۲ میان ترم ۶ نمره‌ای (حذفی) | منابع: ۱) برادران رحیمی (نقش اول)
پایان ترم ۸ نمره | ۲) خبیر (نقش ۲)
حل تمرین ۲ نمره

فصل اول: سری فوریه

توابع متناوب: تعریف: $T>0 \quad \forall x \in D_f \;,\; x+T \in D_f$

① T کوچکترین : دوره‌ی تناوب اصلی تابع

$f(x) = f(x+T)$

$f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} T$

$f(x) \longrightarrow 2T$

$\vdots$

$f(x) \longrightarrow nT$

② $f(x) \longrightarrow T \rightsquigarrow f(x+T) = f(x)$

$g(x) \longrightarrow T \rightsquigarrow g(x+T) = g(x)$

$h(x) = af(x) + bg(x) \longrightarrow T$

اثبات

$h(x+T) = a\overbrace{f(x+T)}^{f(x)} + b\overbrace{g(x+T)}^{g(x)}$

$h(x) = af(x) + bg(x) \Rightarrow \boxed{h(x) = h(x+T)}$

Subject:
Year: Month: Date:
NOTE BOOK

③ ادوار ثابت با ضرب در عدد دلخواه متناوب خواهد بود.

④ $F(x) \to T_1$, $g(x) \to T_2$ $\longrightarrow$ $\boxed{aF(x) + bg(x) \to \text{ک.م.م}}$

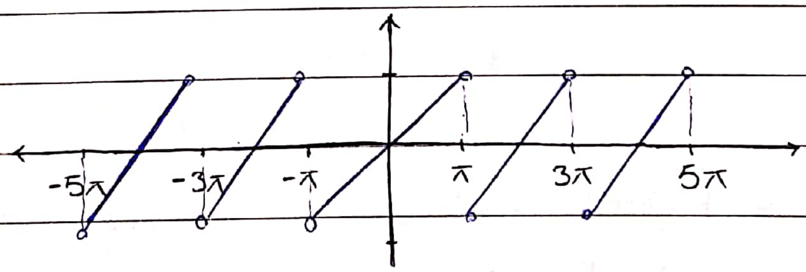
⑤ $F(x) \to T$ $\qquad \boxed{F(ax) \to \frac{T}{a}}$

⑥ $F(x) \to T$ $\qquad \boxed{F\left(\frac{x}{b}\right) \to bT}$

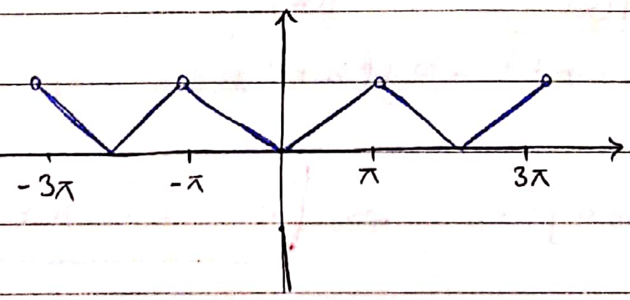
$\begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{n}$ $\qquad$ $\begin{matrix} \cos \frac{2n\pi}{T} x \\ \sin \frac{2n\pi}{T} x \end{matrix} \longrightarrow T = \frac{T}{n}$

مثال: نمودارهای زیر را رسم کنید.

1) $F(x) = x \qquad -\pi < x < \pi \ , \ 2\pi$

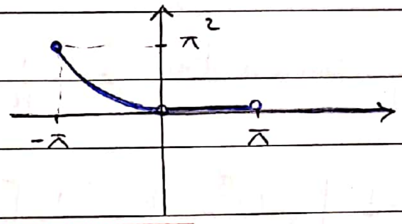


2) $F(x) = |x| \qquad -\pi < x < \pi \ , \ 2\pi$



Arang

۳) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$



$T = \frac{2\pi}{a}$

$$a_0 + \left(b_1 \sin \frac{x}{2\pi} + a_1 \cos \frac{x}{2\pi}\right) + \left(b_2 \sin \frac{2x}{\pi} + a_2 \cos \frac{2x}{\pi}\right) + \cdots$$

$$+ \left(a_n \cos \frac{nx}{\frac{2\pi}{n}} + b_n \sin \frac{nx}{\frac{2\pi}{n}}\right)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\begin{cases} a_0 = \checkmark = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} f(x)\, dx \\ a_n = \checkmark = \frac{1}{\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} f(x) \cos nx\, dx \\ b_n = \checkmark = \frac{1}{\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} f(x) \sin nx\, dx \end{cases}$$

نکته:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

مثال:

1) $\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[\cos n\pi - \cos 0\right]$, where $\cos n\pi = (-1)^n$ and $\cos 0 = 1$

$= -\frac{1}{n}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{1}{n}\left[1-(-1)^n\right] \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

2) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right]$, where $\sin n\pi = 0$

