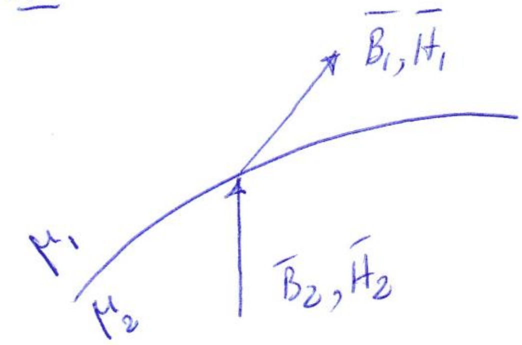
شرایط مرزی



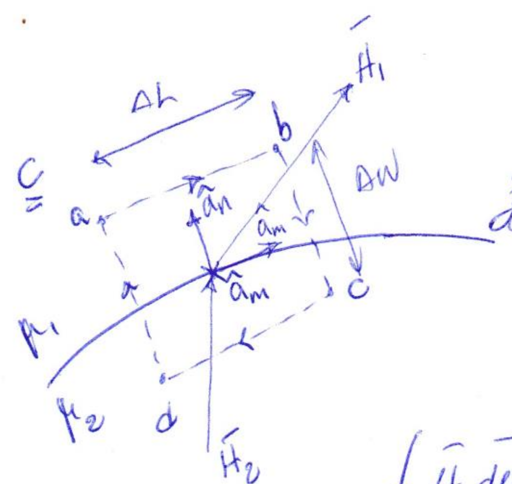
$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \rightarrow \oint \bar{B} \cdot \bar{dl} = \mu_0 \int_s \bar{J} \cdot \bar{ds}$$

کل جریان

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_v \rightarrow \oint_c \bar{H} \cdot \bar{dl} = \int_s \bar{J}_v \cdot \bar{ds}$$

تنها جریانهای آزاد

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \rightarrow \oint_s \bar{B} \cdot \bar{ds} = 0$$



$\bar{J}_s$: جریان سطحی آزاد روی مرز

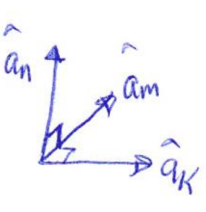
$$\oint_{abcda} \bar{H} \cdot \bar{dl} = \int_{S_{abcd}} \bar{J}_v \cdot \bar{ds}$$

$$\oint_C \bar{H} \cdot \bar{dl} = \int_a^b + \underbrace{\int_b^c}_{\text{صفر}} + \int_c^d + \underbrace{\int_d^a}_{\text{صفر}} \bar{H} \cdot \bar{dl} = \int_a^b \bar{H}_1 \cdot \bar{dl} + \int_c^d \bar{H}_2 \cdot \bar{dl}$$

$\Delta W \rightarrow 0$

$$= \bar{H}_1 \cdot \bar{\Delta L} - \bar{H}_2 \cdot \bar{\Delta L} = (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \cdot \bar{\Delta L}$$

$$\int_{S_{abcd}} \bar{J}_v \cdot \bar{ds} = \bar{J}_s \cdot \Delta L \, \hat{a}_m$$



$$\hat{a}_K = \hat{a}_m \times \hat{a}_n \quad , \quad \bar{\Delta L} = \Delta L \, \hat{a}_K$$

$$(\overline{H_1}-\overline{H_2})\cdot\overline{\Delta L} = (\overline{H_1}-\overline{H_2})\cdot\hat{a}_K\,\Delta L = (\overline{H_1}-\overline{H_2})\cdot(\hat{a}_m\times\hat{a}_n)\,\Delta L$$

$$= \overline{J_s}\cdot\hat{a}_m\,\Delta L$$

$$(\hat{a}_m\times\hat{a}_n)\cdot(\overline{H_1}-\overline{H_2}) = \overline{J_s}\cdot\hat{a}_m$$

یادآوری = $\quad(\overline{A}\times\overline{B})\cdot\overline{C} = (\overline{B}\times\overline{C})\cdot A$

$$(\underbrace{\hat{a}_m}_{\overline{A}}\times\underbrace{\hat{a}_n}_{\overline{B}})\cdot\underbrace{(\overline{H_1}-\overline{H_2})}_{\overline{C}} = \left[\hat{a}_n\times(\overline{H_1}-\overline{H_2})\right]\cdot\hat{a}_m = \overline{J_s}\cdot\hat{a}_m$$

$$\therefore\ \hat{a}_n\times(\overline{H_1}-\overline{H_2}) = \overline{J_s} \quad \text{or} \quad \hat{a}_{n21}\times(\overline{H_1}-\overline{H_2}) = \overline{J_s}$$

