جلسه ۱
مبحث سوم

نکات و قضایای مربوط به سری های فوریه:

۱) اگر $F_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nx$ آنگاه:

$$F_1(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}x + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}x$$

$$F_2(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}x + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}x + a_2 \cos\frac{4\pi}{T}x + b_2 \sin\frac{4\pi}{T}x$$

$$F_3(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}x + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}x + a_2 \cos\frac{4\pi}{T}x + b_2 \sin\frac{4\pi}{T}x + a_3 \cos\frac{2\pi}{T}\times 3x + b_3 \cos\frac{6\pi}{T}$$

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} F_N(x)$$

قضیه دیریکله: ۲) رابطه ی بالا فقط در نقاط پیوستگی صادق است. در نقاط ناپیوستگی (x_0) مقدار سری فوریه برابر با میانگین حد چپ و راست تابع است. $\left(F(x_0^-) + F(x_0^+)\right)/2$

شرایط قضیه دیریکله:
① $\int |f(x)|dx < \infty$
② تعداد ناپیوستگی در یک دوره بی نهایت نباشد
③ تعداد ماکزیمم و مینیمم در یک دوره تناوب بی نهایت نباشد.

سری فوریه توابع زوج: اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد در آن صورت b_n برابر صفر و $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx$ و $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$ است.

سری فوریه توابع فرد: اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد $a_0 = a_n = 0$ و $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$

یادآوری:

1) $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ تابع زوج

تغییر متغیر $\boxed{x = -y}$

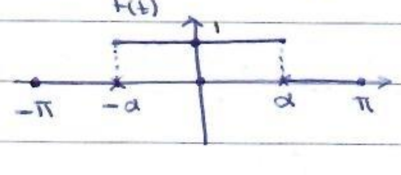
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) = \int_{0}^{a} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(y)\,dy$$

2) $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ تابع فرد

۳) حاصلضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد، فرد است و حاصلضرب دو تابع زوج و یا دو تابع فرد، زوج است.

s.a.m

مثال ۱: با توجه به سری فوریه تابع $f(x)$ حاصل سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$ کدام است؟



(کامپیوتر ۷۷)

$T = 2\pi$

$a_0 = ?$

$a_n = ?$

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} 1 \times dt = \frac{1}{2\pi} \times 2\alpha = \alpha/\pi$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t) \cos \frac{2\pi}{T} nt\, dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} 1 \times \cos \frac{2\pi}{2\pi} nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos nt\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sin nt \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{n\pi}\left[\sin n\alpha + \sin n\alpha\right] = \frac{2\sin n\alpha}{n\pi}$$

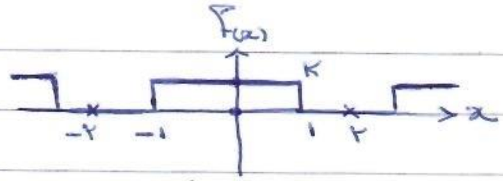
$$f(x) = \underbrace{a_0}_{\alpha/\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{2\sin n\alpha/n\pi} \cos \frac{2n\pi}{T} x + \underbrace{b_n}_{0} \sin \frac{2n\pi}{T} x =$$

$$f(x) = \alpha/\pi + \sum_{n=1}^{\alpha} \left(2\sin n\alpha \cos \frac{2n\pi}{T} x\right)/n\pi = \alpha/\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sin n\alpha \cos nx\right)/n\pi$$

نقطه پیوستگی (در تعریف وجود دارد) $x = 0 \longrightarrow \quad f(0) = \alpha/\pi + \sum_{n=1}^{\infty} 2\sin n\alpha/n\pi \Rightarrow 1 - \alpha/\pi = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sin n\alpha / n\pi$

$$\pi/2\left(1 - \alpha/\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha / n = \pi/2 - \alpha/2 = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

مثال ۲: ضرایب سری فوریه تابع مقابل را حساب کنید؟



$T = 4$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\, dx = 2K/4 = K/2$

$a_n = ?$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \quad b_n = ? = 0$$

چون تابع فرد است مقدار ۰ دارد ولی در اینجا تابع زوج است.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi/T\, x$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi/4\, x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi/2\, x$$

$$a_n = 2/T \int_{\langle T\rangle} f(x) \cos 2n\pi/T\, x\, dx = 4/T \int_{\langle T/2\rangle} f(x) \cos 2n\pi/T\, x\, dx$$

