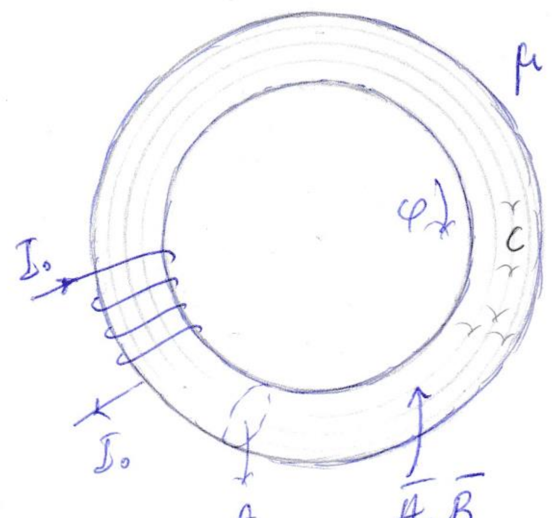
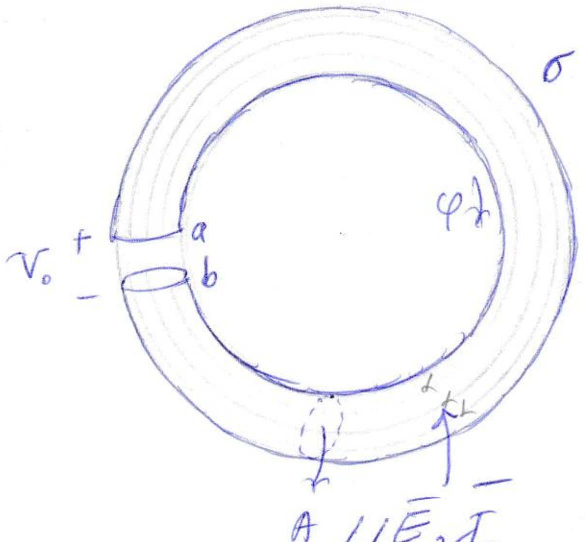
مدارهای مغناطیسی :

محاسبه شار مغناطیسی ایجاد شده توسط یک یا چند سیم پیچ جریان‌دار دور هسته در شکل مدار بسته، اهمیت زیادی دارد. مثل ماشینهای الکتریکی، کلید رله‌ها، ...

این سیستم‌ها به دلیل تشابه با مدارهای الکتریکی، مدارهای مغناطیسی نامیده می‌شوند.



مدار مغناطیسی



مدار الکتریکی

$I_0 \to \bar{H}\ , \ \bar{B} = \mu \bar{H}$

در مدار الکتریکی، جریان الکتریکی $\bar{J}_c$ نمی‌تواند بیرون از هادی نشت کند

ولی در مدار مغناطیسی شار مغناطیسی می‌تواند به فضای اطراف هسته نفوذ کند.

if $\mu \gg \mu_0$ $\quad H_{t,\text{هسته}} = H_{t,\text{هوا}} \to \dfrac{B_{t,\text{هسته}}}{\mu} = \dfrac{B_{t,\text{هوا}}}{\mu_0}$

$B_{t,\text{هوا}} = \dfrac{\mu_0}{\mu} \times B_{t,\text{هسته}} \simeq 0$

هسته معمولاً از جنس مواد فرومغناطیسی است $\mu \gg \mu_0$

روابط حاکم بر دو مدار :

$$\nabla \times \bar{H} = 0 \qquad\qquad \nabla \times \bar{E} = 0$$

$$N I_0 = \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} \qquad\qquad V_0 = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \qquad\qquad \bar{J}_c = \sigma \bar{E}$$

$$\Phi = \int_A \bar{B} \cdot d\bar{s} \qquad\qquad I_c = \int_A \bar{J}_c \cdot d\bar{s}$$

