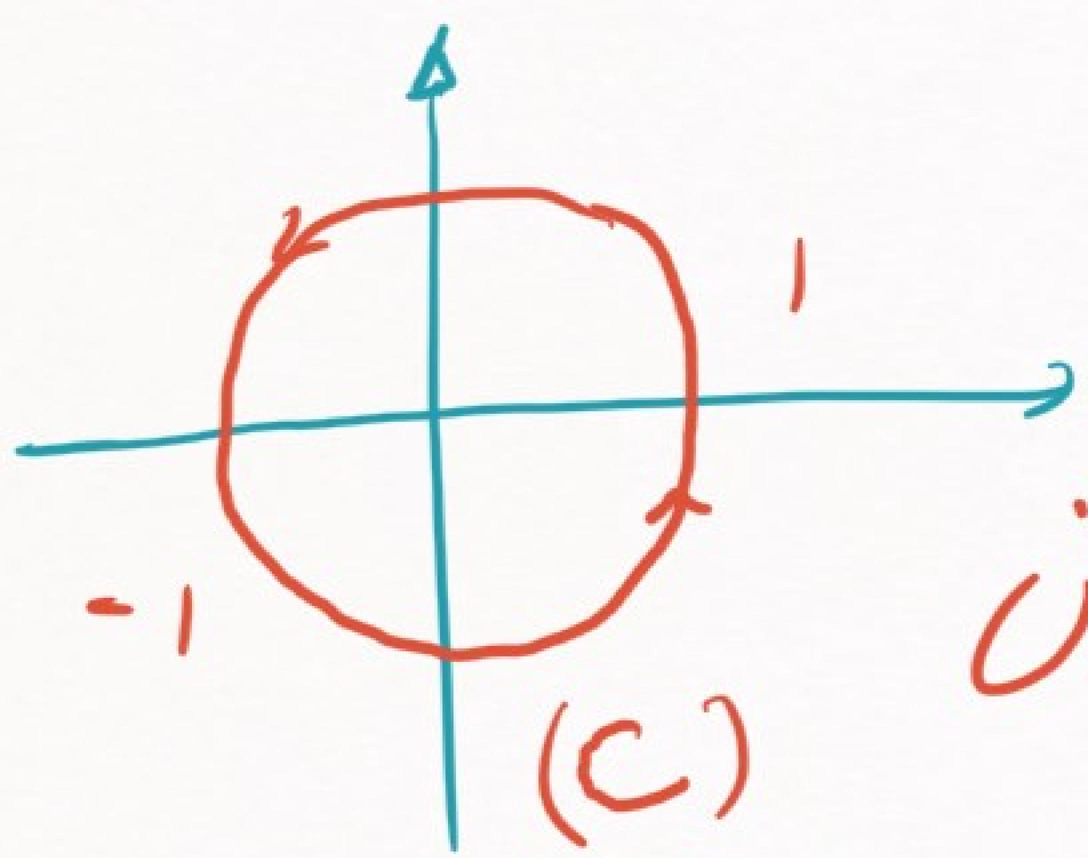
محاسبه انتگرال های مثلثاتی حقیقی بتوسط قضیه مانده ها

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta =$$ هدف محاسبه انتگرال های تحت تابع است



$z = re^{j\theta} = e^{j\theta}$ $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2} \\[2mm] \sin\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2j} \\[2mm] \cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2} \end{cases}$$

با فرض $r = 1 \;;\quad 0 < \theta \leq 2\pi$

$dz = je^{j\theta}\, d\theta \longrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{jz}$

پس از در رابطه بالا بگذاریم:

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_{(C)} F\left(\frac{z - z^{-1}}{2j}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{jz}$$

$= 2\pi j$ (مجموع مانده ها)

مثال ۱-

$$-1 < a < 1 \quad ; \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta} = ?$$

$$z = e^{j\theta} \Longrightarrow dz = j e^{j\theta} d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{jz} \quad , \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2j}$$

مقادیر را در انتگرال جایگذاری می‌کنیم:

$$I = \oint_{(C)} \frac{\frac{dz}{jz}}{1 + a\frac{z - z^{-1}}{2j}} = \oint_{(C)} \frac{2/a}{z^2 + (2j/a)z - 1} dz = 2\pi j \,(\text{مجموع مانده‌ها})$$

(C): دایره واحد

$$z^2 + (2j/a) z - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1-a^2}}{a} & \text{داخل دایره واحد} \\[2ex] z_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1-a^2}}{a} & \text{بیرون دایره واحد} \end{cases}$$

