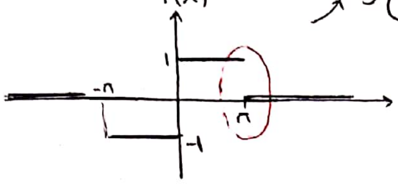
به نام خدا

پاسخ تمرین سری ۱ ریاضی مهندسی (سری فوریه)



تابع فرد

۱- انتگرال فوریه $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$، مقدار $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi x}{x}\sin\pi x$ ؟

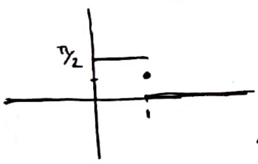
با توجه به این عبارت انتگرال سینوسی $f(x)$ را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=2\int_0 f(x)\sin\omega x\,dx=2\int_0^\pi 1\sin\omega x\,dx=\frac{-2}{\omega}\cos\omega x\Big]_0^\pi=\frac{-2}{\omega}(\cos\pi\omega-1)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\omega x\,d\omega \xrightarrow[\text{نقطه ناپیوستگی}]{x=\pi} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\pi\omega\,d\omega=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\pi\omega\,d\omega=\boxed{\frac{\pi}{4}} \xrightarrow[\text{x می‌ذاریم}]{\text{به جای }\omega} \int_0^\infty \frac{1-\cos\pi x}{x}\sin\pi x\,dx=\boxed{\pi/4}\ \checkmark$$



۲- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega=\begin{cases}\pi/2 & 0\le x<1\\ \pi/4 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$, $\underbrace{f(x)=f(-x)}_{\text{تابع زوج است}}\ -\infty<x<0$

نقطه ناپیوستگی

تابع زوج است $\Rightarrow A(\omega)\checkmark,\ B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=2\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos\omega x\,dx=\pi\times\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{\omega}\sin\omega}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\pi/2 & 0\le x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

$\underline{x=1}$ نقطه ناپیوستگی $\Rightarrow f(x)=\dfrac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\dfrac{0+\pi/2}{2}=\boxed{\pi/4}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\pi/2 & 0\le x<1\\ \pi/4 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

Scanned with CamScanner