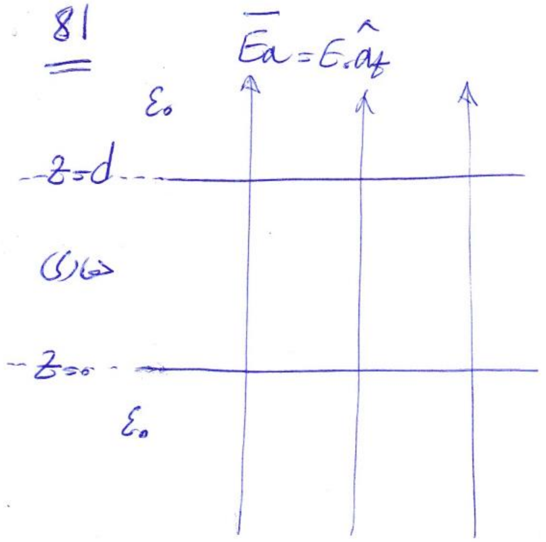
81

مثال:

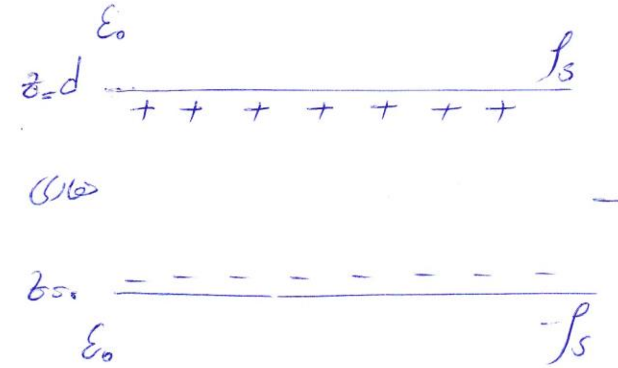


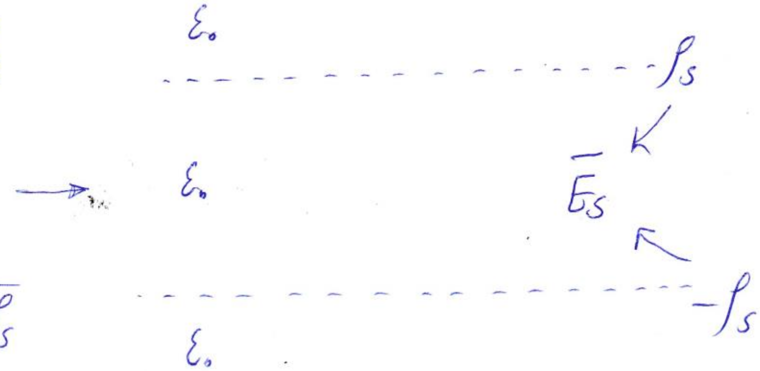

$\bar{E}_a = E_0 \hat{a}_z$

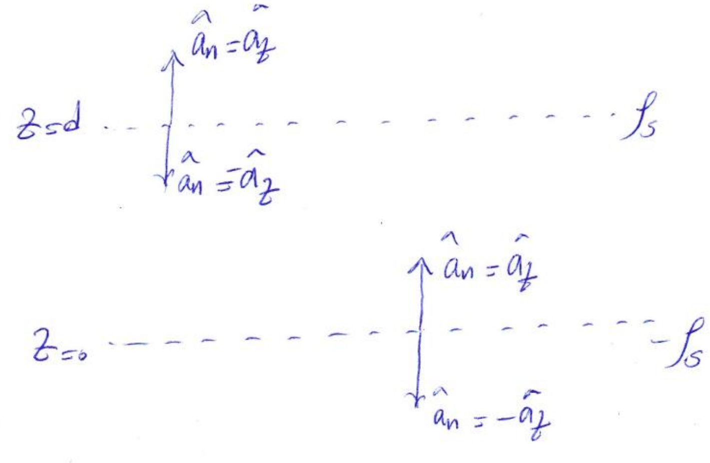
$\rho_s(z=0) = ?$

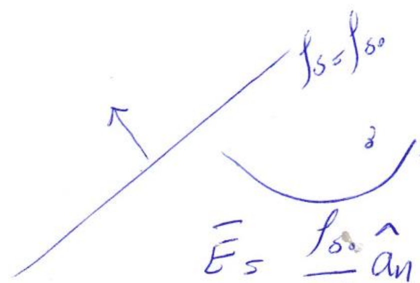
$\rho_s(z=d) = ?$

$\bar{E} = ?$




یادآوری:

