حل چند سوال در مسئله معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی و بیان یک نکته کلیدی :

سوال ۱-

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0) = 2\sin x \quad , \quad 0<x<\pi \\ u(0,t)=0 \quad , \quad u(\pi,t)=0 \quad , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = ?$

حل -

$$u(x,t) = f(x)g(t) \Longrightarrow f(x)g''(t) = f''(x)g(t) \Longrightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} g''(t) + \lambda^2 g(t) = 0 \longrightarrow g(t) = (A_1 \cos\lambda t + B_1 \sin\lambda t) \\ f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \longrightarrow f(x) = (A_2 \cos\lambda x + B_2 \sin\lambda x) \end{cases}$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(0,0) = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \longrightarrow A_2 = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \longrightarrow f(\pi) = 0 \longrightarrow B_2 \sin\lambda\pi = 0 \Longrightarrow \lambda\pi = n\pi \end{cases}$$

$$B_2 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{\lambda = n}$$

$$\Longrightarrow f(x) = B_2 \sin nx$$

تابع ویژه

بنابراین پاسخ کلی :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \overset{n}{\cancel{\lambda}}\overset{1}{\cancel{c}}t + B_n \sin \underset{n}{\cancel{\lambda}}\underset{1}{\cancel{c}}t\right)\sin \lambda x}$$

اعمال شرایط اولیه

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 0 \Longrightarrow A_n = 0 \\ u_t(x,0) = 2\sin x \Longrightarrow u_t(x,\overset{0}{\cancel{t}}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos n\overset{0}{\cancel{t}} \sin nx \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u_t(x,0) = 2\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{nB_n}\sin nx \Longrightarrow \begin{cases} B_1 = 2 \\ B_n = 0, \; n = 1 \end{cases}$$

فقط یک ضریب دارد. از مقایسه دو طرف تابع درست شد

$$\Longrightarrow \boxed{u(x,t) = 2\sin t \sin x}$$

مثال ۲-

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad ; \quad 0 < x < \pi \;, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 \;, \quad u_t(x,0) = 0 \;, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = \pi \quad ; \quad u(\pi,t) = 0 \;, \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad , \; u(x,t) = ?$$

$$\Longrightarrow \quad l = \pi \;, \quad c = 1$$

با توجه به شرایط مرزی (روی u می باشد نه مشتق u) و نتایج قبل

تابع ویژه $\boxed{\sin \lambda x}$ و مقدار ویژه $\boxed{\lambda = \frac{n\pi}{l}}$

این تابع ویژه در شرایط مرزی صدق می کند.

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \lambda c t + B_n \sin \cancelto{\pi}{\lambda} c t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

اعمال شرایط اولیه

$$\Longrightarrow \quad u_t(x,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_n = 0$$

شرط اولیه $\Rightarrow u(x,0)=1 \Longrightarrow 1=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \Longrightarrow$ A_n ضرایب سری سینوسی تابع $f(x)=1$ می‌باشد که $l=\pi$ است

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\times\sin nx\,dx=\frac{-2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left[1-\cos n\pi\right]=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n} & \text{،} \quad n \text{ فرد}\\ 0 & \text{؛} \quad n \text{ زوج}\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\cos(2n-1)t\,\sin(2n-1)x}$$

مثال ۳- فرض کنید یک میله به طول $10\,cm$ که دو سر آن در دمای صفر است و در لحظه اولیه دما $u(x,0)=x(10-x)$ می باشد. منظور دما در وسط میله را بدست آورید. $c^2=1$

