* انتگرال فوریه : توابع غیرپریودیک و حقیقی
تبدیل فوریه : توابع ، ، و مختلط (البته پریودیک هم داریم)

* پریودیک { سری فوریه مثلثاتی : شکل موج پریودیک حقیقی
سری فوریه نمایی : ، ، مختلط }

طیف فرکانسی $|A_n|$

انتگرال فوریه

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x \right)$$

که $f(x)$ پریودیک نیست، متناوبی [?]

همچنان به شکل سیگنال غیر پریودیک داریم :

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x \right) \right]$$

حالا به جای a_n و b_n جایگذاری :

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\overbrace{\left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \cos \underbrace{n\omega_0}_{\omega} s\, dx \right)}^{a_n} \cos n\omega_0 x + \overbrace{\left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \sin \underbrace{n\omega_0}_{\omega} s\, ds \right)}^{b_n} \cos \underbrace{n\omega}_{\omega} x \right] \right)$$

با افزایش T اختلاف بین هارمونیک ω ها بسیار کم شد

$$\Delta\omega = \omega_0 = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow d\omega \Longrightarrow \frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi}$$

$n\omega_0$ متغیر گسسته $\longrightarrow$ ω متغیر پیوسته ; $\sum_{1}^{\infty} \longrightarrow \int_{0}^{\infty}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\cos \omega x \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega s\, ds + \sin \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin \omega s\, ds \right] d\omega$$

انتگرال فوریه [?]

توجه : $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s)\, ds$ با فرض انتگرال پذیر بودن $f(x)$

با فرض اینکه :

$$A(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos ws \, ds \quad \text{و} \quad B(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sin ws \, ds$$

s متغیر ظاهری انتگرال می باشد.

