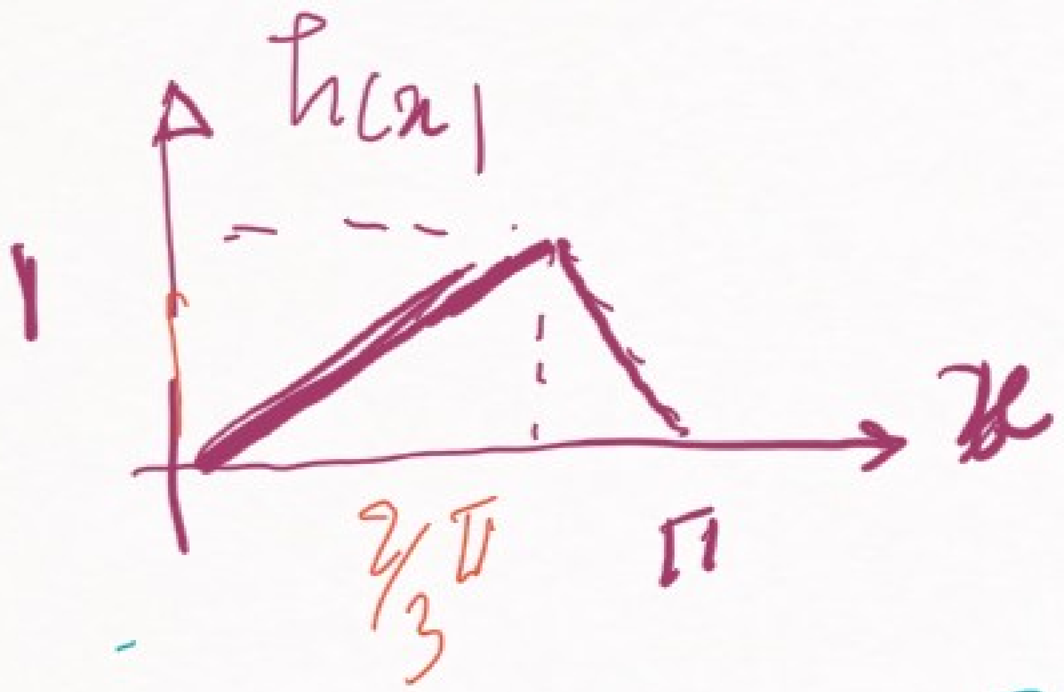
$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad , \quad b_n = \frac{2}{\mu_n l} \int_0^l k(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \end{cases} \Longleftarrow \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ : سیم مرتعش}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = h(x) \\ u_t(x,0) = k(x) \end{cases}$$

مثال محدود - سیم مرتعش

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = h(x) \quad , \quad u_t(x,0) = k(x) = 0 \end{cases} \quad \text{با شرایط} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$l = \pi \, , \, c = 1$



$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} ct = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cdot \cos nt}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{2}{l} \left[\int_0^{2/3\pi} (\text{---}) \sin nx \, dx + \int_{2/3\pi}^{\pi} (\text{--}) \sin nx \, dx = \dots \right.$$

حل معادله موج تک بعدی با شرایط مرزی مخالف صفر:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = h(x) \\ u_t(x,0) = k(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = p_0 \\ u(l,t) = p_1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = ?$$

برای حل در این حالت جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$p_0 = w(0,t) + v(0)$$

$$p_1 = w(l,t) + v(l)$$

اگر فرض کنیم $v(0) = p_0$ و $v(l) = p_1$ بنابراین:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

و با توجه به معادله موج چنین داریم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

حال با فرض اینکه $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ باشد داریم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rightarrow \begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \end{cases}$$

یعنی معادله موج برحسب w با شرایط مرزی صفر است

پس جواب معادله سیم جدید به صورت زیر حاصل شد:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\mu_n t+B_n\sin\mu_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t)=w(x,t)+V(x)$$

حال $V(x)$ را نیز پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0\\[2mm] V(0)=P_0\ ,\ V(l)=P_1\end{cases}\Longrightarrow V(x)=\frac{P_1-P_0}{l}x+P_0$$

در نتیجه $u(x,t)$ به صورت زیر می‌شود:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\mu_n t+B_n\sin\mu_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x+\frac{P_1-P_0}{l}x+P_0$$

