اعداد مختلط

معرفی مفهوم‌های مختلط و تعاریف اولیه :

از قدیم الایام حل معادلاتی شبیه $x^2+4=0$ یا $x^2+x+1=0$ که هیچ عدد حقیقی در آنها صدق نمی‌کند مطرح بوده است ولیکن این امر موجب پیدایش اعداد مختلط گردید.

بسیاری از مسائل علمی مهندسی را می‌توان با اعداد مختلط بررسی و حل نمود. مسائلی مربوط به مدارهای الکتریکی، انتشار امواج در ارتعاشات مکانیکی، جریان‌های الکترواستاتیکی و سیالات ... با نظریه اعداد مختلط و توابع مختلط به راحتی قابل حل و بررسی می‌باشند.

یک زوج مرتب

تعریف عدد مختلط :

$$Z=\{z \mid z=(x,y),\quad x,y\in R\}$$

در مجموعه به هر نقطه از صفحه یک عدد مختلط نسبت می‌دهیم و لذا مجموعه نقاط یک صفحه تشکیل می‌شود.

در اعداد حقیقی به هر نقطه یک محور، یک عدد نسبت می‌دهیم.

$$z = (x, y) = x + iy = x + jy \quad , \quad j = i = \sqrt{-1} = (0, 1)$$

بخش حقیقی — Real

بخش موهومی — Imerginary

۱- تساوی دو عدد مختلط :

اگر دو عدد :
$$\begin{cases} z_1 = (x_1, y_1) \\ z_2 = (x_2, y_2) \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

۲- جمع و تفریق دو عدد مختلط :

$$\begin{cases} z_1 = (x_1, y_1) \\ z_2 = (x_2, y_2) \end{cases} \Rightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2 , y_1 \pm y_2)$$

۳- ضرب دو عدد مختلط :

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2 \, , \, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$j^2 = j \cdot j = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

۴- تقسیم دو عدد مختلط:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = (x_3, y_3) \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)(x_3, y_3)$$

$$\Longrightarrow (x_2 x_3 - y_2 y_3 , x_2 y_3 + x_3 y_2) = (x_1, y_1)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3 \\ y_1 = x_2 y_3 + x_3 y_2 \end{cases} \Longrightarrow x_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} , \quad y_3 = \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

توجه: برای سادگی محاسبه تقسیم لازم به ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج است.

۵- تعریف مزدوج عدد مختلط:

$$z = (x, y) \Longrightarrow \bar{z} = z^* = (x, -y)$$

$$(1, 0) = 1 , \quad (0, 1) = j = i$$

۶- نمایش نرم

$$z = x + jy$$

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = \boxed{x(1,0) + y(0,1) = x + jy}$$

هر عدد مختلط بصورت ترکیب خطی از $(0,1)$ و $(1,0)$ نمایش داد.

مثال -

$$z = x + jy \longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+jy} = \frac{1}{x+jy}\left(\frac{x-jy}{x-jy}\right) = \frac{x-jy}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$ و $$|z| \triangleq \sqrt{x^2+y^2}$$ اندازه عدد مختلط

خواص عمل جمع : جابجایی - شرکت پذیری - وجود عضو خنثی (عدد 0)

خواص عمل ضرب : جابجایی - شرکت پذیری - پخشی - وجود عضو خنثی

خواص مزدوج :

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \;,\; \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \;,\; \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

توجه !

$$\begin{cases} z = x + jy \\ \bar{z} = x - jy \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = Real(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y = Imag(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2} \end{array} \;,\; z\bar{z} = x^2+y^2$$

اندازه یک عدد مختلط:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

چند نامساوی مهم:

1- $|Re(z)| \leq |z|$ یعنی $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

2- $|Im(z)| \leq |z|$ یعنی $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

3- $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ و $|z_1+\dots+z_n| \leq |z_1|+\dots+|z_n|$

