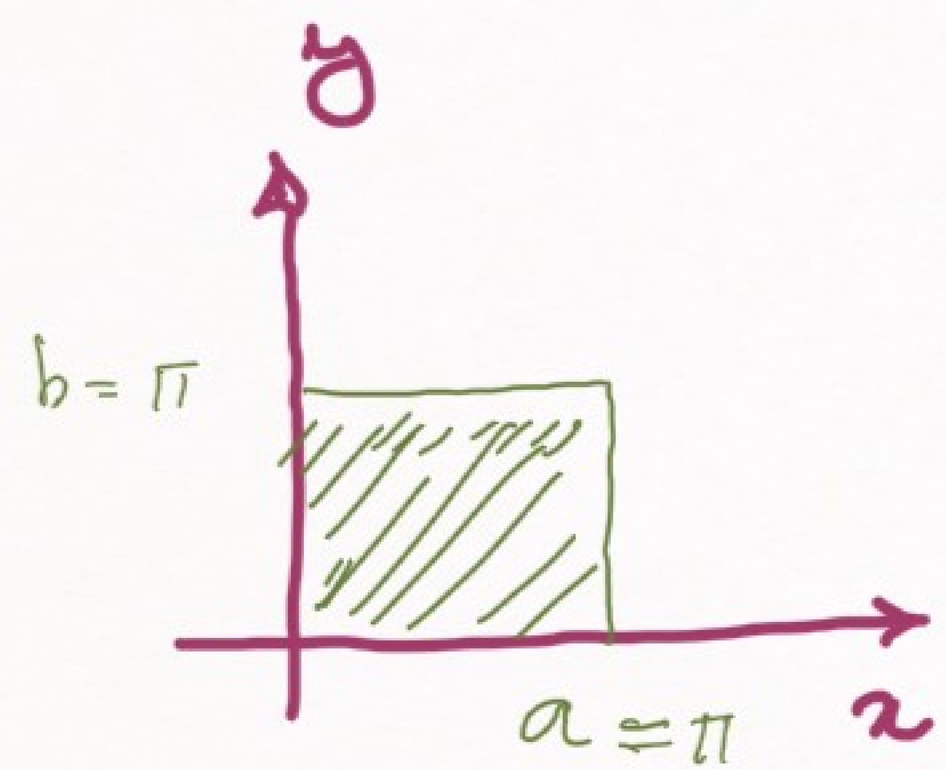
معادله انتقال حرارت دو بعدی :



$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) \end{cases}$$

شرایط مرزی

شرط اولیه

$$u(x,y,t) = ?$$

برای حل و روش جداسازی متغیرها استفاده میکنیم و در معادله قرار میدهیم و تقسیم بر XYT میکنیم ⇐

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

$$\frac{XYT'}{XYT} = \frac{c^2(X''YT + XY''T)}{XYT} \Longrightarrow \frac{T'}{T} = c^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{c^2 T} = -\lambda^2}$$

عدد ثابت

$$\Longrightarrow \begin{cases} T' + c^2\lambda^2 T = 0 & (1) \\ \dfrac{X''}{X} = -\lambda^2 - \dfrac{Y''}{Y} = -p^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X'' + p^2 X = 0 & (2) \\ Y'' + \mu^2 Y = 0 & (3) \end{cases}, \quad \mu^2 = \lambda^2 - p^2$$

عدد ثابت

* از معادله شماره (۳) یعنی $Y'' + \mu^2 Y =$ داریم:

$$Y(y) = A_1 \cos \mu y + B_1 \sin \mu y$$

شرط مرزی $u(x, 0, t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Y(y) = B_1 \sin \mu y}$ تابع بر حسب y

$u(x, \pi, t) = 0 \Rightarrow Y(\pi) = 0 \Rightarrow B_1 \sin \mu\pi = 0 \;,\; B_1 \neq 0 \Rightarrow \sin \mu\pi = 0 \Rightarrow \mu\pi = m\pi \Rightarrow \boxed{\mu_m = m}$

* از معادله شماره (۲) یعنی $X'' + p^2 X = 0$ داریم:

$$X(x) = A_2 \cos px + B_2 \sin px$$

شرط مرزی $u(0, y, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{X(x) = B_2 \sin px}$ تابع بر حسب x

