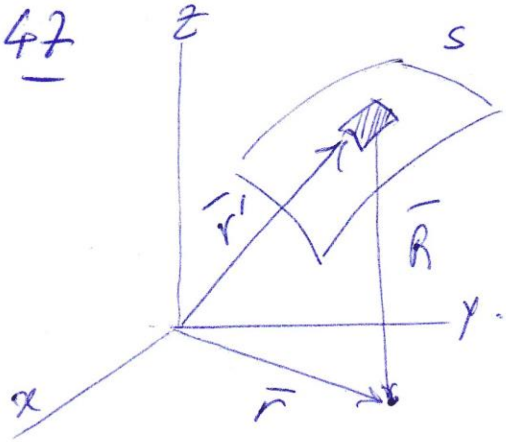
* میدان الکتریکی توزیع پیوسته سطحی :



- بار با چگالی $\rho_s(r')$ روی سطح S توزیع شده است.

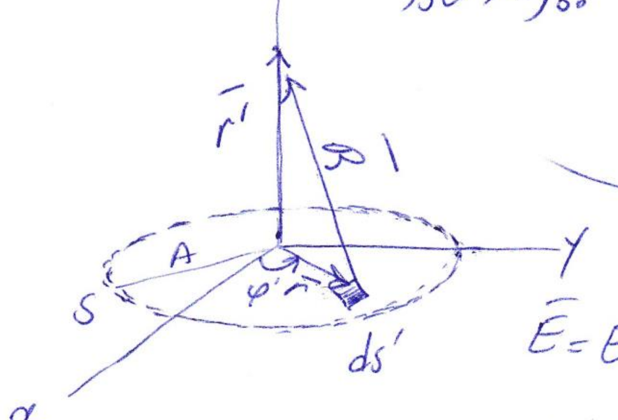
$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$dq = \rho_s(r')\, ds'$$

$$\bar{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \frac{dq\,\bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\bar{dE} = \frac{\rho_s(r')\, ds'\, \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \rightarrow \bar{E} = \int_S \frac{\rho_s(r')\,\bar{R}\, ds'}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

مثال: بار الکتریکی روی سطح یک دیسک به شعاع A، به صورت یکنواخت توزیع شده است. $\rho_s(r') = \rho_{s0}$. میدان الکتریکی را روی محور z محاسبه کنید.



حل: انتخاب دستگاه: مختصات استوانه‌ای

$$\bar{E}(r,\varphi,z)$$

- برای تقارن: سو جهت $\bar{E} = E(z)\hat{a}_z$

اندازه: $E(\cancel{r},\cancel{\varphi},z)$

- حل انتگرال :

$$\bar{E} = \int_S \frac{\rho_s(r')\,\bar{R}\,ds'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3}$$

$$\rho_s(r') = \rho_{s0} \quad , \quad \begin{cases} \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \\ \bar{r} = \underbrace{\cancel{r\hat{a}_r}}_{\text{صفر}} + z\hat{a}_z = z\hat{a}_z \rightarrow \bar{R} = z\hat{a}_z - r'\hat{a}_r' \\ \bar{r}' = r'\hat{a}_r' + \underbrace{\cancel{z'\hat{a}_z}}_{\text{صفر}} = r'\hat{a}_r' \quad |\bar{R}| = (z^2 + r'^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$\bar{ds}' = \bar{ds}_z = \pm r'dr'd\varphi'\hat{a}_z \rightarrow ds = r'dr'd\varphi'$$

$$\bar{E} = \int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{r'=0}^{A} \frac{\rho_{s0}(z\hat{a}_z - r'\hat{a}_r')\,r'dr'd\varphi'}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r'^2)^{3/2}}$$

$$= \underbrace{\iint \frac{\rho_{s0}\, z\hat{a}_z\, r'dr'd\varphi'}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r'^2)^{3/2}}}_{\text{I}} + \underbrace{\iint \frac{-\rho_{s0}\, r'^2\hat{a}_r'\, dr'd\varphi'}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r'^2)^{3/2}}}_{\text{II}}$$

$$\text{II}: \quad \hat{a}_r' = \hat{a}_r(\varphi') = \cos\varphi'\hat{a}_x + \sin\varphi'\hat{a}_y$$

انتگرال $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$ روی یک دوره تناوب صفر است

49

$$I = \hat{a}_z \frac{z\rho_{s0}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{r'=0}^{A} \frac{r'dr'd\varphi'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = \hat{a}_z z \frac{\rho_{s0}}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_{r'=0}^{A} \frac{r'dr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}$$

