ادامه نگاشت

۷) نگاشت خطی کسری

$$w=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a(z+d/c)-\frac{db}{c}+b}{c(z+d/c)}=a/c-\frac{ad/c-b}{c}\cdot\frac{1}{z+d/c}=\underbrace{a/c}_{k_1}+\overbrace{\frac{bc-ad}{c}}^{k_2}\cdot\frac{1}{\underbrace{z+d/c}_{z'}}=k_1+k_2\frac{1}{z'}$$

الف) $bc-cd=0 \longleftarrow w=\frac{a}{c}$ یعنی تمام نقاط صفحه z به نقطه $w=\frac{a}{c}$ می‌نگارد.

ب) $bc-cd\neq 0 \longleftarrow$ حاصل نگاشت متوالی $w_1=cz+d$ و $w_2=\frac{1}{w_1}$ و $w_3=k_1+k_2w_2$ می‌باشد.

توجه ۱- تبدیل خطی کسری که به نقطه z_1 و z_2 و z_3 را به سه نقطه مختلف و متمایز w_1 و w_2 و w_3 می‌نگارد بصورت:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

است.

یکی از z ها یا w ها می‌تواند بینهایت باشد.

مثال - تبدیلات خطی کسری بیابید که

$$\begin{cases} z_1 = \infty \\ z_2 = -1 \\ z_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{w=f(z)=?} \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = -j \\ w_3 = j \end{cases}$$

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \Longrightarrow$$

$$\frac{(w-1)(-j-j)}{(w-j)(-j-1)} = \frac{(\cancel{z}-\infty)(-1-1)}{(z-1)(-\cancel{1}-\infty)} \Longrightarrow \frac{(w-1)(-2j)}{(w-j)(-j-1)} = \frac{-2}{z-1} \Longrightarrow \frac{w-1}{w-j} = \frac{j+1}{(z-1)}$$

$\Longrightarrow w$ پیدا کنید.

توجه ۲- تبدیلات خطی کسری وارون پذیر است.

توجه ۳- در تبدیلات خطی کسری دارای دو نقطه ثابت است (یعنی نقطه ای که z_0 به z_0 می نگارد)

۸) نگاشت $W = \cos z$

$$W = \cos z = \cos(x+jy) = \underbrace{\cos x \cosh y}_{u} - j\underbrace{\sin x \sinh y}_{v}$$

بنابراین مانند نگاشت شبیه سینوس حل می‌شود.

تذکر - می‌توان با توجه $W = \cos z = \sin(z + \pi/2)$ از نگاشت سینوس و انتقال استفاده نمود.

توجه مهم =

$x = a$, $a \neq k\pi/2 \implies \begin{cases} u = \cos a \cosh y \\ v = -\sin a \sinh y \end{cases} \implies \dfrac{u^2}{\cos^2 a} - \dfrac{v^2}{\sin^2 a} = 1$

