تبدیلات فوریه:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$ انتگرال فوریه ✓

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx\right)\sin\omega x\right)d\omega$$

تبدیل فوریه کسینوسی:

تابع زوج و [illegible] زوج برای تابع داده خواهد داشت. یعنی ضریب $\sin\omega x$ صفر خواهد بود و رابطه بالا به صورت زیر خواهد شد:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\right)\cos\omega x\,d\omega$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx}\right)\cos\omega x\,d\omega$$

$F_c^{-1}(\hat{f})=f(x)$ اصلی $\qquad F_c(f)=\hat{f}_c(\omega)$ تبدیل فوریه کسینوسی

$$\boxed{\begin{aligned}f(x)&=F_c^{-1}(\hat{f}_c(\omega))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega\\ F_c(f)&=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\end{aligned}}$$

تبدیل فوریه سینوسی:

تابع فرد و [illegible] فرد برای تابع داده خواهد داشت یعنی ضریب $\cos\omega x$ صفر خواهد بود و رابطه بالا به صورت زیر خواهد شد.

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx\right)\sin\omega x\,d\omega$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx}_{F_s(f)=\hat{f}_s(\omega)}\right)\sin\omega x\,d\omega$$

$F_s^{-1}(\hat{f}_s(\omega))=f(x)$

s.a.m

$$F_s(f) = \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$f(x) = F_s^{-1}(\hat{f}_s(\omega)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,d\omega$$

ویژگی های تبدیل فوریه:

توابع زوج

۱) تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی توابع خطی هستند (F_c و F_s تبدیلات خطی هستند

توابع فرد

$$F_c(af+bg) = aF_c(f)+bF_c(g) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (af+bg)\cos\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty af(x)\cos\omega x\,dx + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} b\,g(x)\sin\omega x\,dx$$

$$F_s(af+bg) = aF_s(f) + b\,F_s(g)$$

$$= aF_c(f) + bF_c(g)$$

می توان نشان داد که هرگاه $f(x)$ تابعی پیوسته و مطلقا انتگرال پذیر باشد و $f'(x)$ تکه ای پیوسته بر هر بازه متناهی باشد $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ آنگاه خواهیم داشت:

انتگرال	مشتق
$\cos\omega x$	$f'(x)$
$-\omega\sin\omega x$	$f(x)$

① $F_s(f') = -\omega F_c(f)$

اثبات: $F_c(f') = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f'(x)\cos\omega x\,dx$

② $F_c(f') = \omega F_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$ * $= \left(\cos\omega x\, f(x)\Big|_0^\infty + \omega\int f(x)\sin\omega x\,dx\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int f(x)\sin\omega x\,dx$

③ $F_s(f'') = -\omega^2 F_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + \omega F_s(f)$

فقط جزء به جزء خواهد بود.

④ $F_c(f'') = -\omega^2 F_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$

تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس:

$$F(f) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = F(\omega)$$

✓ $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega)e^{j\omega x}\,d\omega$

$$F^{-1}(f) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = f(x)$$

✓ $c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\,dx$

s.a.m

می‌توان نشان داد که هر تابع تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر دارای تبدیل فوریه است. هرگاه $f(x)$ تابعی پیوسته

باشد و $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ و $f'(x)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد آنگاه داریم

$$F(f') = +i\omega F(f)$$

و در حالت کلی خواهیم داشت.

$$F(f^{(n)}) = (i\omega)^n F(f)$$

پیچش یا کانولوشن:

پیچش و یا کانولوشن f و g به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

می‌توان نشان داد که

$$F(f*g) = \sqrt{2\pi}\,F(f)F(g)$$

$$(f*g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

۱) تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$ را محاسبه بکنید:

$$F_c(f(x)) = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^a \cos\omega x\,dx$$

بسط زوج

$$F_c(f(x)) = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^a = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}\sin\omega a = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega a}{\omega}$$

بسط فرد

$$F_s(f) = \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^a \sin\omega x\,dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}(-\cos\omega x)\Big|_0^a$$

$$= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\times\frac{-1}{\omega}\left[\cos\omega a - 1\right] = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}\left[1-\cos\omega a\right]$$

۲) با استفاده قضیه فوق تبدیل کسینوسی تابع $a>0$ ، $f(x)=e^{-ax}$ را بیابید:

$$F_c(f'') = -\omega^2 F_c(f) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,f'(0) \qquad f''(x) = a^2 f(x)$$

$$F_c(f'') = a^2 F_c(f(x)) = -\omega^2 F_c(f(x)) + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}(1)\times a$$

$$F_c(f(x))\left\{a^2+\omega^2\right\} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,a \Rightarrow F_c(f) = \frac{a\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}}{a^2+\omega^2}$$

s.a.m

اثبات کنید
$$F_c(f''(x)) = -\omega^2 F_c(f(x)) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