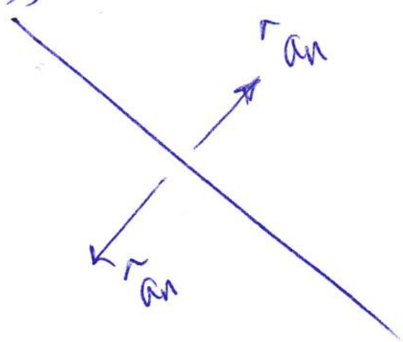
$$\int \frac{r'dr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(r'^2+z^2)^{1/2}} \Bigg|_{r'=0}^{A} = \frac{1}{|z|} - \frac{1}{(A^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\bar{E} = \hat{a}_z \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(z^2+A^2)^{1/2}}\right)$$

for $A \to \infty$: میدان یک صفحه بی‌نهایت

$$\bar{E} = \hat{a}_z \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \begin{cases} \hat{a}_z \dfrac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\hat{a}_z \dfrac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$

ρ_s یکنواخت



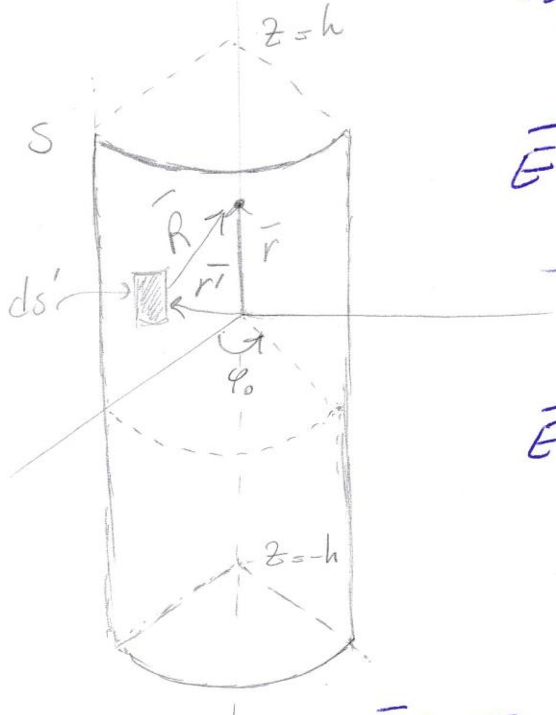
میدان یک صفحه بی‌نهایت الطول

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_n$$

که $\hat{a}_n$ بردار عمود بر صفحه.

مثال: روی قسمتی از استوانه با شعاع A و با ارتفاع $z=-h$ تا $z=h$ و $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ ، به صورت یکنواخت توزیع شده است. ρ_{s_0}

میدان الکتریکی را روی محور z حساب کنید.



$$\bar{E} = \int_s \frac{\rho_s(r')\,\bar{R}\,ds'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای $\bar{E}(r,\varphi,z)$

برای تقارن: صحبتی نمی‌شود کرد.

حل انتگرال:

$$\rho_s(r') = \rho_{s_0} \quad , \quad \bar{ds}' = \bar{ds}_r = \pm r'd\varphi'dz'\hat{a}_r' \qquad ds' = r'd\varphi'dz' = Ad\varphi'dz'$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \quad , \quad \bar{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z \; , \; \bar{r} = z\hat{a}_z$$

صفر

$$\bar{r}' = r'\hat{a}_r' + z'\hat{a}_z \; , \; \bar{r}' = A\hat{a}_r' + z'\hat{a}_z$$

$$r' = A$$

$$\bar{R} = -A\hat{a}_r' + (z-z')\hat{a}_z \quad , \quad |\bar{R}| = (A^2 + (z-z')^2)^{1/2}$$

$$\bar{E} = \int_{z'=-h}^{h} \int_{\varphi'=\varphi_0}^{[illegible]} \frac{\rho_{s_0}(-A\hat{a}_r' + (z-z')\hat{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (A^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \cdot A\,d\varphi'dz'$$

51

$$\bar{E} = -\frac{\rho_{s_0} A^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'_s-h}^{h}\int_{\varphi'_{s_0}}^{\varphi_0} \frac{\hat{a}_r'\, d\varphi' dz'}{(A^2+(z-z')^2)^{3/2}} + \hat{a}_z \frac{\rho_{s_0} A}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{(z-z')\, d\varphi' dz'}{(A^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