$\cos a > 0$ شاخه سمت راست

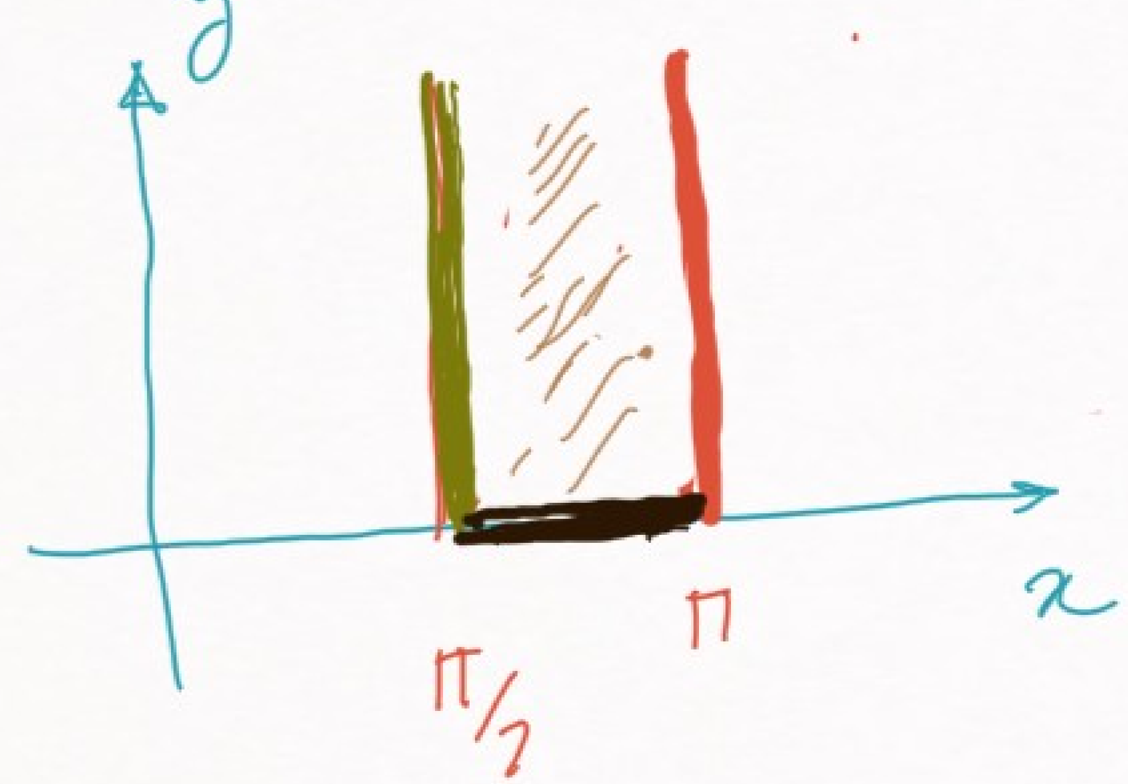
$\cos a < 0$ شاخه سمت چپ هذلولی تابع تبدیل است.

$y = a$, $a \neq 0 \implies \dfrac{u^2}{\cosh^2 a} + \dfrac{v^2}{\sinh^2 a} = 1$

تمرین - برای حالت‌های $x = k\pi/2$ ، $y = 0$ صورت‌ها بررسی شوند.

مثال- نگاشت ناحیه مقابل تحت $w = \cos z$

نگاشت مرزها را بدست آوریم:

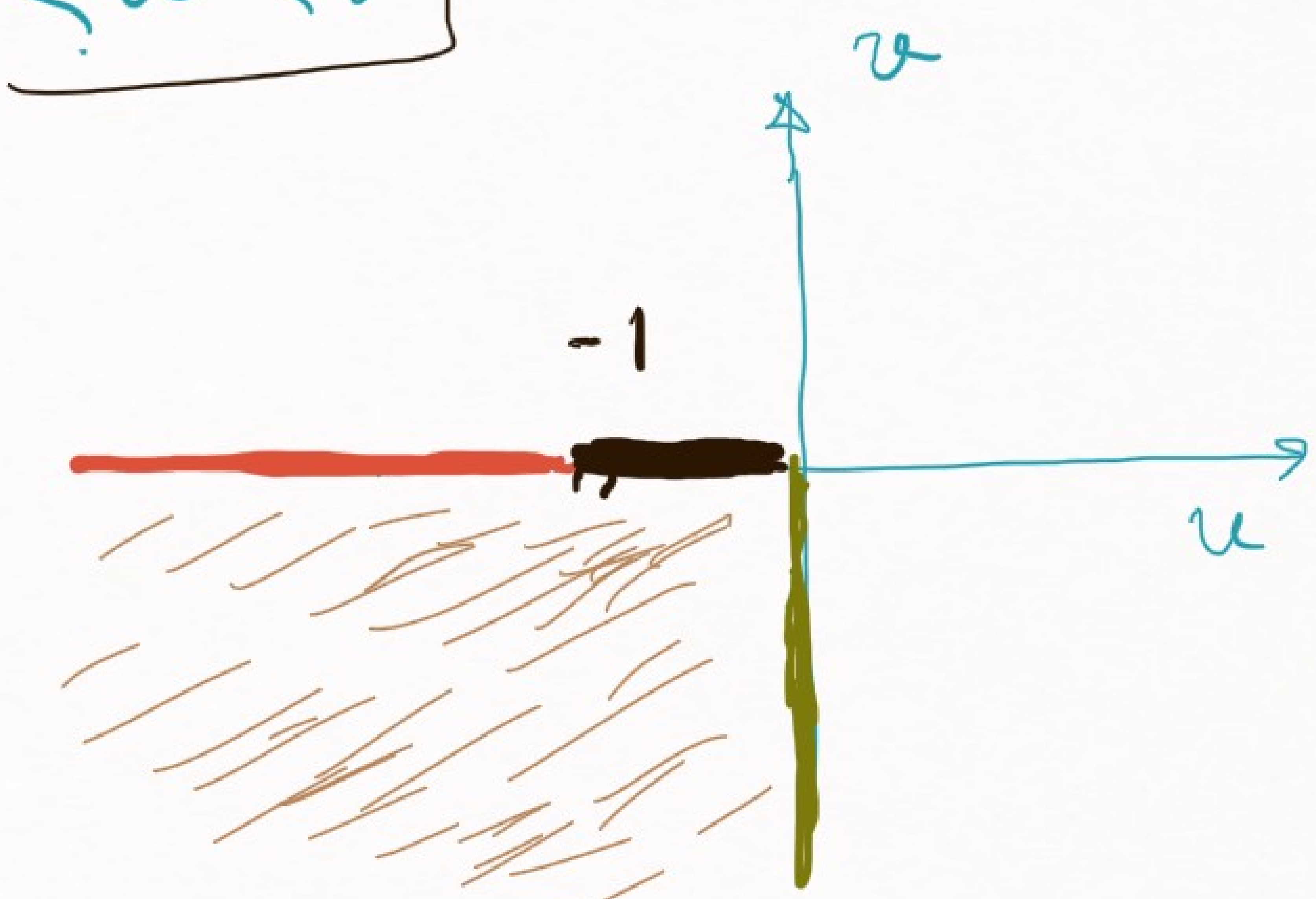


$$x = \frac{\pi}{2},\ y>0 \Longrightarrow \begin{cases} u = \cos\frac{\pi}{2}\cosh y = 0 \\ v = -\sin\frac{\pi}{2}\sinh y = -\sinh y \Longrightarrow \boxed{v<0} \end{cases}$$

$$x = \pi,\ y>0 \Longrightarrow \begin{cases} u = \cos\pi \cosh y = -\cosh y \\ v = -\sin\pi \sinh y = 0 \end{cases}$$

چون $\cosh y \geq 1 \Longrightarrow -\cosh y < -1 \Longrightarrow \boxed{u<-1}$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi,\ y=0 \Longrightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{-1 < u < 0}$$



۹) نگاشت های $w=\sinh z$ و $w=\cosh z$ این نگاشت ها نیز شبیه نگاشت سینوس و کسینوس عمل می‌کنند

تست - تصویر خط $y=\frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w=\cosh z$ کدام است؟

الف - $u^2-v^2=1$ ب - $v^2-u^2=1$ ج - $u^2-v^2=1/2$ د - $v^2-u^2=1/2$

(راه حل؟)

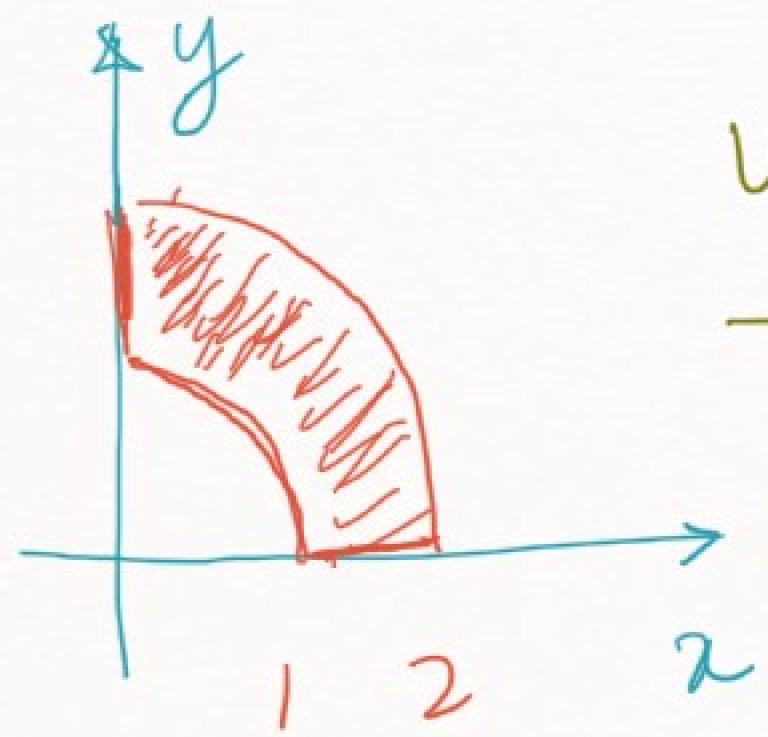
$$w=\cosh z=\cosh(x+jy)=\underbrace{\cosh x\cos y}_{u}+j\underbrace{\sinh x\sin y}_{v}$$