3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos nx\, dx$

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\cos nx$
1	$-$	$\frac{1}{n}\sin nx$
0		$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$= \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx\, dx$

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\sin nx$
1	$-$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0		$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$= -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

5) $\int x^2\cos nx\, dx$

مشتق		انتگرال
x^2	$+$	$\cos nx$
$2x$	$-$	$\frac{1}{n}\sin nx$
2	$+$	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0		$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

$= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx + C$

6) $\int e^{x}\cos nx\,dx$

مشتق	انتگرال
e^{x} (+)	$\cos nx$
e^{x} (−)	$\frac{1}{n}\sin nx$
e^{x}	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$
$+\int$	

$$= \frac{e^{x}}{n}\sin nx + \frac{e^{x}}{n^2}\cos nx - \int \frac{e^{x}}{n^2}\cos nx\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{x}\cos nx\,dx + \int \frac{e^{x}}{n^2}\cos nx\,dx$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\int e^{x}\cos nx\,dx = \frac{e^{x}}{n}\left(\sin nx + \frac{1}{n}\cos nx\right)$$

7) $\int e^{x}\sin x\,dx$

8) $\int x^{e}\sin nx\,dx$

9) $\int x e^{2x}\,dx$

جلسه دوم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

اثبات a_0 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx\,dx}}_{(a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x)}^{0} + \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\,dx}^{0} + \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx$$

$$\int_{0 \text{ یا } -\pi}^{2\pi \text{ یا } \pi} f(x)\,dx = a_0 x\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0\pi - a_0(-\pi) = 2\pi a_0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx}$$

$\langle 2\pi \rangle$ → در یک دوره تناوب

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \;,\quad \int_{0}^{2\pi} \sin nx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx \;,\quad \int_{0}^{2\pi} \cos nx\, dx$$

نکته: انتگرال توابع sin و cos در یک دوره تناوب صفر می شود.

اثبات a_n:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\times \cos mx \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx\, dx}_{1} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx\, dx}_{2}$$

$$+ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos mx\, dx}_{3}$$

1) $$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx = a_0 \frac{1}{m} \sin mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{m} \left[\sin m\pi - \sin m(-\pi) \right]$$

$$= \frac{a_0}{m} \left[2 \cancel{\sin m\pi} \right] = 0$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n \left[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x \right] dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\, dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\, dx}$$

$$\begin{cases} \text{if } n \neq m \longrightarrow 0 \\ \text{if } n = m \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \times 2\pi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \end{cases}$$

۳) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \times \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx}_{0}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\,dx}_{0}\right]=0$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_n\pi$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{<2\pi>} f(x)\cos mx\,dx}$$

* برای a_0 از طرفین انتگرال می‌گیریم ، برای a_n طرفین را در $\cos mx$ ضرب می‌کنیم و انتگرال

می‌گیریم برای b_n طرفین را در $\sin mx$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

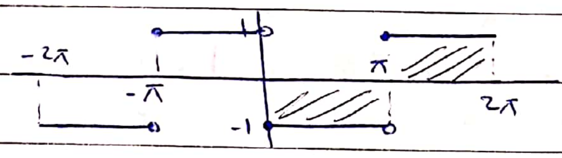
$T=$ ۷

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{<T>} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{<T>} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{<T>} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

مثال: سری فوریه توابع زیر را بدست آورید.

1) 

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x = \frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \sin nx$$

$$T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} -1\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T \rangle} f(x) \cos \frac{2n\pi}{T} x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{2n\pi}{2\pi} x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} -1 \cos nx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1 \cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{-1}{n} \sin nx}\Big|_0^{\pi} + \cancel{\frac{1}{n} \sin nx}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T \rangle} f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{2n\pi}{2\pi} x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} -1 \sin nx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} \cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cos nx\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(\cos n\pi - \cancelto{1}{\cos 0}) - \frac{1}{n}(\cancelto{1}{\cos 2n\pi} - \cos n\pi)\right]$$

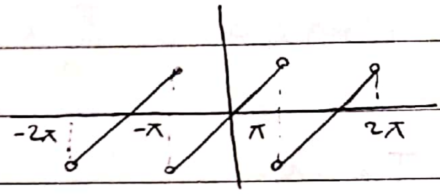
$$= \frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{-4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

نکته : سری فوریه بیانگر تابع است پس زوج یا فرد بودن تابع در سری فوریه تاثیر دارد.