برای پیدا کردن A_n و B_n شرایط اولیه اعمال می‌شود:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x+\frac{P_1-P_0}{l}x+P_0\Longrightarrow$$

$$\underbrace{\left[h(x)-\frac{P_1-P_0}{l}x-P_0\right]}_{f(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

بنابراین مشخص شد که در این صورت A_n ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است که به صورت تابعی فرد متناوب ممتد باشد یعنی:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left[h(x)-\frac{P_1-P_0}{l}x-P_0\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

و همین صورت با اعمال شرط دوم یعنی: $u_t(x,0)=k(x)$ می‌توان B_n را نیز محاسبه کرد.

معادله موج ناهمگن:

حالت ساده‌ای که جمله غیرهمگن تابع x و شرایط مرزی ثابت.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x) \quad ; \quad 0 < x < l$$

$$u(0,t) = A \quad , \quad u(l,t) = B$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(x,t) = ?$$

تغییر متغیر $\boxed{u(x,t) = w(x,t) + \varphi(x)}$ در نظر می‌گیریم، معادله را با تعیین $\varphi(x)$ مناسب تبدیل به معادله همگن برحسب W می‌کنیم. با قرار دادن در معادله و اعمال شرایط مرزی بالا داخل کادر

$$w_{tt} = c^2\left(w_{xx} + \varphi''(x)\right) + h(x) = c^2 w_{xx} + \underbrace{c^2\varphi''(x) + h(x)}_{=0}$$

$$\begin{cases} w(0,t) + \varphi(0) = A \\ w(l,t) + \varphi(l) = B \\ w(x,0) + \varphi(x) = f(x) \\ w_t(x,0) + \varphi(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2\varphi''(x) + h(x) = 0 \\ \varphi(0) = A \\ \varphi(l) = B \end{cases}$$

یعنی اگر $\varphi(x)$ جواب مسأله مقابل باشد آنگاه معادله برحسب w همگن بصورت جمله‌ای خواهد شد.

$$\begin{cases} W_{tt} = c^2 W_{xx} \\ W(0,t) = W(l,t) = 0 \\ W(x,0) = f(x) - \varphi(x) \\ W_t(x,0) = g(x) - \varphi(x) \end{cases}$$

بنابراین معادله برحسب W به صورت مشابه کشش تار می‌شود.

مثال -

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sin x \quad ; \; 0 < x < \pi/2 \;, \; t > 0$$

$$u(0,t) = u(\tfrac{\pi}{2}, t)$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

را به معادله کشش تبدیل نمایید.

$\varphi(x)$ جواب معادله زیر است :

$$\begin{cases} c^2\varphi''(x) + \sin x = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{c^2}\sin x - \frac{2}{\pi c^2}x$$

و لذا با تغییر متغیر $u(x,t) = w(x,t) + \varphi(x)$ را به کار ببریم:

$$w_{tt} = c^2 w_{xx}$$

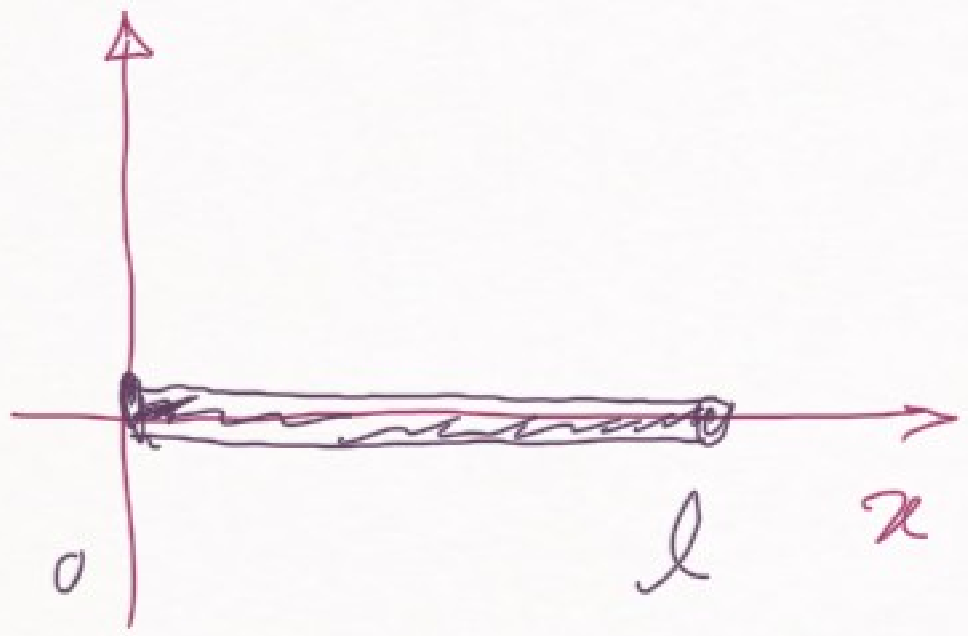
$$w(0,t) = w(\frac{\pi}{2},t) = 0$$

$$w(x,0) = f(x) - \varphi(x) = \frac{-1}{c^2}\sin x + \frac{2}{\pi c^2}x$$

$$w_t(x,0) = g(x) - \varphi(x) = \frac{-1}{c^2}\sin x + \frac{2}{\pi c^2}x$$

حال می‌توان این معادله کشش را حل کرد

معادله انتقال حرارت یک بعدی با طول محدود با استفاده از سری فوریه ۱



انتقال حرارت یا جریان گرما در جسمی که از ماده همگن تشکیل شده است از معادله گرما که بصورت زیر است پیروی می‌کند.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

که $c^2 = \frac{k}{s\rho}$ = ثابت.

k: رسانایی گرمایی

s: گرمای ویژه

ρ: چگالی جسم

$u(x,t)$ دمای درون جسم

یک میله به طول l و دمای نقاط ابتدایی و انتهایی یعنی $x=0$ و $x=l$ صفر است.

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

برای حل مسئله از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

$$\begin{cases} u_t = f(x)g'(t) \\ u_{xx} = f''(x)g(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)g'(t)}{f(x)g(t)} = \frac{c^2 f''(x)g(t)}{f(x)g(t)} \Longrightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{c^2 g(t)} = k$$

چون طرف راست رابطه فقط تابع t و طرف چپ تابع x لذا باید حاصل تنها مقدار ثابتی خواهد بود.

* اگر $k \geq 0$ در نظر بگیریم نشان داده می‌شود که: $u(x,t)=f(x)g(t)=0$ که جواب نیست.

* $k=-\lambda^2$ خواهیم داشت:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = -\lambda^2 \Longrightarrow \begin{cases} f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 & (1) \\ g''(t) + \lambda^2 c^2 g(t) = 0 & (2) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(1) \Longrightarrow f(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$$u(0,t)=0 \Longrightarrow f(0)g(t)=0 \Longrightarrow B=0$$

$$u(l,t)=0 \Longrightarrow f(l)g(t)=0 \Longrightarrow A\sin\lambda l=0 \;,\; A\neq 0 \Longrightarrow \sin\lambda l=0$$

$$\lambda l = n\pi \Longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{l}x}$$

چون λ به n وابسته است لذا A و f وابسته به n خواهند شد.

② معادله $\Longrightarrow g'(t) + \lambda_n^2 g(t) = 0 \quad , \quad \lambda_n = \dfrac{cn\pi}{l} \Longrightarrow \boxed{g_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}}$

جواب عمومی عبارت:

$$u_n(x,t) = f_n(x) g_n(t) = A_n B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \, e^{-\lambda_n^2 t}$$

$A_n B_n = b_n$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \, e^{-\lambda_n^2 t}$$

در این رابطه ضریب b_n با توجه به شرط اولیه به دست می‌آید.

$$u(x,0) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

از مقایسه رابطه فوق با بسط سری فوریه مثلثاتی سینوسی نتیجه شد که اگر $h(x)$ تابعی مناسب و فرد با دوره $2l$ باشد آنگاه b_n ضرایب سری سینوسی آن خواهد شد یعنی:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x) \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx$$

معادله انتقال حرارت با طول محدود در صورتی که شرایط مرزی صفر نباشد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(0,t) = T_0$

$u(l,t) = T_1$

$u(x,0) = h(x)$

$u(x,t) = ?$

در این حالت شبیه روشی که برای معادله موج بکار بردیم می‌توان نشان داد که جواب به صورت زیر باشد.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l} x \, e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} + \frac{T_1 - T_0}{l} x + T_0$$