$\bar{E} = \frac{\rho_{s0}}{2\varepsilon_0} \hat{a}_n$

میدان $E_s$ حاصل از صفحه $z=0$ :

$z > 0 \rightarrow \bar{E}_s = \frac{-\rho_s}{2\varepsilon_0} \hat{a}_z$

$z < 0 \rightarrow \bar{E}_s = \frac{-\rho_s}{2\varepsilon_0} (-\hat{a}_z)$

میدان حاصل از صفحه $z=d$

$z > d \rightarrow \bar{E}_s = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \hat{a}_z$

$z < d \rightarrow \bar{E}_s = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} (-\hat{a}_z)$

$$\bar{E}_s = \begin{cases} -\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z + \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z = 0 & z > d \\ -\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z - \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z = -\dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{a}_z & 0 < z < d \\ \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z - \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z = 0 & z < 0 \end{cases}$$

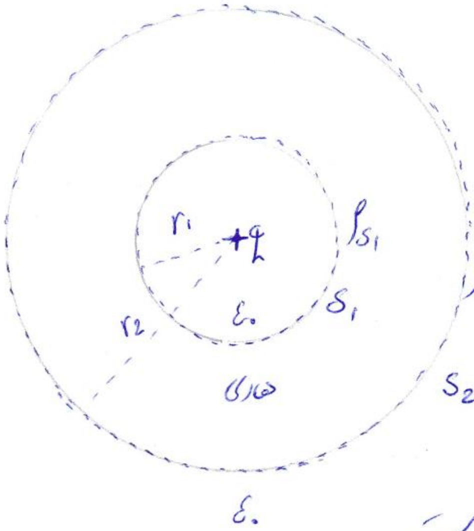
$$\bar{E} = \bar{E}_a + \bar{E}_s = \begin{cases} E_0\hat{a}_z & z > d \\ -\dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{a}_z + E_0\hat{a}_z & 0 < z < d \\ E_0\hat{a}_z & z > d \end{cases}$$

$$\bar{E}(0<z<d) = 0 \quad \leftarrow \quad \bar{E} = 0$$ درون هادی :

$$\bar{E}(0<z<d) = \left(E_0 - \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\right)\hat{a}_z = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_s = \varepsilon_0 E_0$$

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$ میدان ها روی سطح هادی فقط مولفه عمود دارد :

مثال:




$r_2 - r_1 = d$

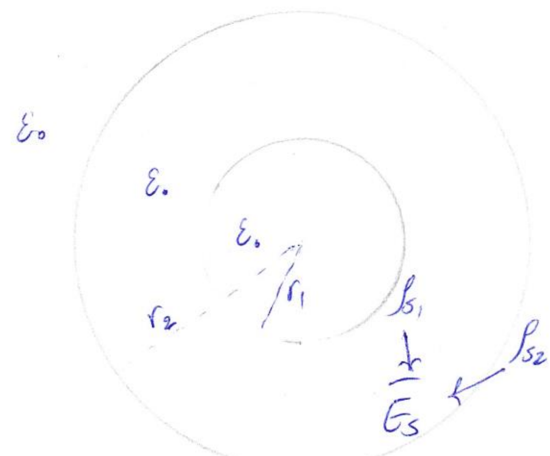
$\rho_{s_1} = ?\ ,\ \rho_{s_2},\ \ \bar{E} = ?$

$$\bar{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

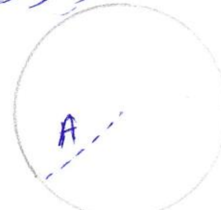
میدان $\bar{E}_a$ سبب القای بار منفی روی سطح $r=r_1$ می‌گردد و بدلیل تقارن کروی چگالی سطحی بار القایی یکنواخت است.