$$y=\pi/4 \Longrightarrow \begin{cases} u=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh x \\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh x \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } x} 2u^2-2v^2=1 \Longrightarrow u^2-v^2=1/2$$

۱۰) نگاشت توسط $w = \ln z$

مثال:

$$w = \ln z = \ln r + j\theta \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \quad \text{،} \quad -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

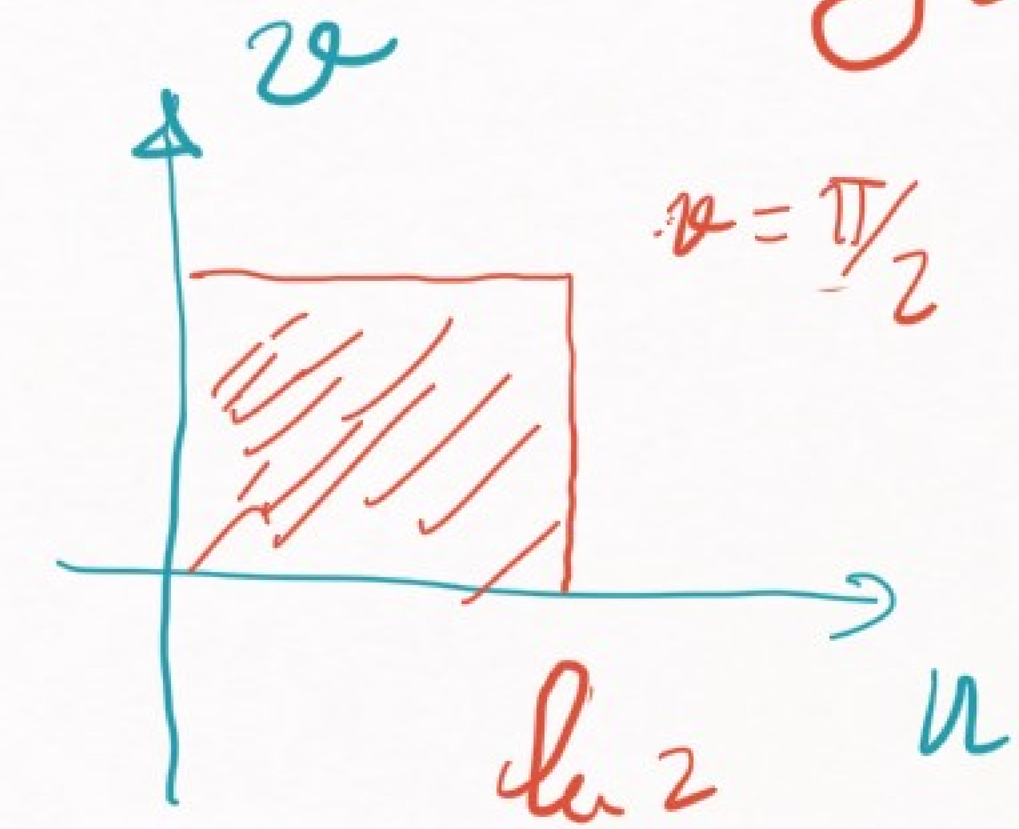


$\xrightarrow{w = \ln z}$

$$1 < r < 2 \Longrightarrow 0 < \ln r < \ln 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{0 < u < \ln 2}$$