چون $-1 < a < 1$

$$\Rightarrow I = 2\pi j\left(\operatorname{Res}\{z_1\}\right) = 2\pi j \frac{1}{j\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

مثال ۲-

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta = ?$$

$$z = e^{j\theta} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

این تساوی را در انتگرال جایگذاری می‌کنیم و انتگرال را به انتگرال مختلط

$$\cos 3\theta = \frac{e^{3j\theta}+e^{-3j\theta}}{2}$$

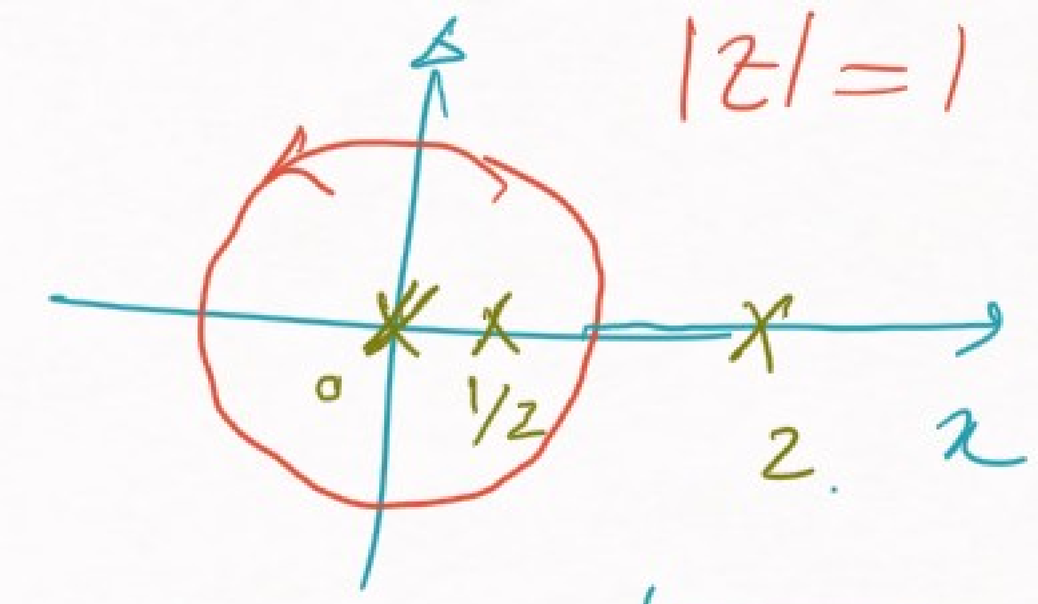
مسیر را به دایره واحد تبدیل می‌کنیم:

$$\cos 3\theta = \frac{z^3+z^{-3}}{2}$$

$$\Rightarrow I = \oint_{(C)} \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5-4\,\frac{z+z^{-1}}{2}}\, \frac{dz}{jz}$$

$|z| = 1$

$$\Longrightarrow I = \frac{-1}{2j} \oint_{(C)} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, dz$$



چون قطب ها $z=0$ و $z=1/2$ فقط داخل کانتور باشند لذا مانده، فقط در همان نقاط پیدا شود.

$$I = 2\pi j \left[\mathrm{Res}\{z=0\} + \mathrm{Res}\{z=1/2\} \right]$$

$$\mathrm{Res}\{0\} = \lim \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \cdot \underbrace{\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}} \right\} = \boxed{\frac{21}{8}}$$

$$\mathrm{Res}\{1/2\} = \lim_{z \to 1/2} (z - 1/2)\, f(z) = \boxed{\frac{-65}{24}}$$

تمرین

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{-1}{2j}\oint \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} = 2\pi j\left[\operatorname{Res}\{0\} + \operatorname{Res}\{1/2\}\right]$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{-1}{2j}\left[(2\pi j)\left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right)\right] = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

محاسبه انتگرال های شامل $\bar{z}$ و $d\bar{z}$ و x و y و $|z|$ در دایره $|z|=r$ توسط قضیه مانده ها!

مثال ۳- $I=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{|z|}{z}\right)dz=?$

$C: |z|=1 \Rightarrow$

$|z|^2=1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

$$I=\oint_{(C)}\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{|z|}{z}\right)dz=\oint_{(C)}\left(z^2+\frac{1}{z}\right)dz=\oint_{(C)}z^2dz+\oint_{(C)}\frac{1}{z}dz=\boxed{0+2\pi j}$$

توجه: بطور کلی

$$z\cdot\bar{z}=r^2 \Rightarrow \bar{z}=\frac{r^2}{z}$$

$C: |z|=r^2$ ؛ پس در انتگرال هایی که $\bar{z}$ دارند بجایش $\frac{r^2}{z}$ قرار میدهیم. البته بجای زیادیه

توجه: میتوان انتگرال های شامل $\bar{z}$ و ... را توسط روش کلی محاسبه انتگرال در مسیر نیز حل نمود

$z=re^{j\theta}$ ...

