۱۰) $f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)\,F_2(s)$
$$\begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \\ \text{or} \\ \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau)\,d\tau \end{cases}$$

مثال: $i(t)=\delta(t)*u(t)$ $\quad 1\times\frac{1}{s}$ $\quad I(s)=1\times\frac{1}{s} \longrightarrow i(t)=u(t)$

۱۱) $f(at) \xleftrightarrow{a>0} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

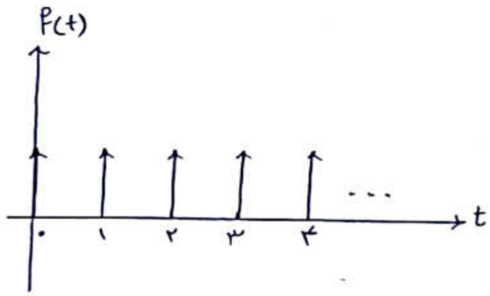
۱۲) اگر تابع $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد، یا به عبارتی دیگر تابع $f(t)$ بصورت مجموع از یک تابع معین $f_1(t)$ و شکل‌های انتقال یافته‌ی آن باشد. یعنی:

$$f(t)=f_1(t)+f_1(t-T)+f_1(t-2T)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)$$

آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ بصورت زیر است:

$$L\{f(t)\}=F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}$$

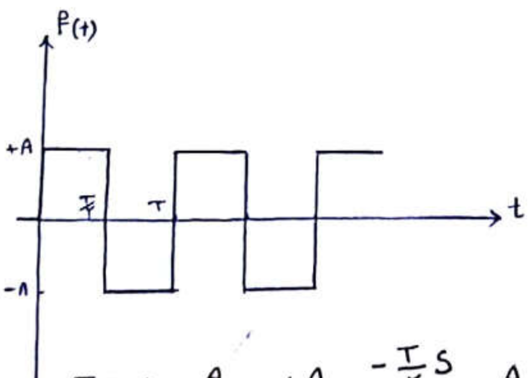
مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.



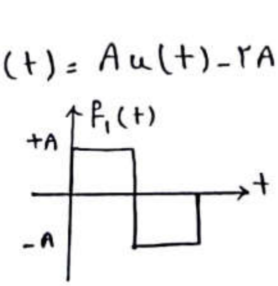
حل: $L\{f(t)\}=F(s)=?$

تابع متناوب با دوره تناوب ۱

$$f_1(t)=\delta(t)\longleftrightarrow F_1(s)=1 \Rightarrow F(s)=\frac{1}{1-e^{-s}}$$

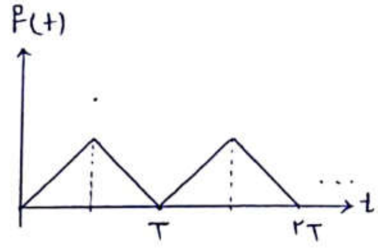


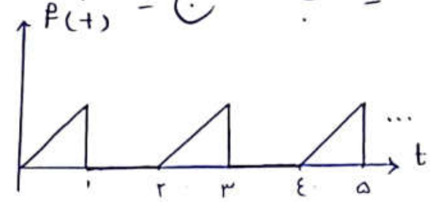
$$f_1(t)=Au(t)-2Au(t-T/2)+Au(t-T)$$



$$F_1(s)=\frac{A}{s}-2\frac{A}{s}e^{-\frac{T}{2}s}+\frac{A}{s}e^{-Ts}=\frac{A}{s}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2 \rightarrow F(s)=\frac{\frac{A}{s}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2}{1-e^{-Ts}}$$

تمرین تحویلی: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.





- جلسه چهارم -

عکس تبدیل لاپلاس:

$$I(s) \longrightarrow i(t) \qquad L^{-1}\left\{ I(s) \right\}$$

$$I(s) = \frac{1}{s+1} \xleftrightarrow{L^{-1}} i(t) = e^{-t}u(t) \equiv i(t) = e^{-t} \quad t \geq 0$$

(حوزه‌ی تعریف تبدیل لاپلاس برای $t \geq 0$ است).

$$V(s) = \frac{2}{s^2+5} \xleftrightarrow{L^{-1}} v(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin\sqrt{5}\,t \; u(t)$$

$$I(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad \begin{cases} A = (s+1)I(s)\Big|_{s=-1} = \dfrac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = +1 \\ \text{تجزیه مانده‌ها} \\ B = (s+2)I(s)\Big|_{s=-2} = -1 \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \longrightarrow i(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

$$I(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1} \longrightarrow i(t) = e^{-t}\sin t \; u(t)$$

← تأخیر در حوزه‌ی زمان

$$I(s) = \frac{s}{s^2+2s+2} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$\longrightarrow i(t) = e^{-t}\cos t \; u(t) - e^{-t}\sin t \; u(t)$$

$$I(s)=\frac{1}{(s+1)^3 s^2}=\frac{A}{(s+1)^3}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)}+\frac{D}{s^2}+\frac{E}{s}$$

$$A=(s+1)^3 I(s)\Big|_{s=-1}=1$$

(اگر ماکسیمم توان مخرج کسر با ماکسیمم توان مخرج $I(s)$ برابر باشد مشتق لازم نیست)

$$B=\frac{d}{ds}\left((s+1)^3 I(s)\right)\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right)=\frac{-2}{s^3}\Big|_{s=-1}=2$$

