فصل ۱
جلسه دوم

اثبات مقادیر a_0 و a_n و b_n

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} f(x)\, dx$$

فرمول های اویلر

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{<2\pi>} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{<2\pi>} f(x) \sin nx\, dx$$

$a_0 = ?$

از طرفین از π تا π
انتگرال خواهیم گرفت

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0(\pi - (-\pi)) = a_0 \times 2\pi$$

$$\checkmark \longrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$a_n = ?$

طرفین را در $\cos mx$
ضرب کرده و سپس از یک دوره
انتگرال خواهیم گرفت

$$f(x) \cos mx = a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx}_{A_n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx}_{B_n} \Big]$$

$$\Rightarrow A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\, dx$$

$$A_n = \begin{cases} \pi & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m+n)x]\, dx = 0$$

s.a.m

$$\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_m A_m + a_{m+1} A_{m+1} + \dots = \pi a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \, dx$$

بطور خلاصه:

اگر $f(x)$ دارای دوره‌ی تناوب 2π و دارای سری فوریه باشد در این صورت:

$f(x) \to 2\pi \Rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$

$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$ که a_n و b_n و a_0 از فرمول‌های اولر بدست خواهند شد.

پس اگر $g(x)=f(\frac{2\pi}{T}x)$ باشد در این صورت $g(x)$ با دوره‌ی تناوب T متناوب است. لذا اگر

$g(x)$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد در این صورت:

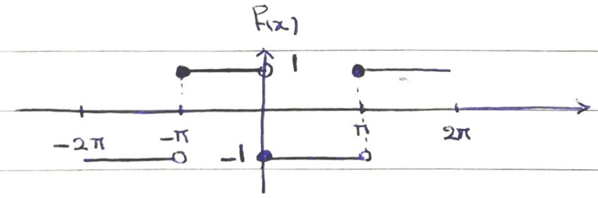
$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

مثال: سری فوریه توابع زیر را محاسبه کنید:

1) 

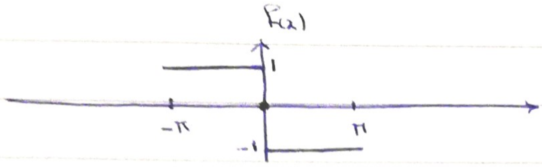
2) $f(x)=x \qquad (-\pi<x<\pi)$ — ضرایب مجهولات کسینوسی $f(x)=x$ ، $0<x<2\pi$ بسط فوریه را بیابید.

3) $f(x)=x^2 \qquad (-\pi<x<\pi)$

4) $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ x & 0<x<\pi \end{cases}$

5) (برگ ۶۹) بسط فوریه تابع دلتای دیراک در فاصله $-\pi<x<\pi$ را بدست آورید.

1)



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nx \quad , \quad T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{+a} 1\,dx + \int_0^{\pi} -1\,dx\right] = \frac{1}{2\pi}[\pi - \pi] = 0$$

حدس میزدم

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi} 1x\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} -1x\cos nx\,dx\right] = 0$$

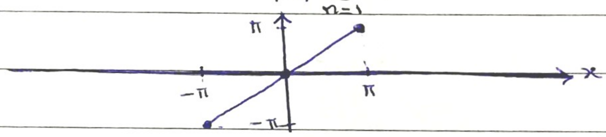
حدس میزدم

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 1\times\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} -1\times\sin nx\,dx\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(\cos 0 - \cos n\pi) + \frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos 0)\right] = \frac{2}{n}((-1)^n - 1)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n\sin\frac{2\pi}{T}nx = 0 + 0 + \quad f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}((-1)^n - 1)\sin nx$$

2) $f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = 0$$

تابع فرد

مساحت زیر خط نمودار صفر است

$$b_n = \frac{2}{T}\int f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi)$$

$$\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}$$

انتگرال	مشتق
$\sin nx$	x +
$-\frac{1}{n}\cos nx$	1 −
$-\frac{1}{n^2}\sin nx$	0

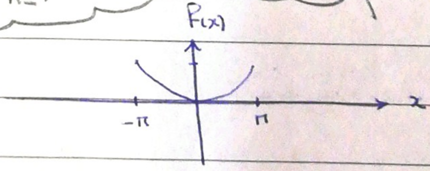
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \text{- - - - - - - -} = 0$$

انتگرال	مشتق
$\cos nx$	x +
$\frac{1}{n}\sin nx$	1 −
$-\frac{1}{n^2}\cos nx$	0

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

3) $f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}\times 2\right) = \frac{2\pi^3}{18\pi} = \frac{1}{9}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right) + \left(+\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right) =$$

$$\left(\frac{4\pi}{\ldots}\cos n\pi\right.$$

انتگرال	مشتق
$\cos nx$	x^2 +
$\frac{1}{n}\sin nx$	$2x$ −
$-\frac{1}{n^2}\cos nx$	2 +
$-\frac{1}{\ldots}\sin nx$	

s.a.m

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx =$$

مشتق	انتگرال
x^2	$\sin nx$
$2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$+\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$b_n \Rightarrow -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n^2}\sin n\pi + \frac{2}{n^3}\cos n\pi\right) - \left(-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n^2}\sin n\pi + \frac{2}{n^3}\cos n\pi\right) = 0$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx = \frac{\pi^2}{9} + \sum_{n=1}\left(\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi\right)\cos nx + 0\times\sin nx$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n \cos nx$$

۲) $$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

مشتق	انتگرال
x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

مشتق	انتگرال
x	$\sin x$
1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right] = -\frac{1}{n}\cos n\pi$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}(\cos n\pi - 1)\cos nx + \left(-\frac{1}{n}\cos n\pi\right)\sin nx\right)$$

خاصیت تابع دلتای دیراک

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

مثال: بسط فوریه تابع دلتای دیراک در فاصله $-\pi < x < \pi$ را بدست آورید:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\cos 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = 0$$

جلسه ۳
جلسه دوم

مثال: سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ را بدست آورید. (سراسری ۷۹)

$$f(x)=4\sin x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=2\sin x(1+\cos 2x)=2\sin x+2\sin x\cos 2x$$

$$f(x)=2\sin x+2\left[\sin(x+2x)+\sin(x-2x)\right]=2\sin x+2\left[\sin 3x-\sin x\right]=\sin x+2\sin 3x$$

$b_1=1 \qquad b_3=2$

مثال: در بسط به سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi<x<0\\ \cos x & 0<x<\pi\end{cases}$ مقدار a_1 کدام است.