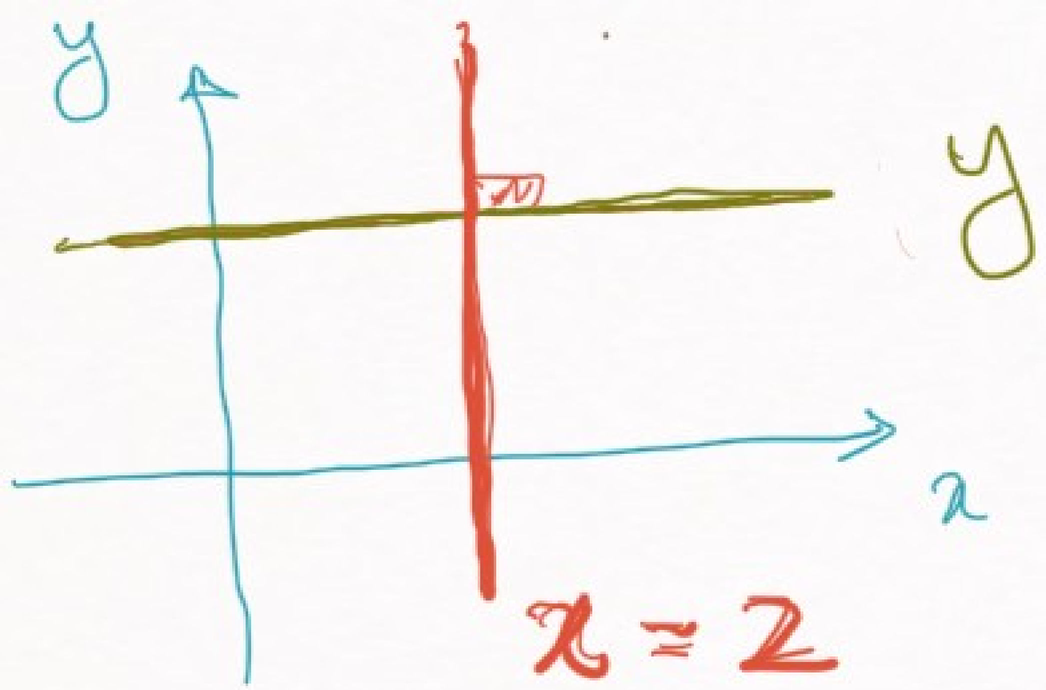
$$0 < \theta < \pi/2 \Longrightarrow \boxed{0 < v < \pi/2}$$



تعریف نگاشت همدیس: هرگاه اندازه و جهت زاویه بین دو منحنی بعد از نگاشت ثابت باند نگاشت $f(z)$ را همدیس گوییم.

نکته: تابع تحلیلی $f(z)$ به جز نقاط $f'(z_0) = 0$ همدیس می باشد.