لذا داریم :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right] dw}$$

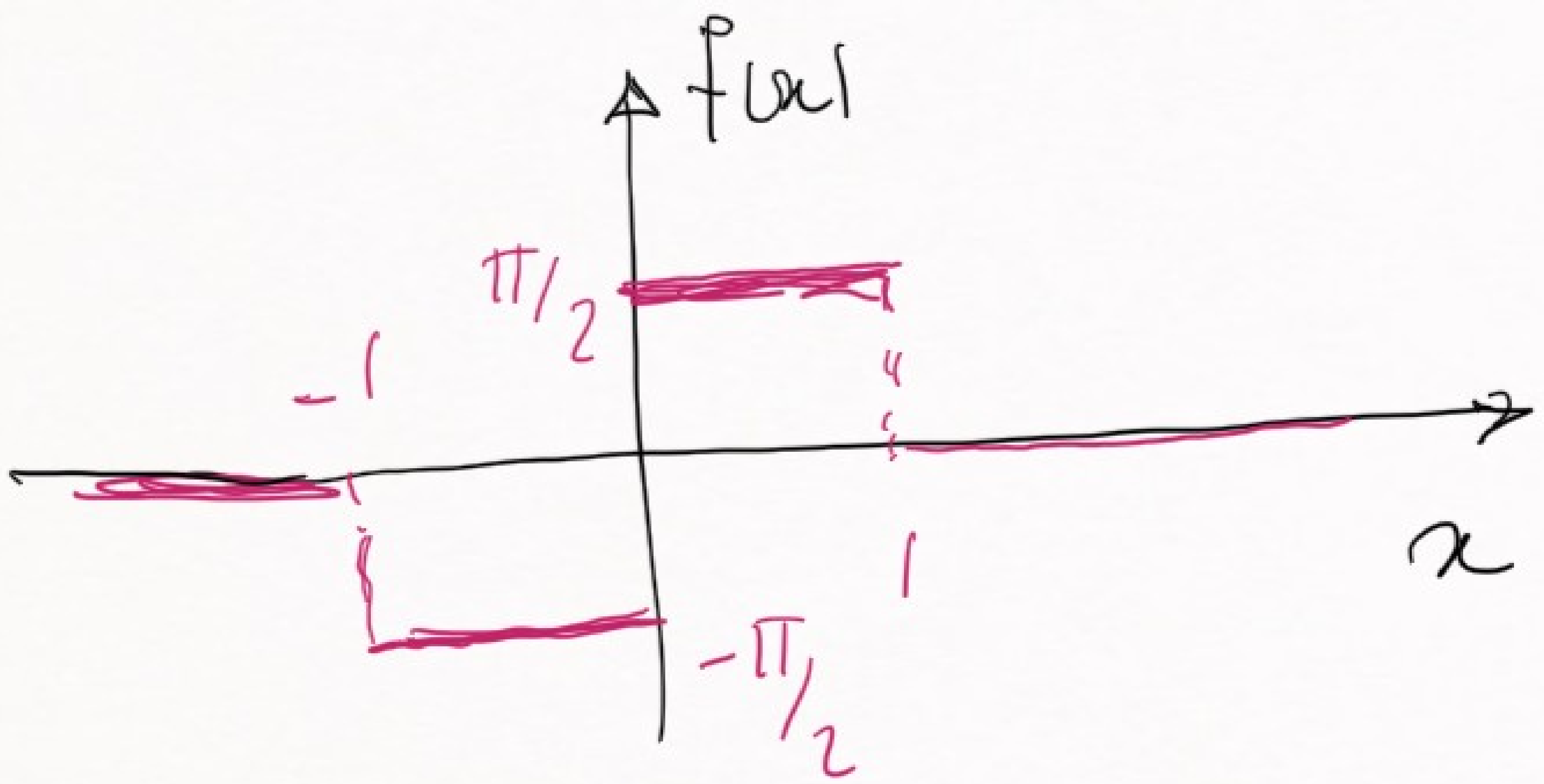
* انتگرال فوریه برای $f(x)$ غیر پریودیک

ضرایب $A(w)$ و $B(w)$ ضرایب انتگرال فوریه که مشابه a_n و b_n می باشند.

پس اگر $f(x)$ یک تابع غیر پریودیک و در هر فاصله محدود قطعه به قطعه پیوسته و مشتق چپ و راست آن موجود باشد و مطلقاً انتگرال پذیر باشد $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty\right)$ آنگاه می توان تابع فوق را به صورت انتگرال فوریه نمایش داد.

(یعنی به صورت انتگرالی از توابع سینوسی و کسینوسی)

مثال ـ انتگرال فوریه شکل مقابل :



$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{(\text{فرد})(\text{زوج})}_{\text{فرد}}\,dx=0$$

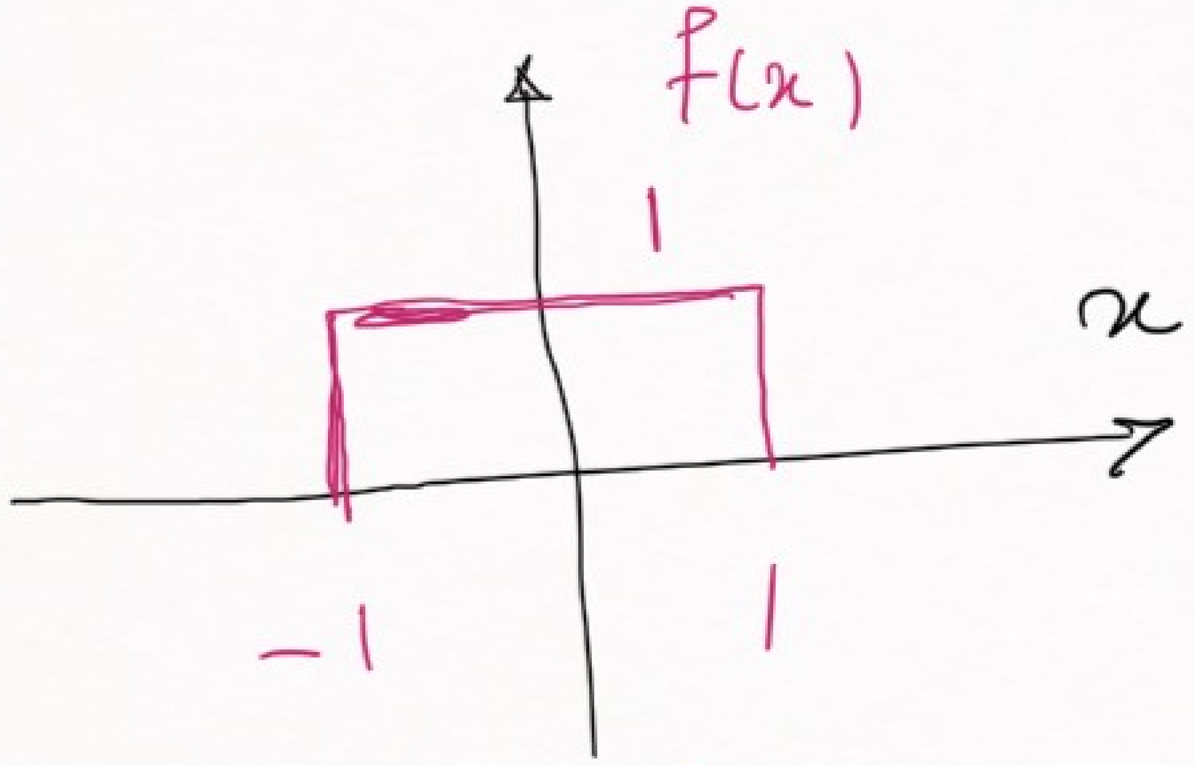
$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=2\int_{0}^{1}\frac{\pi}{2}\sin\omega x\,dx=\pi\left(\frac{-\cos\omega x}{\omega}\right)\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{\pi}{\omega}(\cos\omega-1)=\frac{1-\cos\omega}{\pi\omega}$$

