سری لوران : اگر تابع f(z) در همسایگی z_0 تحلیلی باشد می‌توان f(z) را بر حسب توان‌های $(z-z_0)$ بصورت مقابل بسط داد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

ملاحظه می‌شود که تفاوت بسط لوران با تیلور در جملات با توان منفی است به این جملات ، جملات اصلی بسط لوران گویند .

مثال - بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ در نواحی :

الف - $|z|<1$ ب - $1<|z|<2$ ج - $|z|>2$

تجزیه به کسرهای جزئی

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=f_1(z)+f_2(z)$$

بخش الف -

$|z|<1 \Rightarrow f_1(z) = \dfrac{-1}{1-z} = -(1+z+z^2+z^3+\cdots)$ ①

$\Longrightarrow f(z) = ① + ②$

$f_2(z) = \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{-1/2}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\left(1+(z/2)^2+(z/2)^3+(z/2)^4+\cdots\right)$ ②

$\longrightarrow |z/2|<1 \Longrightarrow |z|<2$

بخش ب - $1<|z|<2$

$f_1(z) = \dfrac{-1}{1-z}$ ، $|z|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$

$f_1(z) = \dfrac{-1}{z(1-1/z)} = -\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]$ ، $f_2(z) =$ همان رابطه بخش الف

بخش ج - $|z|>2$

$|z|>2 \Longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \Longrightarrow$

$f_1(z) = \dfrac{-1}{1-z} = \dfrac{-1}{z(1-1/z)} = \dfrac{-1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right]$

$\longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Longrightarrow |z|>1$

دربازه‌ی مشکل

$$|z|>2 \Rightarrow \left|\tfrac{1}{z}\right| < \tfrac{1}{2} \Rightarrow \left|\tfrac{2}{z}\right|<1$$

$$f_2(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left[1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots\right]$$

$$\longrightarrow \left|\tfrac{2}{z}\right|<1$$ باشد

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$ به ازای نقاط ناحیه $|z|>2$

$|z|<1 \Rightarrow$ توان ها مثبت فقط

$1<|z|<2 \Rightarrow$ توان ها مثبت و منفی

$|z|>2 \Rightarrow$ توان ها منفی فقط

سوال مشابه

بند الف)

بند ب)

بند ج)

تعریف مانده : ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران را مانده $f(z)$ در نقطه z_0 گوییم.

مثال- $f(z)=5(z-3)^2+10(z-3)^{-1}+40(z-3)^4$

مانده در نقطه $z_0=3$ سن 10 می‌باشد.

مثال- مانده $f_1(z)=\frac{4}{z}$ ، $f_1(z)=\frac{5}{z-1}$ حول $z_0=0$

$$f_1(z)=\frac{4}{z-0}=4(z)^{-1} \Longrightarrow Res\{z_0 \neq 0\}=0$$

مانده

$$f_2(z)=\frac{5}{z-1}=\frac{-5}{1-z}=-5(1+z+z^2+z^3+\dots)$$

چون ضریب z^{-1} نداریم بنابراین

$$Res\{z_0=0\}=0$$

روش‌های محاسبه مانده

* روش لوران - پرکاربرد

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

$m=1 \longrightarrow$ مانده $= \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \varphi(z_0)$

$m>1 \longrightarrow$ مانده در z_0 $= \dfrac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

(m مثبت است)

توجه: محاسبه مانده در بخش انتگرال‌ها خیلی کاربرد داره.

مثال - محاسبه مانده در نقاط $z=2$, $z=3$

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)(z-3)^3}$$

$z=2$, مانده: $\Longrightarrow \varphi(z) = \dfrac{z+1}{(z-3)^3} \Longrightarrow \varphi(2) = \dfrac{2+1}{(2-3)^3} \boxed{= -3}$

$z=3$, مانده $\Longrightarrow \varphi(z) = \dfrac{z+1}{z-2} \Longrightarrow \left.\dfrac{\varphi''(z)}{2!}\right|_{z=3} = \left.\dfrac{d^2}{2dz^2}\left[\dfrac{z+1}{z-2}\right]\right|_{z=3} \boxed{= \dots}$

الف- روش تعیین مانده

$f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ و $p(z)$ و $q(z)$ در z_0 تحلیلی

$$\begin{cases} p(z_0) \neq 0 \\ q(z_0) = 0 \\ q'(z_0) \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\text{مانده در } z_0 = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$$