که در آن b_n با توجه به شرط اولیه از رابطه زیر بدست می‌آید

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[h(x) - \frac{T_1 - T_0}{l} x - T_0 \right] \sin\frac{n\pi}{l} x \, dx$$

معادله انتقال حرارت یک بعدی با طول نامحدود (استفاده از انتگرال فوریه)

در بخش قبل انتقال حرارت در میله ای به طول L بررسی کردیم. حال معادله را با حالتی که $L \to \infty$ بشود حل کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0$$

$$u(x,t) = ?$$

شبیه حالت قبل از روش جداسازی متغیرها:

$$u(x,t) = f(x)\, g(t)$$

و در معادله قرار می‌دهیم ...

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{c^2 g(t)} = -\lambda^2$$

توجه در صورتی که مقدار ثابت مثبت در نظر گرفته شود لذا منجر به حضور یک تابع نمایی صعودی در $g(t)$ می‌شود که از لحاظ فیزیکی مفهومی ندارد.

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \\ g'(t) + c^2\lambda^2 g(t) = 0 \longrightarrow g(t) = e^{-c^2\lambda^2 t} \end{cases}$$

در این صورت:

$$u(x,t,\lambda) = f(x)g(t) = \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-c^2\lambda^2 t}$$

با توجه به اینکه $h(x)$ در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار دارد، لذا در این حالت به جای A و B از انتگرال فوریه استفاده می‌شود.

و $A = A(\lambda)$ و $B = B(\lambda)$ فرض شده و تابع λ اند؛ جواب معادله نیز تابع λ حاصل است.

در نتیجه رابطه به صورت زیر حاصل است:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] e^{-c^2\lambda^2 t}\, d\lambda$$

تمرین: نشان دهید که جواب $u(x,t)$ به دست آمده در معادله انتقال حرارت صدق می‌کند.

حال برای محاسبه $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ از شرط اولیه استفاده می‌شود:

$$u(x,0) = h(x)$$

$$h(x) = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] d\lambda$$

ملاحظه شد که در رابطه صحیح تبدیل شبیه انتگرال فوریه تابع $h(x)$ می‌باشد به این $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ ها و این انتگرال فوریه را بدست می‌دهند:

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos\lambda x\,dx \quad , \quad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\sin\lambda x\,dx$$

توضیح: می‌توان با $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ در رابطه صحیح‌تر جایگذاری نمود و به رابطه زیر رسید.

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} h(s)\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-c^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-s)\,d\lambda\right\}ds$$

معادله فوق شکل انتگرال صورت معادله انتقال حرارت کمک کند. این معادله را می‌توان به صورت های دیگر نیز نشان داد شکل دوم و سوم که در اینجا در این مورد بحثی ایجاد نمی‌شود.

روش دالامبر برای حل معادله موج

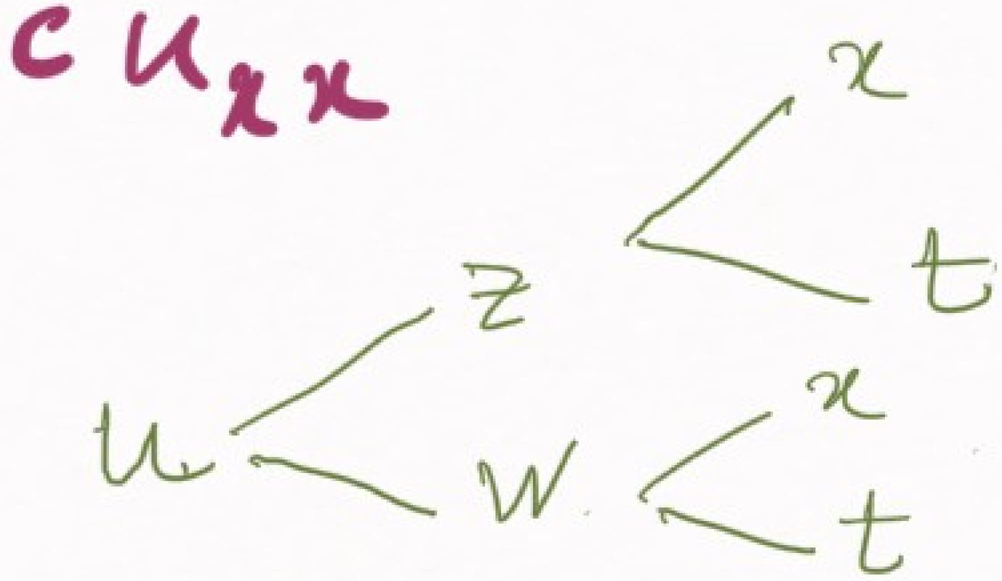
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{یا} \quad u_{tt}=c^2u_{xx}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0$$