مدار مغناطیسی   مدار الکتریکی

برای تشابه بین مدار مغناطیسی و الکتریکی :

$$\bar{E} \longleftrightarrow \bar{H}$$

$$N I_0 \longleftrightarrow V_0$$

$$\bar{B} \longleftrightarrow \bar{J}_c$$

$$\Phi \longleftrightarrow I_c$$

$$\sigma \longleftrightarrow \mu$$

مقاومت الکتریکی $R = \dfrac{V_0}{I_c} = \dfrac{L}{\sigma A}$

مقاومت مغناطیسی $\mathcal{R} = \dfrac{N I}{\Phi}$

رلوکتانس

با فرض یکنواختی میدان مغناطیسی در سطح مقطع هسته :

$$\begin{cases} NI_0 = \oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = H_\varphi L \\ \Phi = \int_A \bar{B}\cdot d\bar{s} = B_\varphi A = \mu H_\varphi A \end{cases} \rightarrow \mathcal{R} = \frac{NI_0}{\Phi} = \frac{L}{\mu A}$$

رلوکتانس نیز مانند مقاومت فقط تابع ابعاد هندسی و جنس هسته است .

$$\bar{E} = -\nabla V \leftarrow \nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\bar{H} = -\nabla V_m \leftarrow \nabla \times \bar{H} = 0$$

V_m : پتانسیل اسکالر مغناطیسی

$$\therefore V_{m,ab} = -\int_a^b \bar{H}\cdot d\bar{l}$$

در مدار الکتریکی $\rightarrow$ KCL : $\oint_S \bar{J}_c \cdot d\bar{s} = 0 \;,\; \sum_j I_j = 0$

$\rightarrow$ KVL : $V_0 = \int \bar{E}\cdot d\bar{l}$ or $V_0 - \int \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$

در یک مسیر بسته

$$V_0 - \sum_j V_j = 0$$

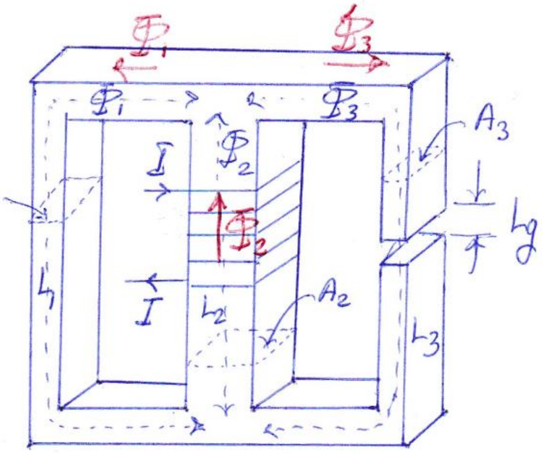
در مدار مغناطیسی : $\rightarrow$ KFL : $\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = 0 \;,\; \sum_j \Phi_j = 0$

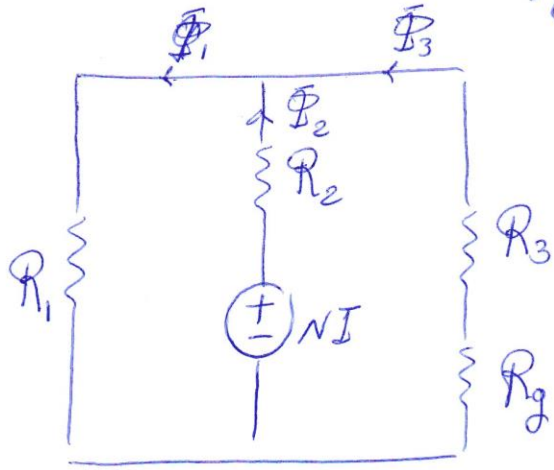
$\rightarrow$ KVL_M

$$N_0 I - \oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = 0$$

$$V_m = \mathcal{R}\Phi \qquad \sum_j (NI_0)_j = \sum_i V_{mi} = \sum_i H_i L_i$$

مثال :



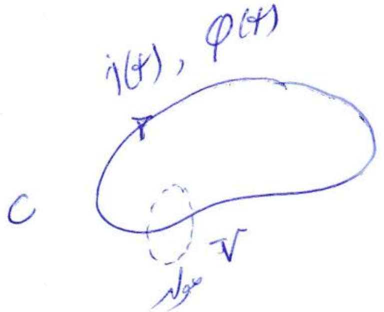


حل و بنویس

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی :

ابتدا انرژی ذخیره شده در یک مدار بسته حامل جریان I را بدست می آوریم

سپس نتیجه را به n حلقه جریان و سپس به توزیع پیوسته جریان تعمیم می دهیم.



