pi^۴}{۹۶}$

۱۳۸) (نفت ۸۴) می‌خواهیم بسط فوریه سینوسی نیم‌دامنه تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & ۰\leq x<\frac{L}{۳} \\ \frac{۱}{۲}(L-x) & \frac{L}{۳}\leq x\leq L\end{cases}$$

را بنویسیم، در این صورت ضرایب b_n این سری کدام است؟

۱) $\frac{۳L}{۲(n\pi)^۲}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right)$ ۲) $\frac{L}{(n\pi)^۲}\sin\frac{n\pi}{۳}$

۳) $\frac{۳L}{(n\pi)^۲}\sin\left(\frac{n\pi}{۳}\right)$ ۴) $\frac{۳}{(n\pi)^۲}\sin\left(\frac{n\pi}{۳}\right)$

۱۳۹) (هسته‌ای ۸۵) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\leq x<۱ \\ -۱ & ۱<x<۲\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{m-۱}}{\pi m}\cos(m\pi x)$

۲) $\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{m-۱}}{\pi m}\cos(m\pi x)$

۳) $\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{m}}{\pi(۲m-۱)}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$

۴) $\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$

۱۴۰) (MBA ۸۴) در بسط تابع $f(x)=\begin{cases} -\frac{۱}{۲}(\pi+x) & -\pi\leq x<۰ \\ \frac{۱}{۲}(\pi-x) & ۰\leq x\leq\pi\end{cases}$ به سری فوریه ضریب $\sin ۳x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ تست‌های سری فوریه

۱) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

این تست در صفحه ۵۸ جلد اول حل شده است.

۲) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

این تست در صفحه ۲۰ جلد اول حل شده است.

این تست را به روش های کوتاه دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۳) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

این تست در صفحه ۵۸ جلد اول حل شده است.

۴) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

این تست در صفحه ۲۲ جلد اول حل شده است.

۵) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

$$1+\cos n\pi=\begin{cases}2 & n=2k\\ 0 & n=2k-1\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx=2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(4k^2-1)^2}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$$\Longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

۶) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

$$\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2+5^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

$$1+\cos n\pi=\begin{cases}2 & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin^{۲}x dx = \frac{۸}{\pi^{۲}} + \frac{۱۶}{\pi^{۲}}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴k^{۲}-۱)^{۲}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴k^{۲}-۱)^{۲}} = \left(۱-\frac{۸}{\pi^{۲}}\right)\frac{\pi^{۲}}{۱۶} = \frac{\pi^{۲}-۸}{۱۶}$$

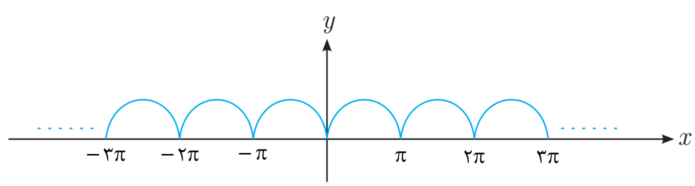
۷) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۱۵ جلد اول حل شده است.

۸) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

روش اول: با توجه به این‌که باید a_n نسبت به n زوج و b_n نسبت به n فرد باشد گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ غلط هستند در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.

روش دوم: با توجه به شکل سری فوریه که در زیر آمده است $f(t)$ زوج است در نتیجه گزینه‌های ۳ و ۴ غلط است و همچنین چون $f(t)$ پیوسته و $f'(t)$ ناپیوسته است بنابراین سرعت همگرایی a_n متناسب با $\frac{c}{n^{۲}}$ است و در نتیجه گزینه یک هم غلط است بنابراین گزینه ۲ صحیح است.



روش سوم: با توجه به شکل سری فوریه که در فوق آمده است $f(t)$ زوج و در نتیجه گزینه‌های ۳ و ۴ غلط است و با توجه به مطلب گفته شده در صفحه ۳۰ در مورد هارمونیک‌های زوج این بسط فقط شامل هارمونیک‌های زوج است در نتیجه گزینه یک هم غلط است و گزینه ۲ صحیح است.

روش چهارم: محاسبه مستقیم

با توجه به شکل سری فوریه که در فوق رسم شده بسط فوریه زوج است و در نتیجه

$$\begin{aligned} b_n &= ۰ \\ a_۰ &= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin x dx = \frac{۴}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin x\cos nx dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\sin(۱+n)x+\sin(۱-n)x)dx \\ &= \frac{-۱}{\pi}\left(\frac{\cos(n+۱)x}{n+۱}+\frac{\cos(۱-n)x}{۱-n}\right)\Big|_{۰}^{\pi} \\ &= \frac{۱}{\pi}\left(\frac{۱+\cos n\pi}{n+۱}+\frac{۱+\cos n\pi}{۱-n}\right) = \frac{۱}{\pi}(۱+\cos n\pi)\frac{۲}{۱-n^{۲}} \end{aligned}$$

$$۱+\cos n\pi = \begin{cases} ۲ & n=۲k \\ ۰ & n=۲k-۱ \end{cases}$$

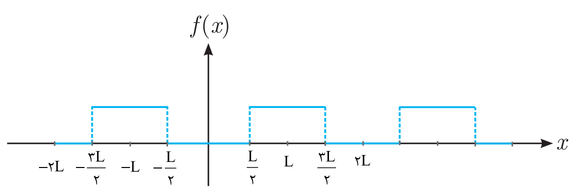
$$\Longrightarrow a_{۲k} = \frac{۴}{\pi(۱-۴k^{۲})} = \frac{-۴}{\pi(۴k^{۲}-۱)}$$

۹) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

پاسخ این تست در جلد اول صفحه ۵۱ می‌توانید مشاهده کنید.

