فصل دوم : میدان الکتریکی ساکن در خلا (فضای آزاد)

- نظریه میدان های الکترومغناطیس ← معادلات ماکسول
- وابستگی متقابل میدان های الکتریکی و مغناطیسی ← میدان های ساکن
  ← میدان های متغیر با زمان

- منشا میدان های الکترومغناطیس، بار الکتریکی است .
- تغییرات میدان ها در فضا، به سرعت، شتاب و موقعیت بار ها وابسته است .
- در این درس فرض می شود بار ها ساکن باشند

کوچکترین بار : $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C coloumb

- توزیع فضایی بار الکتریکی ← نقطه ای (ناپیوسته) C
  ← خطی : بار در امتداد خط یا منحنی توزیع شده است (پیوسته) $\frac{C}{m}$
  ← سطحی : بار روی یک سطح قرار دارد (پیوسته) $\frac{C}{m^2}$
  ← حجمی : بار درون حجم پراکنده است . $\frac{C}{m^3}$

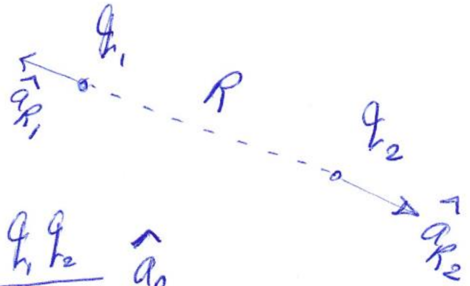
- محاسبه میدان ها ← روش مستقیم - قانون کولمب
  ← قانون گوس - (تقارن)
  ← روش پتانسیل

بار → E

بار → V → E

۱- روش مستقیم - قانون کولمب :

مطالعات تجربی :



$$\bar{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_{R_1}$$

مطالعات تجربی : بارهای همنام یکدیگر را دفع و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

نیروی بین دو بار در امتداد خط واصل دو بار عمل می‌کند.

اندازه نیرو متناسب با حاصلضرب بارهاست

اندازه نیرو متناسب عکس مربع فاصله بین دو بار است.

$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$$

ε_0 : ضریب گذردهی خلاء

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12} = 10^{-9}/36\pi \left(\frac{F}{m}\right)$ ثابت گذردهی - ثابت دی‌الکتریک خلاء

شدت میدان الکتریکی :

وقتی q_2 در مجاورت q_1 قرار می‌گیرد به آن نیرو اعمال می‌شود

q_1 اطراف خود میدانی تولید می‌کند که به باری که در آن میدان قرار می‌گیرد نیرو وارد می‌کند

- نیرویی که واحد بار q_1 بر واحد بار مثبت در نقطه‌ای از فضا وارد می‌کند

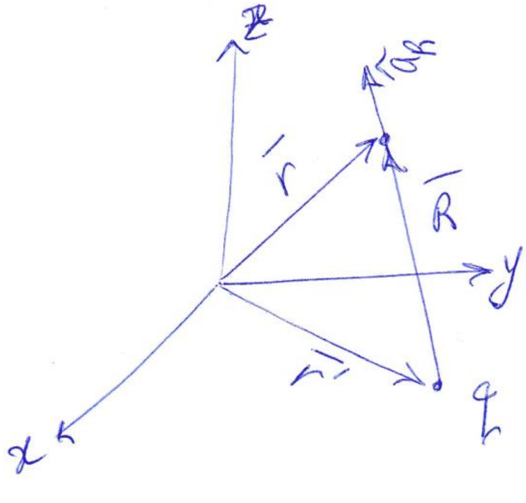
شدت میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در آن نقطه نامیده می‌شود. $\bar{E}$ $\left(\frac{V}{m}\right)$

$$\bar{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^2}\hat{a}_{R2} \qquad \text{if } q_2 = +1\,c$$

یا

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^2}\hat{a}_R \qquad \hat{a}_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3}\bar{R}$$



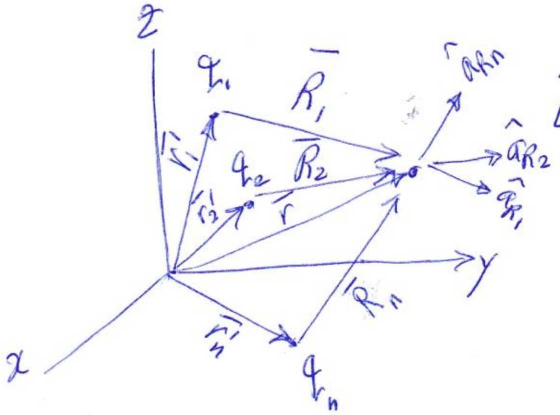
$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{q\,(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

* مختصات بدون پرایم مربوط به نقطه مشاهده

مختصات پرایم دار مربوط به نقطه منبع (بار الکتریکی)