و کل بار القایی برابر با $q_1$ است.

چون که از لحاظ الکتریکی خنثی است، لذا بار $q_2 = -q$ روی سطح $r=r_2$ با چگالی یکنواخت $\rho_{s2}$ القا می‌کند.




**یادآوری:** $\rho_s$ یکنواخت




$$\begin{cases} \bar{E} = \dfrac{4\pi A^2 \rho_s}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r > A \\ \bar{E} = 0 & r < A \end{cases}$$

میدان حاصل از $\rho_{s1}$:

$$\begin{cases} \bar{E}_s = 0 & r < r_1 \\ \bar{E}_s = \dfrac{4\pi r_1^2 \rho_{s1}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r > r_1 \end{cases}$$

میدان حاصل از $\rho_{s2}$:

$$\begin{cases} \bar{E}_s = 0 & r < r_2 \\ \bar{E}_s = \dfrac{4\pi r_2^2 \rho_s}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r > r_2 \end{cases}$$

84

$$\bar{E}_s = \begin{cases} 0 & r<r_1 \\ \dfrac{4\pi r_1^2 \rho_{s1}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r_1<r<r_2 \\ \dfrac{4\pi r_1^2 \rho_{s1}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r + \dfrac{4\pi r_2^2 \rho_{s}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>r_2 \end{cases}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_a + \bar{E}_s = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r<r_1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r + \dfrac{4\pi r_1^2 \rho_{s1}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r_1<r<r_2 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r + \dfrac{4\pi r_1^2 \rho_{s1}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r + \dfrac{4\pi r_2^2 \rho_{s2}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>r_2 \end{cases}$$

درون هادی :

$$\bar{E}(r_1<r<r_2) = 0$$

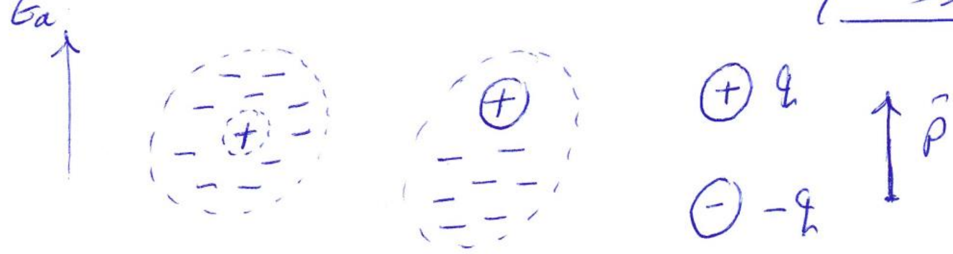
$$\bar{E}(r_1<r<r_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r + \frac{4\pi r_1^2 \rho_{s1}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r = 0$$

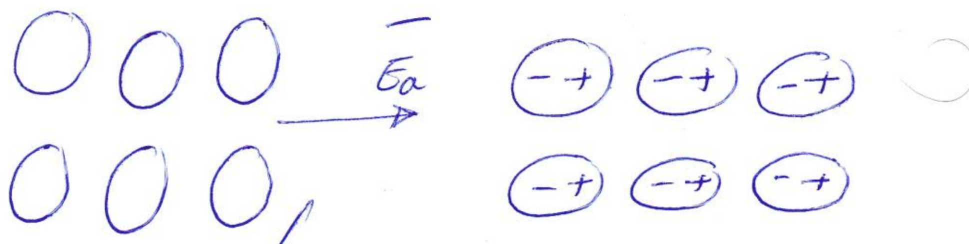
$$\therefore +4\pi r_1^2 \rho_{s1} = -q \longrightarrow \rho_{s1} = \frac{-q}{4\pi r_1^2}, \quad q_1 = -q$$

$$q_2 = -q_1 = q \longrightarrow \rho_{s2} = \frac{q}{4\pi r_2^2}$$

$$\bar{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r<r_1 \\ 0 & r_1<r<r_2 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>r_2 \end{cases}$$