۱۰) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

روش اول: شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم



$$\text{تابع زوج} \Longrightarrow b_n = ۰$$

$$a_{۰} = \frac{\text{مساحت در یک دوره}}{T} = \frac{L}{۲L} = \frac{۱}{۲}$$

$$a_n = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{۲}{L}\int_{\frac{L}{۲}}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= \frac{۲}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)_{\frac{L}{۲}}^{L} = \frac{-۲}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right) = \begin{cases} ۰ & n=۲k \\ (-۱)^{k+۱} & n=۲k-۱ \end{cases} \Longrightarrow a_{۲k-۱} = \frac{-۲(-۱)^{k+۱}}{\pi(۲k-۱)}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{۲k-۱}\cos\left((۲k-۱)\frac{\pi}{L}x\right)$$

روش دوم:

گزینه ۲ و ۳ غلط است $\Longrightarrow b_n=۰ \Longrightarrow$ تابع زوج است

$T=۲L$ در نتیجه جملات برحسب $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ باید باشند در نتیجه گزینه یک هم غلط است و گزینه چهار صحیح است.

توجه: به روش‌های دیگری این تست را می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

(۱۱ **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

این تست در صفحه ۱۶ جلد اول حل شده است.

(۱۲ **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

روش اول: با توجه به روش گفته شده در صفحه ۲۱ جلد اول بسط فوریه تابع فقط شامل هارمونیک‌های فرد است در نتیجه گزینه یک قابل محاسبه است.

روش دوم: سری فوریه تابع بدست می‌آوریم

تابع $f(x)$ زوج $\Longrightarrow b_n=۰$

$$a_۰=\frac{۲}{۱}\int_۰^۱ xdx=۱\Longrightarrow\frac{a_۰}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$a_n=\frac{۲}{۱}\int_۰^۱ x\cos n\pi x dx=۲\left(x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)+\frac{\cos n\pi x}{n^۲\pi^۲}\right)_۰^۱$$

$$=۲\,\frac{\cos n\pi-۱}{n^۲\pi^۲}$$

$$\cos n\pi-۱=\begin{cases}۰ & n=۲k\\ -۲ & n=۲k-۱\end{cases}\Longrightarrow a_{۲k-۱}=\frac{-۴}{\pi^۲(۲k-۱)^۲}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۴}{(۲k-۱)^۲}\cos(۲k-۱)\pi x$$

با در نظر گرفتن $x=۰$ حاصل سری گزینه یک بدست می‌آید.

(۱۳ **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۲۳ جلد اول حل شده است.

۱۴) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

دوره تناوب $T=۱$ است و تابع زوج است بنابراین

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sin \pi x \cos ۲n\pi x dx \\
&= ۲\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \Big(\sin(۱+۲n)\pi x + \sin(۱-۲n)\pi x\Big)dx \\
&= -۲\left[\frac{\cos(۱+۲n)\pi x}{(۱+۲n)\pi} + \frac{\cos(۱-۲n)\pi x}{(۱-۲n)\pi}\right]_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \\
&= ۲\left(\frac{۱}{(۱+۲n)\pi} + \frac{۱}{(۱-۲n)\pi}\right) \\
&= \frac{۲}{\pi}\,\frac{۲}{۱-۴n^۲} = \frac{۴}{\pi}\,\frac{۱}{۱-۴n^۲}
\end{aligned}$$

توجه: به روش‌های کوتاه و ذهنی هم می‌توان این تست را حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۱۵) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۵۹ جلد اول حل شده است.

۱۶) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

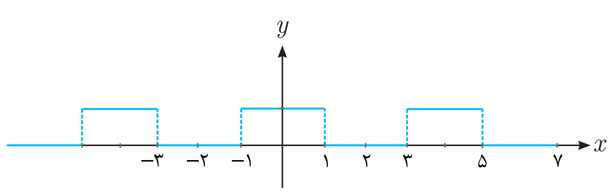
این تست در صفحه ۷۶ جلد اول حل شده است.

۱۷) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

این تست در صفحه ۶۴ جلد اول حل شده است.

۱۸) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

ابتدا شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم.



تابع زوج است، بنابراین $b_n=۰$ است و در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۴ غلط هستند.

چون تابع زوج است بنابراین تابع باید برحسب $\cos\frac{n\pi}{۲}x$ بسط داده شود و از طرفی اگر

قرینه نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_\circ}{۲}$ بدست آورده و به اندازه نیم پریود جابجا کنیم بر نیم پریود دوم منطبق می‌شود بنابراین فقط شامل هارمونیک‌های فرد است و تنها گزینه‌ای که فقط شامل هارمونیک‌های فرد $\cos\frac{n\pi}{۲}x$ است گزینه ۳ می‌باشد.