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{<T>}f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx \Rightarrow a_1=\frac{2}{2\pi}\int_{<T>}f(x)\cos x\,dx$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos x\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos x\cos x\,dx\right]=$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_{-\pi}^{0}}+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\right]=\frac{1}{2\pi}[\pi]=\frac{1}{2}$$

مثال: هرگاه $f(x)=x+\sin x$ و $-\pi<x<\pi$، در بسط فوریه مثلثاتی f ضریب $\sin x$ برابر با چه مقداری خواهد بود؟ (سراسری ۸۰)

$T=2\pi$

$$b_1=\frac{2}{T}\int_{<T>}f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx$$

مشتق	انتگرال
x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$b_1=\left(-x\cos x+\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\frac{1}{\pi}=-\left[\pi\cos\pi+(+\pi)\cos\pi\right]\times\frac{1}{\pi}=(-2\pi\cos\pi)\times\frac{1}{\pi}=2\pi\times\frac{1}{\pi}=2$$

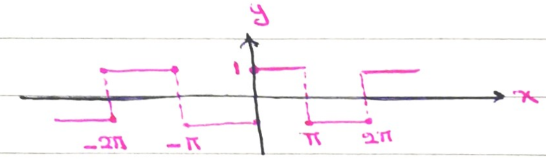
$=2+1=3$ ✓

«ریاضیات مهندسی»

جلسه دوم

تمرینات جلسه دوم:

۱) مقدار ثابت سری فوریه تابع زیر را بدست آورید.



۲) ضریب $\sin 2x$ در بسط نیم سری فوریه $f(x)=x/4$ ($-\pi<x<\pi$) را بدست آورید. (مکانیک ۷۸)

۳) ثابت سری فوریه $f(x)=|\sin x|$ را بدست آورید.

۴) در بسط نیم سری فوریه $f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi<x<0\\ \cos x & 0<x<\pi\end{cases}$ مقدار a_0 را بدست آورید (هسته ای ۸۰)

۵) هرگاه $f(x)=x+\sin x$ و $-\pi<x<\pi$ در بسط فوریه مثلثاتی آن ضریب جمله $\sin x$ برابر با چه مقداری است؟ (مواد ۸۰)

۶) مقدار a_2 در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x^2 & 0<x<\pi\end{cases}$ کدام است؟ (هسته ای آزاد ۸۰)

۷) سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ را بدست آورید. (مکانیک ۷۹)

۸) اگر $f(x)=(\sin x+\cos 2x)^2$ دارای دوره تناوب 2π باشد مقدار a_0 در بسط فوریه تابع مزبور چقدر است؟

۹) در بسط فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x+\sin^2 x+4\cos^4 x$ ، $p=2\pi$ حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ برابر است با: (آزمایشی پایه ۷۷)

۱۰) سری فوریه $f(x)=(-1)^{[x]}$ عبارت از چه مقداری خواهد بود؟

۱۱) هرگاه $0<x<2\pi$ و $f(x)=x^2$ باشد حاصل $\frac{a_n}{b_n}$ را بدست آورید؟

۱۲) بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ در فاصله $-\pi<t<\pi$ را بدست آورید؟

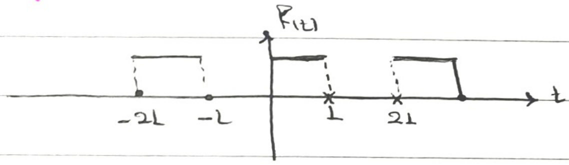
نکته: خاصیت تابع دلتای دیراک خواهیم داشت: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$

۱۳) چنانچه $f(x)=\begin{cases}0 & -3<x<0\\ \sin\pi x/3 & 0<x<3\end{cases}$ باشد، بسط فوریه تابع $f(x)$ را محاسبه کنید؟ (برق ۸۰)

۱۴) با توجه به سری فوریه $f(x)=e^x$ $[-\pi,+\pi]$ حاصل سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}$

را محاسبه بنمایید؟ (آزمایشی پارسه ۷۹) (قضیه دیریکله) (حل جلسه سوم)

۱۵) از بسط فوریه تابع زیر مقدار $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ را محاسبه بنمایید؟ (از ۸۵) قضیه دیریکله (حل جلسه سوم)



۱۶) داریم $\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 x\,dx = 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)^2}{(n^2-1)^2}$ آنگاه مقدار عبارت

$\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\cdots$ را بدست آورید؟ (برق ۷۱)

۱۷) هرگاه $(-\pi,\pi)$ $f(x)=x^2$ مفروض باشد در اینصورت با توجه $f(x+2\pi)=f(x)$

به سری فوریه این تابع حاصل سری نامتناهی $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ را بدست آورید؟ (مواد ۷۸)

۱۸) سری فوریه تابع $f(x)=|\sin\pi x|$ را بدست آورید؟

۱۹) با توجه به تابع $f(t)$ زیر سری سینوسی و اینکه $f(t+2\pi)=f(t)$ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\alpha)\sin n\alpha}{n}\Big/2$

کدام است؟