جلسه چهارم

✓ ۱- مشتق گیری از سری فوریه

✓ ۲- انتگرال گیری از سری فوریه

✓ ۳- تساوی پارسوال

مشتق گیری از سری فوریه:

(مشتق گیری) هرگاه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T دارای سری فوریه به صورت زیر باشد

$$f(x)= a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x \qquad T=2L \quad (-L,L)$$

و داشته باشیم $f(L)=f(-L)$ و همچنین $f'(x)$ در فاصله $[-L,L]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، سری

مشتق a_0 وجود نداشته باشد (ثابت صفر)

✓ هرگاه بتوان تابع را به تعداد متناهی از فاصله‌ها قطعه‌ای مجزا افراز کرد به صورتی که هر یک از فواصل پیوسته و در انتهای بازه‌ها مقادیر محدود داشته باشند

فوریه آن به فرم زیر بدست خواهد آمد.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{2n\pi}{T}\right)(a_n)\sin\frac{2n\pi}{T}x+\left(\frac{2n\pi}{T}\right)(b_n)\left(+\cos\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n\pi}{T}\right]\left[-a_n\sin\frac{2n\pi}{T}x+b_n\cos\frac{2n\pi}{T}x\right]$$

(انتگرال گیری) هرگاه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T دارای سری فوریه به فرم زیر باشد.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$\int_0 f(x)dx=a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{T}{2n\pi}\right)\sin\frac{2n\pi}{T}x+b_n\left(\frac{T}{2n\pi}\right)\left(-\cos\frac{2n\pi}{T}x\right)+K$$

دقت کنید عبارت نوشته شده سمت راست تساوی فوق توصیف سری فوریه $\int f(x)dx$ نخواهد

بود به علت وجود ترم a_0x. برای اینکه منظور سری فوریه تابع x را با در نظر گرفتن دوره تناوب T

و جایگزینی در عبارت a_0x بدست خواهیم آورد.

(تساوی پارسوال): هرگاه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشد و a_n و b_n ضرایب سری فوریه متناظر با تابع مزبور

باشد خواهیم داشت.

$$\frac{2}{T}\int_{<T>} f(x)^2\,dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

تساوی فوق را تساوی پارسوال می‌نامند.

$$a_n=\frac{(n+1)}{(n+4)} \quad \times \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+4)}=1$$

بایستی صفر شود. (طبق قضیه پارسوال و همگرا بودن سری)

s.a.m

سوال ۱: اگر $0 < x < 2$ داشته باشیم $x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$

در این صورت بسط فوریه تابع x^2 در فاصله $0 < x < 2$ عبارت است از: (آزمایشی کامپیوتر ۸۰)

با انتگرال گیری از سری فوریه داده شده در فرض مسئله خواهیم داشت.

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{2}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right) + C$$

$$x^2 = -\frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right) + C$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

سوال ۲: اگر بسط فوریه تابع $f(x) = |x|$ و $-\pi \le x \le \pi$ برابر $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$

باشد در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را بدست آورید. (کامپیوتر ۸۰)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le \pi \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \le x \le \pi \end{cases} = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} + K \checkmark$$

if $x = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow K = 0$

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} + 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)^3}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \Rightarrow$$

$$\left(+\frac{\pi^2}{8}\right)\left(+\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

s.a.m

مثال ۲: هرگاه سری فوریه تابع $\pi < x < -\pi$ و $f(x)=x^2$ بصورت زیر باشد

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

حاصل عبارت $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را بدست آورید.

$$\frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f^2(x)\,dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{2}{2\pi}\int (x^2)^2\,dx=2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \Rightarrow \frac{1}{\pi}\times\frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{2}{\pi}\times\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^5}{5}=\frac{2\pi^4}{5}=\frac{\pi^4}{9}\times 2+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\pi^4\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\times 2\right]\times\frac{1}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{\pi^4}{\cancel{8}\,2}\left[\frac{\cancel{4}}{45}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

مثال ۳: اگر بسط به سری فوریه کسینوسی $0<x<\pi$ و $f(x)=\sin x$ بصورت زیر باشد.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$$

مقدار سری $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\cdots$

(کنکور ۷۶)

$$\frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f^2(x)\,dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$T=2\pi$

$$f(x)=\sin x \Rightarrow \frac{2}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int\frac{(1-\cos 2x)}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\times 2\pi=1$$

n برابر فرد باشد

$$1=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-2}{(n-1)(n+1)}\times\frac{2}{\pi}\right)^2$$

$$1=\frac{8}{\pi^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(n-1)^2(n+1)^2} \Rightarrow 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{\substack{n=2k\\k=1}}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

n فرد باشد صفر است پس باید زوج باشد.

$$\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)\times\frac{\pi^2}{16}$$

مثال ۵: سری فوریه تابع $f(x)=x/2$ در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ به صورت زیر است.

$$f(x) \sim \sin x - (\sin 2x)/2 + (\sin 3x)/3 - \dots$$

سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ کدام است؟

$$x/2 \sim \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots$$

انتگرال‌گیری

$$\int \frac{x}{2}\,dx \sim -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \dots$$

$$x^2/4 \sim -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \dots$$

$$x^2 \sim 4\left(-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \dots\right) + C$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi} \times \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\cancel{2}\pi} \times \frac{\cancel{2}\pi^3}{3} = \pi^2/3$$

s.a.m

ریاضیات مهندسی

جلسه چهارم

تمرینات جلسه سوم:

۱) سری فوریه تابع زیر را تا سه جمله اول مخالف صفر آن را بیابید؟

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2 & -\pi<x<0\\ x^2 & 0<x<\pi\end{cases}$$

۲) بسط سری فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x)=e^{-|x|} \qquad -\pi<x<\pi$$

۳) سری فوریه $f(x)=\begin{cases}-k & -\pi<x<0\\ k & 0<x<\pi\end{cases}$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را بدست آورید؟

(کنکور کارشناسی ارشد کشوری مانند (۷۲-۷۳)

۴) تابع $f(x)=\cos ax$ که $-\pi<x<\pi$ و a عدد غیر صحیح است مفروض است. سری فوریه این تابع را بدست آورید؟ (ارشد مکانیک ۶۷-۶۸)

۵) تابع ... $f(x)$ در فاصله $-\pi<x<\pi$ به صورت $f(x)=\begin{cases}1/a & ; |x|<a/2\\ 0 & ; a/2<|x|<\pi\end{cases}$ تعریف شده است. با فرض اینکه $T=2\pi$ باشد بسط فوریه $f(x)$ هنگامی که a به سمت صفر میل کند را بدست آورید؟

۶) با استفاده از سری فوریه $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$

سری فوریه [illegible] را بدست آورید؟