4- $|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|$

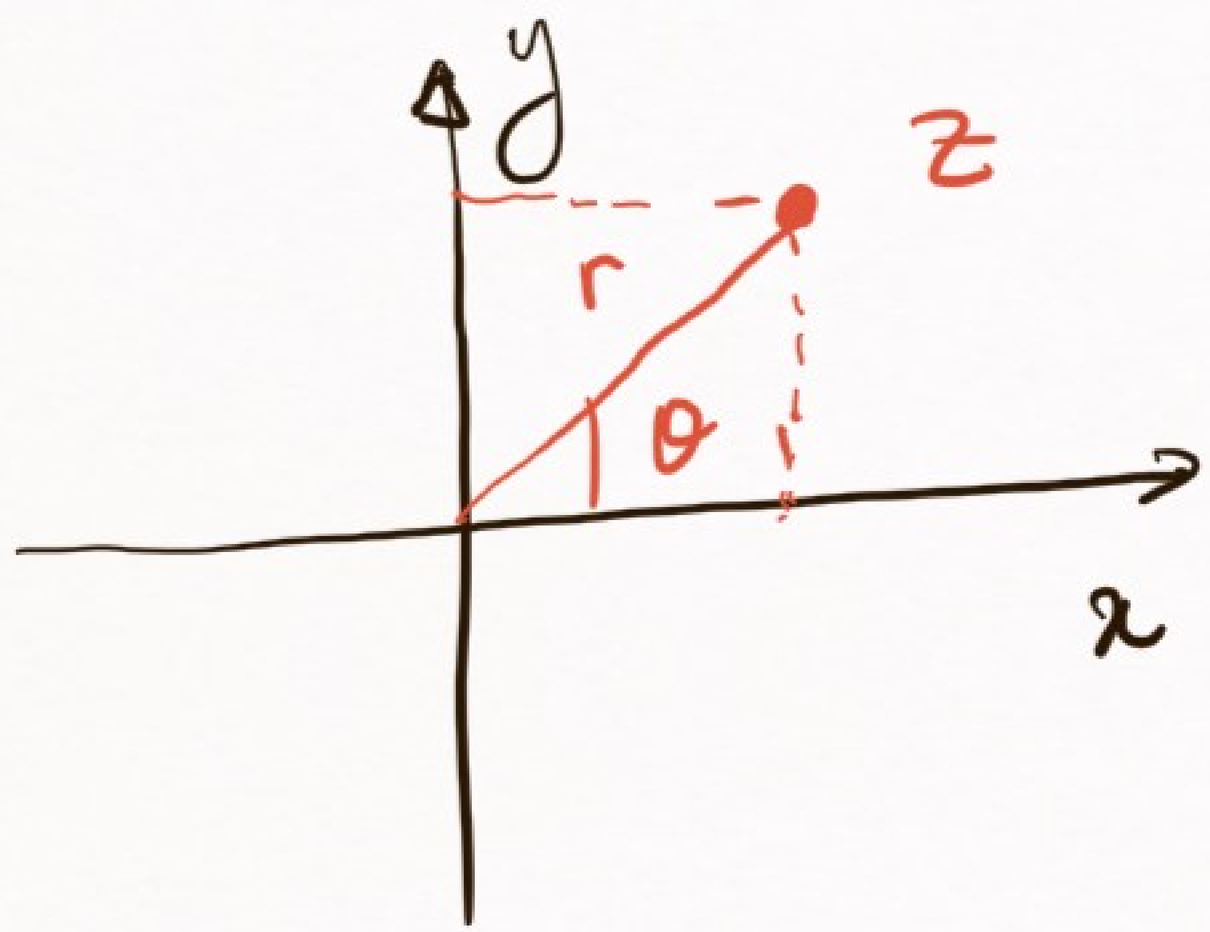
توجه:

* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ و $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

* $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)} = 2Re(z_1\bar{z}_2)$

$$|z|=3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3 \Rightarrow x^2+y^2=9$$

مثال - نمایش نموداری $|z|=3$ چه شکلی می‌باشد؟



نمایش به فرم قطبی:

$$z = x + jy = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} y/x \quad ; \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$z = r\angle\theta = re^{j\theta}$$

ضرب در فرم قطبی:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) = r_1\angle\theta_1$$

$$z_1 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) = r_2\angle\theta_2$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle(\theta_1+\theta_2)$$

تقسیم در فرم قطبی :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

تعمیم قانون ضرب :

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = (r_1 \cdots r_2) \angle \theta_1 + \cdots + \theta_n$$

توان :

$$z_1 = r_1 \angle \theta_1 \Longrightarrow z_1^n = [r_1 (\cos\theta_1 + j \sin\theta_1)]^n = r_1^n (\cos n\theta_1 + \sin n\theta_1)$$

توجه : $r = 1 \Longrightarrow z = \cos\theta + j\sin\theta \Longrightarrow z^n = (\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta$

تمرین - با استفاده از رابطه بالا $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بدست آورید.