$l=10\,cm$

$u_t = u_{xx}$ معادله دما

$u(0,t)=u(10,t)=0$

$u(x,0)=x(10-x)$

$u(5,t)=?$

$$u(x,t)=f(x)g(t) \Longrightarrow f(x)g'(t)=f''(x)g(t)$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=-\lambda^2 \longrightarrow \begin{cases} f(x)=A_1\cos\lambda x + B_1\sin\lambda x \\ g(t)=A_2 e^{-\lambda^2 t} \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی؛ $f(x)$ تابع ویژه و مقدار ویژه می شود

$$f(0)=0 \longrightarrow A_1=0$$

$$f(l)=f(10)=0 \Longrightarrow B_1\neq 0,\ \lambda=\frac{n\pi}{l}=\frac{n\pi}{10}$$

$$f(x)=B\sin\frac{n\pi}{10}x$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-\lambda^2 c^2 t}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{10}x\, e^{-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 t}$$

اعمال شرط اولیه $u(x,0)=x(10-x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{10}x = x(10-x)$

سینوس

ضرایب سری فوریه سینوسی

$$\longrightarrow A_n=\frac{2}{10}\int_0^{10} x(10-x)\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx = \dots = \begin{cases} 0 , & n \text{ زوج} \\ \dfrac{800}{n^3\pi^3} , & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n-1)^3\pi^3}\, e^{-\frac{(2n-1)^2}{100}t}\cdot \sin\left(\frac{2n-1}{10}\right)\pi x$$

5

5

تمرین ۴ـ معادله گرما

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} , & 0 < x < \pi , \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 , \quad u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

* توجه شرایط مرزی روی مشتق u است

$u(x,0) = h(x)$, $u(x,t) = ?$

$f(x) = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x \Longrightarrow f'(x) = -A_1 \lambda \sin \lambda x + B_1 \lambda \cos \lambda x$

شرایط مرزی

ش

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \longrightarrow 0 + B\lambda = 0 \Longrightarrow B = 0 \Longrightarrow f(x) = A \cos \lambda x \\ f'(\pi) = 0 \longrightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda \pi = 0 , \quad A_1 \neq 0 \Longrightarrow \sin \lambda \pi = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = n} \end{cases}$$

شرط اول

شرط دوم

زمان $g'(t) + c^2 \lambda^2 g(t) = 0 \Longrightarrow g(t) = A_2 e^{-c^2 \lambda^2 t}$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda^2 c^2 t} \cos \lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 a^2 t} \cos nx$$

از صفر شروع می‌شود.

حالا به A_n شرط اولیه را اعمال می‌کنیم.

$$u(x,0) = h(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx = h(x) \Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \cos nx \, dx$$

ضرایب سری فوریه کسینوسی تابع $h(x)$

روش عملی حل معادله موج یا گرما در حالت غیرهمگن :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + H(x,t)$$

توجه - اگر شرایط مرزی صفر نبود ابتدا توسط روش گفته شده در درس گذشته شرایط مرزی را صفری می‌کنیم

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = h(x) \\ u_t(x,0) = k(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = ?$$

تابع ویژه

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(t)\, F(x)$$

$n=0$ ← فقط حالت ②

① $\sin \frac{n\pi}{l} x$ → $\lambda = \frac{n\pi}{l}$

② $\cos \frac{n\pi}{l} x$

③ $\sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x$

④ $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x$ → $\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$

توجه حالت‌های فوق برای شرایط مرزی مختلف زیر است :

① $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}$, ③ $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}$, ④ $\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + H(x,t) \\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(t) \sin \lambda x \end{cases}$$

حال تابع $g(t)$ پاسخ $u(x,t)$ را در معادله جای گذاری میکنیم:

مشابه حالت قبل توابع ویژه مثلثی $\left(\sin \frac{n\pi}{l} x\right)$ داریم:

بسط سری فوریه سینوسی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[g''(t) + c^2 \lambda^2 g(t)\right] \sin \lambda x = H(x,t) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda x \implies$$

