جلسه چهارم

ریاضیات مهندسی:

تعاریف: می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه تابع $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد و تابع $f(z)$ دارای نقطه z_0، $z=z_0$ تحلیلی نباشد.

$$f(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

که در آن n عدد طبیعی و a_0، a_1، ...، a_n اعداد مختلط باشند همه جا تحلیلی هستند.

نقطه تکین: فرض کنید تابع مختلط $f(z)$ در تمامی نقاط به جز نقاط خاص تحلیلی باشد، به این نقاط خاص، نقاط تکین تابع گفته می‌شود.

تحلیلی کوشی-ریمان:

الف) قضیه اول کوشی-ریمان: هرگاه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$ و توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) در شرایط زیر، که به معادلات کوشی-ریمان مشهورند صدق می‌کنند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه دوم کوشی-ریمان: تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید. چنانچه توابع u و v در نقطه (x_0,y_0) معادلات کوشی-ریمان را ارضا کنند و توابع u_x و u_y و v_x، v_y در نقطه (x_0,y_0) وجود داشته و همه پیوسته باشند، آنگاه تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر است.

نکته: توجه کنید برقراری معادلات کوشی-ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق داشتن یک تابع مختلط در آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی-ریمان در یک نقطه، عدم مشتق‌پذیری تابع مختلط

s.a.m

مورد نظر در نقطه مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال: تابع مختلط زیر مفروض است این تابع در چه نقاطی مشتق پذیر است و مشتق آن در آن نقاط چیست؟

$$f(z)=2\mathrm{Re}\{z\}+\bar{z}+z^2$$

حل

$$f(z)=2x+x-iy+x^2-y^2+i2xy=3x+x^2-y^2+i(-y+2xy)$$

$$u(x,y)=3x+x^2-y^2 \quad , \quad \partial u/\partial x=3+2x \quad , \quad \partial u/\partial y=-2y$$

$$v(x,y)=-y+2xy \quad , \quad \partial v/\partial x=2y \quad , \quad \partial v/\partial y=2x$$

$$f(z)=u+iv \begin{cases} u_x+iv_x \\ v_y-iu_y \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \quad , \quad v_x=-u_y$$

$$3+2x\neq 2x$$

پس بنابراین تابع $f(z)$ در هیچ جا مشتق پذیر نخواهد بود.

تابع همساز: تابع مشتق $h(x,y)$ را تابعی همساز گوییم هرگاه معادلات لاپلاس را ارضا کند.

$$h_{xx}+h_{yy}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

توصیه: چنانچه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تام باشد یعنی همه جا تحلیلی باشد آنگاه معادلات کوشی-ریمان $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ همه جا برقرار هستند و نیز هر دو تابع u و v توابعی همساز شده و اصطلاحاً در این شرایط می‌گوییم v مزدوج همساز u می‌باشد.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ چنانچه $v(x,y)$ مزدوج همساز این تابع باشد و داشته باشیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مطلوب است محاسبه $f'(i)$.

$$u_x+iv_x=-iu_y+v_y \Rightarrow \begin{matrix} u_x=v_y \\ v_x=-u_y \end{matrix} \qquad f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$$

$$u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+(-2y\sin 2xy)e^{x^2-y^2}$$

$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2x\sin 2xy\, e^{x^2-y^2}$$

$$f'(i)=f'(0,1)=0-i(-2e^{-1})=0+2e^{-1}i$$

جلسه چهارم
ص ۲

نکته: توجه کنید وقتی تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب (x,y) پیدا شد برای نوشتن آن کافی است همه‌ی x ها را به z و همه y ها را به صفر تبدیل کنیم.

مثال: اولاً مقادیر a و b و c را طوری پیدا کنید تا تابع $u(x,y)=x^4+ax^2y^2+2x^3+by^4+cxy^2$ تابع همساز باشد سپس تابع

ثانیاً $f(z)=u+iv$ را پیدا کنید.

شرط همساز بودن تابع را اعمال می‌کنیم

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$(12x^2+2ay^2+12x)+(2ax^2+12by^2+2cx)=0$$

ضریب x^2 $\Rightarrow (12+2a)=0 \Rightarrow a=-6$

ضریب y^2 $(2a+12b)=0 \Rightarrow b=1$

ضریب x $(12+2c)=0 \Rightarrow c=-6$

برای بدست آوردن $f(z)$ می‌توان از دو روش جلو رفت!

$$u=x^4-6x^2y^2+2x^3+y^4-6xy^2$$

$$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y \rightarrow \partial v/\partial y=4x^3-12xy^2+6x^2-6y^2 \rightarrow v(x,y)=4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+f(x$$

$$\partial u/\partial y=-\partial v/\partial x \rightarrow \partial v/\partial x=-(-12x^2y+4y^3-12xy) \rightarrow v(x,y)=4x^3y-4y^3x+6x^2y+g(y)$$

$$v(x,y)=4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+c$$

$$f(z)=(x^4-6x^2y^2+2x^3+y^4-6xy^2)+i(4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+c)$$

$$\begin{cases} x\rightarrow z \\ y\rightarrow 0 \end{cases} \qquad f(z)=z^4+ic+2z^3$$

s.a.m

ب) بدون نیاز به محاسبه v با توجه به معادله اول کوشی-ریمان می توان $f'(z)$ را بدست آوریم:

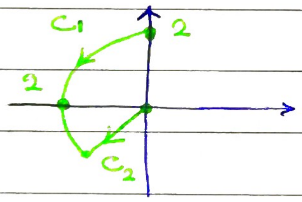
$$f'(z) = u_x + i v_x = u_x - i u_y = (4x^3 - 12xy^2 + 6x^2 - 6y^2) - i(-12x^2y + 4y^3 - 12xy)$$

$$\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases} \Rightarrow f'(z) = 4z^3 + 6z^2 \Rightarrow f(z) = z^4 + 2z^3 + k$$

انتگرال گیری از توابع مختلط:

محاسبه انتگرال مختلط $I = \int_c f(z)\,dz$ که در آن c یک منحنی تعریف شده در صفحه (x,y) می باشد
قاعده کلی آن است که با توجه به ارتباطی که بین متغیرها روی منحنی c وجود دارد، تمام متغیرهای $f(z)$ و dz را برحسب
یک متغیر پارامتری نوشته سپس با توجه به حدود تغییرات آن متغیر روی منحنی c مساله را به یک انتگرال برحسب یک متغیر
تبدیل نمائید.

مثال: حاصل انتگرال مختلط $I = \int \bar{z}\,dz$ که در آن c مطابق شکل زیر باشد را محاسبه کنید.



$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$I = \int_{c_1} + \int_{c_2} = \int_{\theta=\pi/2}^{5\pi/4} (2e^{-i\theta})\,d(2e^{+i\theta}) + \int_{r=2}^{0} re^{-i5\pi/4}\,d(re^{i5\pi/4})$$

$$I = \int_{\theta=\pi/2}^{5\pi/4} (2\cancel{e^{-i\theta}})(2i\cancel{e^{i\theta}})\,d\theta + \int_2^0 r\cancel{e^{-i5\pi/4}} \times \cancel{e^{i5\pi/4}}\,dr$$

$$I = \int_{\pi/2}^{5\pi/4} 2i \times 2\,d\theta + \int_2^0 r\,dr = 4i\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{r^2}{2}\Big|_2^0 = \cancel{4}i \times \frac{\pi \times 3}{\cancel{4}} + (0-2) = 3\pi i - 2$$

s.a.m

قضیه انتگرال کوشی ـ گورسا:

هرگاه تابع $f(z)$ در تمام ناحیه همبند ساده و کراندار D تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر منحنی بسته دلخواه واقع در ناحیه D انتگرال $I=\int_c f(z)dz$ مساوی صفر است. از قضیه مذکور به سادگی می‌توان نتیجه گرفت چنانچه تابع $f(z)$ در یک ناحیه کراندار و همبند ساده D تحلیلی باشد، حاصل انتگرال $\int f(z)dz$ در روی هر منحنی دلخواه غیربسته که از نقاط تکین $f(z)$ نمی‌گذرد و در این ناحیه واقع است و نقطه z_1 را به نقطه z_2 وصل می‌کند مستقل از مسیر می‌باشد و حاصل آن برابر است با $I=F(z_2)-F(z_1)$ که در آن $F'(z)=f(z)$

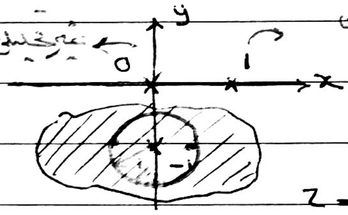
مثال: حاصل انتگرال $I=\int_c e^{-2z}dz$ که در آن c پاره خط واصل بین نقطه $1-i\pi$ و نقطه $2+3i\pi$ می‌باشد را بدست آورید. چون e^{-2z} در همه جا تحلیلی است.

$$I=-\frac{1}{2}e^{-2z}\Big|_{1-i\pi}^{2+3i\pi}=-\frac{1}{2}\left[e^{-2(2+3i\pi)}-e^{-2(1-i\pi)}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-4}-e^{-2}\right]=\frac{1}{2}e^{-2}\left[1-e^{-2}\right]$$

مثال: حاصل انتگرال مختلط $I=\int_c\left(\cos z+\frac{1}{z^3-z^2}\right)dz$ که در آن $c: |z+i|=\frac{1}{2}$ می‌باشد را بدست آورید.

غیرتحلیلی



مشخص است تابع $f(z)=\cos z+\frac{1}{z^3-z^2}$ در تمام صفحه مختلط به جز $z=1$ و $z=0$ تحلیلی می‌باشد. حال با توجه به شکل روبرو مشاهده می‌شود که تابع $f(z)$ در تمام نقاط ناحیه کراندار و همبند ساده D تحلیلی می‌باشد. طبق قضیه انتگرال کوشی ـ گورسا حاصل انتگرال صفر است.

s.a.m