تبدیل $\underline{w=f(z)=z^2}$ و نگاره سهمی



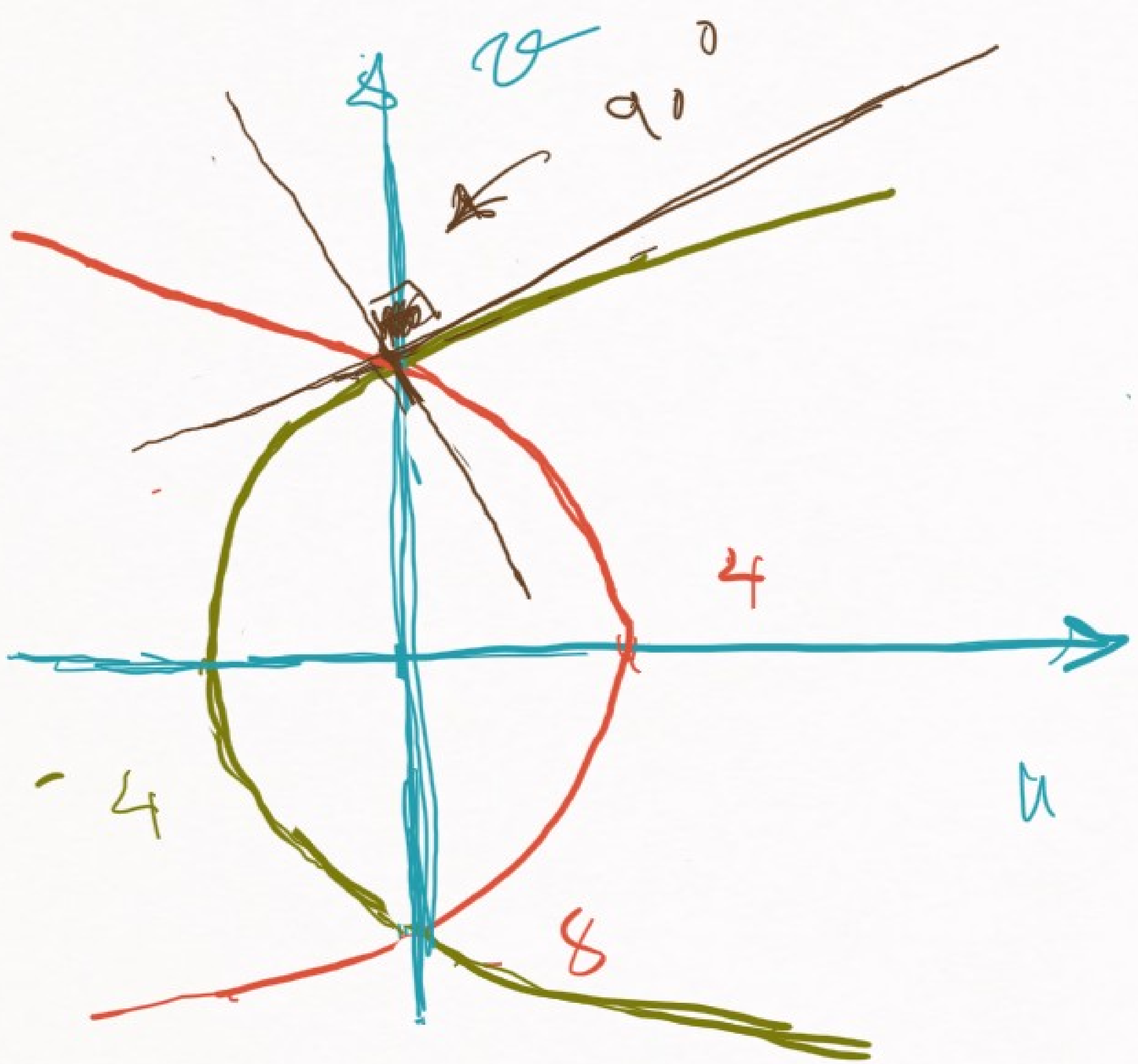
$$\Longrightarrow w=f(z)=z^2=x^2-y^2+2jxy$$

$$u=x^2-y^2\ ,\quad v=2xy$$

$$x=2 \longrightarrow \begin{cases} u=4-y^2 \\ v=4y \end{cases} \Longrightarrow u=4-\left(\frac{v}{4}\right)^2$$

یک سهمی افقی :

$$y=2 \longrightarrow \begin{cases} u=x^2-4 \\ v=4x \end{cases} \longrightarrow u=\left(\frac{v}{4}\right)^2-4$$



ملاحظه می‌شود که زاویه بین دو منحنی بعد از نگاشت یعنی دو سهمی افقی

نیز همان 90° باقی مانده است.

سری ها :

الف- سری تیلور اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی باشد، نزدیک $f(z)$ را بر حسب $|z-z_0|$
به صورت زیر بسط داد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ب- سری مک‌لورن : اگر $z_0=0$ باشد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

* بسط‌ها معروف و متداول :

۱- e^z : $\Leftarrow$ $|z|<\infty$

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

۲- $\cos z$: $\Leftarrow$ $|z|<\infty$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad , |z| < \infty$$
$\Leftarrow$ 3- $\sin z$

$$\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \quad , |z| < \infty$$
$\leftarrow$ 4- $\sinh z$

$$\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , |z| < \infty$$
$\leftarrow$ 5- $\cosh z$

* 6- سری هندسی (تصاعد هندسی):

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \quad , |z| < 1$$
(داخل دایره)

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad , |z| < 1$$

خارج دایره

* توجه: برای $|z| > 1 \leftarrow$

$$|z| > 1 \Rightarrow z^{-1} < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-z} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \quad , |z| > 1$$

* روش‌های بدست آوردن سری

- جایگذاری
- دیفرانسیل‌گیری، انتگرال‌گیری
- استفاده از سری هندسی
- تجزیه به کسرهای جزئی

مثال - بسط تابع $f(z)=\dfrac{1}{1+z^3}$ حول نقطه $z=0$ را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{1-(-z^3)}=1+(-z^3)+(-z^3)^2+\cdots \quad , |z|<1$$

