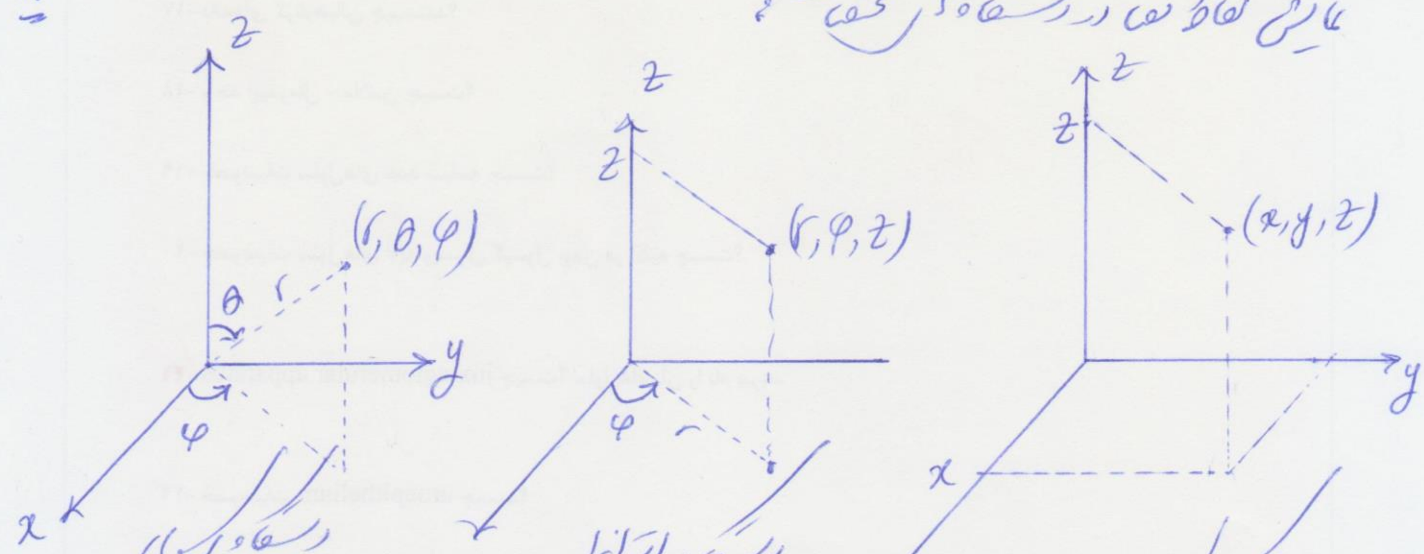
11

نمایش نقاط در دستگاه‌های مختلف:



دستگاه کروی   دستگاه استوانه‌ای   دستگاه کارتزین

مولفه‌های برداری:

$$\bar{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$

$$\bar{A} = A_r\hat{a}_r + A_\varphi\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z$$

$$\bar{A} = A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\varphi\hat{a}_\varphi$$

دستگاه کارتزین:

$$\bar{A}+\bar{B} = (A_x+B_x)\hat{a}_x + (A_y+B_y)\hat{a}_y + (A_z+B_z)\hat{a}_z$$

نکته: بردارهای یکه تابع مختصات نیستند.

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot(B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x = 1 \qquad \hat{a}_x\cdot\hat{a}_y = 0$

$\hat{a}_y\cdot\hat{a}_y = 1 \qquad \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z = 0$

$\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z = 1 \qquad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z = 0$

12

if $\bar{B} = A$

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |A|^2$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \times (B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z)$$

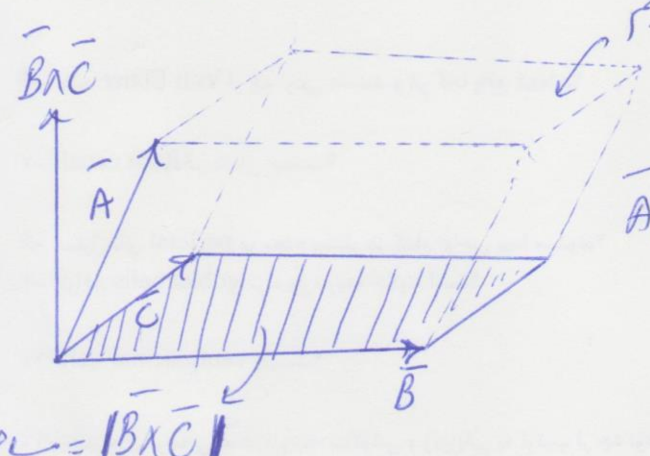
$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_x \rightarrow \hat{a}_y \rightarrow \hat{a}_z \rightarrow \hat{a}_x$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

حجم متوازی السطوح

حجم $= |A \cdot (\bar{B} \times \bar{C})|$



$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

سطح $= |\bar{B} \times \bar{C}|$

- در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی:

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_r B_r + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$$ استوانه‌ای

$$= A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$$ کروی

استوانه‌ای

$$\begin{cases} \hat{a}_r\cdot\hat{a}_r = 1 & \hat{a}_r\cdot\hat{a}_z = 0 \\ \hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_\varphi = 1 & \hat{a}_r\cdot\hat{a}_\varphi = 0 \\ \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z = 1 & \hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_z = 0 \end{cases}$$

کروی

$$\begin{cases} \hat{a}_r\cdot\hat{a}_r = 1 & \hat{a}_r\cdot\hat{a}_\theta = 0 \\ \hat{a}_\theta\cdot\hat{a}_\theta = 1 & \hat{a}_r\cdot\hat{a}_\varphi = 0 \\ \hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_\varphi = 1 & \hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A}\cdot\bar{A} = A_r^2 + A_\varphi^2 + A_z^2$$ استوانه‌ای

$$= A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2$$ کروی

$$= A^2$$

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ A_r & A_\varphi & A_z \\ B_r & B_\varphi & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix}$$

نکته مهم: ضرب داخلی و ضرب برداری در دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای زمانی درست است که بردارها از نقطه‌ای یکسان (برداری) که بردارها دارای مبدا مشترک باشند یا مختصات زاویه‌ای یکسان داشته باشند.