بنابراین می‌توان تابع $f(x)$ را به صورت مقابل نمایش داد :

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega x\,d\omega}$$

مثال ۲- انتگرال فوریه شکل مقابل (تست کارشناسی ارشد)



$$B(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{(\text{زوج})(\text{فرد})}_{\text{فرد}}\,dx=0$$

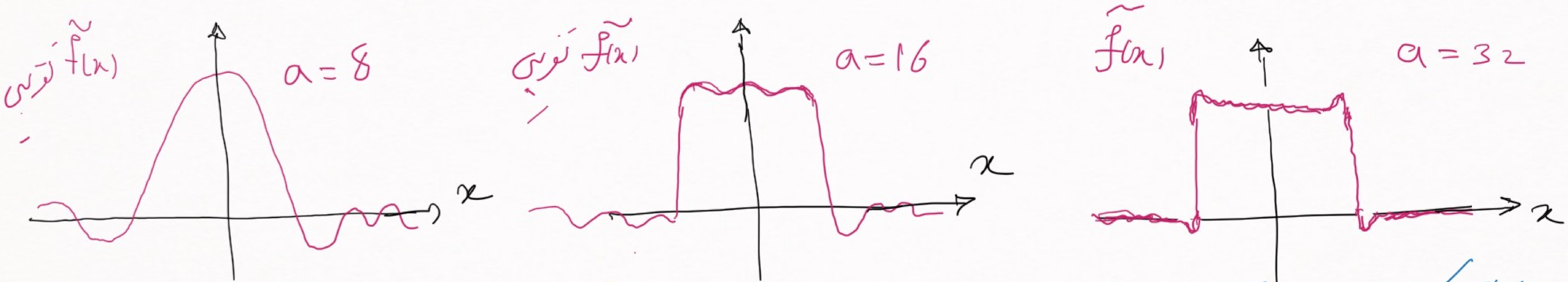
$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx=2\int_0^1 f(x)\cos wx\,dx=2\int_0^1 1\times\cos wx\,dx=\boxed{\frac{2\sin w}{w}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(w)\cos wx\,dw=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\right)\cos wx\,dw$$

نمایش انتگرال فوریه $f(x)$

توجه مهم - در مورد سری فوریه دیدیم که مقدار چند جمله اول سری فوریه تقریبی از منحنی $f(x)$ پریودیک بود و هرچه تعداد جملات بیشتر می‌شد مقدار حاصله به منحنی $f(x)$ واقعی نزدیکتر می‌گردید.

در مورد انتگرال فوریه نیز مطلب به همین صورت است که حد بالای انتگرال به جای ∞ مقدار محدودی مثل a باشد تقریبی از منحنی غیر پریودیک $f(x)$ حاصل می‌شود هرچه a بزرگتر گردد به منحنی واقعی نزدیک‌تر حاصل می‌شود.

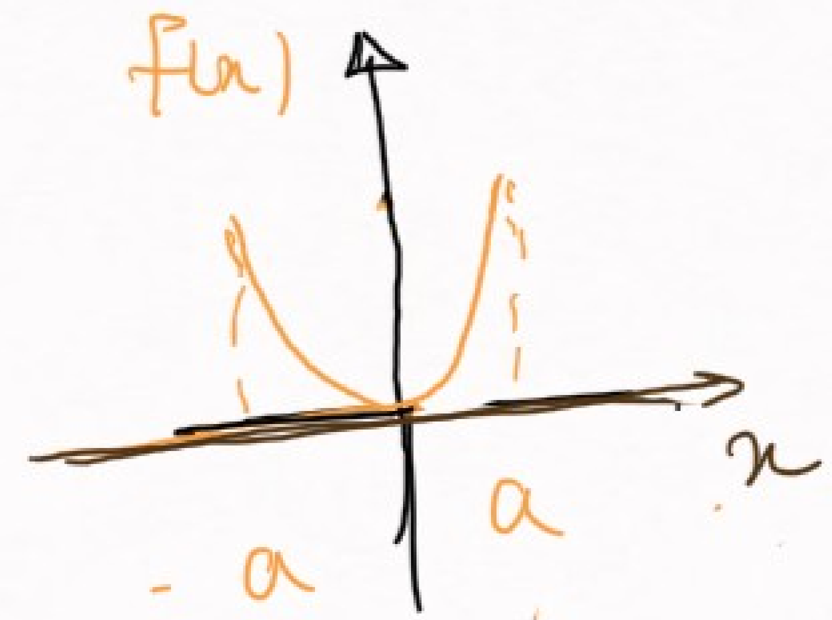


$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \left(\frac{\sin w}{w}\right)\cos wx\, dw$$

یعنی ملاحظه شد که در نقاط ناپیوستگی مقدار انتگرال فوریه به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ میل میکنند. (پدیده Gibbs در سری فوریه)

مثال ۳- انتگرال فوریه شکل مقابل!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; ; & |x|<a \\ 0 \; , & |x|>a \end{cases}$$



توجه - ملاحظه شد که معمولاً $A(w)$ برحسب w تابعی ... ...