روش دوم: محاسبه مستقیم ضرایب.

$$\text{تابع زوج} \implies b_n = \circ \quad , \quad a_\circ = \frac{۲}{۲}\int_\circ^۱ dx = ۱$$

$$a_n = \frac{۲}{۲}\int_\circ^۱ ۲\cos\frac{n\pi}{۲}x dx = \frac{۴}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}x\right)\Big|_\circ^۱ = \frac{۴}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right)$$

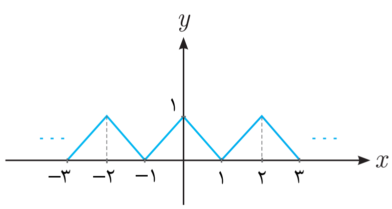
$$\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right) = \begin{cases} \circ & n = ۲k \\ (-۱)^{k+۱} & n = ۲k-۱ \end{cases}$$

$$\implies a_k = \frac{۴(-۱)^{k+۱}}{\pi(۲k-۱)}$$

$$f(x) = ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{k+۱}}{\pi(۲k-۱)}\cos\left(\frac{(۲k-۱)\pi}{۲}x\right)$$

۱۹) گزینه‌ی «۴» صحیح است.

روش اول: ابتدا شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم.



تابع زوج است بنابراین:

$$a_n = \frac{۲}{۱}\int_\circ^۱ (۱-t)\cos(n\pi t)dt$$

$$\implies a_۳ = ۲\int_\circ^۱ (۱-t)\cos(۳\pi t)dt$$

$$= ۲\left[(۱-t)\left(\frac{\sin ۳\pi t}{۳\pi}\right) - (-۱)\left(\frac{-\cos ۳\pi t}{۹\pi^۲}\right)\right]_\circ^۱$$

$$= ۲\left[\frac{۱}{۹\pi^۲} - \frac{\cos ۳\pi}{۹\pi^۲}\right] = \frac{۴}{۹\pi^۲}$$

روش دوم: می‌دانیم

$$\begin{cases} a_n = -\frac{L}{n\pi}b'_n + \frac{۱}{n\pi}\sum_{k=۱}^{\infty} F_k \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_k\right) \\ b_n = \frac{L}{n\pi}a'_n + \frac{۱}{n\pi}\sum_{k=۱}^{\infty} F_k \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_k\right) \end{cases}$$

برای تابع فوق داریم:

$$a_۳ = -\frac{۱}{۳\pi}\left(\frac{۱}{۳\pi}a''_۳ + \frac{۱}{۳\pi}((-۲) + ۲ \times \cos ۳\pi)\right) = \frac{۴}{۹\pi^۲}$$

برای توضیحات بیشتر به فصل اول جلد اول، صفحه ۷۳ مراجعه نمائید.

۲۰) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

پاسخ تشریحی در جلد اول صفحه ۲۵ می‌توانید مشاهده کنید.

۲۱) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

$b_۳$ ضریب $\sin ۳x$ است کافی است در تابع $f(x)$ ضریب $\sin ۳x$ را بدست آوریم که این کار با توجه به روابط مثلثاتی امکان‌پذیر است.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲} + \sin x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\cos ۲x + \sin x\right)^۲ \\ &= \frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x + \sin^۲ x + \cos ۲x \sin x \\ &= \frac{۱}{۸}(۱+\cos ۴x) + \frac{۱-\cos ۲x}{۲} + \frac{۱}{۲}\sin ۳x - \frac{۱}{۲}\sin x \\ &\Rightarrow b_۳ = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

۲۲) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

$$x = \frac{۴}{\pi}(\sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right) - \frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۲}x + \frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi x}{۲} - \cdots)$$

از طرفین رابطه فوق انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{۱}{۲}x^۲ = \frac{۴}{\pi}\left(-\frac{۲}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right) + \frac{۱}{۲\pi}\cos\left(\frac{۲\pi}{۲}x\right) - \frac{۲}{۹\pi}\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}x\right) + \cdots\right) + C$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$x^۲ = \frac{۸}{\pi}\left(\frac{-۲}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right) + \frac{۱}{۲\pi}\cos\left(\frac{۲\pi}{۲}x\right) - \frac{۲}{۹\pi}\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}x\right) + \cdots\right) + C$$

$$x^۲ - x = \frac{۸}{\pi}\left(\frac{-۲}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right) + \frac{۱}{۲\pi}\cos\left(\frac{۲\pi}{۲}x\right) - \frac{۲}{۹\pi}\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}x\right) + \cdots\right) + C$$

$$-\frac{۴}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right) - \frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{۲\pi}{۲}x\right) + \frac{۱}{۳}\sin\left(\frac{۳\pi x}{۲}\right) - \cdots\right)$$

$$\text{ضریب } \cos\pi x = \frac{۸}{\pi}\times\frac{۱}{۲\pi} = \frac{۴}{\pi^۲}$$

این تست به روش ذهنی هم قابل حل است سعی کنید حل کنید.

۲۳) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۳۹ جلد اول حل شده است.

۲۴) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

این تست در صفحه ۴۱ جلد اول حل شده است.

۲۵) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۴۰ جلد اول حل شده است.

۲۶) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

این تست در صفحه ۶۲ جلد اول حل شده است.

۲۷) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

این تست در صفحه ۶۰ جلد اول حل شده است.

۲۸) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

روش اول:

سری فوریه خاصیت جمع‌پذیری دارد بنابراین می‌توانیم ضرایب فوریه بسط کسینوسی توابع $f_۱(x) = x,\ ۰ < x < \pi$ و $f_۲(x) = \cos ۲x,\ ۰ < x < \pi$ را جداگانه بدست آورده و با هم جمع کرد.

