جلسه ۱۰

دسته‌بندی نقاط تکین:

- $f(z)$ نقطه تکین z_0
  - غیرتنها
    - انباشته
    - تکین انشعابی
  - تنها
    - قطب
    - اساسی
    - رفع‌شدنی

رفع‌شدنی → نقطه z_0 را یک نقطه تکین برداشتنی می‌گویند هرگاه $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی نباشد ولی بتوان طوری آن را تعریف کرد که در z_0 تحلیلی شود برای مثال نقطه $z_0=0$ یک تکین برداشتنی برای $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ $(z\neq 0)$ خواهد بود چون اگر $g(z)$ را به صورت

$$g(z)=\begin{cases}\sin z/z, & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

تعریف: اگر z_0 یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد و بتوان m ای پیدا کرد که حاصل $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد آنگاه z_0 قطب مرتبه m ام تابع $f(z)$ است در غیر این صورت z_0 را تکین اساسی تابع $f(z)$ گوییم.

$$\lim_{z\to 0} z^7 \frac{(1-e^{z^3})}{z^7}=0$$

$$\lim_{z\to 0} z^5 (1-e^{z^3})/z^7=\lim_{z\to 0}(1-e^{z^3})/z^2=0/0 \xrightarrow{H} \lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{2z}=0$$

$$\lim z^4 (1-e^{z^3})/z^7=\lim_{z\to 0}\frac{(1-e^{z^3})}{z^3}=0 \xrightarrow{H} \lim\frac{-3z^2e^{z^3}}{3z^2}=-1\neq 0$$

قطب مرتبه چهارم است.

بسط لوران: اگر تابع $f(z)$ در نقطه z تحلیلی باشد حول این نقطه دارای بسط تیلور است. ولی اگر در این نقطه تحلیلی نباشد در اطراف آن نقطه دارای بسط تیلور نخواهد بود. اما چنانچه z یک نقطه تکین از نوع تنها برای تابع $f(z)$ باشد می‌توان تابع را حول این نقطه به بسطی که اصطلاحاً بسط لوران تابع نامیده می‌شود نوشت. ویژگی اساسی این بسط آن است که برخلاف بسط تیلور توان‌های منفی عبارت $(z-z_0)$ نیز در آن وجود دارد.

s.a.m

ویژگی های بسط لوران:

۱) بالاترین توان منفی عبارت در بسط لوران را مرتبه قطب می نامیم و اگر بالاترین توان منفی موجود نباشد به معنای آن است که z_0 یک تکین اساسی تابع خواهد بود.

۲) ضریب جمله $1/(z-z_0)$ در بسط لوران $\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=z_0}$ و به تعبیری مانده تابع در نقطه z_0 می گوییم

مثال: بسط توابع زیر را حول نقطه $z=0$ بنویسید:

$$e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \Rightarrow e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z\,1!} + \frac{1}{z^2\,2!} + \frac{1}{z^3\,3!} + \cdots$$

1) $f(z) = z^3 e^{1/z}$ $\quad z^3 e^{1/z} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z\,4!} + \cdots$

مانده تابع $1/4!$ است

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

2) $f(z) = (1-\cos z)/z^2$ $\quad -\cos z = -1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots \Rightarrow 1-\cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots$

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots$$

مانده صفر است + بسط تیلور است

3) $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z}$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{z^2}\times\frac{1}{2!} + \frac{1}{z^4}\times\frac{1}{4!} - \frac{1}{z^6}\times\frac{1}{6!} + \cdots$$

$$z^3\cos\frac{1}{z} = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{z}\times\frac{1}{4!} - \cdots$$

مانده تابع در یک نقطه:

تعریف: اگر z_0 یک نقطه تکین تابع $f(z)$ باشد هرگاه $f(z)$ در z_0 نقطه تکین داشته باشد دارای یک سری لوران حول z_0 است. در این صورت ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ یعنی b_1 را مانده تابع f در z_0 می نامیم و با علامت Res نشان می دهیم

روش اول محاسبه مانده تابع: اگر z_0 یک قطب اساسی باشد برای محاسبه مانده f در z_0 بهترین راه

نوشتن سری لوران است.