زوج $f(x) \Longrightarrow B(w)=0$

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\, dx = 2\int_0^a x^2 \cos wx\, dx = \dots = 2\left(\frac{2a}{w^2}\cos aw + \frac{a^2w^2-2}{w^3}\sin aw\right).$$

تبدیل فوریه:

شبیه به سری فوریه برای شکل های مختلط اما غیر پریودیک تعریف شده.

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 x}$$

(شکل پریودیک)

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx$$

ضرایب سری فوریه

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}$$

غیر پریودیک

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\Big(\overbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(s)\, e^{-jn\omega_0 s}\, ds}^{c_n}\Big) e^{+jn\omega_0 x}$$

به غیر پریودیک

با فرض $T\to\infty \Longrightarrow$

$$\begin{cases} n\omega_0 \to \omega \\ \Delta\omega=\frac{2\pi}{T} \to d\omega \Rightarrow \frac{1}{T}=\frac{d\omega}{2\pi} \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-j\omega s}\, ds}_{F(\omega)}\Big) e^{j\omega x}\, d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega$$

پس $f(x)$ را تبدیل فوریه

$c_n \rightarrow F(\omega)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{j\omega x}\, dx$$

تبدیل فوریه

در واقع: تبدیل فوریه نمایش شکل $f(x)$ یا $f(t)$ که بجای x متغیر زمان بکار می‌بریم (چون متغیر بسیاری از توابع کاربردی زمان است) در حوزه فرکانس می‌باشد. معمولاً نفس محدودیت در توابع از حوزه فرکانس سازی نیز انجام شده. تبدیل فوریه همین فرکانس‌های موجود در منحنی می‌باشد و در تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها کاربرد و بسیاری از کاربردهای برق استفاده شده بسیار نیاز داریم:

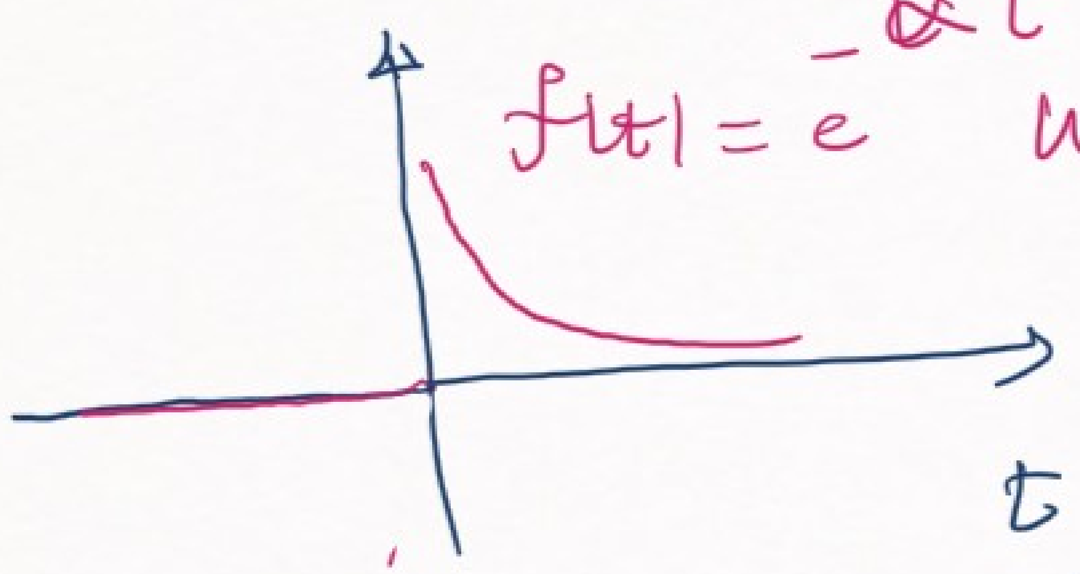
$$f(t) \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} F(\omega) \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt} \\ \boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega} \end{cases}$$