با توجه به روش توضیح داده شده در صفحه ۲۱ جلد اول، بسط کسینوسی تابع $f_۱(x) = x,\ ۰ < x < \pi$ فقط شامل هارمونیک‌های فرد است در نتیجه $a_۲ = ۰$ است و سری فوریه کسینوسی تابع $f_۲(x) = \cos ۲x,\ ۰ < x < \pi$ با خودش برابر است در نتیجه $a_۲ = ۱$ و سایر ضرایب برابر صفر است.

$$a_{۲f(x)} = a_{۲f_۱} + a_{۲f_۲} = ۰ + ۱ = ۱$$

روش دوم: محاسبه مستقیم

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos 2x)\cos 2x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin x\right)\right]_0^{\pi} \\ \Rightarrow\quad & a_2 = 1 \end{aligned}$$

۲۹) گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}\cos nx$$

برای محاسبه سری داده شده از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}(1)^2dx=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2$$

$$\frac{2\alpha}{\pi}=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2=\frac{\pi\alpha-\alpha^2}{2}$$

۳۰) گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به توضیحات صفحه ۷۹ جلد اول چون تابع نسبت به x و y فرد است، گزینه ۲ صحیح است.

۳۱) گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با انتگرال‌گیری از سری فوریه داده شده سری فوریه مورد نظر بدست می‌آید.

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots$$

با انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\frac{x^3}{12}-\frac{\pi^2}{12}x=-\sin x+\frac{\sin 2x}{2^3}-\frac{\sin 3x}{3^3}+\cdots+c$$

از تابع زوج انتگرال گرفتیم، حاصل تابعی فرد است و در نتیجه $C=0$ است.

$$\frac{\pi^2}{12}x-\frac{x^3}{12}=\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\cdots$$

توجه: این تست را به روش ذهنی هم می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۳۲) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

$$\text{تابع } f(x) \text{ زوج است} \Longrightarrow b_n = ۰$$

$$a_۰ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \cos ax dx = \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\sin ax}{a}\right)_۰^{\pi} = \frac{۲}{\pi}\,\frac{\sin a\pi}{a}$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}(\cos(a+n)x + \cos(a-n)x)dx$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n} + \frac{\sin(a-n)x}{a-n}\right]_۰^{\pi}$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right]$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin(a\pi)\cos n\pi}{a+n} + \frac{\sin(a\pi)\cos n\pi}{a-n}\right]$$

$$= \frac{\sin(a\pi)\cos n\pi}{\pi}\,\frac{۲a}{a^۲-n^۲}$$

$$\Longrightarrow a_n = (-۱)^n \frac{۲a\sin(a\pi)}{\pi(a^۲-n^۲)}$$

۳۳) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

این تست در صفحه ۷۰ جلد اول حل شده است.

۳۴) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

این تست در صفحه ۱۶ جلد اول حل شده است.

۳۵) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

روش اول: تابع $f(x)$ زوج است بنابراین

$b_n = ۰ \Longrightarrow$ گزینه ۲ و ۴ غلط است.

با توجه به توضیح صفحه ۲۱ جلد اول سری فوریه فقط شامل هارمونیک‌های فرد است در نتیجه گزینه یک هم غلط است و گزینه ۳ صحیح است.

روش دوم: تابع $f(x)$ زوج است بنابراین

$$b_n = \circ \Longrightarrow \text{گزینه ۲ و ۴ غلط است.}$$

$a_m = \dfrac{۱}{m}$ نسبت به m زوج نیست و در نتیجه گزینه یک غلط است و پاسخ گزینه ۳ است.

روش سوم: تابع f زوج است بنابراین

$$b_n = \circ \Longrightarrow \text{گزینه ۲ و ۴ غلط است.}$$

چون تابع $f(x)$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته است و $b_n = \circ$ است سرعت همگرایی a_n باید متناسب با $\dfrac{c}{n^۲}$ باشد در نتیجه گزینه یک غلط است و پاسخ گزینه ۲ است.

روش چهارم: محاسبه مستقیم:

$$\text{تابع } f(x) \text{ زوج} \Longrightarrow b_n = \circ \Longrightarrow \text{گزینه ۲ و ۴ غلط است.}$$

$$a_\circ = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi x dx = \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\pi^۲}{۲}\right) = \pi \Longrightarrow \frac{a_\circ}{۲} = \frac{\pi}{۲}$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi x\cos nx dx = \frac{۲}{\pi}\left[x\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \left(\frac{-\cos nx}{n^۲}\right)\right]_\circ^\pi$$

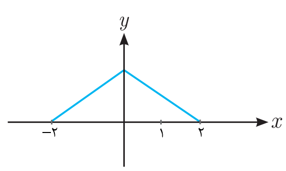
$$= \frac{۲}{\pi}\,\frac{\cos n\pi - ۱}{n^۲}$$

$$\cos n\pi - ۱ = \begin{cases} \circ & n = ۲k \\ -۲ & n = ۲k - ۱ \end{cases} \Longrightarrow a_k = \frac{-۴}{\pi(۲k-۱)^۲}$$

توجه: این تست را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۳۶) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

روش اول: شکل تمام دامنه تابع به صورت زیر است.