① اگر تابع فرد باشد باید cos در سری فوریه حذف شود $\Leftarrow$ $\underline{a_n = 0}$

② اگر تابع زوج باشد باید sin در سری فوریه حذف شود $\Leftarrow$ $\underline{b_n = 0}$

۲) $f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x$$

$T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\pi^2 - (-\pi)^2 \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(x) \cos \frac{2n\pi}{T} x\,dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{2n\pi}{2\pi} x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \Big[\Big(\frac{\pi}{n} \cancel{\sin n\pi}^{\,0} + \frac{1}{n^2} \cos n\pi \Big)$$

$$- \Big(-\frac{\pi}{n} \cancel{\sin(-n\pi)}^{\,0} + \frac{1}{n^2} \cos(-n\pi) \Big) \Big] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x\,dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \cancel{\frac{1}{n^2} \sin nx}^{\,0} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{-\pi}{n} \cos n\pi \right) - \left(\frac{-(-\pi)}{n} \cos n\pi \right) \right]$$

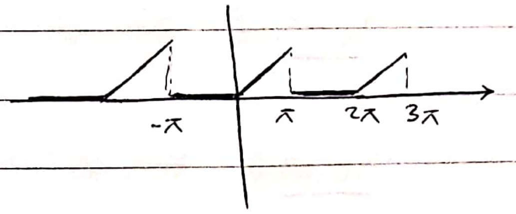
$$= \frac{-2\pi}{n\pi} \cos n\pi = \frac{-2}{n} \cos n\pi$$

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\sin nx$
1	$-$	$-\frac{1}{n} \cos nx$
0		$-\frac{1}{n^2} \sin nx$

Subject:
Year: Month: Date:
NOTE BOOK

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{n}\cos n\pi\right)\sin nx$$ سری فوریه

۳) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int f(x)\cos nx\,dx$$

مشتق	انتگرال
x (+)	$\cos nx$
1 (−)	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cancel{\sin nx} + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - \cancel{\cos 0}\right) = \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

مشتق	انتگرال
x (+)	$\sin nx$
1 (−)	$\frac{-1}{n}\cos nx$
0	$\frac{-1}{n^2}\sin nx$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\cancel{\sin nx}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0\right) = \frac{-1}{n}\cos n\pi = \frac{-(-1)^n}{n} \qquad \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \\ \frac{-1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)\cos nx - \frac{1}{n}\cos n\pi \sin nx$$

سری فوریه

جلسه سوم : * محاسبه a_0 از روی نمودار * سری فوریه برای توابع متناوب

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$f_1(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}x + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}x$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}x + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}x + a_2 \cos\frac{2\pi\times 2}{T}x + b_2 \sin\frac{4\pi}{T}x$$

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x) \qquad \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

تابع زوج :

$$a_n = \frac{2\times 2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx \qquad b_n = 0$$

تابع فرد :

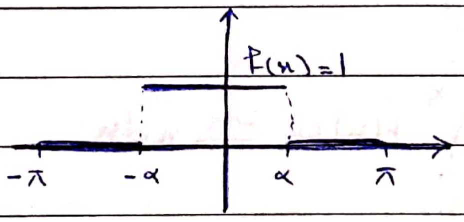
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$a_n = 0 \qquad a_0 = 0$$

$\overset{+}{\text{زوج}} = \overset{-}{\text{فرد}} \times \overset{-}{\text{فرد}}$

مثال: با توجه به سری فوریه تابع $f(x)$ حاصل سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$ را بدست آورید؟

(کامپیوتری ۷۷)



نسبت به y قرینه ← زوج

$$T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(x)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\alpha} 1\times dx = \frac{2\alpha}{2\pi} = \boxed{\frac{\alpha}{\pi}}$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{2n\pi}{2\pi}x\,dx$$

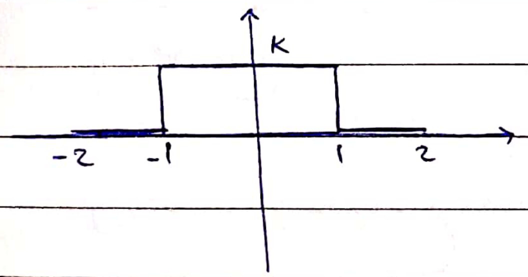
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1\times\cos nx\,dx = \boxed{\frac{2}{\pi n}\sin n\alpha}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha\right)\cos nx$$

$$x = 0 \Rightarrow \underbrace{f(0)}_{1} = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\times\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$$

مثال: ضرایب سری فوریه تابع مقابل را حساب کنید.



زوج

$$T = 4$$

$$a_0 = \frac{K}{2}$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \int_0^1 k\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = k\times\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1$$

$$= \frac{2k}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}-0\right] = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

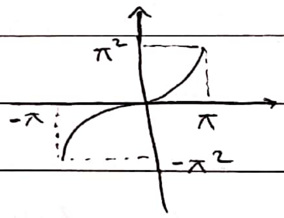
$$f(x) = \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)}_{a_n}\cos\frac{n\pi}{2}x + 0$$

مثال: سری فوریه تابع زیر را بنویسید.

