حل معادله انتگرالی با مشتق جزئی توسط تبدیل لاپلاس:

می توان از تبدیل لاپلاس همانطوری که برای حل معادله انتگرالی معمولی بکار می رود، در حل معادلات با مشتق جزئی نیز بکار برد.
در اینجا نسبت به یکی از متغیرها تبدیل لاپلاس می گیریم تا به معادله انتگرالی معمولی تبدیل گردد.

تبدیل لاپلاس نسبت به t

$$\mathcal{L}_t\{u(x,t)\} = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt$$

لاپلاس نسبت به t

$$\mathcal{L}_x\{u(x,t)\} = U(s,t) = \int_0^\infty e^{-sx} u(x,t)\,dx$$

لاپلاس نسبت به x

فرض می دانیم از مشتق داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = s\mathcal{L}\{u(x,t)\} - u(x,0) = sU(x,s) - u(x,0) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\} = s^2U(x,s) - su(x,0) - u'(x,0) \end{cases}$$

مثال ۱- $\dfrac{\partial w}{\partial x} + x\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$ با شرط $w(x,0)=0$ ، $w(0,t)=t$ ، $t \geq 0$

$w(x,t) = ?$

حل: از لاپلاس نسبت به t تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

می‌رود

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} + \mathcal{L}\left\{x\frac{\partial w}{\partial t}\right\} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} + x\,\mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial t}\right\} = 0$$

W بزرگ   w کوچک

$$\frac{\partial W(x,s)}{\partial x} + x\left[sW(x,s) - \cancel{w(x,0)}\right] = 0$$

0

معادله دیفرانسیل معمولی؛

$$\frac{\partial W(x,s)}{\partial x} + xsW(x,s) = 0 \Rightarrow \frac{dW(x,s)}{dx} + xsW(x,s) = 0$$

$$W' + xsW = 0 \Rightarrow \frac{dW}{W} = -xs\,dx \Longrightarrow \ln W = \frac{-x^2}{2}s + \ln c$$

$$\Longrightarrow \boxed{W(x,s) = C e^{-\frac{x^2}{2}s}} \quad , \quad C = ?$$

حال برای C شرایط اولیه و مرزی را اعمال می‌کنیم؛

شرایط

$$w(0,t) = t \quad , \quad w(x,0) = 0$$

از پاسخ به دست آمده،

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow W(0,s) = C \\ w(0,t) = t \Longrightarrow \mathcal{L}\{w(0,t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} = W(0,s) = C \end{cases}$$

$$\Longrightarrow W(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{x^2}{2}s} \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{W(x,s)\} = w(x,t)$$

تبدیل معکوس می‌گیریم.

می‌دانیم که :

* $u(t)$ تابع پله‌ای است

$$\begin{cases} f(t) = t\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \dfrac{1}{s^2} \\ f(t-\alpha) = (t-\alpha)\,u(t-\alpha) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s^2} e^{-\alpha s} \end{cases}$$

$$W(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{x^2}{2} s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} w(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right) u\left(t - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow w(x,t) = \begin{cases} t - \dfrac{x^2}{2} & , \quad t \geq \dfrac{x^2}{2} \\ 0 & ; \quad t < \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

مثال ۴- معادله $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ با شرایط $u(0,t)=1$, $u(1,t)=1$

$u(x,0)=1+\sin\pi x$ را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

U بزرگ $\quad$ u کوچک

از طرفین نسبت به t لاپلاس گرفتیم.

$$sU(x,s)-u(x,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$$

(مشتق نسبت به x است)

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}-sU(x,s)=-u(x,0)\Longrightarrow \boxed{U''-sU=-1-\sin\pi x}$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم برحسب x که یک پاسخ همگن و یک پاسخ خصوصی دارد.

پاسخ همگن

$$U''-sU=0\Longrightarrow p^2-s=0 \ (\text{معادله مشخصه}) \longrightarrow p=\pm\sqrt{s}$$

پاسخ همگن

$$\boxed{U_h=Ae^{\sqrt{s}x}+Be^{-\sqrt{s}x}}$$

پاسخ خصوصی: ابتدا پاسخ به ازای **-1** را پیدا می‌کنیم؛

$$\text{جواب خصوصی اول} = \overset{\text{مقدار ثابت}}{C} \Longrightarrow 0 - sC = -1 \Longrightarrow C = \frac{1}{s}$$

حال پاسخ به **$-\sin\pi x$** را پیدا می‌کنیم؛

$$\text{جواب خصوصی دوم} = \overset{\text{عدد ثابت}}{D}\sin\pi x \xrightarrow{\text{وقتی در معادله قرار دهیم}} -\pi^2 D\sin\pi x - sD\sin\pi x = -\sin\pi x$$

$$\Longrightarrow D(\pi^2+s) = 1 \Longrightarrow D = \frac{1}{\pi^2+s}$$

پس جواب کل معادله تبدیل شده به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,s) = Ae^{\sqrt{s}\,x} + Be^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{1}{s} + \frac{\sin\pi x}{\pi^2+s}$$