قبل از اتصال مولد : $i(t) = 0$ و $\Phi(t) = 0$

پس از وصل مولد : جریان و در نتیجه شار مدار رو به افزایش می باشد

تا پس از گذشت زمان به حالت دائمی خود I و Φ برسد.

قانون فارادی : $V_1 = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \sum V = 0 \longrightarrow V_1 + V = 0$$

$$V = -V_1 = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$dW = V(t)\, i(t)\, dt = i(t)\, d\Phi$$

انرژی دریافتی

$$W = \int_0^I i(t)\, d\Phi = \int_0^\Phi i\, d\Phi$$

$$\Phi = L\, i(t) \longrightarrow d\Phi = L\, di(t)$$

$$W = \int_0^I i(t)\, L\, di = \frac{1}{2} L\, i(t) \Big|_0^I = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi$$

در حالت دائمی بدون انرژی از مولد به مدار جریان می یابد.

اگر چند حلقه جریان داشته باشیم :

$$W = \sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{I_j} i_j \, d\Phi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} I_j \Phi_j$$

$$\Phi_j = L_{jj} i_j + \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq j}}^{n} L_{jK} i_K$$

$$d\Phi_j = L_{jj} \, di_j + \sum_{K=1}^{n}{}' L_{jK} \, di_K$$

$$dW_j = i_j \, d\Phi_j = i_j \left[L_{jj} \, di_j + \sum_{K=1}^{n}{}' L_{jK} \, di_K \right]$$

$$dW = \sum_{j=1}^{n} dW_j = \sum_{j=1}^{n} i_j \left[L_{jj} \, di_j + \sum_{K=1}^{n}{}' L_{jK} \, di_K \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} L_{jj} \, d\left(\frac{1}{2} i_j^2\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{n}{}' L_{jK} \, d(i_j i_K)$$

$$W_M = \int dW = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} L_{jj} I_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{n}{}' L_{jK} I_j I_K$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} I_j \Big[\underbrace{L_{jj} I_j + \sum_{K=1}^{n}{}' L_{jK} I_K}_{\Phi_j} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} I_j \Phi_j$$

برای توزیع پیوسته :

$$W_m = \frac{1}{2}\int_S \Phi \bar{J} \cdot \bar{ds}$$

جریان : اگر پیوسته با چگالی حجمی $\bar{J}$ در حجم V توزیع شده باشد . حجم V : شکل یک لوله مسدود خواهد بود

سطح مقطع توزیع جریان

دی سطح مقطع حجم لوله‌ای شکل

$$\Phi = \int_{S'} \bar{B} \cdot \bar{ds'} = \int_{S'} (\nabla \times \bar{A}) \cdot ds' = \oint_C \bar{A} \cdot \bar{dl}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_S \oint_C (\bar{A} \cdot \bar{dl})(\bar{J} \cdot \bar{ds}) = \frac{1}{2}\int_S \oint_C (\bar{A} \cdot \bar{J})(\bar{dl} \cdot \bar{ds})$$

$\bar{dl}$ و $\bar{J}$ هم جهتند

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \bar{J} \cdot \bar{A}\, dv$$ توزیع حجمی جریان

$$W_m = \frac{1}{2}\int_S J_s \cdot \bar{A}\, ds$$ توزیع سطحی جریان

ارتباط انرژی و میدان مغناطیسی :

$$\bar{J}_v = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B}$$

در خارج V ، جریان نداریم $\nabla \times \bar{B} = 0$ است

$$W_M = \frac{1}{2}\int_{v} \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \bar{B}\right)\cdot \bar{A}\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \bar{B})\cdot \bar{A}\, dv$$

یادآوری : $\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot\nabla\times\bar{A} - \bar{A}\cdot\nabla\times\bar{B}$

$$(\nabla\times\bar{B})\cdot\bar{A} = \bar{B}\cdot\nabla\times\bar{A} - \nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B})$$