حل -

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + j \sin 3\theta$$

رابطه جدید = طرفین تساوی $\longrightarrow$

بخش حقیقی راست = بخش حقیقی چپ

بخش موهومی راست $\equiv$ بخش موهومی چپ

ریشه‌های n ام عدد مختلط z_0 :

$$z_0 = r_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0) \Longrightarrow z_0^{1/n} = ?$$

$$z_0^{1/n} = z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = ? \Longrightarrow z_0 = z^n$$

$$\Longrightarrow r_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0) = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta) \Longrightarrow \begin{cases} r_0 = r^n \\ \cos\theta_0 = \cos n\theta \end{cases}$$

$$\to n\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{r = r_0^{1/n} \,, \quad \theta = \frac{2k\pi + \theta_0}{n}}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

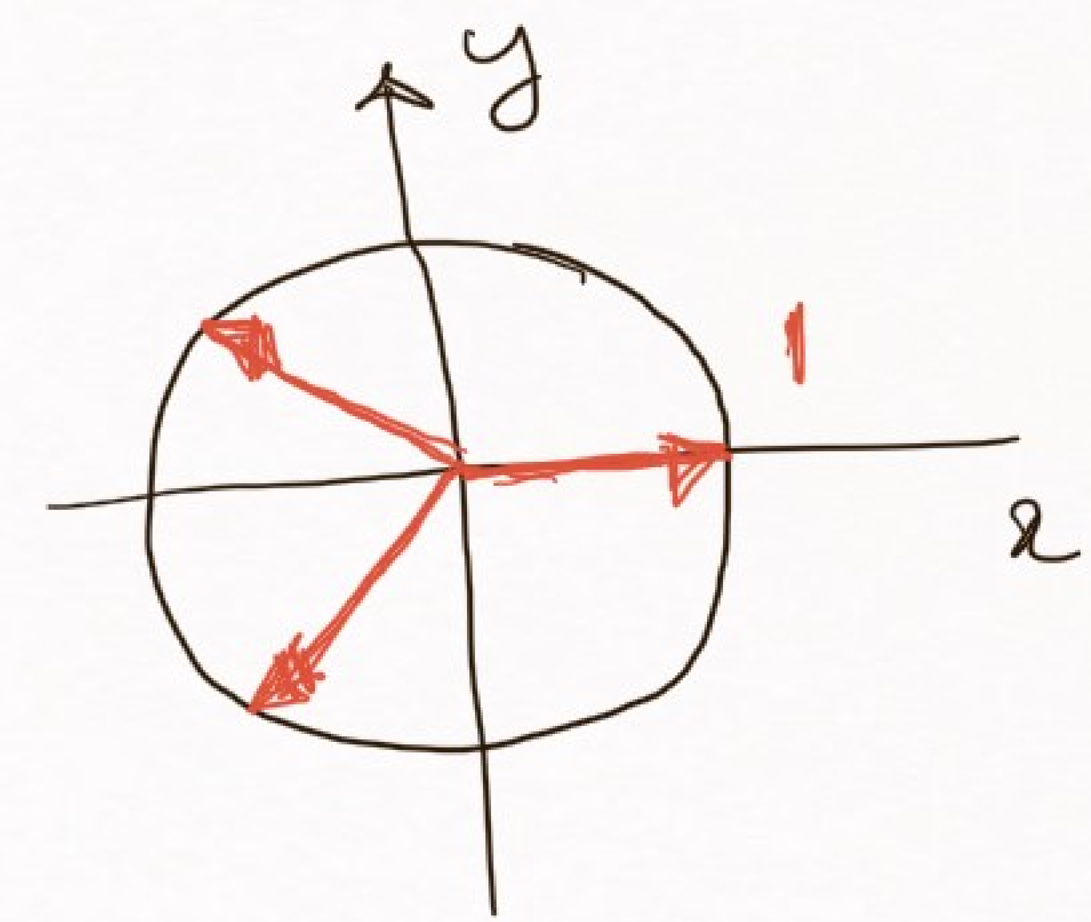
$$z_0^{1/n} = r_0^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{2k\pi + \theta_0}{n}\right)\right)$$