اگر قرینه نیم پریود اول نسبت به $\dfrac{a_\circ}{۲} = \dfrac{۱}{۲}$ بدست آوریم و به اندازه نیم پریود به سمت راست جابجا کنیم بر نیم پریود دوم منطبق می‌شود بنابراین بسط فوریه فقط شامل

هارمونیک‌های فرد است در نتیجه گزینه ۱ و ۳ غلط است. $f(0)=1$ و با جایگذاری $t=0$ در گزینه ۴، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ منفی بدست می‌آید که غلط است در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.

روش دوم:

$$\text{تابع زوج} \Longrightarrow b_n = 0$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\text{مساحت یک دوره}}{\text{دوره تناوب}}=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}t\,dt$$

$$=\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_0^2$$

$$=\frac{2(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}$$

$$1-\cos n\pi=\begin{cases}0 & n=2k\\ 2 & n=2k-1\end{cases}\Longrightarrow a_{2k-1}=\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$$

توجه: این تست را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۳۷) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۲۶ جلد اول حل شده است.

توجه: این تست را به روش‌های کوتاه دیگری نیز می‌توان حل کرد سعی کنید انجام دهید.

۳۸) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

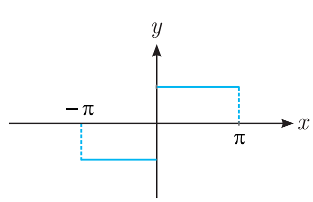
به شرایط وجود سری فوریه در صفحه ۴۵ جلد اول مراجعه کنید.

۳۹) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

کافی است شکل تابع را در بازه داده شده رسم و تکرار کنیم.

۴۰) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

تابع فرد است بنابراین:



$$a_0=a_n=0$$

۴۱) **تمام گزینه‌ها غلط هستند.**

چون تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}$ زوج است بنابراین $b_n=0$ است.

۴۲) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

با توجه به تذکر صفحه ۱۵ جلد اول داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin x \, \frac{1+\cos 2x}{2} = 2\sin x + 2\sin x\cos 2x \\ &= 2\sin x + \sin 3x - \sin x = \sin x + \sin 3x \end{aligned}$$

۴۳) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

روش اول: با توجه به تذکر گفته شده در صفحه ۳۱ جلد اول a_n نسبت به n باید زوج باشد به همین دلیل گزینه‌های ۲ و ۴ غلط هستند بنابراین کافی است b_n را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(4\pi^2\left(\frac{-\cos 2n\pi}{n}\right)\right) = -\frac{4\pi}{n} \end{aligned}$$

توجه: به روش‌های کوتاه دیگری نیز می‌توان این تست را حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۴۴) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

روش اول:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Longrightarrow \text{گزینه ۲ و ۳ و ۴ غلط است}$$

روش دوم: تابع فرد و در نتیجه $a_0 = a_n = 0$ و همچنین قرینه نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_0}{2}$ را به اندازه نصف پریود (π) به سمت راست جابجا کنیم بر نیم پریود دوم منطبق می‌شود بنابراین بسط فوریه فقط شامل هارمونیک‌های فرد است و تنها گزینه‌ای که این مشخصه را دارد گزینه یک است.

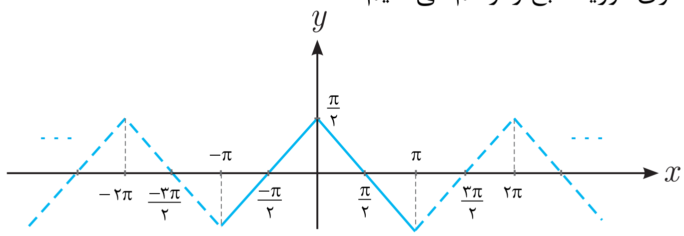
روش سوم: محاسبه مستقیم

$$\text{تابع فرد} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n} \end{cases}$$

$$۱-\cos n\pi=\begin{cases} \circ & n=۲k \\ ۲ & n=۲k-۱ \end{cases} \Longrightarrow b_n=\frac{۴}{\pi}\times\frac{۱}{۲n-۱}$$

۴۵) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

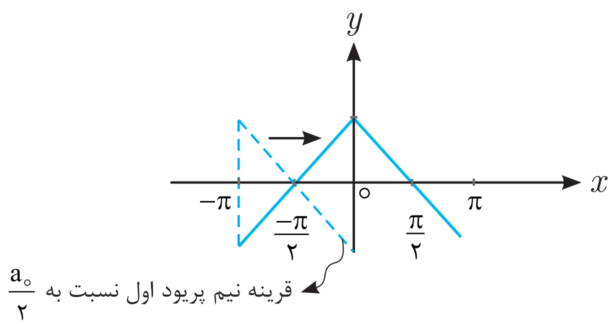
شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم



تابع زوج است بنابراین $b_n=\circ$ و در نتیجه گزینه ۳ و ۴ غلط است.

$$\frac{a_\circ}{۲}=\frac{\text{سطح زیر نمودار در یک دوره}}{T}=\circ$$

اگر قرینه نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_\circ}{۲}$ بدست آورده و به اندازه نیم دوره به سمت راست جابجا کنیم بر نیم پریود دوم منطبق می‌شود در نتیجه بسط فوریه فقط شامل هارمونیک‌های فرد است.



از گزینه‌های باقی‌مانده ۱ و ۲ گزینه ۲ فقط شامل هارمونیک‌های فرد است.

