

❖ تمرینات :

۱. اگر  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  باشد (کثیرالجمله ای با ضرایب حقیقی)

اولاً : ثابت کنید  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

ثانیاً : اگر عدد مختلط  $(v)$  ریشه  $f(z) = 0$  باشد آنگاه  $\bar{v}$  نیز ریشه آن است.

۲. درستی اتحاد  $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  را تحقیق کنید و سپس نتیجه بگیرید:

$$(if \ 0 < \theta < 2\pi) \quad 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

۳. نشان دهید که :

(الف)  $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

(ب)  $\sqrt{2} |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

(ج)  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

۴. اگر  $f(x) = x^2 - y^2 - 2y + j(2x - 2xy)$  این عبارت را بر حسب  $z$  بنویسید :

۵. معادله های زیر را حل نمایید :

(الف)  $z^4 - 2j + 6 = 0$  (ب)  $z^{\frac{5}{4}} = j$

(ج)  $e^{2z} + 3je^z = 0$  (د)  $\cos z = 2$

(هـ)  $\sinh z = j$

۶. نشان دهید که توابع  $\sin z$  و  $\cos z$  کراندار نیستند .

۷. نقاط مشتق پذیر توابع زیر را مشخص کنید :

(الف)  $f(z) = \bar{z}$  (ب)  $f(z) = \operatorname{Re}\{z\}$  (ج)  $f(z) = \operatorname{Im}(z)$

۸. نشان دهید که هر یک از توابع زیر در هیچ جا تحلیلی نیستند .

(الف)  $f(z) = xy + jy$  (ب)  $f(z) = e^y x^{jx}$  (ج)  $f(z) = e^{\bar{z}}$

۹. حوزه تحلیلی بودن تابع  $f(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2 + |z|^2)^3}$  را تعیین نمایید.

۱۰. اولاً  $n$  را طوری تعیین کنید که تابع زیر همساز باشد. ثانیاً با قرار دادن  $n=2$  مزدوج همساز آن را بدست آورید: ( $n$  عدد طبیعی است)

$$u = \ln(x^n + y^n)$$

۱۱. کدامیک از توابع زیر همساز ( هارمونیک ) می باشند ؟ مزدوج آنها را بدست آورید :

$$(الف) e^x \cos y + x + y \quad (ب) \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (ج) \sin x \cos y \quad (د) x^2 + y^2$$

۱۲. نشان دهید که تابع  $f(z) = \begin{cases} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$  در  $z=0$  مشتق پذیر نیست ولی در این نقطه در شرایط کوشی - ریمن صدق می کند ؟

۱۳. اگر  $v(x,y)$  یک مزدوج همساز تابع  $u(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$  باشد و داشته باشیم  $V(0,0) = 0$  آنگاه مقدار  $V(1,1)$  را محاسبه نمایید :

۱۴. تابع تحلیلی  $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$  را بدست آورید وقتی که :

$$w(0) = 0, \quad u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

۱۵. تابع  $w = \ln z$  را به ازای عدد مختلط  $z = re^{j\theta}$  و  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  و  $r > 0$  تعریف می کنیم :

$$\ln z = \ln r + j\theta$$

اکنون اگر  $z = e^{j\frac{3\pi}{4}}$  آنگاه مقدار  $\ln z^2$  را بدست آورید .

۱۶. اگر  $u(x,y) = 2^x \cos(y \ln 2)$  باشد تابع  $f(z)$  که به فرم  $u + jv$  هست رایابید.

۱۷. قطب های تابع زیر را بیابید.

$$f(z) = \frac{z}{\sinh z \cosh z}$$

۱۸. با فرض  $f(z) = x^2 - y^2 + j(x^2 + y^2)$  مشتق تابع را در نقاط  $1-j$  و  $1+j$  (در صورت وجود) محاسبه کنید.

۱۹. اگر  $f(z)$  یک تابع تحلیلی باشد و  $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + xy + xy^2$ ، تابع  $f(z) = u + jv$  بر حسب  $z$  محاسبه کنید.

۲۰. حد تابع زیر را در مبدا بیابید.

$$f(z) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} + j \frac{xy}{x^2+y^2}$$