## اجسام عایق در میدان الکتریکی ساکن



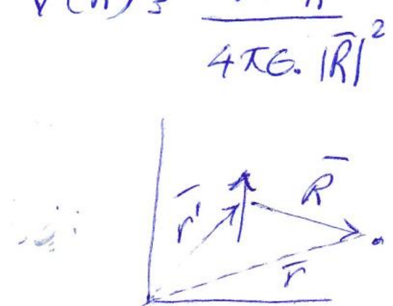

مولکول‌های غیر قطبی


مولکول‌های قطبی با آرایش غیر منظم

$\bar{P}$ : بردار قطبی شدگی یا بردار پلاریزاسیون ، چگالی گشتاور دو قطبی الکتریکی

میزان گشتاور دو قطبی الکتریکی در واحد حجم

$$V(\bar{R}) = \frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^2} \qquad |\bar{R}| \gg d$$

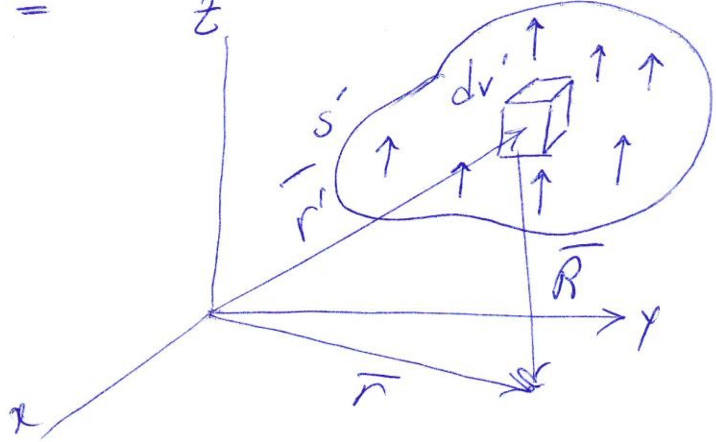



$d$ , $q$ , $-q$ , $\bar{p} = q d \hat{a}_p$

$$\bar{P} = N\bar{p}$$

$N$ : تعداد دو قطبی در واحد حجم

$$\bar{P} \longrightarrow \bar{E}_s \qquad \bar{E} = \bar{E}_a + \bar{E}_s$$




$$dV = \frac{\bar{P}\,\Delta v' \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^2}, \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\hat{a}_R}{R^2}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dv' \qquad \bar{P} \to V \to \bar{E}_s$$

میدانیم $\nabla \cdot (f\bar{A}) = f\,\nabla \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla f$

$$f = \frac{1}{R}, \quad \bar{A} = \bar{P}$$

$$\therefore \bar{P} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\bar{P}}{R}\right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \bar{P}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla'\left(\frac{\bar{P}}{R}\right) - \frac{1}{R}\nabla' \cdot \bar{P}\right] dv'$$

$$V = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla'\left(\frac{\bar{P}}{R}\right) dv' + \int_{v'} \frac{-\nabla' \cdot \bar{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dv'$$

$$V = \oint_{s'} \frac{\bar{P} \cdot ds'}{4\pi\epsilon_0 R} + \int \frac{-\nabla' \cdot \bar{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dv'$$

$$\bar{ds'} = ds'\,\hat{a}_n$$

$$V = \oint_S \frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_n}{4\pi\epsilon_0 R}\,ds' + \int_{v'} \frac{-\nabla\cdot\bar{P}}{4\pi\epsilon_0 R}\,dv'$$

$$\begin{cases} \rho_{pv} = -\nabla\cdot\bar{P} & \text{چگالی حجمی بارهای مقید} \\ \rho_{ps} = \bar{P}\cdot\hat{a}_n & \text{چگالی سطحی بارهای مقید} \end{cases}$$