مثال- $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ مانده در $z_0 = 0$

توابع p و q در صفر تحلیلی هستند پس داریم

$p(0) = \cos 0 \neq 0$, $q(0) = \sin 0 = 0$, $q'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow$ مانده $= \dfrac{p(0)}{q'(0)} = \dfrac{\cos 0}{\cos 0} = 1$

ب- اگر قطب دوگانه باشد

$p(z_0) \neq 0$ و $q''(z_0) \neq 0$ ولی $q(z_0) = q'(z_0) = 0$

$$\boxed{z_0 \text{ مانده در} = \dfrac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \dfrac{2p(z_0)\,q'''(z_0)}{3\left[q''(z_0)\right]^2}}$$

مشتق سوم

$$f(z)=\frac{1}{z(e^{z}-1)}$$ مانده در $z=0$ را بیابید.

$p(z)=1$

$q(z)=z(e^{z}-1) \Longrightarrow q(0)=0$

$q'(z)=(e^{z}-1)+ze^{z} \Longrightarrow q'(0)=0$

$q''(z)=e^{z}+ze^{z}+e^{z} \Longrightarrow q''(0)=2\neq 0$

$q'''(z)=2e^{z}+e^{z}+ze^{z} \longrightarrow q'''(0)=3$

مانده در صفر $=\dfrac{2p'}{q''}-\dfrac{2}{3}\dfrac{pq'''}{(q'')^{2}}=\dfrac{2\times 0}{2}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1\times 3}{4}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

روش سوم محاسبه مانده - استفاده از بسط لوران و محاسبه ضریب $(z-z_0)^{-1}$ این روش زمانی بکار می‌رود که قطب

از درجه بی‌نهایت (∞) بوده یعنی نقطه منفرد اساسی باشد یا محاسبه با روش‌های قبل طولانی باشد.

مثال - مانده $f(z)=(z-1)\cos\frac{1}{(z-1)}$ در نقطه $z=1$

ملاحظه شد که قطب مرتبه ∞ می‌باشد.

$$f(z)=(z-1)\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\frac{1}{6!(z-1)^6}+\cdots\right]$$

$$f(z)=(z-1)-\frac{1}{2!(z-1)}+\frac{1}{4!(z-1)^3}\cdots]$$

پس → ملاحظه شد که ضریب $(z-1)^{-1}$ مقدار $-1/2!$ می‌باشد.

مثال. مانده

$f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z+1}}$ در نقطه $z=-1$

$$f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z+1}}=(z+1-1)^2\left[1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!(z+1)^2}+\frac{1}{3!(z+1)^3}+\cdots\right]$$

$$f(z)=\left[(z+1)^2-2(z+1)+1\right]\left[1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!(z+1)^2}+\frac{1}{3!(z+1)^3}+\cdots\right].$$

ملاحظه میشود که فاکتورها موقع ضرب $(z+1)$ را ایجاد نمایند.

مانده در $z=-1$ $\Longrightarrow Res=\frac{1}{3!}+1-1=\boxed{\frac{1}{3}}$

مثال - مانده تابع شامل را در نقاط منفرد آن بدست آورید.

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1}$$

نقاط تکین $z=0$ و $z=1$ می باشد.

* $z=1$ قطب مرتبه یک را شامل است بنابراین

$$Re\{1\} = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = e^{1}$$

* $z=0$ نقطه منفرد اساسی یا قطب از مرتبه بی نهایت (∞) است بنابراین از بسط تابع استفاده می کنیم.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} \cdot e^{1/z} = \frac{-1}{1-z} \cdot e^{1/z} = -1\left[1+z+z^2+z^3+\dots\right]\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right]$$

لذا ضریب z^{-1} را در این حاصل ضرب ها پیدا می کنیم.

$$f(z) = -1\underbrace{\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right)}_{\text{مانده}} z^{-1} + \text{بقیه جملات} \Longrightarrow -\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right] = \boxed{-e+1}$$

توجه: $e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$

تمرین - مانده های توابع زیر را در نقاط منفرد آنها بدست آورید.

1- $f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$

2- $f(z) = z \sin \frac{1}{z-1}$

3- $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{z+1}{z}\right)$

4- $f(z) = \frac{\arctan z}{z^6}$