$f(x) = x\,|x| \qquad -\pi < x < \pi$

فرد ← x ، زوج ← $|x|$ ، فرد

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0<x<\pi \\ -x^2 & -\pi<x<0 \end{cases} \qquad a_0 = 0, \quad a_n = 0$$



$$b_n = \frac{2\times 2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin\frac{2n\pi}{2\pi}x\,dx$$

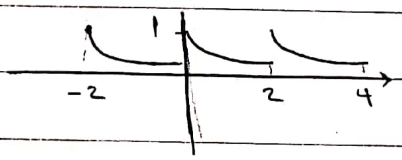
مشتق	انتگرال
x^2 (+)	$\sin nx$
$2x$ (−)	$-\frac{1}{n}\cos nx$
2 (+)	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$+\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi^2}{n}\cos n\pi + \cancel{\frac{2\pi}{n^2}\sin n\pi}^{\,0} + \frac{2}{n^3}\cos n\pi - \frac{2}{n^3}\cancel{\cos 0}^{\,1}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\cos n\pi\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right) - \frac{2}{n^3}\right)$$

مثال: تابع $f(x)=e^{-x}$ ، $0<x<2$ مفروض است در سری فوریه این تابع مقدار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ را بدست آورید.



$T=2$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{(T)} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_0^2=\frac{-1}{2}\left[e^{-2}-1\right]$$

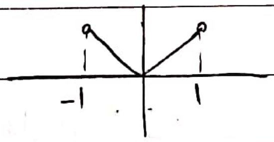
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx=\int_0^2 e^{-x}\cos n\pi x\,dx$$

$$f(x)=a_0+\sum a_n\underbrace{\cos\frac{2n\pi}{T}x}_{1}+b_n\underbrace{\sin\frac{2n\pi}{T}x}_{0}$$

مثال: ضریب $\cos 5\pi x$ در سری کسینوسی تابع $f(x)=x$ ، $0<x<1$ را بدست آورید.

زوج

(ارشد ۷۸)



$T=2$ $\quad a_0=\frac{1}{2}$ $\quad b_n=0$

مشتق	انتگرال
x	$\cos 5\pi x$
1	$\frac{1}{5\pi}\sin 5\pi x$
0	$\frac{-1}{25\pi^2}\cos 5\pi x$

$$a_5\cos 5\pi x = a_5 = ?$$

$$a_5=\frac{2}{T}\int f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx=\frac{2\times 2}{2}\int_0^1 x\cos 5\pi x\,dx$$

$$=2\int_0^1 x\cos 5\pi x\,dx=2\left(\frac{x}{5\pi}\sin 5\pi x+\frac{1}{25\pi^2}\cos 5\pi x\right)\Big|_0^1$$

$$=2\left[\left(\frac{2}{5\pi}\underbrace{\sin 5\pi}_{0}+\frac{1}{25\pi^2}\underbrace{\cos 5\pi}_{1}\right)-\frac{1}{2\cdot\pi^2}\right]=\boxed{\frac{-4}{25\pi^2}}$$

Subject: «جلسه چهارم»
Year: Month: Date:

NOTE BOOK

① مشتق گیری از سری فوریه

② انتگرال گیری از سری فوریه

③ تساوی پارسوال

① $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x$

$f'(x) = 0 + \sum -a_n \frac{2n\pi}{T} \sin \frac{2n\pi}{T} x + b_n \frac{2n\pi}{T} \cos \frac{2n\pi}{T} x$

۱. تکه‌ای پیوسته باشد.

۲. $f(L) = f(-L)$ ← نیم‌طرفه $\frac{[-L, L]}{T = 2L}$

② $\int f(x)dx = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{T}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{T} x - b_n \frac{T}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi}{T} x + C$

③ $\frac{2}{T} \int_{(T)} f^2(x)\, dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$

مثال: اگر $0 < x < 2$ و داشته باشیم $x = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)$

در این صورت سری فوریه تابع x^2 در فاصله $0 < x < 2$ را بدست آورید. (کامپیوتر ۸۰)

$f(x) = x \qquad 0 < x < 2$

$\int x dx = \frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{-2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3\pi} \cos \frac{3\pi x}{2} + \dots \right]$

$+ C$

Arang

$$x^2=\frac{8}{\pi}\left[\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3\pi}\cos\frac{2\pi x}{2}+\cdots\right]+\underbrace{C'}_{\frac{4}{3}}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

مثال: اگر سری فوریه $-\pi<x<\pi$ ، $f(x)=|x|$ برابر عبارت زیر باشد:

$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right]$ در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را بیابید؛ (ورودی کامپیوتر ۸۰)

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\underbrace{\sin(2n+1)x}_{\text{باید ضرب شم}}$$

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ -x & -\pi<x<0\end{cases}\qquad g(x)=\int f(x)\,dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2} & 0<x<\pi\\ -\frac{x^2}{2} & -\pi<x<0\end{cases}$$

نقطه پیوستگی

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}(-1)^n$$

مثال: هرگاه سری فوریه تابع $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ ، $f(x)=x^2$ بصورت زیر باشد:

$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ حاصل سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را بیابید.

$$\frac{2}{T}\int_{T} f^2(x)\,dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$$

$$\frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx = 2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\right]^2 + 0$$

