تمرین: برای میدان مغناطیسی داده شده، چگالی توزیع جریان را بیابید

$$\bar{B} = \begin{cases} \mu_0 J_0 r^2 \hat{a}_\varphi & 0<r<a \\ \mu_0 J_0 \dfrac{a^3}{r} \hat{a}_\varphi & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases} = B(r)\,\hat{a}_\varphi$$

$$\bar{B} = \mu_0 J_0 r^2 \left[U(r) - U(r-a)\right] \hat{a}_\varphi + \mu_0 J_0 \frac{a^3}{r} \left[U(r-a) - U(r-b)\right] \hat{a}_\varphi$$

$$B_\varphi = \mu_0 J_0 r^2 U(r) + \left(\mu_0 J_0 \frac{a^3}{r} - \mu_0 J_0 r^2\right) U(r-a) - \mu_0 J_0 \frac{a^3}{r} U(r-b)$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \longrightarrow \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rB_\varphi(r) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\hat{a}_r(0-0) - \hat{a}_\varphi(0-0) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB(r)) - 0\right)\right]$$

$$\nabla \times \bar{B} = \hat{a}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(rB(r)\right) = \hat{a}_z \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r^3 U(r) + (a - r^3) U(r-a) - a^3 U(r-b)\right]$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 J_0}{r}\left[3r^2 U(r) + \cancel{r^3 \delta(r)} - 3r^2 U(r-a) + \cancel{(a-r^3)\delta(r-a)} - a^3 \delta(r-b)\right]$$

$$\bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B} = \hat{a}_z \left[\underbrace{3J_0 r\left[U(r) - U(r-a)\right]}_{\bar{J}_1} - \underbrace{J_0 \frac{a^3}{b} \delta(r-b)}_{\bar{J}_2}\right]$$

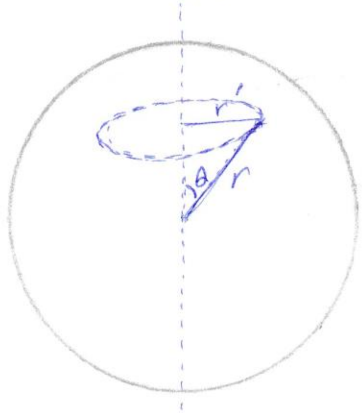
$$\bar{J}_1 = \begin{cases} 3J_0 r & 0<r<a \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad \bar{J}_2 = \begin{cases} -J_0 \dfrac{a^3}{b} & r=b \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

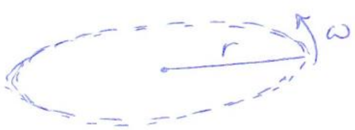
توزیع حجمی جریان ‏ ‏ ‏ ‏ چگالی سطحی جریان

تمرین: بار با چگالی حجمی ρ_0 درون کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. این کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد. $\bar{B}$ در مرکز کره را محاسبه کنید.

$\bar{J} = \rho \bar{v}$

$\bar{v}$: سرعت خطی





$v = r\omega$

$$\begin{cases} \bar{J} = \rho r' \omega \hat{a}_\varphi \\ r' = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \bar{J} = \rho_0 r\sin\theta \cdot \omega \hat{a}_\varphi$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J} \times \bar{R}}{|\bar{R}|^3} dv' \qquad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \ , \ \bar{r} = 0 \ , \ \bar{r}' = r'\hat{a}_r'$$

$$\bar{R} = -r'\hat{a}_r' \ , \ |\bar{R}| = r'$$

$$\bar{J} \times \bar{R} = \rho_0 \omega r' \sin\theta' \hat{a}_\varphi' \times (-r'\hat{a}_r') = -\rho_0 \omega r'^2 \sin\theta' \hat{a}_\theta$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{a} \hat{a}_\theta' \frac{-\rho_0 \omega r'^2 \sin\theta'}{r'^3} r'^2 \sin\theta \, dr' d\theta' d\varphi'$$

$$\hat{a}_\theta' = \cos\theta' \cos\varphi' \hat{a}_x + \cos\theta' \sin\varphi' \hat{a}_y - \sin\theta' \hat{a}_z$$

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \rho_0 \omega \left[\underbrace{\int_v r' \sin^2\theta' \cos\theta' \cos\varphi' \, dr' d\theta' d\varphi' \hat{a}_x}_{\text{صفر}} + \underbrace{\int_v r' \sin^2\theta' \cos\theta' \sin\varphi' \, dr' d\theta' d\varphi' \hat{a}_y}_{\text{صفر}} + \int_v -r' \sin^3\theta' \, dr' d\theta' d\varphi' \hat{a}_z \right]$$