روش دوم: محاسبه مستقیم a_n، چون تابع $f(x)$ زوج است a_n به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\cos(nx)dx=\frac{۲}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)-\frac{\cos nx}{n^۲}\right]_\circ^\pi \\ &= \frac{۲}{n^۲\pi}(۱-\cos n\pi)=\frac{۲}{n^۲\pi}(۱-(-۱)^n) \end{aligned}$$

توجه: این تست را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۴۶) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

$$\text{مقدار سری فوریه در مرزها} = \frac{\text{مجموع حد مقدار ابتدای مرز و انتهای مرز}}{۲} = \frac{\pi^۲ - \pi + \pi^۲ + \pi}{۲} = \pi^۲$$

۴۷) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

$$\frac{a_\circ}{۲} = \frac{\text{مساحت در یک دوره}}{T} = \frac{\pi}{۲\pi} = \frac{۱}{۲}$$

قرینه نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_\circ}{۲}$ را اگر به اندازه نیم پریود جابجا کنیم بر نیم پریود دوم واقع می‌شود بنابراین بسط فوریه فقط شامل هارمونیک‌های فرد است و هارمونیک‌های زوج از جمله $a_۴$ برابر صفر است.

روش دوم: محاسبه مستقیم ضریب

$$a_۴ = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۴x dx = \circ$$

۴۸) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

$$\begin{aligned}
a_۲ &= \frac{۲}{\pi}\left(\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۲x dx + \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} ۲\cos ۲x dx\right) = \circ \\
a_۳ &= \frac{۲}{\pi}\left(\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۳x dx + \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} ۲\cos ۳x dx\right) = \frac{۲}{\pi}\left(\frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲} - \frac{۲}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲}\right) \\
&= \frac{۲}{۳\pi}
\end{aligned}$$

۴۹) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \sin x\cos nx dx = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi (\sin(۱+n)x + \sin(۱-n)x)dx \\
&= \frac{-۱}{\pi}\left(\frac{\cos(n+۱)x}{n+۱} + \frac{\cos(۱-n)x}{۱-n}\right)\Bigg|_\circ^\pi \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\frac{۱+\cos n\pi}{n+۱} + \frac{۱+\cos n\pi}{۱-n}\right) = \frac{۱}{\pi}(۱+\cos n\pi)\frac{۲}{۱-n^۲} \\
&= \frac{۲}{\pi}\,\frac{۱+\cos n\pi}{۱-n^۲}
\end{aligned}$$

توجه: این تست را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۵۰) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

با توجه توضیحات صفحه ۴۵ جلد اول پاسخ گزینه ۴ است.

۵۱) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

روش اول: چون در بسط کسینوسی $y = \sin x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ثابت فوریه مخالف صفر است در نتیجه گزینه ۳ صحیح است.

روش دوم:

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\Big) dx$$

$$= \frac{-2}{\pi} \left[\frac{\cos(1+2n)x}{1+2n} + \frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{2}{1-4n^2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-4n^2} = \frac{-4}{\pi}\,\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

توجه: این تست را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۵۲) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

گزینه ۳ و ۴ غلط است. $\Longleftarrow a_0 = a_n = 0 \Longleftarrow$ تابع $f(x)$ فرد است

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{L}\,\frac{1}{1+(\frac{n\pi}{L})^2}\left[e^x\left(\sin(\frac{n\pi}{L}x) - \frac{n\pi}{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\right)\right]_0^L$$

$$= \frac{2}{L}\,\frac{1}{1+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left(\frac{n\pi}{L}(1 - e^L\cos n\pi)\right)$$

$$= \frac{۲n\pi}{L^۲} \times \frac{L^۲}{n^۲\pi^۲} \frac{۱ - e^L \cos n\pi}{۱ + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^۲} = \frac{۲}{n\pi} \frac{۱ - e^L \cos n\pi}{۱ + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^۲}$$

۵۳) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

این تست در صفحه ۷۴ جلد اول حل شده است.

۵۴) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

کافی است $f(x)$ و $u(x)$ را در معادله جایگذاری کنیم.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} -A_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲ \cos\frac{n\pi}{L} - B_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲ \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + k^۲\frac{A_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} k^۲ A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$+k^۲ B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

اگر دو طرف تساوی را با هم متحد قرار دهیم، داریم:

$$\begin{cases} k^۲\frac{A_\circ}{۲} = \frac{a_\circ}{۲} \Longrightarrow A_\circ = \frac{a_\circ}{k^۲} \\ A_n\left(k^۲ - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲\right) = a_n \Longrightarrow A_n = \dfrac{a_n}{k^۲ - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲} \\ B_n\left(k^۲ - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲\right) = b_n \Longrightarrow B_n = \dfrac{b_n}{k^۲ - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲} \end{cases}$$

توجه: این تست به روش ذهنی هم قابل حل است، سعی کنید انجام دهید.

۵۵) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

روش اول:

$$a_\circ = \frac{۲}{L}\int_\circ^L x dx = \frac{۲}{L}\left(\frac{x^۲}{۲}\right)\Big|_\circ^L = L \Longrightarrow \frac{a_\circ}{۲} = \frac{L}{۲}$$

در نتیجه گزینه ۲ و ۴ غلط است.

اگر $x = \circ$ قرار دهیم در گزینه یک مقدار سری $\sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲m-۱)^۲}$ منفی بدست می‌آید در نتیجه گزینه یک هم غلط است و پاسخ گزینه ۳ است.

