❖ تمرینـــــات :

۱. مشخص کنید که هریک از معادلات با مشتقات جزئی زیر از نوع بیضوی، هذلولی و سهموی است ؟

(الف) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ (ب) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(ج) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (د) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

(و) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\dfrac{\partial u}{\partial x}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}+4u=2x-3y$

(هـ) $(x^2-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(y^2-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$

(ز) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4$

۲. نشان دهیدکه $z(x,y)=4e^{-3x}\cos 3y$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل جزئی زیر است :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad ,z(x,\frac{\pi}{2})=0 \quad , \quad z(x,0)=4e^{-3x}$$

۳. (الف) نشان دهید که $v(x,y)=xF(2x+y)$ یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل $x\dfrac{\delta v}{\partial x}-2x\dfrac{\partial v}{\partial y}=v$ است:

(ب) یک جواب خصوصی برای معادله فوق پیدا نمائید که شرط $v(1,y)=y^2$ را برآورده سازد.

۴. (الف) معادله $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ را حل نمائید :

(ب) جواب خصوصی معادله را اگر $z(x,0)=x^2-x-2$ و $z(2,y)=3y$ پیدا کنید :

۵. نشان دهیدکه جواب عمومی $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ بصورت $v=\dfrac{F(r-ct)+G(r+ct)}{r}$ می باشد.

۶. جواب عمومی معادله $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+12t^2$ را پیدا نمائید .

معادلات زیر را توسط روش جداسازی متغیرها حل نمائید :

۷) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=4\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ u(0,y)=8e^{-3y}\end{cases}$ ۸) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ u(0,y)=8e^{-y}\end{cases}$

۹) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{2\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \quad , \quad 0 < x < 3, t > 0 \\ u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x \end{cases}$

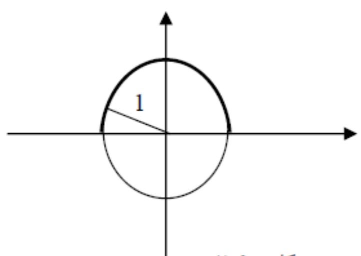
۱۰) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad y(0,t) = y(5,t) = 0 \quad , \quad y(x,0) = 0 \\ y_t(x,0) = h(x) \quad , \quad h(x) = 5\sin \pi x \end{cases}$

۱۱) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + u \\ u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{+5x} \end{cases}$

۱۲. مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} u_1 & ; \quad 0 < \varphi < \pi \\ u_2 & ; \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$ (u تابع دما است)



شکل (۹-۲)

۱۳. مسئله مقدارمرزی $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right)$ را با شرایط زیر حل نمائید :

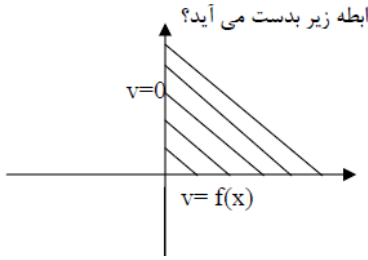
$$z(1,\varphi,t) = 0 \qquad z(\rho,\varphi,0) = F(\rho,\varphi) \qquad z_t(\rho,\varphi,0) = 0$$

۱۴. (الف) در مسئله مقدار مرزی (u یک پارامتر فیزیکی است) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ نشان دهید که :

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(v)e^{-\lambda y}\cos\lambda(v-x)\,d\lambda\,dv \qquad -\infty < x < \infty$$

(ب) اگر $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ u_0 & , \quad x > 0 \end{cases}$ باشد نشان دهیدکه: $u(x,y) = \dfrac{u_0}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} + \tan^{-1}\dfrac{x}{y}\right)$

۱۵. مسئله مقدار مرزی روبرو راحل نمائیدو نشان دهید که $v(x,y)$ ازرابطه زیر بدست می آید؟



$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} y f(r)\left[\frac{1}{(r-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(r+x)^2 + y^2}\right]dr$$

اگر $f(x) = 1$ آنگاه $v(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$