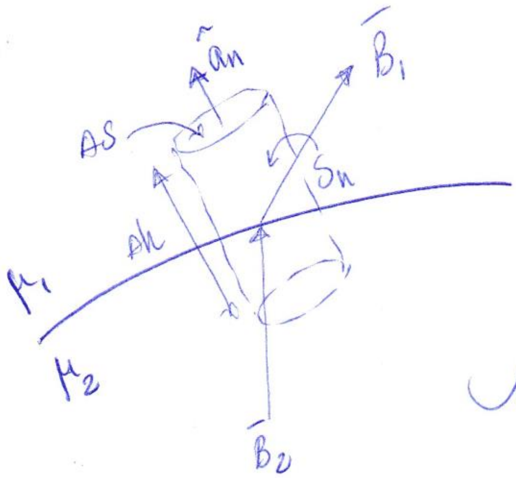
$$\overline{H} = \overline{H_t}+\overline{H_n}$$

$$\text{if } \overline{H_t}\perp\overline{J_s} \longrightarrow H_{t1}-H_{t2} = \overline{J_s}$$

$$H_{t1} = H_{t2}+J_s$$

$$\text{if } \overline{J_s}=0 \longrightarrow H_{t1}=H_{t2}\ ,\ \hat{a}_{n21}\times(\overline{H_1}-\overline{H_2})=0$$

150



$$\oint_S \bar{B}\cdot\bar{ds} = 0$$

$$\oint_S \bar{B}\cdot\bar{ds} = \int_{\Delta S_1} + \int_{\Delta S_2} + \int_{S_h} \bar{B}\cdot\bar{ds} = 0$$

صفر

$\Delta h \rightarrow 0 \;\; S_h = 0$

$$\int_{\Delta S_1} \bar{B}\cdot ds + \int_{\Delta S_2} \bar{B}\cdot\bar{ds} = 0 \rightarrow \bar{B}_1\cdot\Delta S\hat{a}_n - \bar{B}_2\cdot\Delta S\hat{a}_n = 0$$

$$(\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\cdot\hat{a}_n \Delta S = 0 \rightarrow (\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\cdot\hat{a}_n = 0$$

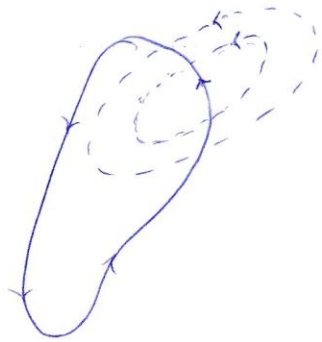
$$\hat{a}_{n21}\cdot(\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0 \quad \text{or} \quad B_{n1} = B_{n2}$$

ضرایب خودالقا و القای متقابل :

شار مغناطیسی $\Phi = \int_S \bar{B} \cdot \bar{ds}$

دو مدار با تمامی خطوط میدان مغناطیسی خودش پیوند دارند.

خطوط میدان مغناطیسی خطوط بسته‌ای هستند و پیرامون منبع خودشان بسته می‌شوند.



کل شار : $\Phi = \int \bar{B} \cdot \bar{ds} \quad , \quad \Psi = n\Phi$

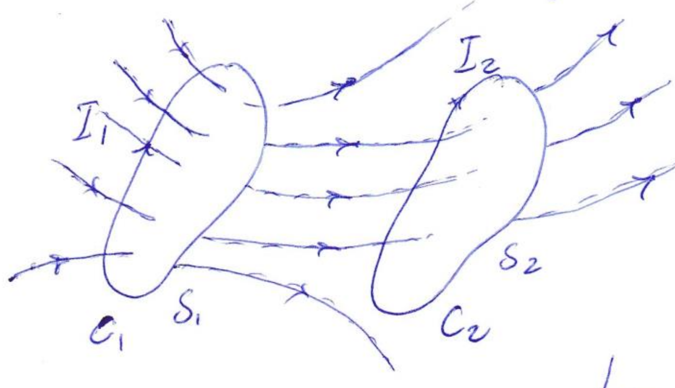
مدار شامل n دور سیم باشد

اگر حلقه‌های سیم پیچ مدار یکسان نباشند

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

$$\Psi = L\, i \qquad \text{وبر-دور}$$

L : ضریب خودالقایی (H)



$$\begin{cases} \Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} \\ \Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} \end{cases}$$

$$L_{11} = \left.\frac{\Psi_1}{I_1}\right|_{I_2=0} , \quad L_{12} = \left.\frac{\Psi_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2 \\ \Psi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2 \end{cases}$$

$$L_{21} = \left.\frac{\Psi_2}{I_1}\right|_{I_2=0} , \quad L_{22} = \left.\frac{\Psi_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$\psi_{11} = \int_{S_1} \bar{B}_1 \cdot \bar{ds} = \int_{S_1} \nabla \times \bar{A}_1 \cdot \bar{ds} = \oint_{C_1} \bar{A}_1 \cdot \bar{dl} \quad , \quad \bar{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 \bar{dl}}{R}$$

$$\psi_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \oint_{C_1} \left(\frac{\bar{dl}}{R}\right) \cdot \bar{dl} \longrightarrow L_{11} = \frac{\psi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{\bar{dl}}{R} \cdot \bar{dl} > 0$$

L_{11} مستقل از I_1 و همیشه مثبت است.