مثال: اگر بسط سری فوریه کسینوسی $0<x<\pi$ ، $f(x)=\sin x$ بصورت زیر باشد

$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$ مقدار سری $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\dots$ ؟

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{(n-1)(n+1)}\right)\cos \pi x$$

$$\frac{2}{T}\int f^2(x)\,dx = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\times 2}{\pi(2k+1)(2k-1)}\right)^2$$

$$\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^2(2k-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\times 2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\times\left[\frac{1}{2}\times\pi\right] = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\dots\right]$$

«جلسه پنجم»

فرم مختلط سری فوریه:

$$2\pi \rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos \underbrace{nx}_{\theta} + b_n \sin \underbrace{nx}_{\theta}$$

$$\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right]+b_n\left[\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right]$$

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{K} e^{inx}\underbrace{\left[\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right]}_{C_n}+e^{-inx}\underbrace{\left[\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right]}_{\substack{K_n\\ C_{-n}}}=\underbrace{a_0}_{C_0}+\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$C_n=\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}=\frac{1}{2}\left[a_n-ib_n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{(T)} F(x)\cos nx\,dx-i\frac{1}{\pi}\int_{(T)} F(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{(T)} F(x)\underbrace{(\cos nx-i\sin nx)}_{e^{-inx}}dx\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} F(x)e^{-inx}\,dx$$

$$K_n=\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}=\frac{1}{2}\left[a_n+ib_n\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} F(x)e^{inx}\,dx$$

2π
$$\begin{cases} F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int F(x)e^{-inx}\,dx \end{cases}$$

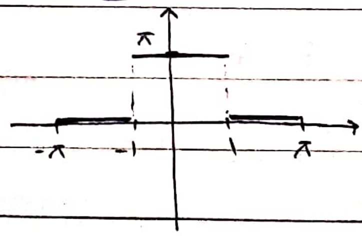
(با $n=-\infty$ تا $n=\infty$)

(C_n و K_n را بوجود می‌آوریم.)

T
$$\begin{cases} F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}x} \\ C_n=\frac{1}{T}\int F(x)e^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\,dx \end{cases}$$

مثال: سری فوریه مختلط تابع $F(x)=\begin{cases}\pi & |x|<1\\ 0 & 1<|x|<\pi\end{cases}$, $F(x+2\pi)=F(x)$ را بدست آورید.

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}x}$$



$$C_n=\frac{1}{T}\int F(x)e^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\,dx$$

Arang

$$T=2\pi \Rightarrow c_n=\frac{1}{2\cancel{\pi}}\int_{-1}^{1}\pi e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-in}e^{-inx}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{-2in}\left[e^{-in}-e^{in}\right]=\frac{1}{n}\times\boxed{\frac{e^{in}-e^{-in}}{2i}}=\frac{\sin n}{n}\quad,\quad c_0=1$$

$$f(x)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{n=\infty}\frac{\sin n}{n}e^{inx}+1$$

مثال: اگر سری فوریه، فرم مختلط فوریه $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$ بوده و تمامی c_n ها حقیقی باشند، آنگاه تابع f چگونه است؟

الف) زوج ✓ ب) فرد

ج) نه فرد نه زوج د) چنین فرضی اشتباه است

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-i\cancel{b_n}^{\,0})$$

چون حقیقی است.

مثال: ضریب $\overset{a_0}{\hat{c}}$ در سری فوریه مختلط تابع $-1<x<1$ ، $f(x)=x$ را بدست آورید.

تابع فرد ⇐ انتگرال مساحت زیر نمودار صفر

(مهندسی هسته‌ای ۷۷)

$$c_0=\frac{1}{T}\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{2}\Big|_{-1}^{1}=0$$

مثال: با کمک سری فوریه تابع $-1<x<1$ ، $f(x)=\cosh x$ حاصل سری زیر را بدست آورید.

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}$$ (کامپیوتر ۸۰)

Subject:
Year: Month: Date:
NOTE BOOK

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - i\cancel{b_n}^{\,0}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\cosh x\cos n\pi x\,dx$$

$$\overbrace{\int_{-1}^{1}\cosh x\cos n\pi x\,dx}^{I} = \frac{1}{n\pi}\cosh x\sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2}\sinh x\cos n\pi x$$

$$\underbrace{-\int\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\cosh x\,dx}_{\frac{-I}{(n\pi)^2}}$$

مشتق	انتگرال
$\cosh x$ (+)	$\cos n\pi x$
$\sinh x$ (−)	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
$\cosh x$ (+ $\int$)	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

$$\Rightarrow I\left(1+\frac{1}{(n\pi)^2}\right) = \frac{1}{n\pi}\cosh x\sin n\pi x$$

$$+\frac{1}{(n\pi)^2}\sinh x\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1\times 2}{(n\pi)^2}\sinh(1)\cos n\pi$$

$$\int_{-1}^{1}\cosh x\cos n\pi x = \left(\frac{2}{\cancel{(n\pi)^2}}\sinh(1)\cos n\pi\right)\times\frac{\cancel{(n\pi)^2}}{1+(n\pi)^2} = \frac{2\sinh(1)\cos n\pi}{1+(n\pi)^2}$$

$$c_n = \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}\times\frac{2\sinh(1)\cos n\pi}{1+(n\pi)^2}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh(1)\cos n\pi}{1+(n\pi)^2}e^{in\pi x}$$