جسم قطبی شده از لحاظ الکتریکی خنثی است ؛ لذا :

$$Q_p = \int_{v'} \rho_{pv}\,dv' + \oint_{s'} \rho_{ps}\,ds' = \int_{v'} -\nabla\cdot\bar{P}\,dv' + \oint_{s'} \bar{P}\cdot\bar{ds} = 0$$

توضیحات :

$\nabla\cdot\bar{E} = (\rho_{pv}+\rho_v)/\varepsilon_0$      $\bar{E}$ : میدان الکتریکی کل

$\nabla\cdot(\varepsilon_0\bar{E}) = \rho_v - \nabla\cdot\bar{P} \longrightarrow \nabla\cdot(\varepsilon_0\bar{E}+\bar{P}) = \rho_v$

$\bar{D} \triangleq \varepsilon_0\bar{E}+\bar{P}$      چگالی شار الکتریکی

$\nabla\cdot\bar{D}=\rho_v$      برداری است که دیورژانسش همواره برابر
چگالی بار آزاد است و به بار مقید وابسته نیست

شکل کلی قانون گوس:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\bar{D}=\rho_v \\ \oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = \int_v \rho_v\, dv \end{cases}$$

$\bar{P}=\varepsilon_0\chi_e\bar{E}$      برای اجسام خطی و همسانگرد (ایزوتروپیک)

$\chi_e$ : ضریب حساسیت الکتریکی

جسم خطی: اگر اندازه بردار $\bar{P}$ در هر نقطه متناسب با اندازه میدان الکتریکی کل باشد

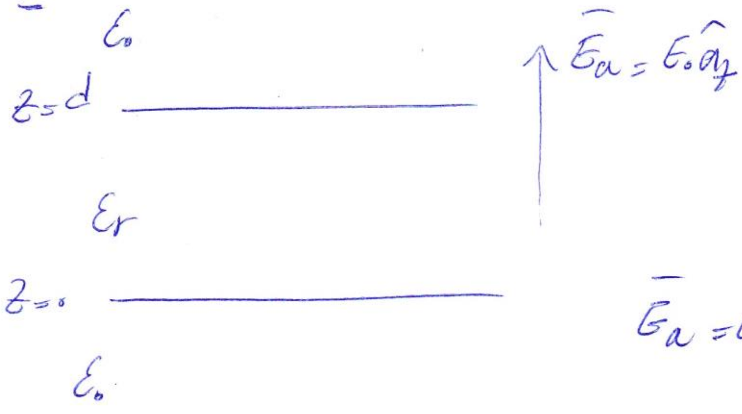
جسم ایزوتروپیک: اگر بردار $\bar{P}$ موازی بردار میدان الکتریکی کل باشد.

$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}+\varepsilon_0\chi_e\bar{E}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\bar{E} \rightarrow \bar{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\bar{E}$

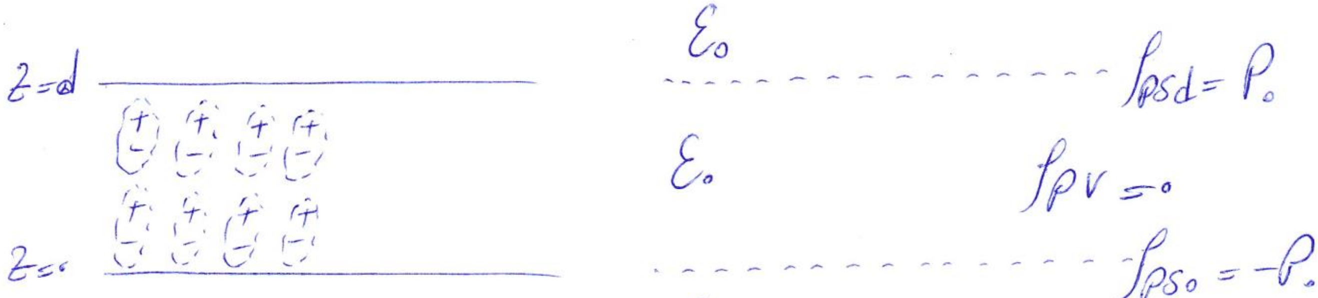
$1+\chi_e=\varepsilon_r$      $\varepsilon_0\varepsilon_r=\varepsilon \rightarrow \bar{D}=\varepsilon\bar{E}$