حال باید A و B شرایط اولیه را اعمال کنیم:

$$\begin{cases} u(0,t)=1 \Longrightarrow U(0,s)=\dfrac{1}{s} \xrightarrow{\text{اعمال جواب عمومی}} A+B+\cancel{\dfrac{1}{s}}+0=\cancel{\dfrac{1}{s}} \Longrightarrow \boxed{A+B=0} \\ u(1,t)=1 \Longrightarrow U(1,s)=\dfrac{1}{s} \xrightarrow{\text{اعمال جواب عمومی}} Ae^{\sqrt{s}}+Be^{-\sqrt{s}}+\cancel{\dfrac{1}{s}}+\cancel{\dfrac{\sin\pi}{s+\pi^2}}=\cancel{\dfrac{1}{s}} \Longrightarrow \end{cases}$$

$$A\left(e^{\sqrt{s}}-e^{-\sqrt{s}}\right)=0 \Longrightarrow \boxed{A=0\ ,\ B=0}$$

پس نهایتاً پاسخ با توجه به $A=B=0$

$$U(x,s)=\frac{1}{s}+\frac{\sin\pi x}{s+\pi^2} \xrightarrow{\text{تبدیل معکوس}}$$

$$u(x,t)=1+e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$$

مثال ۳- حل معادله موج

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

با شرایط

$$w(x,0) = 0 \;, \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$, \quad w(0,t) = \begin{cases} \sin t \;; & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \;; & \text{oth} \end{cases}$$

$$w(x,t) = ?$$

از طرفین نسبت به t تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$$

بزرگ — کوچک — کوچک — بزرگ

$$s^2 W(x,s) - s\,w(x,0) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2 W(x,s)}{\partial x^2}$$

$$s^2 W(x,s) = \frac{\partial^2 W(x,s)}{\partial x^2} \Longrightarrow \frac{d^2 W(x,s)}{dx^2} - s^2 W(x,s) = 0$$

$$W'' - s^2 W = 0 \Longrightarrow p^2 - s^2 = 0 \Longrightarrow p = \pm s \Longrightarrow \boxed{W(x,s) = Ae^{-sx} + Be^{+sx}}$$

مشتق نسبت به x

معادله مشخصه

با توجه به شرایط مرزی گفته شده که:

$\lim_{x \to \infty} w(x,t) = 0$ تا برای در پاسخ صحیح تعیین $B = 0$ شده

و A با توجه شرایط پیدا شده.

$$W(x,s) = A e^{-sx}$$

$$W(0,s) = A = \mathcal{L}\{w(0,t)\} = \mathcal{L}\left[\begin{cases} \sin t & , \ 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & ; \ oth \end{cases}\right] =$$

$$= \mathcal{L}\{\underbrace{\sin t\,[u(t) - u(t-2\pi)]}_{f(t)}\} = F(s) \Longrightarrow F(s) = A$$

$$W(x,s) = F(s)e^{-sx} \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} w(x,t) = f(t-x)\,u(t-x)$$

$$w(x,t) = f(t-x)\,u(t-x)$$

$$w(x,t) = \begin{cases} 0 , & t < x \\ \sin(t-x) ; & t > x \end{cases}$$

تمرین - معادله $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را با شرایط $u(0,t)=0$, $u(3,t)=0$

به کمک تبدیل لاپلاس حل نمایید.

پاسخ پایدار در معادله پخش حرارت :

منظور از پاسخ پایدار یعنی مقدار $\lim_{t \to \infty} u(x,t)$ را پیدا کنیم. اگر جواب پیدا کردن مقدار آن دشوار بود در معادله

u_{tt} و u_t را صفر در نظر گرفته و معادله حل کرده و پاسخ را بدست آورید.

مثال: معادله $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در میله‌ای به طول L و شرایط مرزی

توزیع دمای میله $\begin{cases} u(0,t) = T_0 \\ u(L,t) = 2T_0 \end{cases}$

در حالت پایدار $(t \to \infty)$ بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow u(x) = Ax + B$$

$$\begin{cases} u(0,t) = T_0 \\ u(L,t) = 2T_0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{u(x) = T_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)}$$

مثال ۲- معادله غیرهمگن حرارت را در راستای میله‌ای به طول L

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 1$$

$t > 0;\ 0 < x < L$, $u(0,t) = u(L,t) = 0$ و $u(x,0) = f(x)$

پاسخ $u(L/2, t)$ را بدست آورید. (حالت پایدار) $t \to \infty$

در حالت پایدار $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ بنابراین:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = x + A$$

$$\Longrightarrow \boxed{u = \tfrac{1}{2}x^2 + Ax + B}$$

$u(0,t) = 0 \Longrightarrow \boxed{B = 0}$

$u(L,t) = 0 \Longrightarrow \tfrac{1}{2}L^2 + AL = 0 \Longrightarrow \boxed{A = -L/2}$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{L}{2}x \Longrightarrow \boxed{u(L/2, t) = -\frac{L^2}{8}}_{t \to \infty}$$