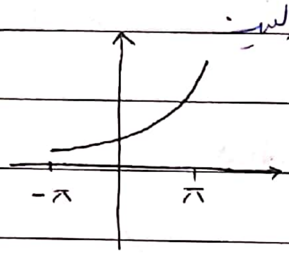
$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh(1)\cos n\pi}{1+(n\pi)^2}$$

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh(1)\cos n\pi}{1+(n\pi)^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} = \frac{1}{\sinh(1)}$$

مثال: $-\pi < x < \pi$ ، $f(x) = e^{x}$, $f(x) = f(x+2\pi)$

الف) ضرایب فرم حقیقی سری فوریه (a_0 , a_n , b_n) را محاسبه کنید.



ب) ضرایب فرم مختلط سری فوریه C_n را محاسبه کنید.

ج) رابطه $C_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}$ را تحقیق کنید.

$T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos\frac{2n\pi}{2\pi}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^2}{\pi\,(n^2+1)}\cos n\pi$$

«جلسه ششم»

$$g(x) = \lim_{T\to\infty} f_{(T)}(x)$$

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$g(x) = \underbrace{\frac{1}{T}\int f(x)dx}_{*\ 0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{T}\int f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right]\cos\frac{2n\pi}{T}x + \dots$$

$$+\left[\frac{2}{T}\int f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right]\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

* شرط دیریکله: $|f(x)|$ از $(-\infty, \infty)$ باید مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد.

$$\frac{2n\pi}{T} = \omega_n$$
$$\frac{2(n+1)\pi}{T} = \omega_{n+1}$$
$$\Rightarrow \omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{\frac{2}{T} = \frac{\Delta\omega}{\pi}}$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\left[\left(\underline{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega_n x\,dx}\right)\cos\omega_n x+\right.$$

$$\left.+\left(\underline{\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)\sin\omega_n x\,dx}\right)\sin\omega_n x)\right]$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega_n x+B(\omega)\sin\omega_n x\right]d\omega$$

T: ∞ میل میکند ⇐ $\Delta\omega$: صفر میل میکند ⇐ $\sum\Delta\omega=\int_0^\infty$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\left[\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}\right]+B(\omega)\left[\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{i\omega x}\underbrace{\left[A(\omega)-jB(\omega)\right]}_{C_\omega}+e^{-i\omega x}\underbrace{\left[A(\omega)+jB(\omega)\right]}_{K_\omega}d\omega$$

$$C(\omega)=A(\omega)-jB(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx-j\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[\underline{\cos\omega x-j\sin\omega x}\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\underline{e^{-i\omega x}}\,dx$$

Arang

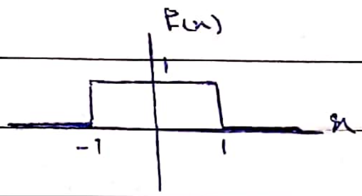
Subject:
Year: Month: Date: NOTE BOOK

$$K(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$C(-\omega) = K(\omega)$$

مثال: انتگرال فوریه تابع مقابل را بنویسید:



→ زوج

تابع فرد → $A(\omega)=0$

تابع زوج → $B(\omega)=0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) d\omega$$

$$B(\omega)=0 \rightarrow A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} 1\cos\omega x\, dx = \frac{2\sin\omega x}{\omega}\Big|_{0}^{1} = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\, d\omega$$

نکته:

1) تابع زوج → $B(\omega)=0,\ A(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$

2) تابع فرد → $A(\omega)=0,\ B(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$

3) نقطه پیوستگی تابع → مقدار انتگرال فوریه = مقدار خود تابع

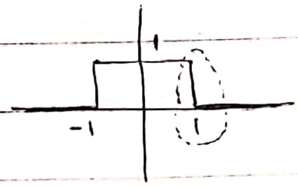
4) نقطه ناپیوستگی → مقدار انتگرال فوریه = $\dfrac{(\text{حد مقدار راست} + \text{حد مقدار چپ})}{2}$

Arang

مثال: $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ به صورت زیر است $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$

حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}\,d\omega$ ارزیابی نمایید: (مشابه تست ۸۳)

$f(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega\,d\omega$ $\qquad \frac{1+0}{2}$



$f(1)\times\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega\,d\omega$

$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

مثال: شکل انتگرال فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ عبارت است از:

$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega$ در این صورت حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}\,dx$ ؟

$x^2=u \to \frac{2x\,dx}{x^2}=\frac{du}{x^2} \Rightarrow \frac{2}{x}dx=\frac{du}{u}$