تبدیل فوریه تابع $f(t)$

عکس تبدیل فوریه

مثال ۱- تبدیل فوریه

$f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}\, dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}\, dt=\frac{1}{-(\alpha+j\omega)}\, e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$F(\omega)=\left(0-\frac{-1}{\alpha+j\omega}\right)=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

ادامه مثال -

ملاحظه شد که ممکن است تبدیل فوریه تابع مختلط گردد در حالیکه $A(\omega)$ و $B(\omega)$ تابع حقیقی بوده اند.

$$F(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}\ \xrightarrow{\text{اندازه}}\ |F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}$$

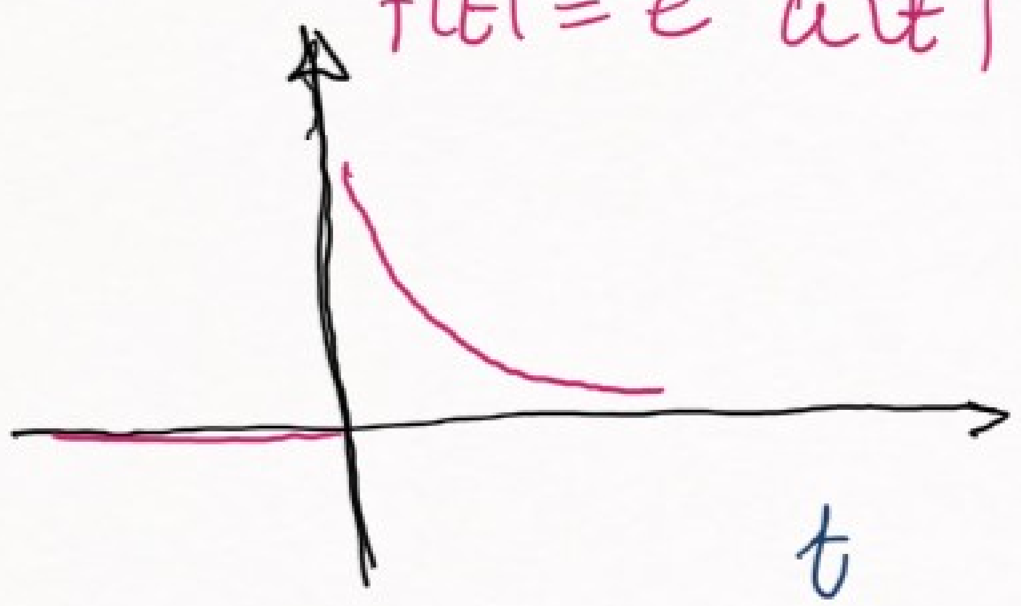
$$F(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}\ \xrightarrow{\text{فاز}}\ \measuredangle F(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$$

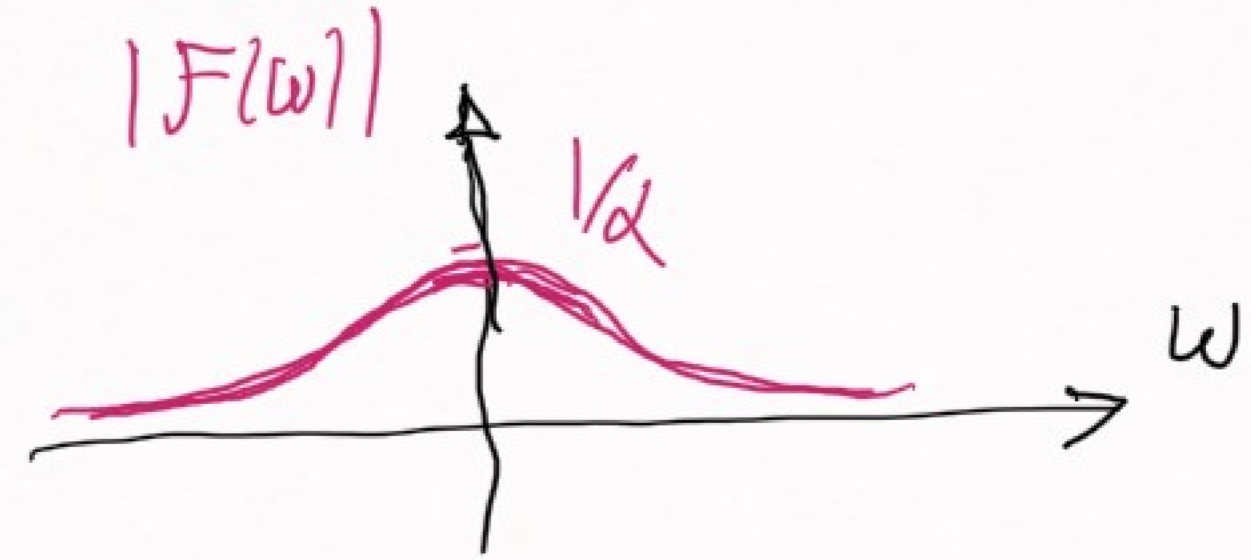
یا

$$\xrightarrow{\text{بخش حقیقی}}\ Re\{F(\omega)\}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