$\varepsilon_r$ : قابلیت گذردهی نسبی      $\varepsilon$ : قابلیت گذردهی جسم عایق

مثال:




$\bar{E}_a = E_0 \hat{a}_z \longrightarrow \bar{P} = P_0 \hat{a}_z$ فرض




$$\bar{P} = P_0 \hat{a}_z \rightarrow \rho_{pv} = -\nabla \cdot \bar{P} = 0$$

$$\bar{P} = P_0 \hat{a}_z \rightarrow \rho_{ps}$$

$z=0$, $\hat{a}_n = -\hat{a}_z$, $\rho_{ps0} = \bar{P}\cdot\hat{a}_n = P_0 \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z)$

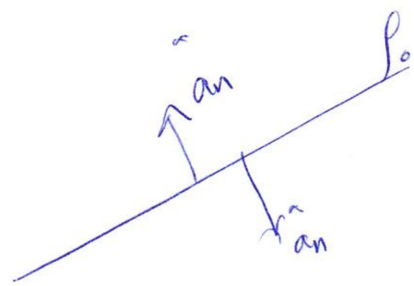
$$\rho_{ps0} = -P_0$$

$z=d$, $\hat{a}_n = \hat{a}_z$, $\rho_{psd} = \bar{P}\cdot\hat{a}_n = P_0 \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z$

$$\rho_{psd} = P_0$$

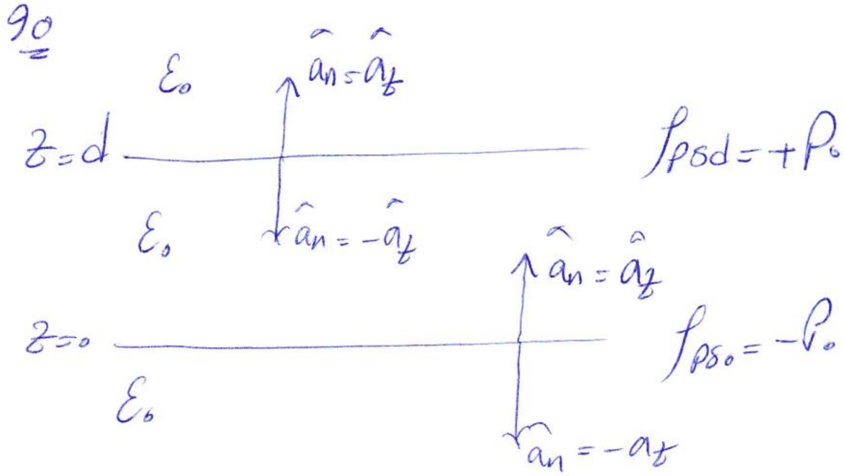
$$\left.\begin{array}{l}\rho_{pv}\\ \rho_{ps}\end{array}\right\} \rightarrow \bar{E}_s \quad , \bar{E} = \bar{E}_a + \bar{E}_s$$

یادآوری:




$$\bar{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \hat{a}_n$$

90




$$\rho_{s0}: \ \bar{E}_{s0} = \begin{cases} \dfrac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & z > 0 \\ \dfrac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}(-\hat{a}_z) & z < 0 \end{cases} \qquad \rho_{sd}: \ \bar{E}_{sd} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z, & z > d \\ +\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(-\hat{a}_z), & z < d \end{cases}$$

$$\therefore \ \bar{E}_s = \begin{cases} 0 & z > d \\ -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\hat{a}_z & 0 < z < d \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_a + \bar{E}_s = \begin{cases} E_0 \hat{a}_z & z > d \\ -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\hat{a}_z + E_0 \hat{a}_z & 0 < z < d \\ E_0 \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$ صادق در این ناحیه است