روش دوم: هرگاه z_0 یک قطب از مرتبه $m \geq 1$ برای تابع $f(z)$ باشد آنگاه، مانده برای تابع $f(z)$ در $z=z_0$ را علاوه بر استفاده از بسط لوران می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود.

$$\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

به طور خاص برای قطب مرتبه اول (قطب ساده) داریم

$$\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

در ضمن اگر z_0 قطب رفع شدنی باشد مانده $f(z)$ در این نقطه همواره برابر صفر است.

روش سوم: اگر z_0 یک نقطه تکین ساده برای تابع $f(z)=p(z)/q(z)$ باشد و $q'(z_0)\neq 0$ باشد آنگاه مقدار مانده برابر $\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{p(z)}{q'(z_0)}$ خواهد بود.

مثال ①: $f(z) = \frac{(2z+3)}{(z-1)(z^2+4)}$ در نقطه تکین $z=2i$ را بیابید؟

مثال ②: مانده تابع $f(z) = \frac{(\sin 3z)}{(2z+1)^4}$ در نقطه $z=-1/2$ را بیابید؟

مثال ③: مانده تابع $f(z) = \frac{\cos z}{z(e^z-1)}$ در نقطه تکین $z=2\pi i$ را بدست آورید. (روش سوم)

مثال ④: مانده تابع $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$ در نقطه $z=0$ را بدست آورید؟

1) $f(z) = \frac{(2z+3)}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} \Rightarrow \lim_{z\to 2i} \cancel{(z-2i)} \times \frac{2z+3}{(z-1)\cancel{(z-2i)}(z+2i)} = \frac{2(2i)+3}{(2i-1)(2i+2i)}$

$m=4$

2) $\lim_{z\to -1/2} \frac{1}{3!} \times \frac{d^3}{dz^3} \cancel{(z+\frac{1}{2})^4} \times \frac{1}{16} \times \frac{\sin 3z}{\cancel{(z+\frac{1}{2})^4}} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{16} \frac{d^3}{dz^3} \sin 3z = \lim_{z\to -1/2} \frac{1}{6\times 16} \times 3^3 (-$

$\frac{3^3}{6\times 16}\left(-\cos\frac{-3}{2}\right) = \frac{-3^3}{6\times 16} \cos\left(\frac{3}{2}\right)$

s.a.m

انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها: فرض کنید C یک منحنی بسته ساده در جهت مثبت باشد. برای محاسبه انتگرال $\int_C f(z)dz$ با این فرض که $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز تعداد متناهی نقطه تکین تحلیلی است به صورت زیر عمل می‌کنیم. نخست تمام نقاط تکین تابع را یافته و مانده تابع را در نقاط تکین که داخل ناحیه محدود به مرز C باشد محاسبه می‌کنیم. حال می‌توان ادعا کرد که با جمع مانده‌های محاسبه شده و ضرب آن در $2\pi i$ حاصل انتگرال مورد نظر محاسبه خواهد شد.

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\left(\sum \operatorname{Res} f(z)\right)$$

محاسبه برخی از انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط:

الف) در محاسبه انتگرال‌های به فرم $I=\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$ با توجه به اینکه داریم:

$$z=e^{i\theta} \quad \sin\theta=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i \ , \ \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \ , \ \sin\theta=\frac{z-1/z}{2i} \ , \ \cos\theta=\frac{z+1/z}{2}$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta=dz/iz$$

لذا انتگرال‌های مورد نظر به فرم زیر خواهد شد.

$$I=\int_{|z|=1} f(z)dz$$

که با استفاده از روش مانده قابل حل است.

ب) در محاسبه انتگرال‌های به فرم $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که در آن $Q(x)$ دو درجه از $P(x)$ بزرگتر و $Q(x)$ صفر حقیقی ندارد می‌توان نوشت.

$$I=\int_{Im z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

یعنی کافی است مانده تابع $\frac{P(z)}{Q(z)}$ در نقاط تکین که در نیم صفحه فوقانی واقع است را حساب نموده و با ضرب $2\pi i$ در مجموع این مانده‌ها جواب انتگرال مورد نظر را بیابیم.

$$\left\{2\pi i\left[\sum \operatorname{Res} f(z)\right]\right\}, \ Im z>0$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه $: \; I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin\theta}$