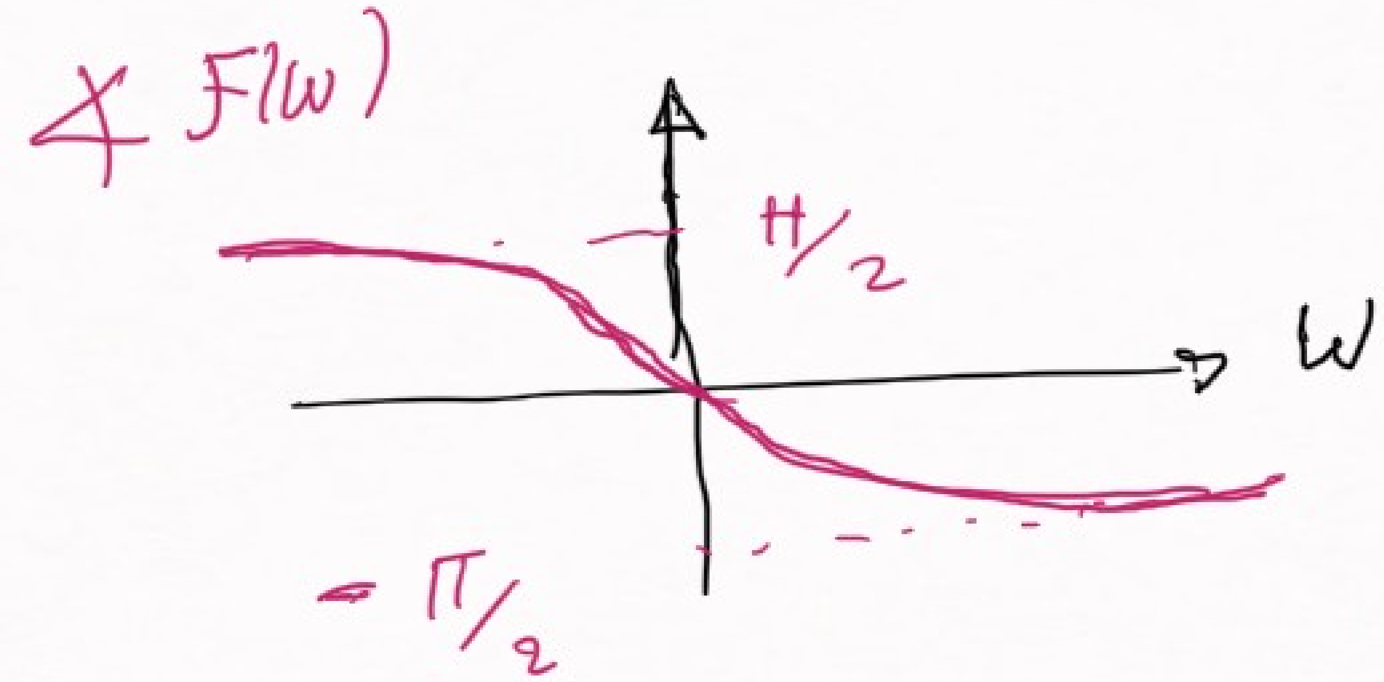
$$\xrightarrow{\text{بخش موهومی}}\ Im\{F(\omega)\}=\frac{-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$