شدت میدان الکتریکی چند بار نقطه‌ای:

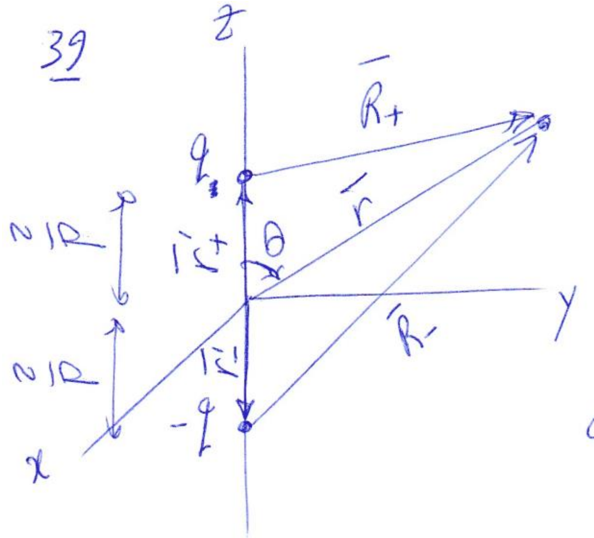


$$\bar{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}\hat{a}_{R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}\hat{a}_{R_2} + \cdots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 R_3^2}\hat{a}_{R_n}$$

$$\bar{R}_i = \bar{r} - \bar{r}_i' \;, \quad \hat{a}_{R_i} = \frac{\bar{R}_i}{|\bar{R}_i|}$$

$$\bar{E}(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_n\,(\bar{r}-\bar{r}_i')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}_i'|}$$

39



دو قطبی الکتریکی :

$r \gg d$

$$\begin{cases} \bar{R}_+ = \bar{r} - \bar{r}'_+ \\ \bar{r}'_+ = \frac{d}{2}\hat{a}_z \end{cases} \longrightarrow \bar{R}_+ = \bar{r} - \frac{d}{2}\hat{a}_z$$

در استوانه ای

$$\begin{cases} \bar{R}_- = \bar{r} - \bar{r}'_- \\ \bar{r}'_- = -\frac{d}{2}\hat{a}_z \end{cases} \longrightarrow \bar{R}_- = \bar{r} + \frac{d}{2}\hat{a}_z$$

در استوانه ای

$\bar{r} = r\hat{a}_r$

در کروی

$$\begin{cases} \bar{R}_+ = r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z \\ \bar{R}_- = r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z \end{cases}$$

$$\bar{E} = \frac{+q\,(r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 \left| r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z \right|^3} + \frac{-q\,(r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 \left| r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z \right|^3}$$

اعمال شرط $r \gg d$:

$$\left| r\hat{a}_r \pm \frac{d}{2}\hat{a}_z \right|^{-3} = \left[r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pm 2r\frac{d}{2}\cos\theta \right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$r \gg d \longrightarrow \frac{d}{r} \ll 1 \longrightarrow \left(\frac{d}{r}\right)^2 \simeq 0$$

$$= \left[r^2 \left(1 + \cancel{\left(\frac{d}{2r}\right)^2} \pm \left(\frac{d}{r}\right)\cos\theta \right) \right]^{-3/2} = r^{-3}\left(1 \pm \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-3/2}$$

صفر

(اتحاد دو جمله‌ای) : $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

$$|x| < 1$$

$$|x| \ll 1 \rightarrow (1+x)^m = 1 + mx$$

$$\left(1 + \frac{r}{d}\cos\theta\right)^{-3/2} \cong 1 - \frac{3}{2}\frac{r}{d}\cos\theta$$

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3d\cos\theta\,\hat{a}_r - d\hat{a}_z\right)$$

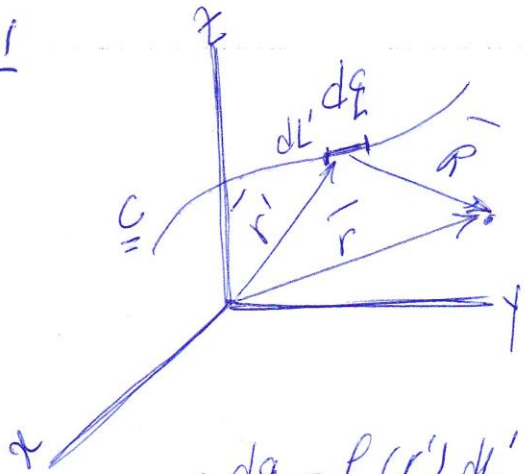
$$\hat{a}_z = \cos\theta\,\hat{a}_r - \sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

$$\therefore\ \bar{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)$$

گشتاور دو قطبی الکتریکی $\bar{P} = qd\hat{a}_z$

- $\bar{E}$ با r^{-3} متناسب است

- کاربرد در میدان الکتریکی از حضور اجسام



* میدان الکتریکی توزیع پیوسته خطی :