I　　　　　　　　　　II

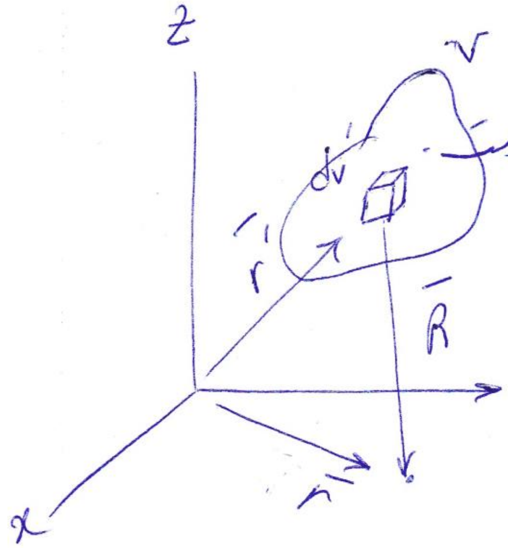
$$\mathrm{I}: \quad \hat{a}_r(\varphi') = \cos\varphi' \hat{a}_x + \sin\varphi' \hat{a}_y$$

بقیه اش را به عهده خودتان

⋮

* میدان الکتریکی توزیع پیوسته حجمی :

- بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho_v(r')$ روی حجم V توزیع شده است.



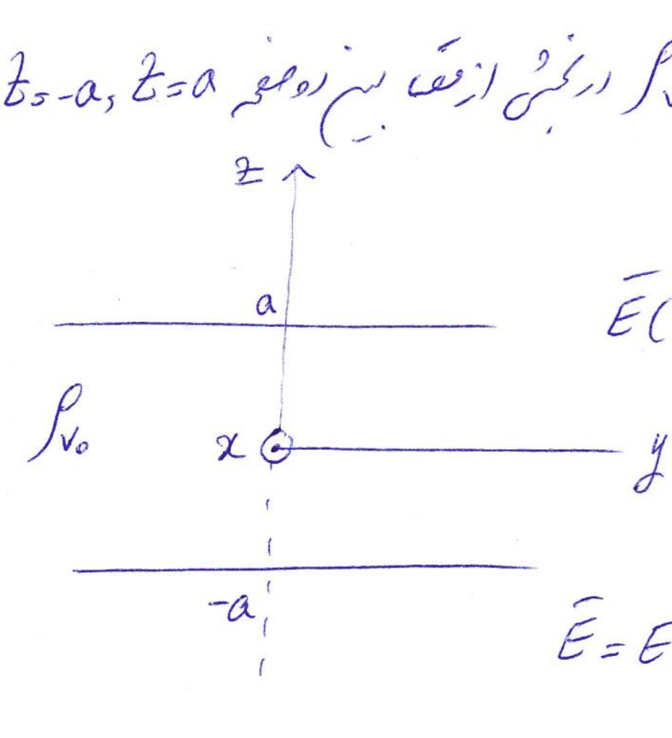
$$\begin{cases} dq = \rho_v(r')\, dv' \\ \bar{dE} = \dfrac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_s(r')\, dv'\, \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{cases}$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$\bar{E} = \int_v \frac{\rho_v(r')\, \bar{R}\, dv'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3}$$

مثال: میدان الکتریکی توزیع بار زیر را حساب کنید.

بار به صورت توزیع حجمی یکنواخت ρ_{v0} در بخشی از فضا بین دو صفحه $z=-a, z=a$ محصور است.



- دستگاه مختصات کارتزین $\bar{E}(x,y,z)$

- بررسی تقارن: به اندازه

$E(\cancel{x},\cancel{y},z) = E(z)$

$\bar{E} = E(z)\hat{a}_z$ جهت

53

- حل مستقیم:

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \qquad , \quad dv' = dx'dy'dz'$$

$$\begin{cases} \bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \\ \bar{r}' = x'\hat{a}_x + y'\hat{a}_y + z'\hat{a}_z \end{cases} \longrightarrow \bar{R} = (x-x')\hat{a}_x + (y-y')\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z$$

$$|\bar{R}| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

$$\bar{E} = \int_v \frac{\rho_{v_0}\left[(x-x')\hat{a}_x + (y-y')\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z\right] dx'dy'dz'}{4\pi\epsilon_0 \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_{v_0}}{4\pi\epsilon_0}\left[\hat{a}_x \underbrace{\int \frac{(x-x')\,dx'dy'dt}{|\bar{R}|^3}}_{1} + \hat{a}_y \underbrace{\int \frac{(y-y')\,dy'dx'dz'}{|\bar{R}|^3}}_{2} + \hat{a}_z \underbrace{\int \frac{(z-z')\,dx'dy'dt}{|\bar{R}|^3}}_{3}\right]$$

1

$$\int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} \qquad \begin{cases} x - x' = u \\ du = -dx' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -\infty \to u = +\infty \\ x' = +\infty \to u = -\infty \end{cases}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-u\,du}{\left[u^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

تابع فرد نسبت به u است

لذا چون بازه نیز متقارن است، لذا حاصل انتگرال صفر است.