شکل اندازه تبدیل فوریه مثال -

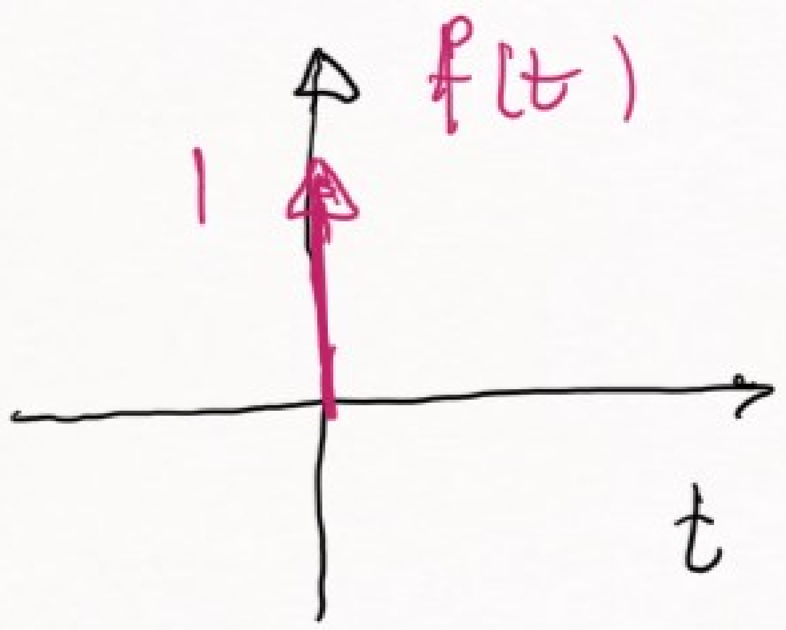


شکل فاز تبدیل فوریه مثال -

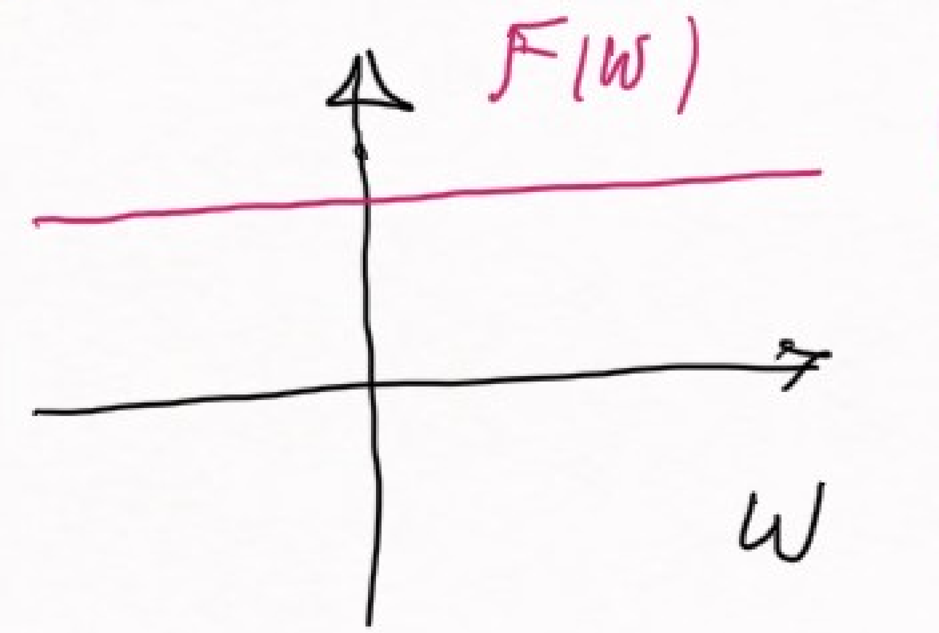
مثال ۲ـ تبدیل فوریه

$$f(t)=\delta(t)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\delta(t)\,e^{-j\omega t}}_{t=0}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega 0}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

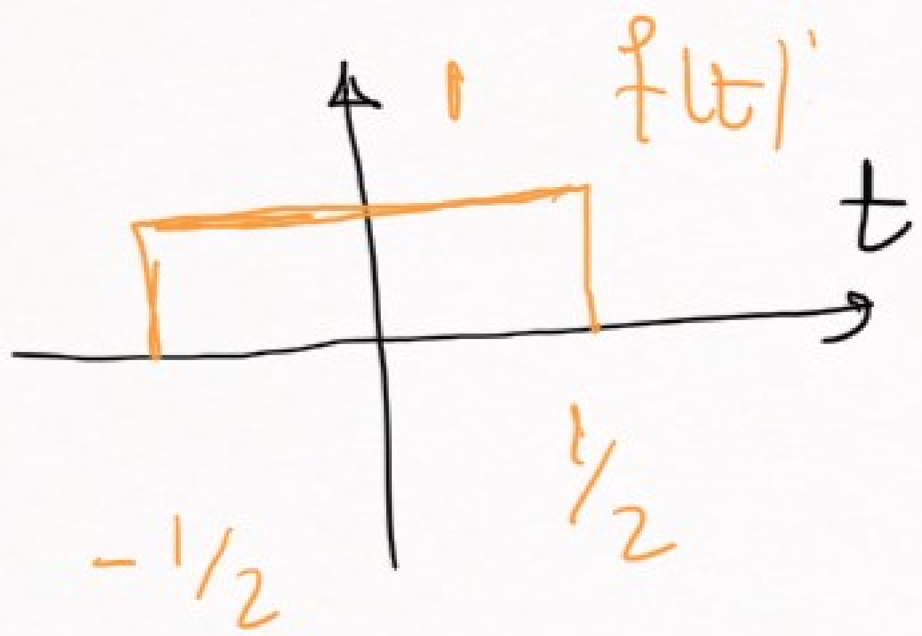


$\Rightarrow$



تابع ضربه تمام فرکانس ها را دارا می باشد.