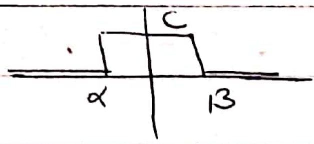
طرفین را تقسیم کردیم

$I=\int_0^\infty \sin u\,\frac{du}{2u}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

مثال: در صورتی که $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ C & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$ و همچنین $\beta>0$, $\alpha<0$, C

اعداد ثابت و معادله برابر $f(x)=\int_0^\infty \overbrace{\frac{\sin\lambda}{\lambda}}^{A(\omega)}\cos\lambda x\,d\lambda$ باشد α,β,C ؟

$B(\omega)=0 \to$ زوج $\to \alpha=-\beta$



Subject:
Year: Month: Date:

NOTE BOOK

$$A(\omega)=\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\cos\omega x\,dx=\int_{-\beta}^{\beta} c\cos\omega x\,dx=\frac{c}{\omega}\sin\omega x\Big|_{-\beta}^{\beta}$$

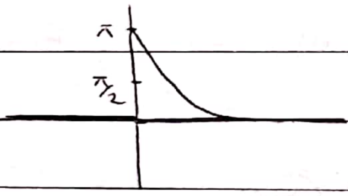
$$=\frac{c}{\omega}\left[2\sin\omega\beta\right]=\frac{2c}{\omega}\sin\omega\beta$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{\omega}\sin\omega\beta=\frac{\sin\lambda}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{1}{2}\\ \beta=1\\ \alpha=-1\end{cases}$$

مثال: نشان دهید

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\\ \pi e^{-x} & x>0\end{cases}$$

نقطه ناپیوستگی (میانگین چپ و راست شرط)



$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cos\omega x\,dx=\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin\omega x\,dx=\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\sin\omega x\,dx$$

مشتق	انتگرال
e^{-x} (+)	$\cos\omega x$
$-e^{-x}$ (−)	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
e^{-x} (+)	$\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\omega x\,dx}_{I}=\frac{e^{-x}}{\omega}\sin\omega x+\frac{e^{-x}}{\omega}\cos\omega x-\underbrace{\int\frac{e^{-x}}{\omega^2}\cos\omega x\,dx}_{I/\omega^2}$$

$$I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{e^{-x}}{\omega}\left(\sin\omega x-\cos\omega x\right)$$

$$I=\frac{\omega}{1+\omega^2}e^{-x}\left(\cos\omega x-\sin\omega x\right)\Big]_0^{\infty}=-\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$\Rightarrow A(\omega)=\frac{-\pi\omega}{1+\omega^2}$$

ادامه دارد...

Arang

Scanned by CamScanner

Subject: « جلسه هفتم »

Year: Month: Date:

NOTE BOOK

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه کسینوسی

تبدیل فوریه سینوسی

دید کلی از تبدیل سری فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx \quad , \quad B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\right)\cos\omega x\,d\omega+\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx\right)\sin\omega x\,d\omega\right)$$

فرض تابع زوج: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(2\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\right)\cos\omega x\,d\omega$ (1)

$B(\omega)=0$

فرض تابع فرد: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(2\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx\right)\sin\omega x\,d\omega$ (2)

$A(\omega)=0$

(1) $$f(x)=f_c^{-1}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\underbrace{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\right)}_{f_c(\omega)\ \text{تبدیل فوریه کسینوسی}}\cos\omega x\,d\omega$$

(2) $$f(x)=f_s^{-1}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\underbrace{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx\right)}_{f_s(\omega)\ \text{تبدیل فوریه سینوسی}}\sin\omega x\,d\omega$$

Arang

Subject:
Year: Month: Date:
NOTE BOOK

* خصوصیات تبدیل فوریه:

① $F_c(af+bg)=aF_c(f)+bF_c(g)$

② $F_s(af+bg)=aF_s(f)+bF_s(g)$

می‌توان نشان داد هرگاه $f(x)$ تابعی پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد و $f'(x)$ قطعه‌ای پیوسته بر هر بازه متناهی باشد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ آنگاه خواهیم داشت:

③ $F_s(f')=-\omega F_c(f)$

④ $F_c(f')=\omega F_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(0)$

⑤ $F_s(f'')=-\omega^2 F_s(f)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$

⑥ $F_c(f'')=-\omega^2 F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$

⑦ $F(f')=i\omega F(f)$

⑧ $F(f^{(n)})=(i\omega)^n F(f)$

اثبات ④:

مشتق	انتگرال
$\cos\omega x$	$f'(x)$
$-\omega\sin\omega x$	$f(x)$

$F_c(f')=\omega F_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(0)$

$F_c(f')=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos\omega x\,dx$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\underbrace{f(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty}_{\to X}+\int_0^\infty f(x)\,\omega\sin\omega x\,dx\right]$