مثال ۴-

$$I = \oint_{|z|=1} (z^3 + z + 1)\, d\bar{z} = ?$$

ابتدا $d\bar{z}$ را برحسب dz و z ... می‌نویسیم:

$$|z|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z}\,dz + z\,d\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow d\bar{z} = \frac{-\bar{z}}{z}\,dz \,, \quad \bar{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow d\bar{z} = -\frac{dz}{z^2}$$

پس داریم:

$$\oint_{|z|=1} (z^3+z+1)\, d\bar{z} = \oint_{|z|=1} \left(\frac{z^3+z+1}{-z^2}\right) dz = 2\pi j \{\text{Res}\{0\}\}$$

$$\Rightarrow I = -2\pi j$$

$$\text{Res}\{0\} = \frac{d}{dz}\left[z^2\left(\frac{z^3+z+1}{-z^2}\right)\right]\Bigg|_{z=0} = -3z^2 - 1\Big|_{z=0} = \boxed{-1}$$

توجه: برای $|z| = r$ داریم:

$$d\bar{z} = -r^2 \frac{dz}{z^2}$$

مثال ۵ -

$$I = \oint_{|z|=1} (z+1)^2 \, |dz| = ?$$

ابتدا $|dz|$ را تبدیل می‌کنیم

$$\begin{cases} z = e^{j\theta} \Rightarrow dz = j e^{j\theta} d\theta \\ |dz| = d\theta = \dfrac{dz}{jz} \end{cases}$$

$$d\theta = \frac{dz}{j \underbrace{e^{j\theta}}_{z}}$$

$$I = \oint_{|z|=1} (z+1)^2 |dz| = \oint_{|z|=1} (z+1)^2 \frac{dz}{jz} = \oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^2}{jz} dz = 2\pi j \, \mathrm{Res}\{0\}$$

$$\lim_{z \to 0} z \frac{(z+1)^2}{jz} = \frac{1}{j}$$

$$I = 2\pi j \left(\frac{1}{j} \right) = \boxed{2\pi}$$

تعمیم: اگر $|z| = r$ داریم

$$\boxed{|dz| = r \frac{dz}{jz}}$$

توجه - اگر در انتگرال ها به زنجیره $|z| = r$ باشد برای x و y میتوانیم به صورت زیر تبدیل ؛ z و $\bar{z}$ شود

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z + r^2/z}{2} \quad , \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2j} \quad , \quad \bar{z} = \frac{r^2}{z}$$

مثال - در زیر تابع $f(z) = x(z+4)$ تحلیلی است ؟

$$I = \oint_{|z|=1} x(z+4)\,dz$$

حل ۴ -

$$I = \oint_{|z|=1} \left[\frac{z + 1/z}{2}\right](z+4)\,dz = \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)(z+4)}{2z}\,dz = 2\pi j\,[\mathrm{Res}\{0\}] = \boxed{4\pi j}$$

$$\lim_{z\to 0} z\,\frac{(z^2+1)(z+4)}{2z}\Big|_{z=0} = \boxed{4/2 = 2}$$

$$c : |z-1| = 2 \quad , \qquad I = \oint_{(C)} \frac{z^2+3z+4}{z}\, d\bar{z}$$

۷- حل:

ابتدا $d\bar{z}$ را پیدا می‌کنیم:

$$|z-1| = 2 \Longrightarrow |z-1|^2 = 4 \Longrightarrow \left(\overline{z-1}\right)(z-1) = 4 \Longrightarrow (\bar{z}-1)(z-1) = 4$$

$$\Longrightarrow (\bar{z}-1)\,dz + (z-1)\,d\bar{z} = 0 \Longrightarrow d\bar{z} = -\left(\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right) dz$$

$$\left(\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right)$$

$$d\bar{z} = -\frac{4}{(z-1)^2}\, dz$$

حال: $d\bar{z}$ در انتگرال جایگذاری می‌کنیم:

$$I = \oint_{(C)} \frac{(z^2+3z+4)}{z}\, d\bar{z} = \oint_{(C)} \frac{-4(z^2+3z+4)}{z(z-1)^2}\, dz = 2\pi j\,[\mathrm{Res}\{0\} + \mathrm{Res}\{1\}]$$

هر دو نقطه داخل کانتور (C) باشند