ضرایب سری فوریه

$$g''(t) + c^2 \lambda^2 g(t) \equiv \underset{H(x,t)}{\text{ضرایب سری فوریه}} = a_n = \frac{2}{l} \int_0^l H(x,t) \sin \lambda x \, dx = f_1(t)$$

$$\implies g''(t) + c^2 \lambda^2 g(t) = f_1(t) \implies \begin{cases} g_h(t) = A_1 \cos c\lambda t + B_2 \sin c\lambda t \\ g_p(t) = f_1(t) \text{ لذا } \equiv M(t,\lambda) \end{cases}$$

$$g(t) = g_h(t) + g_p(t) \Longrightarrow$$

$$g(t) = A_n \cos\lambda ct + B_n \sin\lambda ct + M(t,\lambda)$$

درنتیجه برابر است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\lambda ct + B_n \sin\lambda ct + M(t,\lambda)\right]\sin\lambda x \quad , \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

4. جهت محاسبه ضرایب A_n و B_n شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم.

$$u(x,0) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\big[\underbrace{A_n + M(0,\lambda)}_{\text{ضرایب سری فوریه } h(x)}\big]\sin\lambda x \Longrightarrow A_n + M(0,\lambda) = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\lambda x\, dx$$

$$u_t(x,0) = k(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\big[\underbrace{\lambda c B_n + M'(0,\lambda)}_{\text{ضرایب سری فوریه } k(x)}\big]\sin\lambda x \longrightarrow \lambda c B_n + M'(0,\lambda) = \frac{2}{l}\int_0^l k(x)\sin\lambda x\, dx$$

$\Longrightarrow A_n$ و B_n مشخص می‌شوند

مثال ۵ـ معادله موج غیرهمگن

$$u_{xx} = u_{tt} + xe^{t} \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad t>0$$

$$\begin{cases} u(0,t)=1 = p(t) \\ u(1,t)=e^{t} = q(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=x+1 \\ u_t(x,0)=x \end{cases}$$

$$u(x,t)=?$$

معادله دارای شرایط مرزی صفر نیست. با فرض اینکه $\boxed{u=v+w}$ معادله را برحسب v دارای شرایط مرزی صفری کنیم و w به صورت $w=ax+b$ فرض می‌کنیم. بنابراین:

$$\begin{cases} w(0,t)=p(t)=1 \\ w(1,t)=q(t)=e^{t} \end{cases} \Longrightarrow w(x,t)=\frac{q(t)-p(t)}{l}x+p(t)$$

پس باید فقط چک کنیم که:

$$\begin{cases} u(0,t)=v(0,t)+\cancel{w(0,t)} \\ u(1,t)=v(1,t)+\cancel{w(1,t)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v(0,t)=0 \\ v(1,t)=0 \end{cases}$$

یعنی شرایط مرزی برحسب $v(x,t)$ صفر شده است.

نکته مهم ـ تابع w که برای صفر کردن شرایط مرزی به کار می‌رود برای حالت‌های ① و ③ و ④ صفحه 10 به صورت $w=ax+b$ می‌باشد ولی برای حالت ② به صورت $w=ax^2+bx$ است. a و b را پیدا می‌کنیم.

$\boxed{u = v + w}$ را در معادله جاگذاری می‌کنیم تا معادله بر حسب v به دست آید.

$$v_{xx} + \cancel{w_{xx}}^{\,0} = \left(v_{tt} + \cancel{w_{tt}}^{\,xe^t}\right) + xe^{t} \Longrightarrow \boxed{v_{xx} = v_{tt} + 2xe^{t}}$$

معادله جدید بر حسب v

$$\boxed{w(x,t) = (e^{t} - 1)x + 1}$$

بنابراین معادله جدید بر حسب $v(x,t)$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} v_{xx} = v_{tt} + 2xe^{t} \\ v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$v(x,t) = ?$$

* البته باید شرایط اولیه را هم برای تابع جدید v به دست آوریم.