مثال - بسط $f(z)=\ln(1-z)$ حول نقطه $z=0$

$$f(z)=\ln(1-z) \Rightarrow f'(z)=\frac{-1}{1-z}=-\frac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+z^3+\cdots)$$

$$f(z)=\int f'(z)\,dz=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)$$

مثال - الف

$f(z) = \dfrac{10}{4z-3}$ حول $z=2$ بنویسید

در مخرج فاکتور $z-2$ می‌سازیم

$$f(z) = \frac{10}{4z-3} = \frac{10}{4z-8+8-3} = \frac{10}{4(z-2)+5}$$

$$f(z) = \frac{2}{\frac{4}{5}(z-2)+1} = 2\left[\frac{1}{1+\underbrace{\tfrac{4}{5}(z-2)}_{Z\ \text{جدید}}}\right] = 2\left[\frac{1}{1+Z}\right] = 2\left[1-Z+Z^2+\dots\right]$$

جدید

ناحیه همگرایی

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{5}(z-2)\right)^n \quad , \quad \left|\frac{4}{5}(z-2)\right|<1 \Longrightarrow |z-2|<\frac{5}{4}$$

بطور کلی!

حول

$$f(z) = \frac{1}{az+b} \quad \text{و} \quad z=c \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{az+ac-ac+b} = \frac{1}{a(z-c)+ac+b}$$

$$f(z) = \frac{1/ac+b}{\left(\frac{a}{ac+b}\right)(z-c)+1} = \dots$$

مثال $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ حل نقط

$z=2$

$z=4$

$$f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}\;;\;\begin{cases}B=1\\ A=(z-2)f(z)\Big|_{z=2}=-1\end{cases}$$

حول

$$\underline{\underline{z=2}}\Rightarrow \frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2-1}=\frac{1}{(z-2)-1}\Rightarrow\frac{1}{z-3}=\frac{-1}{1-(z-2)}=-\left[1+(z-2)^1+\cdots\right]$$

$$f(z)=A(z-2)^{-1}-B\left[1+(z-2)^1+(z-2)^2+\cdots\right],\qquad |z-2|<1$$

$$z=4\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{A}{z-2}=\dfrac{A}{(z-4)+4-2}=\dfrac{A}{z-4+2}=\dfrac{A}{2\left[1+\frac{(z-4)}{2}\right]}=\cdots\\[2ex] \dfrac{B}{z-3}=\dfrac{B}{(z-4)+4-3}=\dfrac{B}{z-4+1}=\dfrac{B}{1+(z-4)}=\cdots\end{cases}$$

تعریف نقطه منفرد (تکین): نقطه‌ای است که $f(z)$ در آن تحلیلی نیست ولی در همسایگی به شعاع ε و $\varepsilon>0$ تحلیلی است.

مثال- در $f(z)=\frac{1}{z}$ نقطه $z=0$ تکین یا منفرد می‌باشد.

مثال- $f(z)=\ln z$ نقطه تکین یا منفرد ندارد چون در مبدأ و بخش منفی محور حقیقی غیر تحلیلی است لذا نمی‌توان همسایگی حول این نقاط پیدا نمود که در تمام نقاط داخل همسایگی تحلیلی باشد.

مثال- $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)}$ نقاط $z=-2$ و $z=+2$ تکین یا منفرد می‌باشند.

توجه: معمولاً در بسیاری از توابعی که با آن سروکار داریم نقاط تکین همان ریشه‌های مخرج (قطب) ها می‌باشند.

نتیجه مهم - نقطه تکین را اگر ریشه مخرج از درجه محدود باشد در این صورت قطب از آن درجه خواهد بود.

مثلا $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^4}$ دارای قطب مرتبه چهارم است.

* و اگر ریشه مخرج از درجه بی نهایت باشد در این صورت منفرد اساسی گوییم. مثل: $f(z)=e^{\frac{1}{z-3}}$

چون قطب از درجه ∞ می باشد.

$$f(z)=1+\frac{1}{(z-3)}+\frac{1}{2!(z-3)^2}+\frac{1}{3!(z-3)^3}+\cdots$$

* اگر ریشه مخرج با ریشه صورت (یعنی ریشه صورت صفر می کنیم) حذف شود نقطه برداشتنی یا حذف شدنی گوییم.

مثل $f(z)=\dfrac{z-3}{(z^2-9)}$ که نقطه $z=3$ برداشتنی و $z=-3$ قطب مرتبه اول.