مشتقات میدان‌های برداری و اسکالر :

$\bar{E}(x,y,z,t)=\bar{E}(\bar{r},t)$

$\bar{E}(x,y,z)=\bar{E}(\bar{r})$

میدان‌های ~~الکترو~~ الکترواستاتیکی ساکن و تغییرات با زمان نداریم

میدان‌های الکترومغناطیسی متغیر با زمان و متغیر با زمان

تغییرات میدان‌ها با مکان و زمان اهمیت ویژه‌ای دارند

تغییرات: مکان، زمان

مشتقات مکانی : گرادیان، دیورژانس، کرل

گرادیان :

$f(x,y,z)$

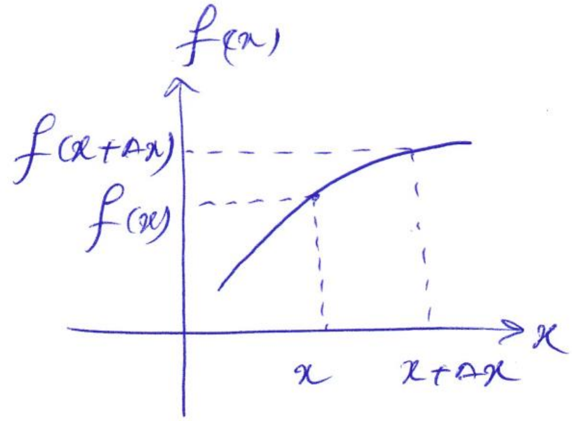
از حساب دیفرانسیل داریم :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z\right)\cdot\left(dx\,\hat{a}_x+dy\,\hat{a}_y+dz\,\hat{a}_z\right)$$

$$=\underbrace{\overline{\nabla f}}_{\text{گرادیان تابع اسکالر } f}\cdot\underbrace{\overline{dl}}_{\text{عنصر طول}}=|\nabla f|\,|dl|\cos\underbrace{\alpha}_{\text{زاویه بین } \overline{dl} \text{ و } \overline{\nabla f}}$$

$f(x)$:



$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x} = \cdots\cdots$$

- $\frac{df}{dx}$ مشتق یک بعدی تابع f نسبت به مکان می‌باشد که مقدار یکتایی دارد.

- ولی $\frac{df}{dL}$ را

$$df = dL\, \nabla f \cos\alpha \rightarrow \frac{df}{dL} = \nabla f \cos\alpha$$

می‌گویند مشتق سه بعدی f نسبت به مکان است که دارای مقدار واحدی نیست.

- در واقع بی‌نهایت نقطه در همسایگی نقطه مورد نظر با فاصله dL یافت می‌شود که هر کدام یک زاویه α خاص خود را دارند.

- لذا $\frac{df}{dL}$ وقتی مفهوم دارد که در رابطه با جهت معینی باشد؛ مشتق جهت دار.

جهت معین، جهت عمود بر سطح $f(x,y,z)=K$ است.

$$\hat{a}_n = \frac{\overline{\nabla f}}{|\nabla f|}$$

$$\frac{df}{dL} = |\nabla f| \cos\alpha = |\nabla f|\, \hat{a}_L \cdot \hat{a}_n$$

گرادیان $\frac{df}{dL}$ زمانی است که $\hat{a}_n \cdot \hat{a}_L$ یک باشد لذا

گرادیان تابع نرده‌ای و یک مقداری f در یک نقطه برداری است که اندازه‌اش برابر ماکزیمم تغییر تابع در آن نقطه باشد و در جهت عمود بر سطح $f(x,y,z)=k$ باشد.

$$\bar{\nabla} f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{a}_{u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{a}_{u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{a}_{u_3}$$

<u>خواص گرادیان:</u>

قضیه ۱:

$$\text{if} \quad \bar{A} = \nabla f \rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \bar{A} \cdot \bar{dl} =$$

تابع اسکالر یک مقداره

$$= \int_{P_1}^{P_2} \nabla f \cdot \bar{dl} = \int_{P_1}^{P_2} df = f \Big|_{P_1}^{P_2}$$

حاصل انتگرال، مستقل از مسیری است که P_1 و P_2 را بهم وصل می‌کند.

$$\oint \bar{\nabla} f \cdot \bar{dl} = 0$$

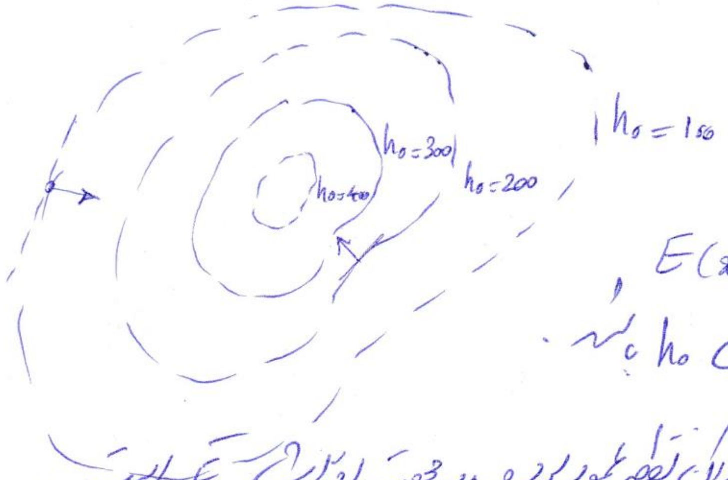
برعکس قضیه فوق نیز صادق است.