روش دوم:

$$a_n = \frac{۲}{L}\int_\circ^L x\cos\frac{n\pi}{L}x dx = \frac{۲}{L}\left[x\left(\frac{L}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^۲}{n^۲\pi^۲}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_\circ^L$$

$$= \frac{۲}{L}\left[\frac{l^۲}{n^۲\pi^۲}(\cos(n\pi) - ۱)\right] = \begin{cases} \circ & n = ۲k \\ \dfrac{-۴L}{\pi^۲(۲k-۱)^۲} & n = ۲k - ۱ \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{L}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{-۴L}{\pi^۲(۲k-۱)^۲} \cos\left(\frac{(۲k-۱)\pi}{L}x\right)$$

توجه: این تست را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۵۶) **گزینه‌ی «۴» صحیح است.**

روش اول: این سوال بیشتر مربوط به مبحث اعداد مختلط است تا مبحث سری فوریه برای حل آن مطابق زیر عمل می‌کنیم

$$p = ۱ + \cos x + \frac{\cos ۲x}{۲!} + \frac{\cos ۳x}{۳!} + \cdots$$

$$q = \sin x + \frac{\sin ۲x}{۲!} + \frac{\sin ۳x}{۳!} + \cdots$$

q تابع کمکی است که خودمان در نظر گرفتیم.

$$P + iq = ۱ + (\cos x + i\sin x) + \frac{(\cos ۲x + i\sin ۲x)}{۲!} + \frac{\cos ۳x + i\sin ۳x}{۳!} + \cdots$$

از قضیه دموآور استفاده می‌کنیم.

$$P + iq = ۱ + \cos x + i\sin x + \frac{(\cos x + i\sin x)^۲}{۲!} + \frac{(\cos ۳x + i\sin ۳x)^۳}{۳!} + \cdots$$

اگر $u = \cos x + i\sin x$ در نظر بگیریم داریم:

$$p + iq = ۱ + u + \frac{u^۲}{۲!} + \frac{u^۳}{۳!} + \cdots = e^u$$

$$p + iq = e^{\cos x + i\sin x}$$

$$p = \mathrm{Re}\left\{e^{\cos x + i\sin x}\right\} = \mathrm{Re}\left\{e^{\cos x} \times e^{i\sin x}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x))\right\} = e^{\cos x}\cos(\sin x)$$

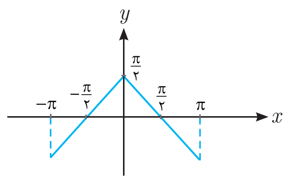
روش دوم: اگر در صورت سوال $x = \circ$ در نظر بگیریم داریم:

$$۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots = e$$

بنابراین در گزینه‌ها هم اگر $x=\circ$ قرار دهیم باید برابر e شود که تنها گزینه ۴ این خصوصیت را دارد.

۵۷) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

شکل تابع در یک دوره به صورت زیر است.



تابع زوج است و در نتیجه $b_n=\circ$.

$$\frac{a_\circ}{۲}=\frac{\text{جمع جبری مساحت‌ها در یک دوره}}{\text{دوره تناوب}}=\circ$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi\left(\frac{\pi}{۲}-t\right)\cos ntdt$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{۲}-t\right)\left(\frac{\sin nt}{n}\right)-(-۱)\left(\frac{-\cos nt}{n^۲}\right)\right]_\circ^\pi$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{۱-\cos n\pi}{n^۲}\right]=\begin{cases}\circ & n=۲k\\ \dfrac{۴}{\pi(۲k-۱)^۲} & n=۲k-۱\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{\pi(۲k-۱)^۲}\cos(۲k-۱)x$$

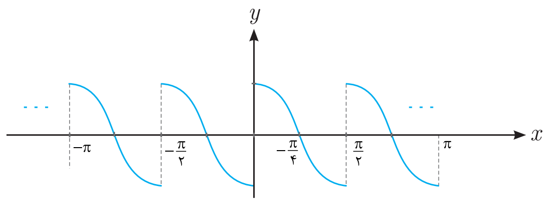
برای محاسبه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^۲}$ کافی است در سری فوریه $x=\circ$ در نظر بگیریم

$$f(\circ)=\frac{\pi}{۲}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۴}{\pi(۲k-۱)^۲}\Longrightarrow\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^۲}=\frac{\pi^۲}{۸}$$

توجه: به روش‌های دیگری نیز می‌توان این تست را حل کرد، سعی کنید انجام دهید.

۵۸) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

برای تشخیص زوج یا فرد بودن بسط شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم.



تابع فرد است بنابراین بسط فوریه به صورت سینوسی است.

۵۹) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

$$\text{تابع زوج است} \Longrightarrow b_n = 0$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{مساحت یک دوره}}{\text{دوره تناوب}} = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(an)}{n}$$

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(an)}{n}\cos(nx)$$

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(an)}{n}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(an)}{n} = \left(1 - \frac{a}{\pi}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi - a}{2}$$

۶۰) **گزینه‌ی «۱» صحیح است.**

با توجه به تعریف بسط نیم دامنه می‌توان نوشت:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad , \quad 0 < x < \pi$$

از طرفین بسط فوق انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} + C$$

چون از تابع زوج انتگرال گرفتیم حاصل تابع فرد خواهد بود و در نتیجه $C = 0$ است.

