جلسه دهم

۱- روش حل دالامبر یا روش مشخصه؛

۲- معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم؛

۳- معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم؛ همگن و ناهمگن

۴- پاسخ دالامبر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

روش حل دالامبر یا روش مشخصه؛

برای بدست آوردن جواب معادله‌ی موج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ با استفاده از روش دالامبر با تغییر متغیرهای زیر را

بصورت $x-ct=z$ و $x+ct=v$ را در نظر بگیریم، داریم؛

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=c\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot(-c)=c\frac{\partial u}{\partial v}-c\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial v}-c\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\partial u}{\partial v}-c\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c}+\frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial u}{\partial v}-c\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{=-c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\qquad(\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\qquad(\mathrm{II})$$

با جایگذاری عبارات I و II در معادله‌ی موج خواهیم داشت.

$$c^2\frac{\partial u}{\partial v}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$c^2\frac{\partial u}{\partial v}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

بعد از ساده کردن خواهیم داشت. فرم کانونی؛ $\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}=0$

حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی اخیر را مطابق آنچه در ابتدای فصل گفتیم، می‌توان به صورت شکل زیر حل کرد.

فرم کانونی $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \xrightarrow[\text{خواهیم داشت}]{\text{با انتگرال گیری برحسب } v} \frac{\partial u}{\partial z} = f(z)$$

و این بار با انتگرال گیری برحسب z خواهیم داشت.

$$u(z, v) = \int f(z)\,dz + \psi(v)$$

$$u(z, v) = \phi(z) + \psi(v)$$

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

این جواب به جواب دالامبر معادله موج معروف است. توابع ϕ و ψ را می توان با توجه به شرایط داده شده مشخص تعریف نمود.

مسئله ۱: معادله $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ و با تغییر متغیر $r = x + t$ و $s = x - t$ به کدام یک از صورت های زیر تبدیل خواهد شد؟

الف) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ ب) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}$ ج) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$ د) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$

$z = x - ct \,,\; v = x + ct$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} \times c + \frac{\partial u}{\partial z} \times (-c) = c\frac{\partial u}{\partial v} - c\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial v} - c\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\partial u}{\partial v} - c\frac{\partial u}{\partial z}\right)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial u}{\partial v} - c\frac{\partial u}{\partial z}\right)\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{=-c} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - c^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + (-c^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) +$$

با توجه به صورت سوال $c = 1$

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (I) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \times \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

جلسه دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \qquad v = x+t,\quad z = x-t$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم خطی

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم خطی را به طور عمومی به صورت زیر نشان می‌دهند:

$P(x,y) \qquad Q(x,y) \qquad R(x,y) \qquad S(x,y,z,\partial z/\partial x,\partial z/\partial y)$

$$P\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = S$$

برای طبقه‌بندی معادلات P و Q و R را ضرایب ثابتی در نظر می‌گیریم که به ترتیب a و b و c را اختیار کرده‌اند از این رو معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = S$$

حال Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\Delta = b^2 - 4ac$ و طبقه‌بندی را بر اساس مثبت، منفی یا صفر بودن Δ ارائه خواهیم کرد.

معادله بیضوی اگر $\Delta < 0$

معادله سهموی اگر $\Delta = 0$

معادله هذلولوی اگر $\Delta > 0$

به عنوان مثال از بین معادلاتی که در جلسات قبل مطرح کردیم، معادله‌ی یک بعدی موج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

که در آن $a=1$، $b=0$ و $c=-c^2$ است پس معادله‌ی هذلولوی است $(\Delta>0)$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ✓ بنابراین است >0 $b^2 - 4ac = 0 + 4(1)c^2 = +4c^2$

$\Delta>0$ هذلولوی

s.a.m

و معادله‌ی دوبعدی لاپلاس یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ که در آن $a=1$ و $b=0$ و $c=1$ است یک معادله‌ی بیضوی است $(\Delta<0)$ و معادله‌ی یک بعدی انتشار گرما یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k\frac{\partial u}{\partial t}$ که در آن $a=1$ و $b=0$ و $c=0$ است یک معادله‌ی سهموی خواهد بود. $(\Delta=0)$

معادلات دیفرانسیل جزئی خطی همگن از مرتبه‌ی دوم در بسیاری از موارد بکار برده می‌شوند. از این رو توجه خود را به این دسته از معادلات معطوف می‌کنیم. این دسته از معادلات شکلی از معادله‌ی $P(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+Q(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+R(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=S$ که در آن $S=0$ است. حال اگر ضرایب P و Q و R را ثابت در نظر بگیریم که به ترتیب مقادیر a و b و c را اختیار کنند می‌توانیم بنویسیم

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

که فقط شامل مشتقات مرتبه‌ی دوم است و یک معادله‌ی همگن نامیده خواهد شد.

نکته: در حالت کلی اگر $b\neq 0$ باشد معادله‌ی بالا را نمی‌توانیم به کمک روش تغییر متغیر حل کنیم لذا از شیوه‌ی حل دالامبر استفاده می‌کنیم.