در این حالت $\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\bar{E} = \bar{P}_0$

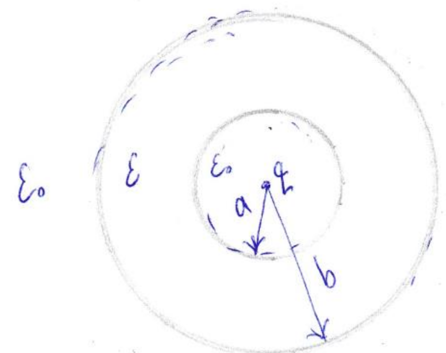
$1 + \chi_e = \varepsilon_r$

$$\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\left[\left(E_0-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right)\hat{a}_z\right]=P_0\,\hat{a}_z$$

$$P_0=E_0\,\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)/\varepsilon_r$$

$$\bar{E}=\begin{cases} E_0\,\hat{a}_z\ , & z>d \\ \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}\,\hat{a}_z\ , & 0<z<d \\ E_0\,\hat{a}_z\ , & z<0 \end{cases}$$

مثال:




$$\bar{E}_a=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r$$

$$\bar{E}_a\sim\frac{1}{r^2}\,\hat{a}_r\longrightarrow\bar{P}=?$$

حدس اولیه، $\bar{P}$ نمی‌توان داشت

براساس تقارن، چون بار مقید القائی، با شعاع r تغییر می‌کند

$$\bar{P}=P(r)\,\hat{a}_r$$

$$\bar{E}=\frac{\bar{P}}{\varepsilon_0\chi_e}\longrightarrow\bar{E}=E(r)\,\hat{a}_r$$

$$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}\longrightarrow\bar{D}=D(r)\,\hat{a}_r$$

$$|\bar{D}|=cte\longrightarrow r=cte$$

$$\oint_S\bar{D}\cdot\bar{ds}=q$$

$$\bar{ds}=\bar{ds}_r=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_r$$

r شعاع دلخواه

$$\bar{D}\cdot\bar{ds} = D(r)\cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\oint_S \bar{D}\cdot\bar{ds} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} D(r)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi r^2 D(r) = q$$

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \longrightarrow \bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \ , \ \forall r$$

$$\cancel{\oint}\ \bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \ , & r<a \ , \ \varepsilon=\varepsilon_0 \ , \ \varepsilon_r=1 \\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{a}_r \ , & a<r<b \ , \ \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r \\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>b \ , \ \varepsilon=\varepsilon_0 \ , \ \varepsilon_r=1 \end{cases}$$

$$\bar{P} = \overbrace{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}^{\varepsilon_0 \chi_e}\bar{E}$$ = در عایق , $a<r<b$

or

$$\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E}+\bar{P} \longrightarrow \bar{P} = \bar{D}-\varepsilon_0\bar{E}$$

$$\bar{P} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{a}_r - \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{a}_r \longrightarrow \bar{P} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\hat{a}_r$$

$\rho_{ps}$:

$$\rho_{psa} = \bar{P}\cdot\hat{a}_n \ , \ \hat{a}_n = -\hat{a}_r \longrightarrow \rho_{psa} = -\frac{q(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon a^2}$$

$$\rho_{psb} = \bar{P}\cdot\hat{a}_n \ , \ \hat{a}_n = \hat{a}_r \longrightarrow \rho_{psb} = \frac{q(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon b^2}$$

$$\rho_{pv} = -\nabla\cdot\bar{P} = 0$$

تاثیر صفحه رسانای زمین شده با شعاع $r = c$ توضیح داده شود.

## جریان پلاریزاسیون:

اگر میدان قطبی کننده تابع زمان باشد $\bar{E}_a(t)$

تغییرات $\bar{P}$ با زمان، منجر به ایجاد جریان است $\bar{E}_a(t) \rightarrow \bar{P}(t)$

این جریان، جریان پلاریزاسیون نام دارد.