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}x = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} \quad , \quad 0 < x < \pi$$

کافی است $x = \frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم.

$$\frac{۱}{۲}\frac{\pi^۲}{۴} - \frac{\pi^۲}{۴} = -\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)\frac{\pi}{۲}}{(۲n-۱)^۳}$$

$$-\frac{\pi^۲}{۸} = -\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{(۲n-۱)^۳} \Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{(۲n-۱)^۳} = \frac{\pi^۳}{۳۲}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)^۳} = \frac{\pi^۳}{۳۲}$$

۶۱) گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$(\pi - x)(\pi + x) = \pi^۲ - x^۲$$

از طرفین سری فوریه داده شده انتگرال می‌گیریم

$$\frac{۱}{۲}x^۲ = ۲\left[-\frac{\cos x}{۱} + \frac{\cos^۲ x}{۲^۲} - \frac{\cos ۳x}{۳^۳} + \cdots\right] + C$$

$$c = \frac{a_\circ}{۲} = \frac{۲}{۲\pi}\int_\circ^\pi \frac{۱}{۲}x^۲ dx = \frac{۱}{۲\pi} \times \frac{۱}{۳}\pi^۳ = \frac{\pi^۲}{۶}$$

طرفین رابطه فوق را در منفی دو ضرب و سپس منهای $\pi^۲$ می‌کنیم.

$$\pi^۲ - x^۲ = -۴\left[-\frac{\cos x}{۱} + \frac{\cos ۲x}{۲^۲} - \frac{\cos ۳x}{۳^۲} + \cdots\right] - \frac{\pi^۲}{۳} + \pi^۲$$

$$\pi^۲ - x^۲ = \frac{۲\pi^۲}{۳} + ۴\left[\frac{\cos x}{۱} - \frac{\cos ۲x}{۲^۲} + \frac{\cos ۳x}{۳^۲} - \cdots\right]$$

این تست به روش ذهنی قابل حل است سعی کنید انجام دهید.

۶۲) گزینه‌ی «۴» صحیح است.

تابع فرد است بنابراین $a_n = a_\circ = \circ$ و b_n هم به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$b_n = \frac{۲}{۴}\int_\circ^۴ \sin\frac{n\pi}{۴}x dx = \frac{-۲}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{۴}x\right)\Big|_\circ^۴$$

$$= ۲\frac{۱-\cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \circ & n = ۲k \\ \dfrac{۴}{\pi(۲k-۱)} & n = ۲k-۱ \end{cases}$$

این تست به روش‌های دیگری نیز قابل حل است، سعی کنید انجام دهید.

۶۳) **گزینه‌ی «۲» صحیح است.**

روش اول: صفحه ۳۲ جلد اول را مشاهده کنید.

روش دوم: با استفاده از تذکر صفحه ۶۴ جلد اول داریم:

$$a_\circ = \frac{۱}{۳}\int_\circ^{۳} x dx = \frac{۳}{۲} \Longrightarrow \frac{a_\circ}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

گزینه‌های ۱ و ۴ غلط است.

a_n برابر با نصف ضرایب بسط کسینوسی $g(x) = x, \ \circ < x < ۳$ می‌باشد و چون در بسط کسینوسی $g(x) = x, \circ < x < ۳$ اگر قرینه نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_\circ}{۲}$ بدست آوریم و به اندازه پریود به سمت راست جابجا کنیم بر نیم پریود دوم منطبق می‌شود بنابراین بسط فوریه فقط شامل هارمونیک‌های فرد است و از گزینه‌های باقی‌مانده فقط گزینه ۲ این a_n مشخصه را دارد.

روش سوم: محاسبه ضرایب.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{۱}{۳}\int_\circ^{۳} x\cos\frac{n\pi}{۳}x dx = \frac{۱}{۳}\left[x\left(\frac{۳}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{۳}x\right) + \frac{۹}{\pi^{۲}n^{۲}}\cos\left(\frac{n\pi}{۳}x\right)\right]_\circ^{۳} \\
\Longrightarrow a_n &= \frac{۱}{۳}\left[\frac{۹}{n^{۲}\pi^{۲}}(\cos n\pi - ۱)\right] = \frac{۳}{n^{۲}\pi^{۲}}(\cos n\pi - ۱) \\
b_n &= \frac{۱}{۳}\int_\circ^{۳} x\sin\frac{n\pi}{۳}x dx = \frac{۱}{۳}\left[x\left(-\frac{۳}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{۳}x\right) + \frac{۹}{n^{۲}\pi^{۲}}\sin\frac{n\pi}{۳}x\right]_\circ^{۳} \\
&= -\frac{۳}{n\pi}\cos(n\pi)
\end{aligned}$$

۶۴) **تمام گزینه‌ها غلط هستند.**

این تست در صفحه ۶۰ جلد اول حل شده است.

۶۵) **تمام گزینه‌ها غلط هستند.**

این تست در صفحه ۸۰ جلد اول حل شده است.

۶۶) **گزینه‌ی «۳» صحیح است.**

از طرفین بسط فوریه داده شده انتگرال می‌گیریم

$$\frac{۱}{۲}x^{۲} = \frac{۴}{\pi}\left(-\frac{۲}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right) + \frac{۱}{۲\pi}\cos\left(\frac{۲\pi}{۲}x\right) - \cdots\right) + C$$