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{کل فضا}} \left[\bar{B}\cdot\nabla\times\bar{A} - \nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B})\right] dv$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{کل فضا}} \bar{B}\cdot\bar{B}\, dv - \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{کل فضا}} \nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B})\, dv$$

قانون استوکس

$$\int_{\text{کل فضا}} \nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B})\, dv = \oint_{\text{سطح کل فضا}} (\bar{A}\times\bar{B})\cdot d\bar{s}$$

که کره با شعاع r , $r \to \infty$

روی چنین سطحی، جریان توزیعی محدود، به صورت یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور محدود $\bar{m}$ خواهد بود.

$$\begin{cases} \bar{B} \rightsquigarrow \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right) \\[2ex] \bar{A} \rightsquigarrow \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{a}_\varphi \end{cases} \longrightarrow \bar{A}\times\bar{B} \rightsquigarrow \frac{1}{r^5}$$

$$\bar{ds} = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r \rightsquigarrow r^2$$

$$(\bar{A}\times\bar{B})\cdot\bar{ds} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

برای توزیعی که میدان $\bar{B}$ حداقل با نرخ $\frac{1}{r^2}$ و پتانسیل $\bar{A}$ با نرخ حداقل $\frac{1}{r}$ تغییر کند، معتبر است.

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{تمام فضا}} \bar{B}\cdot\bar{B}\, dv = \int_{\text{کل فضا}} \left[\frac{1}{2\mu_0}B^2\right] dv$$

چگالی حجمی انرژی: $w_m = \frac{1}{2\mu}B^2$

روش محاسبه ضریب خودالقا:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \longrightarrow L = \frac{W_m}{\frac{1}{2}I^2}$$

نیرو و گشتاور :

$$\bar{F} = I \oint \bar{dl} \times \bar{B} \qquad \text{if } \bar{B} = \text{یکنواخت} \Rightarrow \bar{F} = I\left[\oint_C \bar{dl}\right] \times \bar{B} = 0$$

نیرو در حالت یکنواخت صفر است ولی گشتاور صفر نخواهد بود

$$T = r \times \bar{F}$$

$\bar{B} = B_0 \hat{a}_y$, C: مسیر دایره‌ای شکل با شعاع a در صفحه xy

$$\bar{dT} = r \times d\bar{F} \qquad \bar{dl} = a\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi \,, \quad \bar{r} = a\hat{a}_r$$

$$\bar{dT} = a^2(\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y) \times [I(-\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y) \times \bar{B}]\,d\varphi$$

$$= a^2 I B_0 (\cos\varphi \sin\varphi\,\hat{a}_y - \sin^2\varphi\,\hat{a}_x)\,d\varphi$$

$$T = \int_0^{2\pi} dT = -(\pi a^2 I) B_0 \hat{a}_x$$

$$\bar{m} = \pi a^2 I \hat{a}_z \rightarrow \bar{T} = \bar{m} \times \bar{B}$$

در حالت کلی : $m = \frac{I}{2} \oint_C \bar{r} \times \bar{dl}$

که مسیر حتی لزوماً در یک سطح نباشد

محاسبه نیرو و گشتاور با روش کار مجازی :

سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد : $\Phi =$ ثابت $\qquad \Delta W = \bar{F} \cdot d\bar{l}$

$$\Delta W + \Delta W_m = 0$$

$$\Delta W_m = -\bar{F} \cdot d\bar{l} \rightarrow \bar{F} = -\nabla W_m \Big|_{\Phi = \text{ثابت}}$$

$$T_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi = \text{ثابت}}$$

سیستم بتواند حول محور z بچرخد.

سیستم با دنیای خارج ارتباط دارد : $I =$ ثابت $\qquad \Delta W = \bar{F} \cdot d\bar{l}$

$$\Delta W = \Delta W_m$$

$$\Delta W_m = \bar{F} \cdot d\bar{l} \rightarrow \bar{F} = +\nabla W_m \Big|_{I = cte}$$

$$T_z = \frac{\partial}{\partial \varphi} W_m \Big|_{I = \text{ثابت}}$$