- بار با چگالی خطی $\rho_L(r')$ روی منحنی C توزیع شده است

$$dq = \rho_L(r')\, dL'$$

$$\bar{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \frac{dq\,\bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad , \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$\bar{dE} = \frac{\rho_L(r')\, dL'\, \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \qquad \bar{E} = \int_C \frac{\rho_L \bar{R}\, dL'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3}$$

مثال : بار الکتریکی در امتداد محور z از $-\infty$ تا $+\infty$ توزیع شده است با $\rho_L = \rho_{L0}$

مطلوب است میدان $\bar{E}$ در کلیه نقاط فضا

حل :

1- انتخاب دستگاه

2- بررسی تقارن

3- محاسبه مستقیم

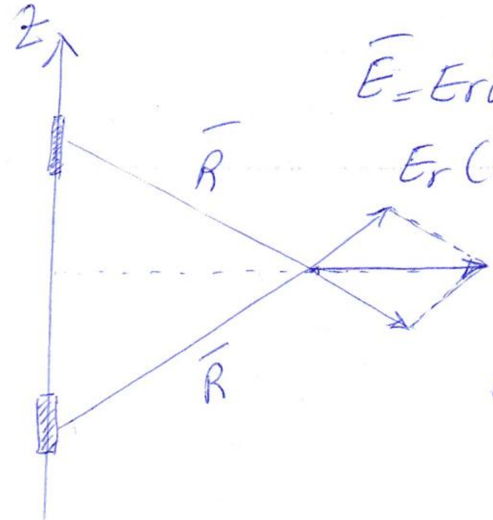
حل:

۱- انتخاب دستگاه مختصات: دستگاه استوانه‌ای $\bar{E}(r) = \bar{E}(r, \varphi, z)$

2- بررسی تقارن

جهت $\rightarrow \bar{E} = E_r \hat{a}_r$

اندازه $\rightarrow E_r(r)$



$\bar{E} = E_r \hat{a}_r$

$E_r(r, \cancel{\varphi}, \cancel{z}) = E_r(r)$

طبق تقارن

$\bar{E} = E(r)\hat{a}_r$

3- حل مستقیم:

$$\bar{E} = \int_C \frac{\rho_L(r')\bar{R}\, dl'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3}$$

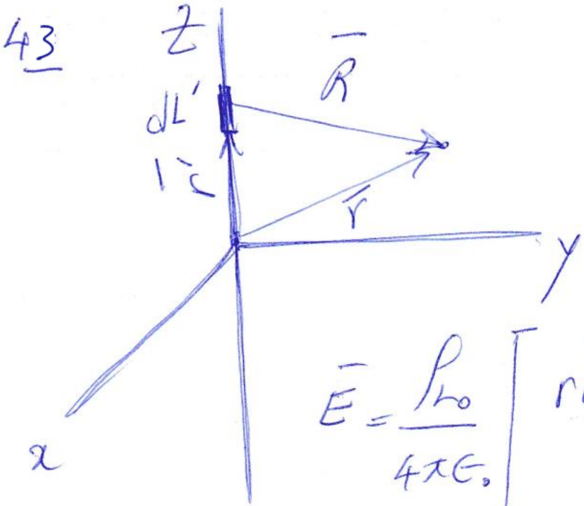
$$\rho_L = \rho_{L0} \quad , \quad \bar{dl}' = dz'\hat{a}_z \rightarrow dl' = dz'$$

$$\left| \begin{array}{l} \bar{R} = r\hat{a}_r - \bar{r}'\hat{a}_r' \\ \bar{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z \\ \bar{r}' = \cancel{r'\hat{a}_r'} + z'\hat{a}_z' \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \bar{R} = r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z \\ |\bar{R}| = \left[r^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \end{array}$$

صفر

$$\bar{E} = \int_{z' = -\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{L0}}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z}{\left[r^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} dz'$$

43



$$\bar{E} = \frac{\rho_{L0}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\hat{a}_r + (z-z')\hat{a}_z}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,dz'$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_{L0}}{4\pi\epsilon_0}\left[r\hat{a}_r \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}}_{I} + \hat{a}_z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z-z')\,dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}}_{II}\right]$$