مدل ۲
صفحه دوم

$$a_n = \frac{4}{4}\int_{+0}^{1} 1\times\cos\frac{2n\pi}{4}x\,dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1 =$$

$$\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$f(x) = \frac{K}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

مثال ۳: سری فوریه تابع زیر را بنویسید

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$T = ?\quad 2\pi$

$a_0 = ?\quad 0$

$a_n = ?\quad 0$ (تابع فرد)

$b_n = ?$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{4}{T}\int_{\langle T/2\rangle} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin\frac{2n\pi}{2\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx =$$

مشتق	انتگرال
x^2	$\sin nx$
$2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n^2}\underbrace{\sin n\pi}_{0} + \frac{2}{n^3}\cos n\pi\right) - \frac{2}{n^3}\right]$$

دوبله

مثال ۴: تابع $f(x) = e^{-x}$ ، $0 < x < 2$ مفروض است در سری فوریه این تابع مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چقدر است؟

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\Big|_0^2 = \frac{-1}{2}(e^{-2}-1) = \frac{1}{2}(1-e^{-2})$$

$$f(0) = \frac{1}{2}(1-e^{-2}) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad f(0) = \frac{1+e^{-2}}{2}$$

$$\frac{1}{2}(1+e^{-2}) - \frac{1}{2}(1-e^{-2}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \frac{1}{2}(\cancel{1}+e^{-2}-\cancel{1}+e^{-2}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$e^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

سری فوریه سینوسی و کسینوسی :

فرض کنید تابع $f(x)$ در $(0, L)$ تعریف شده باشد. اگر این تابع را در فاصله $(-L, 0)$ به طور زوج گسترش داده و برای تابع حاصل سری فوریه بنویسیم به این سری فوریه، سری فوریه کسینوسی گفته می‌شود.

البته بدیهی است در چنین وضعیتی $b_n = 0$ است.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{2L}\int_0^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)\,dx$$

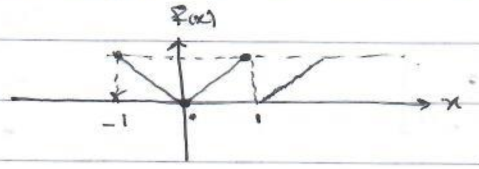
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{2T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{2L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

همچنین اگر این تابع را در فاصله $(-L, 0)$ به طور فرد گسترش دهیم و برای تابع حاصل سری فوریه بنویسیم به این سری فوریه، سری فوریه سینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است ضرایب a_n, a_0 مساوی با صفر است.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_0 = a_n = 0$$

مثال ۴: ضریب جمله $\cos 5\pi x$ در بسط کسینوسی تابع $f(x) = x$ ، $0 < x < 1$ را بدست آورید.
(مهندسی شیمی ۷۸)



$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times 2\left[1\times\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} = a_0$$

$$a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi}{2}x\,dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx =$$

x	$\cos n\pi x$
1	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
0	$-\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$

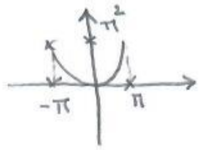
$$2\times\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{(5\pi)^2}\cos 5\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{25\pi^2}\left[\overset{-1}{\cos 5\pi} - 1\right]$$

$$-\frac{4}{25\pi^2}$$

۳ درس جلسه سوم

سوال: هرگاه $f(x)=x^2$ و $(-\pi,\pi)$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ باشد با توجه به سری فوریه این تابع حاصل سری

فوریه نامتناهی $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots$ را بدست آورید؟ (تمرین ۷۸)



$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

✓ محاسبه خواهیم داشت a_0, a_n و $b_n=0$ تابع زوج است.

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} x^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\times\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^3}{2\pi 3}=\frac{\pi^2}{3}$$

$b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx=\frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

مشتق	انتگرال
x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\times\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi n^2}\left[\pi\cos n\pi-0\right]=\frac{4}{\cancel{\pi}n^2}\times\cancel{\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos n\pi\cos nx \Rightarrow f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\underbrace{\cos^2 n\pi}_{1}=$$

$$(\pi^2+\pi^2)\times\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \left(\pi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$