54

2 : $\rightarrow$ مشابه حالت 1

3 : $$\int_{z'=-a}^{a}\int_{y'=-\infty}^{+\infty}\int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-z')\,dx'\,dy'\,dz'}{4\pi\epsilon_0 R^3} = I$$

ابتدا نسبت به x' سپس نسبت به y' انتگرال می‌گیریم:

$$= \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+K^2\right]^{3/2}} \quad , \quad K^2 = (y-y')^2+(z-z')^2$$

$$= \int_{U=+\infty}^{-\infty} \frac{-\,dU}{(U^2+K^2)^{3/2}} \qquad \begin{cases} x-x' = U \rightarrow dU = -\,dx \\ x' = -\infty \rightarrow U = +\infty \\ x' = +\infty \rightarrow U = -\infty \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU}{(U^2+K^2)^{3/2}} = \frac{U}{K^2(U^2+K^2)^{1/2}}\Bigg|_{U=-\infty}^{+\infty} = \frac{1-(-1)}{K^2} = \frac{2}{K^2}$$

$$\therefore \; I = \int_{z'=-a}^{a}\int_{y'=-\infty}^{+\infty} \frac{2(z-z')\,dy'\,dz'}{(y-y')^2+(z-z')^2}$$

حال نسبت به y' انتگرال می‌گیریم.

55

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\begin{cases} y-y'=u \rightarrow du=-dy \\ y=-\infty \rightarrow u=+\infty \\ y=+\infty \rightarrow u=-\infty \\ z-z'=K \end{cases}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-du}{u^2+K^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+K^2} = \frac{1}{K} tg^{-1} \frac{u}{K} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$K>0 \quad = \frac{1}{K}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{K}$

$K<0 \quad = \frac{1}{K}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{K}$

$$= \frac{\pi}{|K|} = \frac{\pi}{|z-z'|}$$

$$\therefore \quad \bar{E} = \hat{a}_z \frac{\rho_{v_0}}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \int_{z'=-a}^{a} \frac{(z-z')\,dz'}{|z-z'|}$$

$$\bar{E} = \begin{cases} \hat{a}_z\, a\rho_{v_0}/\epsilon_0 & z>a \\ \hat{a}_z\, z\,\rho_{v_0}/\epsilon_0 & -a<z<a \\ -\hat{a}_z\, a\rho_{v_0}/\epsilon_0 & z<-a \end{cases}$$

خطوط میدان

— تراکم یا پراکندگی خطوط در یک ناحیه از فضا، شدت و ضعف میدان است

— مماس بر خطوط میدان در هر نقطه از فضا، جهت میدان است.

$$\begin{cases} \bar{E}(r) = E_{u_1}\hat{a}_{u_1} + E_{u_2}\hat{a}_{u_2} + E_{u_3}\hat{a}_{u_3} \\ \bar{dl} = dl_{u_1}\hat{a}_{u_1} + dl_{u_2}\hat{a}_{u_2} + dl_{u_3}\hat{a}_{u_3} \end{cases}$$

$$\bar{E} \parallel \bar{dl} \longrightarrow \frac{dl_{u_1}}{E_{u_1}} = \frac{dl_{u_2}}{E_{u_2}} = \frac{dl_{u_3}}{E_{u_3}}$$

کارتزین:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

کروی:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi}$$

استوانه‌ای:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

با حل معادلات فوق، معادله خطوط میدان به دست می‌آید.

مثال: خطوط میدان بار الکتریکی واقع در مبدا مختصات را رسم کنید (در دو بعد) $z=0$

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{a}_R \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\bar{R} \quad , \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$r' = 0 \longrightarrow \bar{R} = \bar{r}$$

$$|\bar{R}| = r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\bar{E} = \frac{q\,\bar{r}}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \quad , \quad \bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y = r\hat{a}_r$$

$$\bar{E} = \frac{q(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y)}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} = \hat{a}_x \frac{q x}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} + \hat{a}_y \frac{q y}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln x = \ln y + K' = \ln y + \ln K = \ln K y \longrightarrow x = K y$$