طبق معادله پیوستگی: $\oint_s \bar{J}_p\cdot ds = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_{pv}\, dv$

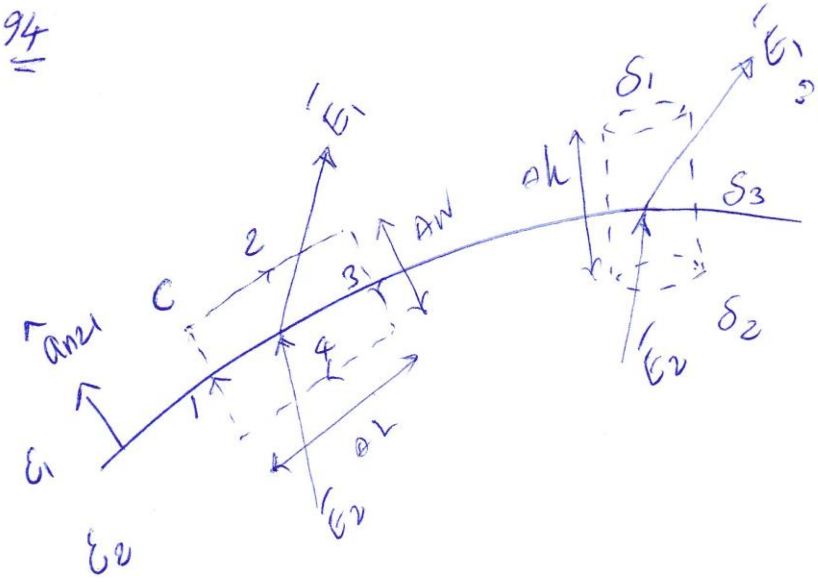
$$-\frac{d}{dt}\int_v -\nabla\cdot\bar{P}\, dv = +\frac{d}{dt}\oint_s \bar{P}\cdot ds$$

$$\therefore\ \bar{J}_p = \frac{\partial}{\partial t}\bar{P}$$

$$\nabla\cdot\bar{J}_p = \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{P}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\bar{P}$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\bar{J}_p = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_{pv}$$

## شرایط مرزی در سطح مشترک دو عایق :




$$\mathrm{I}: \oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 = \cancel{\int_{C_1} \bar{E}\cdot d\bar{l}} + \int_{C_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} + \cancel{\int_{C_3} \bar{E}\cdot d\bar{l}} + \int_{C_4} \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$\Delta W \to 0$ صفر صفر

$$= \bar{E}_1\cdot \Delta \bar{L} + \bar{E}_2\cdot(-\Delta \bar{L}) = 0$$

$$(E_{t1} - E_{t2})\Delta L = 0$$

$\rightarrow \Delta L = 0$ غلط

$\rightarrow E_{t1} = E_{t2}$ درست

$$\mathrm{II}: \oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = \int \rho\, dv$$

$$\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = \int_{S_1} \bar{D}\cdot d\bar{s} + \int_{S_2} \bar{D}\cdot d\bar{s} + \cancel{\int_{S_3} \bar{D}\cdot d\bar{s}}$$

$\Delta h \to 0$ صفر

$$= \bar{D}_1\cdot \Delta \bar{S}_1 + \bar{D}_2\cdot \Delta \bar{S}_2 = \bar{D}_1\cdot \Delta \bar{S} + \bar{D}_2\cdot(-\Delta \bar{S}) = \rho_s \Delta S$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$$

$\rho_s$ : چگالی بار آزاد روی سطح

$$\text{if } \rho_s = 0 \qquad D_{n1} = D_{n2} \longrightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_{n21} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \\ \hat{a}_{n21} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \end{cases}$$

اگر ناحیه دوم هادی باشد :

$$\bar{E}_2 = 0 \,, \quad \bar{D}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \hat{a}_{n21} \times \bar{E}_1 = 0 \\ a_{n21} \cdot \bar{D}_1 = \rho_s \end{cases}$$

حل مثال :