$$z^3 = 1 \Longrightarrow z = ?$$

-di

$$z^3 = 1 = 1\angle 0 \Longrightarrow z = 1\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + j\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right);\ k=0,1,2$$

$$\begin{cases} z_1 = 1(\cos 0 + j\sin 0) = 1\angle 0 \\ z_2 = 1\left[\cos(2\pi/3) + j\sin(2\pi/3)\right] = 1\angle 120^\circ \\ z_3 = 1\left[\cos 4\pi/3 + j\sin 4\pi/3\right] = 1\angle 240^\circ \end{cases} \Longrightarrow$$



-di

$$z^5 - 3j = 0 \Longrightarrow z = ? \Longrightarrow z^5 = 3j = 3(\cos\pi/2 + j\sin\pi/2)$$

$$z_k = 3^{1/5}\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{5} + j\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{5}\right);\ k=0,1,2,3,4$$

تمرین ۱- معادله های زیر را حل نمائید

الف- $z^{20} - (2+2j) = 2$

ب- $z^{3/4} - j = 0$

تمرین ۲- مکان هندسی معادله های زیر را بدست آورید.

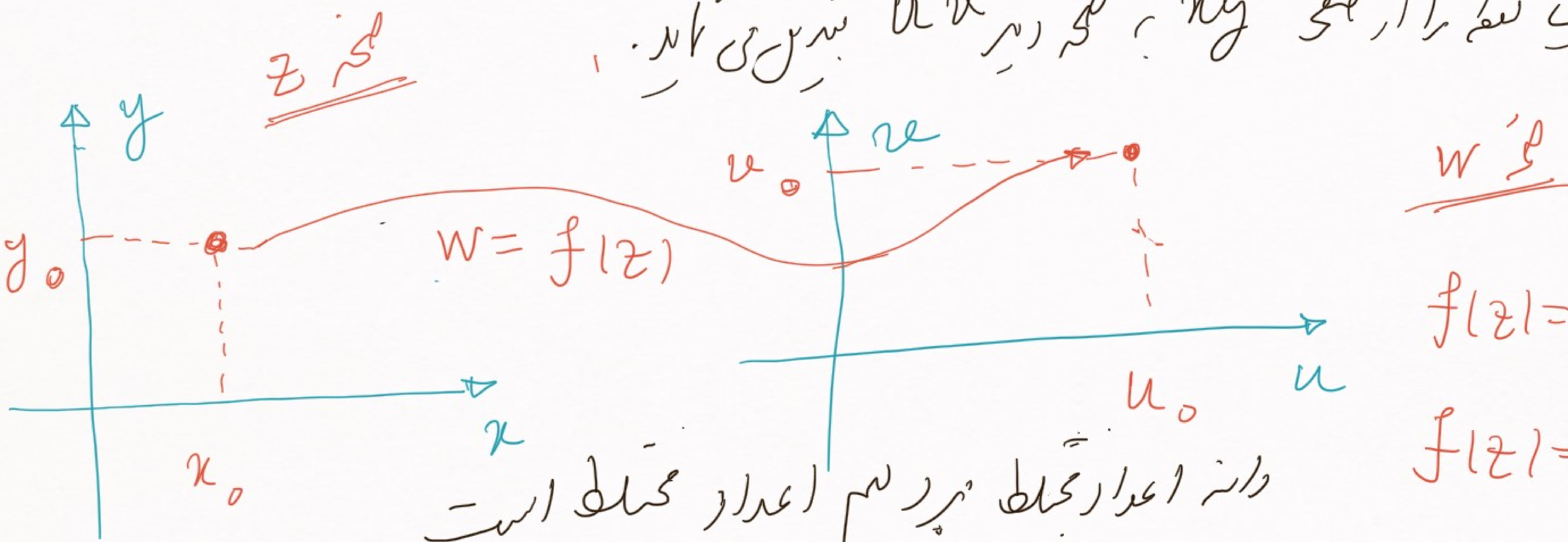
الف- $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$