$II:$ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z-z')\,dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \quad \begin{cases} z-z' = u \\ -du = dz' \end{cases} \quad \begin{cases} z' = -\infty \rightarrow u = +\infty \\ z' = +\infty \rightarrow u = -\infty \end{cases}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty}\frac{-u\,du}{\left[r^2+u^2\right]^{3/2}} = 0$$

u تابع فرد نسبت

یادآوری : $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

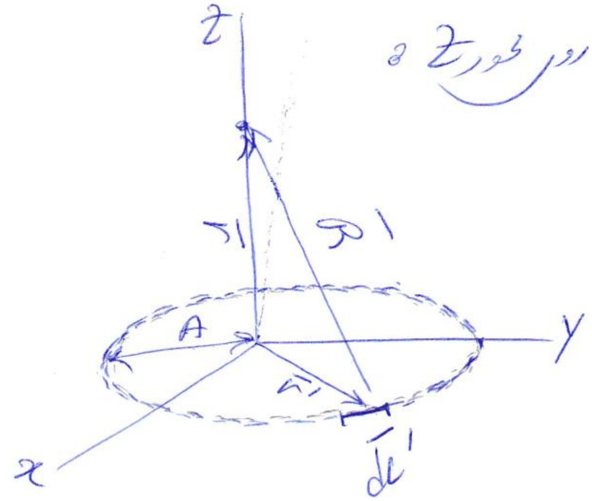
$I:$ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \quad \begin{cases} z-z' = u \\ dz' = -du \end{cases}$$

$$= \int\frac{-du}{(u^2+r^2)^{3/2}} = \frac{-u}{r^2(u^2+r^2)^{1/2}} = \left.\frac{-(z-z')}{r^2\left[(z-z')^2+r^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right|_{z'=-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{r^2} - \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{r^2}$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_{L0}}{4\pi\epsilon_0} r\hat{a}_r \frac{2}{r^2} \longrightarrow \bar{E} = \frac{\rho_{L0}}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{a}_r = E(r)\,\hat{a}_r$$

مثال: بار الکتریکی روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع A با چگالی طولی $\rho_L = \rho_{L0}\cos\varphi$ توزیع شده است. مطلوب است محاسبه میدان روی محور z:



۱- انتخاب دستگاه: استوانه‌ای $\bar{E}(r,\varphi,z)$

2- بررسی تقارن: نمی‌توان کوتاه کرد
چون ρ_L یکنواخت نمی‌باشد

3- محاسبه انتگرال:

$$\bar{E} = \int \frac{\rho_L(r')\,\bar{R}\,dl'}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^3} \quad , \quad \rho_L(r') = \rho_{L0}\cos\varphi'$$

$$\begin{cases} \bar{dl} = \bar{dl}_\varphi = r' d\varphi' \hat{a}_\varphi \Big|_{r'=A} \\ dl' = A\,d\varphi' \end{cases}$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$\bar{r} = \underbrace{r\hat{a}_r}_{\text{صفر}} + z\hat{a}_z = z\hat{a}_z$$

$$\bar{r}' = r'\hat{a}_r' + \underbrace{z'\hat{a}_z}_{\text{صفر}} = r'\hat{a}_r' = A\hat{a}_r' \Big|_{r'=A}$$

$$\bar{R} = z\hat{a}_z - A\hat{a}_r$$

$$|\bar{R}| = (z^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}$$

45

$$\bar{E} = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\rho_{L0} \cos\varphi' (z\hat{a}_z - A\hat{a}_r') A\, d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 (A^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_{L0}}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{(A^2+z^2)^{3/2}} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi' z\hat{a}_z A\, d\varphi'}_{I} - \underbrace{\int_0^{2\pi} A^2 \hat{a}_r' \cos\varphi' d\varphi'}_{II} \right]$$

$$I: \int_0^{2\pi} \cos\varphi' z\hat{a}_z A\, d\varphi' = zA\hat{a}_z \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' = 0$$

$$II: \int_0^{2\pi} A^2 \cos\varphi' \hat{a}_r\, d\varphi' = \int_0^{2\pi} A^2 \cos\varphi' \hat{a}_r(\varphi')\, d\varphi'$$

$$\hat{a}_r'(\varphi') = \cos\varphi' \hat{a}_x + \sin\varphi' \hat{a}_y$$

$$= A^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi' (\cos\varphi' \hat{a}_x + \sin\varphi' \hat{a}_y)\, d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi' \hat{a}_x + \hat{a}_y \cos\varphi' \sin\varphi') d\varphi$$

$$= A^2 \hat{a}_x \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi' d\varphi' + A^2 \hat{a}_y \int_0^{2\pi} \sin\varphi' \cos\varphi'\, d\varphi'$$

$$= A^2 \hat{a}_x \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2\varphi')}{2} d\varphi' + A^2 \hat{a}_y \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\varphi'\, d\varphi = A^2 \pi \hat{a}_x$$

4b

$\therefore$ $$\bar{E} = \frac{\rho_{L0}}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{(A^2+z^2)^{3/2}} \left(-A^2\pi\hat{a}_x\right)$$

$$\bar{E} = -\hat{a}_x \frac{\rho_{L0} A^2}{2\epsilon_0 (A^2+z^2)^{3/2}}$$