مثال ۳ـ تبدیل فوریه تابع پنجره



$$f(t)=\begin{cases}1\;; & |t|<1/2\\ 0\;, & \text{other}\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-1/2}^{1/2} 1\times e^{-j\omega t}\,dt=\frac{-1}{j\omega}\,e^{-j\omega t}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{2}{j\omega}\left(\frac{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}{2}\right)=\boxed{\frac{2}{\omega}\sin\omega/2}$$

مثال ۴- تبدیل فوریه

$$f(t) = e^{-k|t|}$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{kt} e^{-jwt} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-kt} e^{-jwt} dt = \dots = \boxed{\frac{2k}{k^2 + w^2}}$$

توجه - می‌توان نتیجه گرفت اگر:

- $f(t)$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ تبدیل فوریه آن حقیقی خواهد بود.
- $f(t)$ حقیقی و فرد $\Leftarrow$ تبدیل فوریه آن موهومی خواهد بود.
- $f(t)$ حقیقی نه فرد و نه زوج $\Leftarrow$ تبدیل فوریه آن مختلط یعنی بخش حقیقی و موهومی دارد.

* اثبات؟

از دیگر خواص استفاده نمایید...

مثال ۵- تبدیل فوریه $f(t) = u(t)$ $\Leftarrow$ می‌توان از مثال ۱ نتیجه گرفت که

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{jw}}$$

مثال ۶- تبدیل فوریه تابع علامت

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ می‌توان از مثال ۱ نتیجه گرفت که

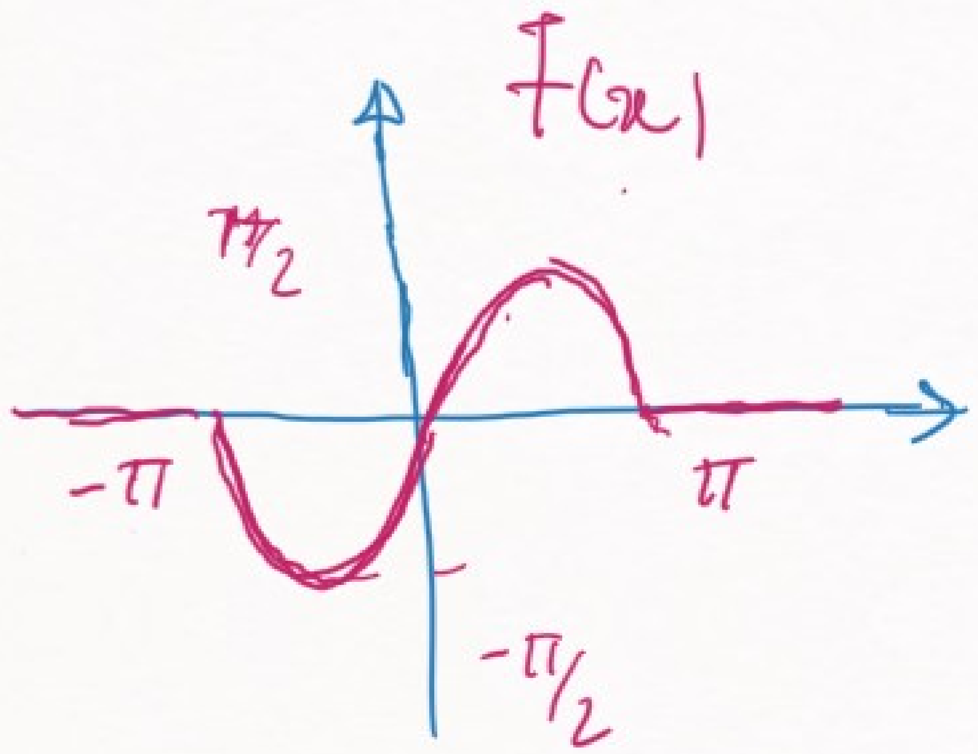
$$\boxed{F(w) = \frac{2}{jw}}$$

تمرین ۱- انتگرال فوریه $f(x)=e^{-x}u(x)$ را محاسبه نمایید.

تمرین ۲- " " $f(x)=e^{-|x|}$ " "

تمرین ۳- انتگرال فوریه

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & |x|<\pi\\ 0, & \text{other}\end{cases}$$



تمرین ۴- رابطه بین ضرایب انتگرال فوریه ($A(\omega)$, $B(\omega)$) و تبدیل فوریه یک تابع یعنی $F(\omega)$ را بدست آورید.

تمرین ۵- تبدیل فوریه توابع زیر را بدست آورید.

الف- $f(t)=e^{-3(t-2)}u(t-2)$

ب- $f(t)=10\delta(t-3)$

ج- $f(t)=t\,e^{-4t}u(t)$