بیان معادلات برداری :

$$\bar{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c'} \frac{I\, dl'(r') \times \hat{a}_R (r, r')}{|\bar{R}(r, r')|^2}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{B}(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{c'} \bar{dl'} \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right)$$

آنالیز برداری :

$$\begin{cases} \bar{F} \times \nabla f = f\, \nabla \times \bar{F} - \nabla \times (f \bar{F}) \\ f = \frac{1}{R}, \quad \bar{F} = dl' \end{cases}$$

$$\bar{B}(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{c'} \left[\underbrace{\cancel{\frac{\nabla \times dl'(r')}{R}}}_{\text{صفر}} - \nabla \times \frac{dl'(r')}{R(r, r')} \right]$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{c'} \frac{\nabla \times dl'(r')}{R(r, r')} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c'} \frac{I\, dl'}{R} \right]$$ توزیع خطی جریان

$$= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s'} \frac{\bar{J}_s\, ds'}{R} \right]$$ توزیع سطحی جریان

$$= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}_v\, dv'}{R} \right]$$ توزیع حجمی جریان

پتانسیل مغناطیسی برداری : توزیع خطی جریان

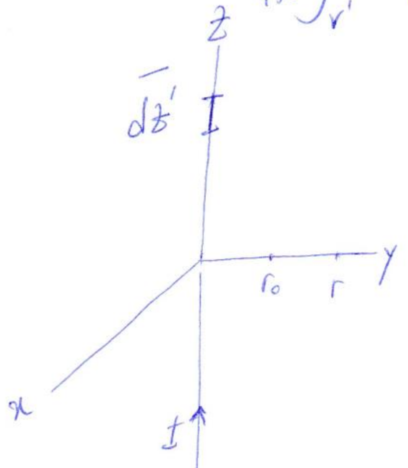
$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{c'} \frac{I\,\bar{dl}'}{R}$$

توزیع سطحی جریان

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{s'} \frac{\bar{J}_s\, ds'}{R}$$

توزیع حجمی جریان

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\bar{J}_v\, dv'}{R}$$



— $\bar{A}$ دارای مفهوم فیزیکی نیست و تنها یک واسطه ریاضی است .

مثال : سیم جریان با طول بی‌نهایت روی محور z ، $\bar{A}$ را حساب کنید :

دستگاه استوانه‌ای :

$$\bar{A}(r,\varphi,z) = A(r)$$

$$\bar{dl}' = \bar{dl}'_z = dz'\,\hat{a}_z$$

$$\bar{r} = r\hat{a}_r + \cancel{z\hat{a}_z} = r\hat{a}_r$$

$$\bar{r}' = \cancel{r'\hat{a}_r} + z'\hat{a}_z = z'\hat{a}_z$$

$$\bar{R} = r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z \rightarrow |\bar{R}| = (r^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{c'} \frac{I\,\bar{dl}'}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'\,\hat{a}_z}{[z'^2 + r^2]^{1/2}} = \hat{a}_z \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[z'^2+r^2]} = \infty - \infty$$

$$\bar{A} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r^2+z^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r_0^2+z'^2}}\right] = -\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}\,\hat{a}_z$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{a}_\varphi$$

مثال: برای دوقطبی مغناطیسی:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 \bar{m} \times \hat{a}_r}{4\pi r^2}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \xrightarrow{\nabla \times} \nabla \times \bar{B} = \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \rightarrow \mu_0 \bar{J} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

$$\nabla \cdot \bar{A} = \nabla \cdot \oint_{c'} \frac{\mu_0 I \, d\bar{l}'}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{c'} \nabla \cdot \left(\frac{d\bar{l}'}{R} \right)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\bar{l}'}{R} \right) = d\bar{l}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \underbrace{\frac{1}{R} \nabla \cdot (d\bar{l}')}_{\text{صفر}} = d\bar{l}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - d\bar{l}' \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{c} \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\bar{l}' \underset{\text{قضیه استوکس}}{=} -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \underbrace{\nabla' \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)}_{\text{صفر}} \cdot d\bar{s}' = 0$$

کرل گرادیان یک اسکالر همواره صفر است

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}_v \qquad \left(\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \right)$$

معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A})$$ دیورژانس کرل هر برداری همواره صفر است.

فرم نقطه‌ای :

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$ معادله دیورژانس ماکسول

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}_v$$ معادله کرل ماکسول

طبق قضیه هلمولتز به طور کامل خصوصیات میدان مغناطیسی ساکن را بیان می‌کند.

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \longrightarrow \int_v \nabla \cdot \bar{B} \, dv = 0 \longrightarrow$$ قضیه دیورژانس

فرم انتگرالی :

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J}_v \cdot d\bar{s}$$