پس شرایط اولیه جدید $v(x,t)$:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$\begin{cases} \underbrace{u(x,0)}_{x+1} = \underbrace{v(x,0)}_{?} + \underbrace{w(x,0)}_{1} \Longrightarrow \boxed{v(x,0) = x} \\ \underbrace{u_t(x,0)}_{x} = \underbrace{v_t(x,0)}_{?} + \underbrace{w_t(x,0)}_{x} \Longrightarrow \boxed{v_t(x,0) = 0} \end{cases}$$

حال معادله را برحسب v حاصل می‌کنیم. با توجه به شرایط مرزی که روی حد v می‌باشند بنابراین تابع ویژه $\sin\lambda x$ حاصل می‌شود

و $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ و بنابراین پاسخ می‌شود ⟵ $\boxed{v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} g(t)\sin\lambda x}$ در معادله صفحه قبل برحسب v جایگذاری

توجه معادله: $v_{xx}=v_{tt}+2e^{t}x$

پس داریم:

$$\begin{cases} v_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty} g''(t)\sin\lambda x \\ v_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty} g(t)\lambda^2\sin\lambda x \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(g''(t)+\lambda^2 g(t)\right)\sin\lambda x=-2e^{t}x$$

ضرایب سری فوریه سینوسی این تابع

$$g''(t)+\lambda^2 g(t)=\frac{2}{l}\int_0^l(-2e^{t}x)\sin\lambda x\,dx=-4e^{t}\left[-\frac{x}{\lambda}\cos\lambda x+\frac{\sin\lambda x}{\lambda^2}\right]_0^l$$

$$\boxed{g''(t)+\lambda^2 g(t)=\left(\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right)e^{t}} \longrightarrow \overset{\text{پاسخ}}{g(t)=g_h(t)+g_p(t)}$$

معادله مشخصه $F(s)=s^2+\lambda^2=0 \Longrightarrow s=\pm\lambda i$

پاسخ به طرف دوم بستگی دارد (خصوصی)

$$g_h(t)=A\cos\lambda t+B\sin\lambda t$$

$$x(t) = e^{\alpha t} \longrightarrow y_p(t) = \frac{e^{\alpha t}}{F(\alpha)}$$

اگر $y_p(t)$ جواب خصوصی معادله باشد و می‌دانیم در درس معادلات دیفرانسیل فصل با ضرایب ثابت:

$F(\alpha)$ ← معادله مشخصه معادله دیفرانسیل

$$y_p(t) = \frac{\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\, e^{t}}{\underbrace{1+\lambda^2}_{F(1)}} = \frac{4\cos(n\pi)e^{t}}{n\pi(1+n^2\pi^2)} \Longrightarrow y(t) = A_n\cos\lambda t + B_n \sin\lambda t + \frac{4\cos n\pi}{n\pi(1+n^2\pi^2)}e^{t}$$

$\lambda = \frac{n\pi}{l}$

پس پاسخ

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\lambda t + B_n\sin\lambda t + \frac{4\cos n\pi}{n\pi(1+n^2\pi^2)}e^{t}\right)\sin\lambda x}$$

حال برای A_n و B_n شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$u(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n + \frac{4\cos n\pi}{n\pi(1+n^2\pi^2)}\right)\sin\lambda x \Longrightarrow A_n + \frac{4\cos n\pi}{n\pi(1+n^2\pi^2)} = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin\lambda x\,dx$$

ضرایب سری فوریه سینوسی ایکس است

$$\Rightarrow A_n + \frac{4\cos n\pi}{n\pi(1+n^2\pi^2)} = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} \Rightarrow \boxed{A_n = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi}\left(1+\frac{2}{1+n^2\pi^2}\right)}$$

شرط اولیه

$$u_t(x,0)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\lambda + \frac{4\cos n\pi}{\pi n(1+n^2\pi^2)}\right)\sin\lambda x = 0 \Rightarrow$$

وقتی برابر صفر است که ضریبش صفر

$$\Rightarrow B_n\lambda + \frac{4\cos n\pi}{\pi n(1+n^2\pi^2)} = 0 \Rightarrow \boxed{B_n = \frac{-4\cos n\pi}{n^2\pi^2(1+n^2\pi^2)}}$$

$\Rightarrow$ A_n و B_n معلوم شدند پس

تابع $v(x,t)$ معلوم شد.

و چون $w(x,t)$ را قبلاً تعیین کردیم

$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ بنابراین $u(x,t)$ معلوم شد.