در اینجا ممکن است این سوال مطرح شود که تغییر متغیر مطلوب در روش حل دالامبر را چگونه می‌توانیم بدست آوریم. در جواب می‌گوییم که تغییر متغیرهای لازم برای استفاده از روش حل دالامبر را می‌توان از این واقعیت بدست آورد که شیب $(\frac{dy}{dx})$ منحنی $Z=Z(x,y)$ در صفحه‌ی $x-y$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

لذا:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

با جایگذاری مقادیر a و b و c در رابطه‌ی بالا و انتگرال‌گیری از آن دو رابطه به صورت زیر بدست خواهد آمد.

s.a.m

ص ۳
جلسه دهم

$$\eta = y - \lambda_1 x$$
$$\phi = y - \lambda_2 x$$

که در آن λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0$ می‌باشند. η و ϕ هم تغییر متغیر به شیوه‌ی حل دالامبر خواهد بود.

از طرفی با توجه به ضرایب معادله‌ی $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ می‌توان سه حالت را به صورت زیر تمییز داد.

حالت اول: معادله دارای دو ریشه‌ی متمایز λ_1 و λ_2 باشد ($\Delta > 0$ هذلولوی است)

در این صورت حل معادله‌ی همگن به صورت زیر خواهد بود.

$$Z = f(y - \lambda_1 x) + g(y - \lambda_2 x)$$

حالت دوم: معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف λ باشد ($\Delta = 0$ سهموی است)

$$Z = f(y - \lambda_1 x) + x\,g(y - \lambda_2 x)$$

حالت سوم: معادله دارای دو ریشه‌ی مختلط و مزدوج است ($\Delta < 0$ بیضوی است)

$$Z = f(y - \underbrace{(u + i\omega)}\,x) + g(y + (\underbrace{u - i\omega})\,x)$$

ریشه‌های مختلط معادله هستند

مثال: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \quad a = 1,\ b = 0,\ c = 1$

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 0 \times \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm i \Rightarrow y = ix + \eta \Rightarrow \eta = y - ix$$
$$y = -ix + \phi \Rightarrow \phi = y + ix$$
$$\Rightarrow Z = g(y - ix) + f(y + ix)$$

حالت چهارم: در صورتی که در معادله $a=0$ و $b\neq 0$ باشد آنگاه فقط یک ریشه به دست خواهد آمد و دومین حل، g، فقط تابعی از x است. به طوری که $g(x)$ عموماً معادله‌ی اصلی را ارضا می‌کند. حل همگن معادله در این حالت به شکل زیر است.

$$Z=f\left(y-\frac{b}{2c}x\right)+g(x)$$

حالت پنجم: اگر در معادله $a=b=0$ باشد با انتگرال‌گیری دو بار از $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ عبارت زیر برای جواب همگن معادله به دست خواهد آمد

$$Z=f(x)+yg(x)$$

مسئله ۲: برای معادله‌ی موج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ تغییر و متغیرهای روش حل دالامبر را به دست آورید.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \underbrace{c^2}_{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{c}=0$$

$a=c^2$, $b=0$, $c=-1$

$b^2-4ac=0-4c^2<0$ معادله بیضوی است

$$a\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2-b\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+c=0 \Rightarrow c^2\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2-1=0 \Rightarrow \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{c^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\pm\frac{1}{c} \qquad t=\frac{x}{c}+Z,\quad t=-\frac{x}{c}+V \Rightarrow$$

$$Z=x-ct \qquad V=x+ct$$

مسئله ۳: برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر، تغییر متغیرهای روش دالامبر را به دست آورید و با استفاده از آن جواب دالامبر معادله را تعیین کنید؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$a=1,\ b=1,\ c=-2 \Rightarrow a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+c=0 \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-2=0$$

هذلولوی

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1,\lambda_2=\frac{+1\pm\sqrt{1-4(1)(-2)}}{2(1)}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}-1\\ 2\end{cases}$$

$Z=y-2x$

$V=y+x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial V}\times\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial u}{\partial Z}\times\underbrace{\frac{\partial Z}{\partial x}}_{-2}=\frac{\partial u}{\partial V}-2\frac{\partial u}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial V}-2\frac{\partial u}{\partial Z}\right)=\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial u}{\partial V}-2\frac{\partial u}{\partial Z}\right)\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial u}{\partial V}-2\frac{\partial u}{\partial Z}\right)\underbrace{\frac{\partial Z}{\partial x}}_{-2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial V^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial V\partial Z}+(-2)\frac{\partial^2 u}{\partial Z\partial V}+4\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial V^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial V\partial Z}+4\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \quad (1)$$

s.a.m

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \times \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{1} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{1} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{-2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \times \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{1} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{1} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{1} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \mathrm{III}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}_{} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}_{} - \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}_{} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \times -2 = 0$$

$$\Rightarrow -9\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = F(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = F(z) \xrightarrow{\text{انتگرالگیری برحسب } z} u(v,z) = \int F(z)\,dz + \varphi(v) = K'(z) + \varphi(v)$$

این معادله به شیوه تفکیک متغیرها قابل حل نیست چرا؟ $= K'(y-2x) + \varphi(y+x)$

s.a.m