$u(\pi, y, t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \Rightarrow B_2 \sin p\pi = 0 \;,\; B_2 \neq 0 \Rightarrow \sin p\pi = n\pi \Rightarrow \boxed{p_n = n}$

* از معادله شماره (۱) یعنی $T' + c^2 \lambda^2 T = 0$ داریم:

$$T(t) = A_3 e^{-c^2 \lambda^2 t} \;,\; \lambda^2 = p^2 + \mu^2 \text{ یا } \boxed{\lambda_{nm}^2 = p_n^2 + \mu_m^2}$$

$$\boxed{T_{nm}(t) = A_{nm} e^{-c^2 (n^2 + m^2) t}}$$

پس جواب بصورت :

$$u_{nm}(x,y,t) = A_{nm} \sin nx \sin my \, e^{-c^2(n^2+m^2)t}$$

جواب کلی میشود :

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin nx \sin my \, e^{-c^2(n^2+m^2)t}$$

و با ثابت کردن A_{nm} از شرط اولیه انتشار، شروع میکنیم :

$$u(x,y,0) = h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin nx \sin my$$

ملاحظه میشود که A_{nm} ضرایب سری فوریه سینوسی دوگانه تابع $h(x,y)$ است.

$$A_{nm} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} h(x,y) \sin nx \sin my \, dx \, dy$$

که در فصل سری در صفحه‌ها آورده شده است.

تعریف سری فوریه سینوسی دوگانه: اگر $f(x,y)$ تابعی فرد با دوره تناوب باشد

$$f(x,y)=f(x+2l_1\,,\,y+2l_2)$$

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{nm}\sin\frac{n\pi}{l_1}x\,\sin\frac{m\pi}{l_2}y$$

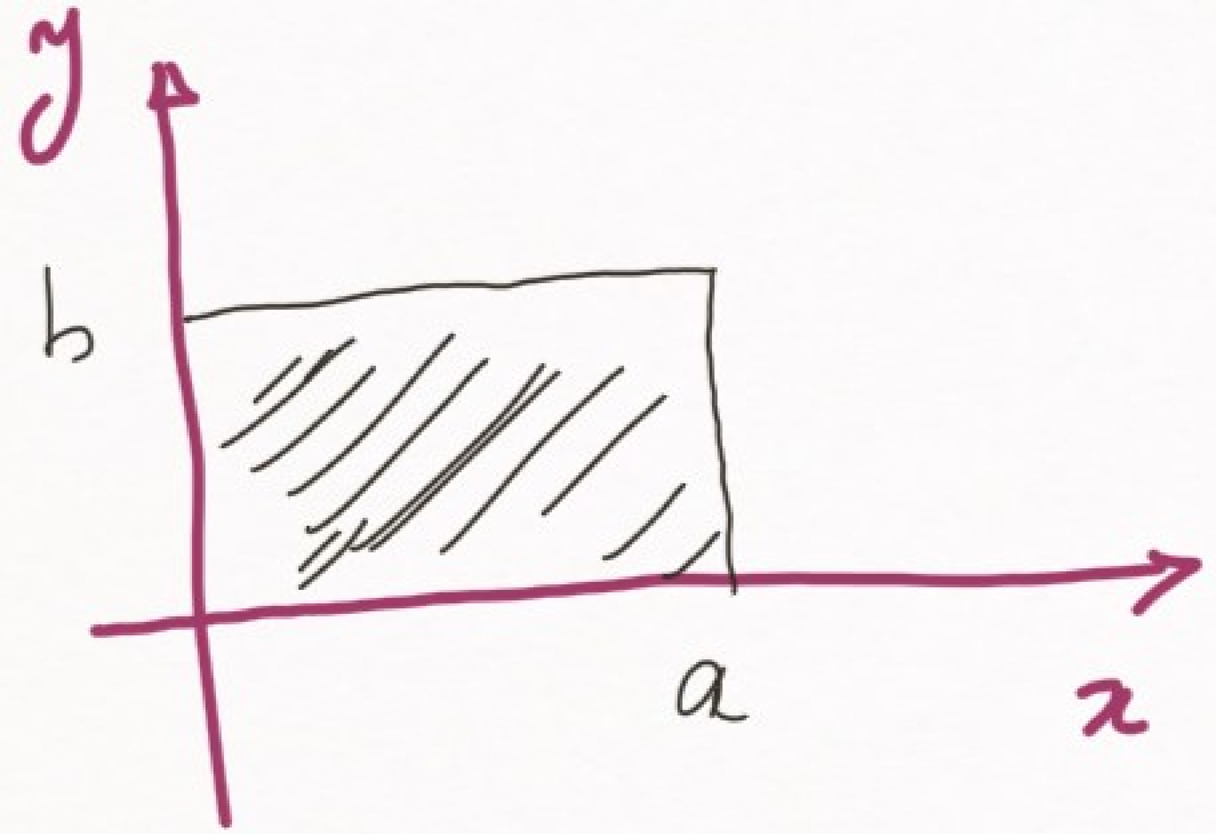
که در این رابطه B_{nm} از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$B_{nm}=\frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}f(x,y)\sin\frac{n\pi}{l_1}x\,\sin\frac{m\pi}{l_2}y\,dx\,dy$$