بطور مشابه برای L_{22} داریم:

$$L_{22} = \frac{\psi_{22}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_2} \frac{\bar{dl}}{R} \cdot \bar{dl}$$

$$\psi_{21} = \int_{S_2} \bar{B}_1 \cdot \bar{ds} = \int_{S_2} \nabla \times \bar{A}_1 \cdot \bar{ds} = \oint_{C_2} \bar{A}_1 \cdot \bar{dl} \quad , \quad \bar{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 \bar{dl}}{R}$$

$$\psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\bar{dl}}{R_{21}} \cdot \bar{dl}$$

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\bar{dl} \cdot \bar{dl}}{R_{21}}$$

L_{21} می‌تواند مثبت یا منفی باشد

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\bar{dl} \cdot \bar{dl}}{R_{12}}$$

بطور مشابه

$$L_{21} = L_{12}$$

$$W_M = \frac{1}{2} L I^2 \longrightarrow L = \frac{W_M}{\frac{1}{2} I^2}$$

مثال: ضریب خودالقای یک سیم لوله طویل با شعاع a و تعداد سیم پیچ در واحد طول n را بیابید.

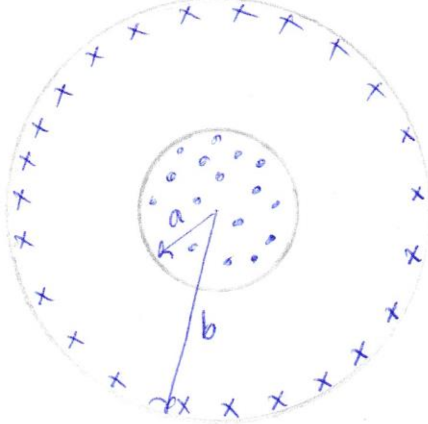
$$\begin{cases} \bar{B} = \mu_0 n I \hat{a}_z & r < a \\ B = 0 & r > a \end{cases}$$

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \mu_0 n I \hat{a}_z \cdot r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z$$

شار گذرنده از واحد طول سیم پیچ: $\psi = n\Phi = n \cdot \pi a^2 \cdot B = \mu_0 \pi a^2 n^2 I$

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu_0 \pi a^2 n^2$$

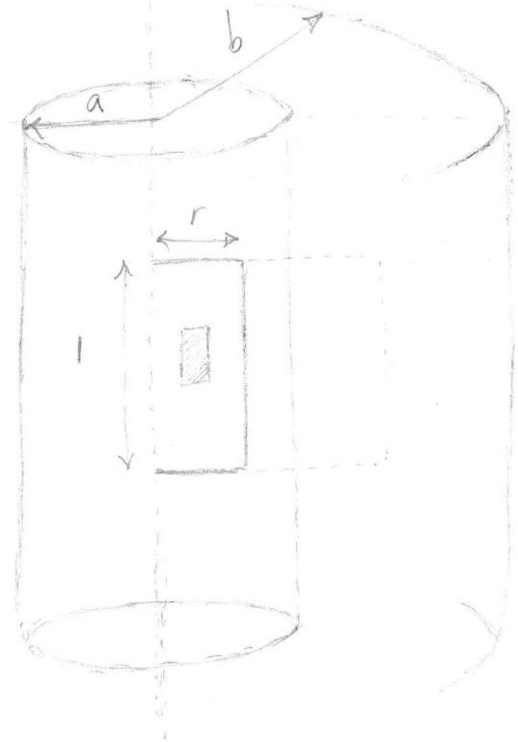
مثال: جریان I با چگالی حجمی یکنواخت $\bar{J} = J_0 \hat{a}_z$ از یک هادی استوانه‌ای طویل با شعاع a عبور کرده و با توزیع سطحی یکنواخت از طریق یک سطح استوانه‌ای هادی با شعاع b برمی‌گردد. این ساختار را کابل هم محوری نامند. ضریب خودالقای این کابل را بیابید.