$$u(x,0)=h(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=k(x)$$

$$u(x,t)=?$$



تغییر متغیر
$\begin{cases} z=x+ct \\ w=x-ct \end{cases}$ بکار می‌بریم.

با استفاده از قاعده زنجیری خواهیم داشت:

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=u_z+u_w$$

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}=c\,u_z-c\,u_w$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial w}\right)=\dots=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$$

کسر

لطفا تمرین این را اثبات نمایید

همچنین ترتیب برای u_{tt} داریم:

$$u_{tt}=c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\right]$$

حال اگر در معادله موج جای گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$c^2(u_{zz}-2u_{wz}+u_{ww}) = c^2(u_{zz}+2u_{wz}+u_{ww}) \Longrightarrow 2u_{wz}=0 \quad \text{یا} \quad \boxed{u_{wz}=0}$$

معادله موج جدید

مشاهده می‌شود که معادله موج به یک معادله ساده با این تغییر متغیر تبدیل گردید که با دو بار انتگرال‌گیری حل می‌شود.

[illegible] -

انتگرال‌گیری نسبت به z

تابعی دلخواه از w

$$u_{wz}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial w}=\varphi(w)$$

با انتگرال‌گیری مجدد نسبت به w خواهیم داشت:

تابعی دلخواه از z

$$u(z,w)=\int \varphi(w)\,dw+\vartheta(z) \quad \text{و} \quad \phi(w)=\int \varphi(w)\,dw$$

$$u(z,w)=\phi(w)+\vartheta(z)$$

$$\boxed{u(x,t)=\phi(x+ct)+\vartheta(x-ct)}$$

این جواب معروف به جواب دالامبر است که توابع ϕ و ϑ با توجه به شرایط مرزی و اولیه تعیین می‌شوند.

$$\phi(\cdot)=?\ ;\ \vartheta(\cdot)=?$$

$$u(x,0)=h(x) \Longrightarrow \boxed{h(x)=\phi(x)+v(x)} \quad ①$$

$$u_t(x,0)=k(x) \Longrightarrow u_t(x,0)=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial w}\cdot\cancelto{c}{\frac{\partial w}{\partial t}}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\cancelto{-c}{\frac{\partial z}{\partial t}}=c\phi'(w)-cv'(z)$$

و یا می‌توان نوشت ← (در $t=0$)

$$\boxed{u_t(x,0)=k(x)=c\left[\phi'(x)-v'(x)\right]} \quad ②$$

$$\begin{matrix}① \\ \Longrightarrow \\ ②\end{matrix}\begin{cases}\phi(x)+v(x)=h(x)\\ \phi'(x)-v'(x)=\frac{1}{c}k(x)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\phi'(x)+v'(x)=h'(x)\\ \phi'(x)-v'(x)=\frac{1}{c}k(x)\end{cases} \Longrightarrow$$

* از حل دستگاه دو معادله دو مجهول $\phi'(x)$, $v'(x)$ بدست می‌آید و سپس با انتگرال‌گیری $\phi(x)$ و $v(x)$ محاسبه شده.

$$\begin{cases}\phi'(x)=\frac{1}{2}h'(x)+\frac{1}{2c}k(x)\\ v'(x)=\frac{1}{2}h'(x)-\frac{1}{2c}k(x)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\phi(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x k(s)\,ds\\ v(x)=\frac{1}{2}h(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x k(s)\,ds\end{cases}$$

با جایگذاری در جواب دالامبر معادله فوق حاصل می‌شود:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[h(x+ct)+h(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}k(s)\,ds$$