و به همین فرم سری فوریه کسینوسی و سری فوریه کلی دو متغیره تابع $f(x,y)$ تعریف شده.

معادله موج دوبعدی (ارتعاشات غشای مستطیلی):

معادله موج دوبعدی با حرکت عرضی ارتعاشی غشای همگن با صفحه و کشش ثابت پیوسته طبق شرایط اولیه و مرزی (ثابت نگه داشته شده)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = h(x,y) \\ u_t(x,y,0) = k(x,y) \end{cases}$$

$$u(x,y,t) = ?$$

برای حل از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

$$u_{tt} = XYT'' \,,\quad u_{xx} = X''YT \,,\quad u_{yy} = XY''T$$

ثابت

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda^2 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2 c^2 T = 0 & (1) \\ \dfrac{Y''}{Y} = -\lambda^2 - \dfrac{X''}{X} = -p^2 \Longrightarrow \begin{cases} Y'' + p^2 Y = 0 & (2) \\ X'' + \mu^2 X = 0 & (3) \end{cases} \end{cases}$$

عدد ثابت

$$\mu^2 = \lambda^2 - p^2$$

از معادله (۳) داریم: $X''+\mu^2 X=0$ که جوابش:

$X(x)=A_1\cos\mu x+B_1\sin\mu x$

شرایط مرزی: $X(0)=0 \Rightarrow A_1=0$, $X(a)=0 \Rightarrow B_1\sin\mu b=0 \Rightarrow \mu b=n\pi \Rightarrow \boxed{\mu_n=\frac{n\pi}{a}}$

$\Rightarrow \boxed{X_n(x)=B_{1n}\sin\frac{n\pi}{a}x}$, $n=1,2,3,\dots$

* از معادله (۲) داریم: $Y''+p^2Y=0$ که جوابش:

$Y(y)=A_2\cos py+B_2\sin py$

شرایط مرزی: $Y(0)=0 \Rightarrow A_2=0$, $Y(b)=0 \Rightarrow B_2\sin pb=0 \Rightarrow pb=m\pi \Rightarrow \boxed{p_m=\frac{m\pi}{b}}$

$\Rightarrow \boxed{Y_m(y)=B_{2m}\sin\frac{m\pi}{b}y}$, $m=1,2,3,\dots$

* از معادله (۱) داریم: $T''+c\lambda^2T=0$ که جوابش:

$\lambda^2-p^2=\mu^2 \to \boxed{\lambda_{mn}^2=p_m^2+\mu_n^2}$

$\boxed{T_{nm}(t)=B_{3nm}\cos c\lambda_{nm}t+A_{3nm}\sin c\lambda_{nm}t}$

در حالت کلی جواب:

$$u_{nm}(x,y,t) = \left(A_{nm}\cos \lambda_{nm} t + B_{nm}\sin \lambda_{nm} t\right)\sin\frac{n\pi}{a}x \,\sin\frac{m\pi}{b}y$$

و جواب کلی می‌شود:

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm}\cos \lambda_{nm} t + B_{nm}\sin \lambda_{nm} t\right)\sin\frac{n\pi}{a}x \,\sin\frac{m\pi}{b}y}$$