مشتق	انتگرال
$\cos\omega x$	$f''(x)$ +
$-\omega\sin\omega x$	$f'(x)$ −
$-\omega^2\cos\omega x$	$f(x)$
$+\int$	

$$F_c(f''(x)) = \hat{f''_c}(\omega) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f''(x)\cos\omega x\,dx =$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(f'(x)\cos\omega x + \omega\sin\omega x\, f(x)\Big|_0^\infty - \omega^2\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx\right)$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(f'(0) - \omega^2\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx\right) = -\omega^2 F_c(f(x)) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

مثال ۳) تبدیل فوریه پاسخ معادله دیفرانسیل $y' - 4y = \begin{cases} e^{-4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ اگر $Y(\omega)$ حساب؟

تبدیل فوریه $y(t)$ باشد؟ $(i = \sqrt{-1})$

اگر از دو طرف معادله تبدیل فوریه بگیریم خواهیم داشت.

$$y' - 4y = \begin{cases} e^{-4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow i\omega Y - 4Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-4t} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{(-4-i\omega)t}\,dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{-1}{4+i\omega} e^{(-4-i\omega)t}\Big|_0^\infty = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}(4+i\omega)}[0-1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(4+i\omega)} \times \frac{1}{i\omega-4} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{16+\omega^2}$$

توجه: توجه کنید که ترم $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ در جواب بدست آمده وجود دارد ولی ممکن است که برخی تبدیل فوریه را به صورت

زیر نیز تعریف کنند:
$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,d\omega = F(\omega)$$

$$F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x}\,d\omega$$

و بدین ترتیب با طی مراحل فوق به جواب $Y(\omega) = \frac{-1}{\omega^2+16}$ خواهیم رسید.

s.a.m

ملاحظات انتگرال های فوریه :

انتگرال های لاپلاس : مطلوب است انتگرال فوریه‌ی $k>0$ $f(x)=e^{-kx}$ وقتی که $x>0$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$ و $f(-x)=f(x)$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=2\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx=$$

مشتق	انتگرال
e^{-kx}	$\cos\omega x$
$-ke^{-kx}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
k^2e^{-kx}	$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$\left[\frac{e^{-kx}}{+\omega}\sin\omega x-\frac{ke^{-kx}}{\omega^2}\cos\omega x\Big|_0^{\infty}+k^2\int_0^{\infty}\frac{e^{-kx}}{\omega^2}\cos\omega x\,dx\right]$$

$$\left[0-\left(-\frac{k}{\omega^2}\right)-k^2\int_0^{\infty}\frac{e^{-kx}}{\omega^2}\cos\omega x\,dx\right]=$$

$$\left[\frac{k}{\omega^2}-\frac{k^2}{\omega^2}\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx\right]=\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx$$

$$\left(\frac{k^2}{\omega^2}+1\right)\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx=\frac{k}{\omega^2}\Rightarrow\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx=\frac{k}{k^2+\omega^2}$$

$$A(\omega)=\frac{(2k)}{k^2+\omega^2}\Rightarrow e^{-kx}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{2k}{k^2+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega\qquad k>0,\ x>0$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2k}e^{-kx}=\int_0^{\infty}\frac{(\cos\omega x)}{(k^2+\omega^2)}d\omega$$ (الف)

مثال: مطلوب است انتگرال فوریه $k>0$ $f(x)=e^{-kx}$ و $x>0$ و $f(-x)=f(x)$

برابر با باشد را بدست آورید. (تمرین)

s.a.m

مثال ۲ : ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x}{1-\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ را بدست آورید.

تابع زوج است.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega =$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega = .$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$A(\omega) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\cos x\cos\omega x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos(1+\omega)x + \cos(1-\omega)x\right)dx$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x + \frac{1}{(1-\omega)}\sin(1-\omega)x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{1+\omega}\left(1\times\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{1+\omega}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}\cos\omega\frac{\pi}{2}}_{\cos\omega\frac{\pi}{2}} + \sin\omega\frac{\pi}{2}\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0}\right) + \frac{1}{1-\omega}\left[\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cos\omega\frac{\pi}{2} - \sin\omega\frac{\pi}{2}\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0}\right]\right]$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\cos\omega\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega}\right)\right] = \frac{\pi\cos\frac{\pi\omega}{2}}{2}\times\frac{1-\omega+1+\omega}{1-\omega^2} = \frac{\cancel{2}\pi}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\times\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\pi}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}$$

مثال ۳ : تساوی زیر را اثبات کنید.

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\omega x\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$

s.a.m