ب- $z^2 + (\bar{z})^2 = 2$

ج- $|z - 2j + 3| = 2$

تمرین ۳- ریشه های پنجم عدد یک را پیدا نمائید.

تعریف تابع مختلط : یک نقطه را از صفحه xy به صفحه دیگر uv تبدیل می‌نماید.



دامنه اعداد مختلط، برد هم اعداد مختلط است.

$$f(z)=u+jv$$

$$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$$

مثال -

$$f(z)=z^2-2z+1$$

$$f(x,y)=(x+jy)^2-2(x+jy)+1=x^2-y^2+2jxy-2x-2jy+1$$

$$f(x,y)=(x^2-y^2-2x+1)+j(2xy-2y)\longrightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2-2x+1\\ v(x,y)=2xy-2y\end{cases}$$

تعریف حد: $\lim_{z \to 0} f(z) = w$; $\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta < 0 , |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

توجه: شرط لازم برای وجود حد در توابع دو متغیره این است که حد در کلیه مسیرهایی که نقطه z به z_0 میل میکند یکی باشد.

قضایای حد: حد مجموع برابر مجموع حدود است - حد حاصلضرب - حد حاصل تقسیم (مخرج مخالف صفر)

تعریف پیوستگی یک تابع $f(z)$: اگر $f(z)$ در همسایگی نقطه z_0 تعریف شده باشد و داشته باشیم

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

($f(z)$ در z_0 معین باشد و حد وجود داشته باشد)

تعریف پیوستگی در یک ناحیه: اگر $f(z)$ در کلیه نقاط داخل ناحیه پیوسته باشد.

مثال:

1- $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ در $z=0$ پیوسته نیست چون $f(0)$ معین نیست.

2- $f(z) = \begin{cases} \sin\frac{1}{z} , & z \neq 0 \\ 1+2j ; & z=0 \end{cases}$ در $z=0$ تابع پیوسته نیست.

3- $f(z) = \begin{cases} 3z+1 ; & z \neq 0 \\ j ; & z=0 \end{cases}$ در $z=0$ تابع پیوسته نیست.

قضایای پیوستگی: اگر f و g در z_0 پیوسته باشند آنگاه

$f \pm g$ و $f \cdot g$ و f/g و $g(z_0) \neq 0$ در z_0 پیوسته باشند.

توجه: چندجمله‌ای f(z) در تمام نقاط پیوسته است. توابع کسری $\frac{P(z)}{Q(z)}$ در صورتی که P و Q چندجمله‌ای باشند در نقاطی که $Q(z) \neq 0$ پیوسته می‌باشند.

تعریف مشتق تابع:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

توجه: در تعریف مشتق حد توابع دو متغیره است.

مثال - مشتق $f(z) = z^2$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z^2} + \Delta z^2 + 2z\Delta z - \cancel{z^2}}{\Delta z} = \boxed{2z}$$

مثال: مشتق تابع $f(z)=|z|^2$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z})-|z|^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\cancel{|z|^2}+\Delta z\bar{z}+z\overline{\Delta z}+|\Delta z|^2-\cancel{|z|^2}}{\Delta z}=\lim_{z\to 0}\frac{\Delta z\bar{z}+z\overline{\Delta z}+|\Delta z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}$$

حال بررسی کنیم که آیا $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ وجود دارد؟

از دو مسیر مختلف حساب کنیم:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}-1, & \Delta x=0 \text{ و } \Delta y\to 0\\ 1, & \Delta x\to 0 \text{ و } \Delta y=0\end{cases}$$

ملاحظه شد که چون حدها در مسیرهای دلخواه برابر نشده است پس حد ندارد و مشتق وجود ندارد.