حالا برای پیدا کردن A_{nm} و B_{nm} شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

شرط اولیه

$$u(x,y,0) = h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}x$$

$$\boxed{A_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b h(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\,dx\,dy}$$

شرط اولیه

$$u_t(x,y,0) = k(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\lambda_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}\,\sin\frac{m\pi y}{b}$$

با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت

$$B_{nm} = \frac{4}{\lambda_{nm}ab}\int_0^a\int_0^b k(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\,dx\,dy$$

توجه مهم: همانطوری که در پاسخ معادله حرارت و معادله موج دیدیم با شرایط مرزی مستطیلی شامل ... پاسخ در حالت کلی بنویسیم

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T(t)\,(\text{تابع ویژه بر حسب } x)(\text{تابع ویژه بر حسب } y)}$$

تابع ویژه بر حسب x از اعمال شرایط مرزی بدست می‌آید $X(x) = A_1\cos\mu x + B_1\sin\mu x$ مقادیر ویژه μ_n معلوم می‌شود

تابع ویژه بر حسب y از اعمال شرایط مرزی بدست می‌آید $Y(y) = A_2\cos p x + B_2\sin p y$ " " p_n معلوم می‌شود.

بنابراین ممکن است بر حسب شرایط مرزی توابع ویژه هم بر حسب x و هم y هر دو سینوسی باشند، نه آنچه در دو مثال قبل گفته شد و یا اینکه هر دو کسینوسی یا یکی سینوسی و دیگری کسینوسی باشند.

تعیین $T(t)$:

$$\begin{cases} T(t) = A e^{-\lambda^2 c^2 t} & \text{در معادله انتقال حرارت:} \\[2em] T(t) = A \cos c\lambda t + B \sin c\lambda t & \text{در معادله موج:} \end{cases}$$

معادله موج با شرایط مرزی دایره‌ای :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \quad , \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

تمرین: نشان دهید که : در مختصات قطبی

$$\boxed{\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}}$$

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

* حال می‌خواهیم معادله موج را در شرایط مرزی دایره‌ای حل کنیم

با فرض تقارن شعاعی وابستگی به θ نداریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) \\ u(R,t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \\ u(r,0) = f(r) \quad ; \quad \text{(جابجایی اولیه)} \end{cases} \quad , \quad u(r,t) = ?$$

$$u_t(r,0) = g(r) \quad \text{(سرعت اولیه)}$$

از روش جداسازی متغیرها:

$$u(r,t)=F(r)\,T(t)$$

شکل کلی را جایگذاری در معادله

$$\frac{T''F}{TF}=\frac{c^2\left(TF''+\frac{1}{r}TF'\right)}{TF} \Longrightarrow \frac{T''}{c^2T}=\frac{F''}{F}+\frac{1}{r}\frac{F'}{F}=-k^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F''+k^2F+\frac{1}{r}F'=0 \Longrightarrow rF''+F'+rk^2F=0 \quad ① \Longrightarrow \\ T''+c^2k^2T=0 \Longrightarrow T(t)=(A\cos ckt+B\sin ckt) \quad ② \end{cases}$$

معادله ساده شده ① را میتوان با تغییر متغیر $s=kr$ بفرم زیر نوشت

$$\begin{cases} F'=\frac{dF}{dr}=\frac{dF}{ds}\cdot\frac{ds}{dr}=k\frac{dF}{ds} \\ F''=\frac{d^2F}{dr^2}=k^2\frac{d^2F}{ds^2} \end{cases} \Longrightarrow ① \Longrightarrow ks\frac{d^2F}{ds^2}+k\frac{dF}{ds}+kSF=0$$

$$\Longrightarrow s^2F''+F'+SF=0 \Longrightarrow \boxed{F''_{(s)}+\frac{1}{s}F'(s)+F(s)=0}$$

معادله بسل درجه صفر

یادآوری -

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \\ y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \end{cases}$$ معادله بسل مرتبه n ام

$$n = 0 \Longrightarrow x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$ یا $$\boxed{y'' + \frac{y'}{x} + y = 0}$$ معادله بسل مرتبه صفرام