$z = e^{i\theta}$

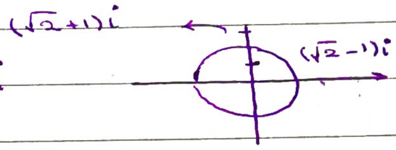
$dz = ie^{i\theta}d\theta \rightarrow dz = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = dz/iz$

$\sin\theta = \frac{z - 1/z}{2i} \quad , \quad I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{zi\left(\sqrt{2} - \frac{z - 1/z}{2i}\right)}$

$\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{2\sqrt{2}zi - z^2 + 1}$

$2\sqrt{2}zi - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 2\sqrt{2}zi - 1 = 0 \rightarrow \Delta = -4 \; , \; \sqrt{\Delta} = 2i$

$z = (2\sqrt{2}i \pm 2i)/2 = \sqrt{2}i \pm i = (\sqrt{2} \pm 1)i$



$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{(\sqrt{2}-1)i} f(z) \right)$

$\left(\operatorname{Res} f(z)\right)_{(\sqrt{2}-1)i} = \lim_{z \to (\sqrt{2}-1)i} (z - \sqrt{2}i + i) \frac{2}{-(z - \sqrt{2}i + i)(\sqrt{z} - \sqrt{2}i - i)} = -i$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه با انتگرال $: \; I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((2x^2+1)dx\right) / (x^2+1)(x^2+4)$

$I = \int_{\operatorname{Im} z > 0} \frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$

$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$

$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i$

$\operatorname{Res}_{z=i} \left(\frac{2z^2+1}{2z(z^2+4) + 2z(z^2+1)} \right) = \frac{-2+1}{2i(-1+4) + 2i(-1+1)} = -1/6i = \frac{1}{6}i$

$\operatorname{Res}_{z=2i} \left(\frac{2(2i)^2+1}{2(2i)[(2i)^2+4] + 2(2i)((2i)^2+1)} \right) = \frac{-7}{-12i} = -7/12\,i \Rightarrow 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - 7/12\,i \right)$

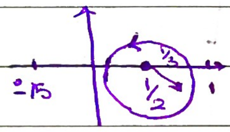
ج) در محاسبه انتگرال های حقیقی به فرم $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx$ ، $B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx$

که در آن $P(x)/Q(x)$ وضعیتی مانند ب دارند کافی است نخست انتگرال مختلط زیر را محاسبه کنیم.

$$I=\int_{Im\, z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz$$

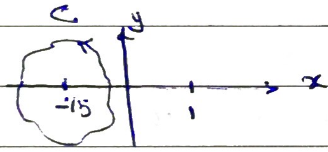
$A=Re(I)$ ، $B=Im(I)$

مثال ۱: مطلوبست محاسبه انتگرال مختلط $I=\oint_C\frac{e^z dz}{(z-1)^2(2z+1)}$ که در آن C دایره $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{3}$ می باشد.



$I=0$ چون در داخل C تکینی محصور نخواهد بود. $I=0$

۱-۱) همان مسئله قبلی وقتی C مرز ناحیه داده شده در شکل زیر باشد

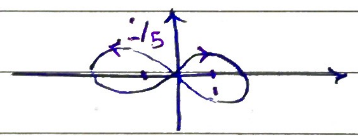


(۱-۱): $I=2\pi i\left(\operatorname{Res}f(z)\right)_{-\frac{1}{2}}=$

$$\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\cancel{(z+\tfrac{1}{2})}\frac{e^z}{2(z-1)^2\cancel{(z+\frac{1}{2})}}=\frac{2}{9e^{\frac{1}{2}}}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{2}{9\sqrt{e}}\right)$$

۱-۲) C مرز ناحیه داده شده در شکل زیر باشد



$$I=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)}\right]=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{2z+1}\right]$$

$$\lim_{z\to1}\frac{e^z(2z+1)-2e^z}{(2z+1)^2}=\frac{3e-2e}{3^2}=\frac{e}{9}$$

$-\frac{e}{9}$ چون جهت C ساعتگرد است.

$$I=2\pi i\left(\frac{2}{9\sqrt{e}}-\frac{e}{9}\right)$$

s.a.m