یعنی اگر $\int_{P_1}^{P_2} \bar{A} \cdot \bar{dl}$ مستقل از مسیر باشد، لذا تابع اسکالر f وجود دارد که $\bar{A} = \nabla f$

قضیه ۲: گرادیان تابع f بر سطح $f(x,y,z)=K$ عمود است.

$$\nabla f \cdot \overline{dl} = df = 0 \Rightarrow \overline{\nabla f} \perp \overline{dl}$$

چون $\overline{dl}$ روی سطح f است، لذا ∇f بر سطح $f=K$ عمود است.



$E(x,y)=h_0$

- منحنی نقاط هم سطح تپه‌ای که ارتفاع شان h_0 باشد.

∇E در هر نقطه برداری است که بر آن نقطه عمود بوده و در جهت افزایش E است.

- اگر باران ببارد آب در امتداد حداکثر شیب جاری می‌شود. به زبان ریاضی آب

در جهت $-\nabla E$ جاری می‌شود.

<u>نمایش ترسیمی میدان برداری</u>: میدان برداری: جهت
اندازه

خطوط میدان - خطوط شار:

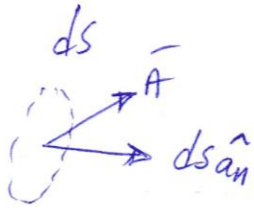
تراکم خطوط شدت میدان برداری را نمایش می‌دهد

مماس بر خطوط، جهت میدان را نشان می‌دهد.

if $\oint_C \overline{A}\cdot \overline{dl} = 0$ or $\overline{A}=\nabla f \Rightarrow$ $\overline{A}$ را پایستار می‌نامند

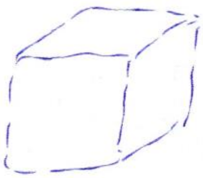
مثل میدان $\overline{E}$

دیورژانس :



$$d\varphi = \bar{A}\cdot \bar{ds}$$

$dv,\ ds$



$$\operatorname{div}\bar{A} = \nabla\cdot\bar{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \bar{A}\cdot \bar{ds}}{\Delta V}$$

بنوعی بیانگر شار خالص خروجی از حجم ΔV (یک نقطه) است .

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_{u_3})\right]$$

قضیه گوس : بردار $\bar{A}$، حجم V و سطح بسته S را در نظر بگیرید :

$$\oint_S \bar{A}\cdot\bar{ds} = \int_V (\nabla\cdot\bar{A})\,dv$$

حجم محصور در سطح بسته S

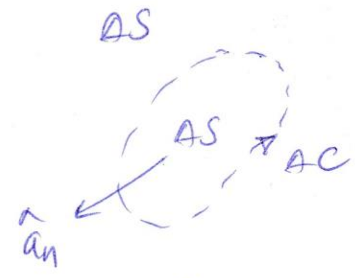
« حل مثال قبل با قضیه گوس »

کرل :

- در مقابل میدان‌های پایستار ($\oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l} = 0$) ، میدان‌هایی هستند که دارای اثر چرخشی غیر صفر حول یک مسیر بسته هستند و غیر پایستار نامیده می‌شوند.

مثل میدان مغناطیسی $\bar{B}$

مقدار این اثر چرخش میدان برداری غیر پایستار حول یک مسیر بسته، سیرکولاسیون نام دارد.



$\overline{\Delta S} = \Delta S\, \hat{a}_n$

$$\nabla \times \bar{A} = \operatorname{curl} \bar{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta C} \bar{A}\cdot d\bar{l}}{\Delta S}\, \hat{a}_n$$

کرل در واقع سیرکولاسیون یک بردار بر واحد سطح است

دقت که سطح به حالت صفر میل می‌کند.

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix}$$

قضیه استوکس : سطح S محدود به مسیر بسته C را در نظر بگیرید :

$$\oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int_S (\nabla \times \bar{A})\cdot d\bar{s}$$

$$\oint_S (\nabla \times \bar{A})\cdot d\bar{s} = 0$$

مسیر بسته روی سطح S

در مسائل قبلی حل شود

لاپلاسین :

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

لاپلاسین برداری : $\nabla^2 \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times \nabla \times \bar{A}$

در دستگاه کارتزین : $\nabla^2 \bar{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{a}_x + (\nabla^2 A_y)\hat{a}_y + (\nabla^2 A_z)\hat{a}_z$

قضیه هلمولتز :

if $\nabla \cdot A = 0 \rightarrow$ میدان برداری سیملوئیدال

if $\nabla \times A = 0 \rightarrow$ میدان برداری غیرچرخشی

- دیورژانس بعنوان منبع فورانی و کرل بعنوان منبع گردابی میدان است.

- قضیه هلمولتز میگوید، اگر دیورژانس و کرل یک بردار در کلیه نقاط فضا معلوم باشند، آن بردار را میتوان تا حد یک مقدار ثابت برداری تعیین کرد.

- بعبارت دیگر اگر منابع میدان مشخص باشند، آن میدان بطور کامل قابل محاسبه است.