(اختلاف توان مخرج با توان مخرج تابع اصلی یک است)

$$C=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left((s+1)^3 I(s)\right)\Big|_{s=-1}=\frac{6}{2!}=3$$

$$D=s^2 I(s)\Big|_{s=0}=1 \qquad E=\frac{d}{ds}\left(s^2 I(s)\right)\Big|_{s=0}=-3$$

$$I(s)\longrightarrow i(t)=\left(e^{-t}\frac{t^2}{2}+2e^{-t}t+3e^{-t}+t-3\right)u(t)$$

- اگر مخرج کسر:
  - دارای ریشه ساده باشد $(\Delta>0)$ ⇐ کسر را تفکیک می‌کنیم.
  - دارای ریشه نباشد $(\Delta<0)$ ⇐ مخرج را بصورت مربع کامل در می‌آوریم.

عناصر با فرض صفر بودن شرایط اولیه:

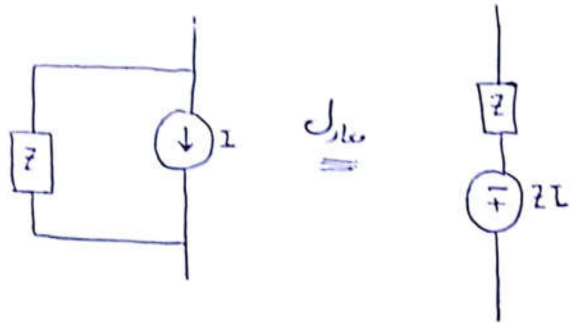
	امپدانس	ادمیتانس
R	R	$\frac{1}{R}$
L	Ls	$\frac{1}{Ls}$
C	$\frac{1}{Cs}$	Cs

(مثل در حوزه‌ی فرکانس معادل‌ها در حوزه‌ی لاپلاس است)

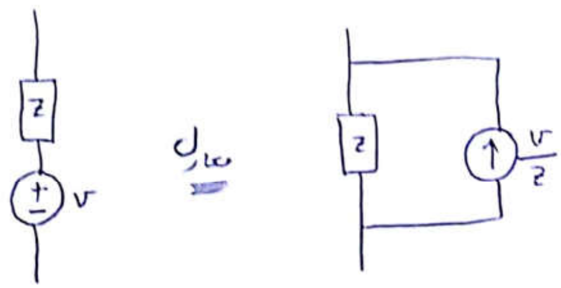
تبدیل منابع :

۱) هر منبع جریان موازی با یک عنصر را می توان بصورت اتصال سری یک منبع ولتاژ با آن عنصر نشان داد.

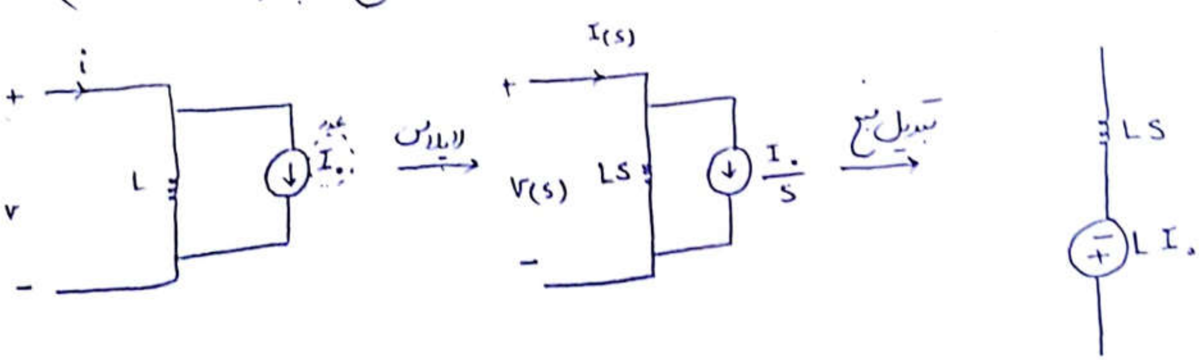
(* جهت منبع : از سر منفی به سر مثبت)



۲) هر منبع ولتاژ سری با یک عنصر را می توان بصورت اتصال موازی یک منبع جریان با همان عنصر نشان داد.



نکته : اگر سلف دارای شرایط اولیه باشد ، سلف بدون شرایط اولیه را با یک منبع جریان (شرایط اولیه) موازی می کنیم. با تبدیل منبع شرایط اولیه برای سلف بصورت منبع ولتاژ سری می شود که معادل منبع ضربه (در حوزه ی زمان) است.



(در نتیجه رفتار شرایط اولیه اگر برای یک سلف بصورت منبع ولتاژ باشند ، در حوزه ی زمان معادل ضربه است)

$$L I_0 \xrightarrow{L^{-1}} L I_0 \delta(t)$$

لاپلاس   زمان