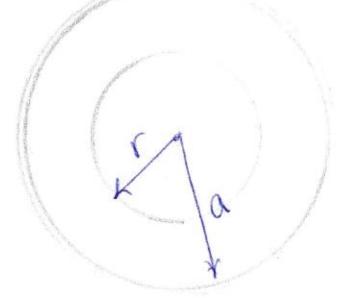


$$\begin{cases} \bar{B} = \frac{1}{2}\mu J_0 r\,\hat{a}_\varphi & 0 < r < a \\ \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & a < r < b \\ \bar{B} = 0 & r > b \end{cases}$$

$$I = \int_S \bar{J} \cdot \bar{ds} = J_0 \pi a^2$$

154





$$\varphi = \underbrace{\int_{S_1}}_{0<r<a} N_1 \bar{B}\cdot \underbrace{\bar{ds}}_{\bar{ds_\varphi}} + \underbrace{\int_{S_2}}_{a<r<b} N_2 \bar{B}\cdot \underbrace{ds}_{\bar{ds_\varphi}}$$

$$N = \frac{\text{میزان جریانی که در تولید میدان نقش دارد}}{\text{کل جریان}}$$

$$N_1 = \frac{\pi r^2 J_0}{I} = \frac{\pi r^2 J_0}{\pi a^2 J_0} = \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$N_2 = \frac{I}{I} = 1$$

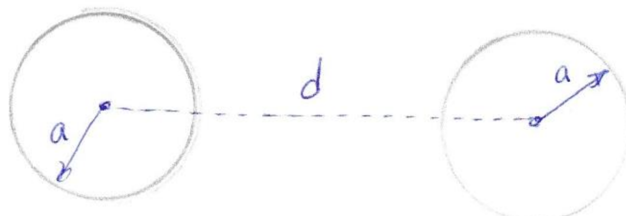
$$\varphi = \int_{z=0}^{l}\int_{r=0}^{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{2}\mu J_0 r \hat{a}_\varphi \cdot dr\,dz\,\hat{a}_\varphi + \int_{z=0}^{l}\int_{r=a}^{b} 1\cdot \frac{\mu_0 \pi a^2 J_0}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \cdot dr\,dz\,\hat{a}_\varphi$$

$$= \frac{1}{8}\mu J_0 a^2 + \frac{\mu_0 \pi a^2 J_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = \frac{\mu}{8\pi} J_0 \pi a^2 + \frac{\mu_0}{2\pi} J_0 \pi a^2 \ln\frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\varphi}{I} = \underbrace{\frac{\mu}{8\pi}}_{\text{ضریب خودالقایی درون هادی}} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

مثال: محاسبه ضریب خودالقای کابل دو سیم موازی طویل: $d \gg a$

شار ایجاد شده درون هادی: $\frac{\mu I}{8\pi}$



$$0<r<a \rightarrow \psi = \frac{\mu I}{8\pi}$$

$$a<r<d-a \rightarrow \psi = \int \bar{B}\cdot \bar{ds} = \int_{z=0}^{1}\int_{r=a}^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \cdot dr\,dz\,\hat{a}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

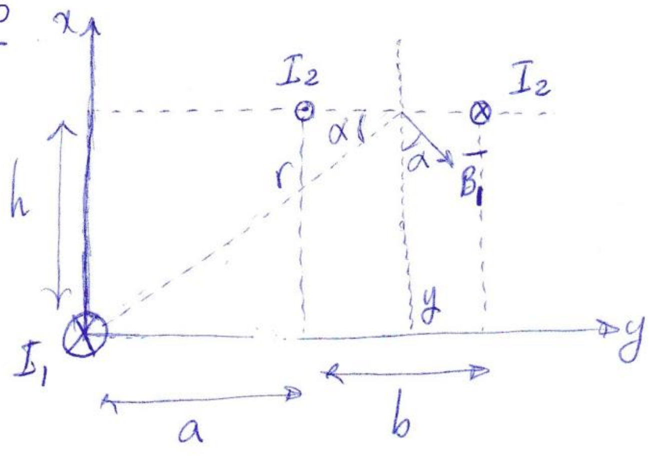
$$d-a<r<d \rightarrow \psi = 0$$

$$\psi = 2\times\left[\frac{\mu I}{8\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a}\right]$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

156

مثال:



$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \qquad \varphi_{21} = \int_{S_2} \bar{B}_1 \cdot \bar{ds} = \int_{S_2} B_1 \cos\alpha \, ds = \int_{z=0}^{1}\int_{y=a}^{a+b} B_1 \cos\alpha \, dy\, dz$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}} \,, \qquad \bar{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \sqrt{y^2+h^2}}\hat{a}_\varphi$$

$$\varphi_{21} = \int_{z=0}^{z=1}\int_{y=a}^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{y^2+h^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}} \, dy\, dz$$

$$\varphi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln \frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+a^2}$$

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+a^2}$$