4

بردار مکان و

کارتزین

$$\bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

استوانه‌ای

$$= r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$$

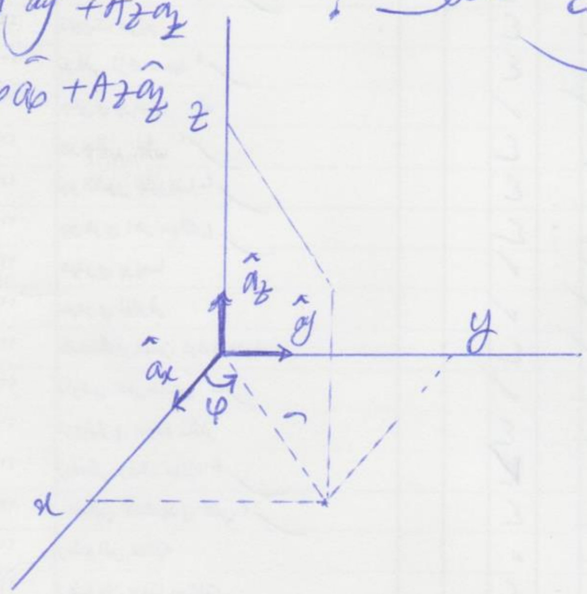
کروی

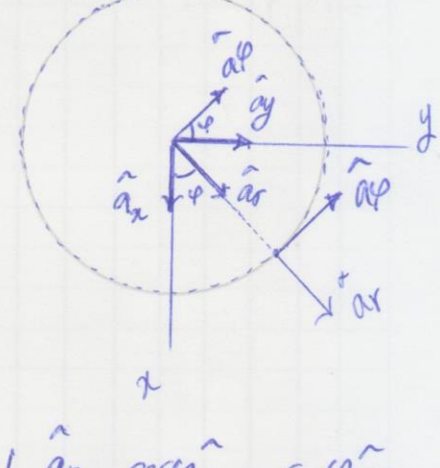
$$= r\hat{a}_r$$

تبدیل بردارها در دستگاه‌های مختلف و

- کارتزین به استوانه‌ای

$$\begin{cases} \bar{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \\ \bar{A} = A_r\hat{a}_r + A_\varphi\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z \end{cases}$$





$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\frac{y}{x} = tg\varphi \longrightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_r = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y \\ \hat{a}_r(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y \\ \hat{a}_\varphi(\varphi) \end{cases}$$

$$\hat{a}_z = \hat{a}_z$$

$A_x = \bar{A} \cdot \hat{a}_x$ یعنی چه میزان بردار $\bar{A}$ در راستای محور x مولفه دارد (ضرب داخلی) A_x

$= (A_r \hat{a}_r + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_x$

$= A_r\, \hat{a}_r \cdot \hat{a}_x + A_\varphi\, \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_x + A_z\, \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x$

$= A_r \cos\varphi - A_\varphi \cdot \sin\varphi$

$A_y = A \cdot \hat{a}_y$ یعنی چه میزان بردار $\bar{A}$ در راستای محور y مولفه دارد. (ضرب داخلی) A_y

$= \dots = A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$

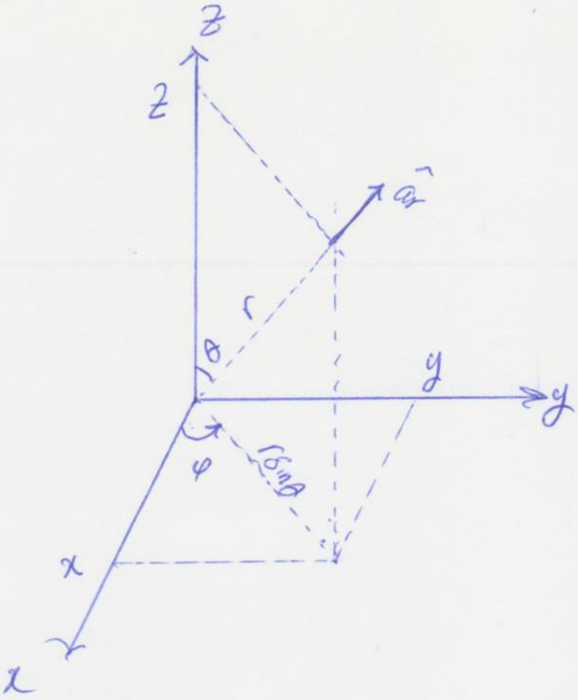
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$\cdot$	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$
$\hat{a}_r$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\hat{a}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\hat{a}_z$	0	0	1

16

- دستگاه کارتزین به کروی:



$\hat{a}_r$

$$\begin{cases} A_x = \bar{A}\cdot\hat{a}_x = \cdots \\ A_y = \bar{A}\cdot\hat{a}_y = \cdots \\ A_z = \bar{A}\cdot\bar{a}_z = \cdots \end{cases}$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta.\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\theta.\sin\varphi\,a_y + \cos\theta\,a_z$$

$$\hat{a}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi\,\hat{a}_x + \cos\theta.\sin\varphi\,\hat{a}_y - \sin\theta\,\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$

$\cdot$	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$
$\hat{a}_r$	$\sin\theta.\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
$\hat{a}_\theta$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
$\hat{a}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{r} \end{cases}$$