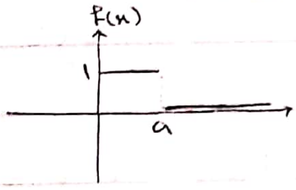
$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-f(0))+\omega F_s(f)$

Arang

(Seti.org) (سری فوریه، فوریه کسینوس سینوس)

Subject:
Year: Month: Date:

مثال: تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$ را محاسبه کنید.



$$F_s(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} 1\times\sin\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}(-\cos\omega x)\Big|_0^a$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}\left[\cos\omega a-1\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{(1-\cos\omega a)}{\omega}\right]$$

شکل در سمت چپ هم ادامه دارد اما چون ما در فرمول که $\times 2$ کردیم دراینجا نیازی نیست.

$$\int_{-\infty}^{\infty}=2\int_0^{\infty}$$

$$F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} 1\times\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^a=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega}\sin\omega a$$

مثال: با کمک قضیه زیر تبدیل کسینوسی تابع $f(x)=e^{-ax}$ $a>0$ را بیابید.

$$F_c(\underset{*}{f''})=-\omega^2F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\underset{\checkmark}{f'(0)}$$

$\checkmark\ f'(x)=-ae^{-ax}$

$*\ f''(x)=a^2e^{-ax}$

$$a^2F_c(f)=-\omega^2F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-a)$$

$$=F_c(f)\left[a^2+\omega^2\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a\Rightarrow F_c(f)=\frac{\sqrt{2/\pi}\,a}{a^2+\omega^2}$$

مثال: مطلوب است انتگرال فوریه $f(x)=e^{-kx}$ $k>0$ وقتی که $x>0$ و $f(-x)=f(x)$.

مثال: مطلوب است انتگرال فوریه $f(x)=e^{-kx}$ $k>0$ وقتی که $x>0$ و $f(-x)=-f(x)$.

Arang

مسائل ترم پارسال

مثال: ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x}{1-\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega = \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x}{1-\omega^2}\,d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}, \quad B(\omega) = 0 \longrightarrow$$ تابع زوج

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\cos(\omega x + x) + \cos(\omega x - x)\right]dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x + \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1-\omega}\cdot\sin(1-\omega)x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+\omega}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega\pi}{2}\right)\right] + \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1-\omega}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+\omega}\left[\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}\cos\frac{\omega\pi}{2} + \sin\frac{\omega\pi}{2}\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}\right] + \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1-\omega}\left[\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}\cos\frac{\omega\pi}{2} - \sin\frac{\omega\pi}{2}\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+\omega}\cos\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1-\omega}\cos\frac{\omega\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1-\omega}}_{\frac{1-\omega+1+\omega}{1-\omega^2}}\right] = \frac{\pi\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega = \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

مثال: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi(1-\cos\pi\omega)}{\omega}\sin\omega x\, d\omega = \begin{cases}\pi/2 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

تابع فرد $\longrightarrow$ $A(\omega)=0 \quad , \quad B(\omega)=\frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}$

$$B(\omega)=2\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin\omega x\, dx = -\pi \times \frac{1}{\omega}\cos\omega x \Big|_0^\pi$$

$$=\frac{-\pi}{\omega}\left[\cos\omega\pi-\cos 0\right]=\frac{-\pi}{\omega}\left[\cos\omega\pi-1\right]=\frac{\pi}{\omega}(1-\cos\pi\omega)$$

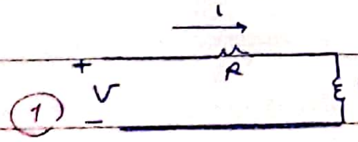
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{\omega}(1-\cos\pi\omega)\sin\omega x\, d\omega = \int_0^\infty \frac{1}{\omega}(1-\cos\pi\omega)\sin\omega x\, d\omega$$

نکته: انتگرال فوریه سینوسی توابعی است که دوره تناوب ندارند و سری فوریه سینوسی توابع متناوب است.

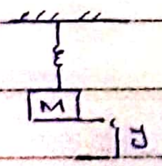
« جلسه هشتم »

فصل دوم: «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی»

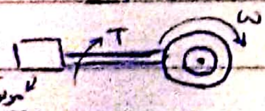
مقدمه: قبل از اینکه با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی آشنا شویم، چند مثال فیزیکی که با معادلات دیفرانسیل معمولی حل می‌شوند را ذکر می‌کنیم:

(1) 

$$V=Ri+L\frac{di}{dt}$$

(2) 

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Ky=F$$

(3) 

$$T=J\frac{d\omega}{dt}+B\omega$$

لختی اینرسی — ضریب اصطکاک

نکته: در مسائل که تابع متغیرهای در دو فیزیک ذکر شده (جریان، نیرو، دما، فشار ...) همگی تابعی از یک متغیر مستقل زمان هستند. $i(t), v(t), F(t), y(t), T(t), \omega(t), \ldots$

نکته: سیستم‌های انتقال حرارت و مسائل دیگر که متغیرهای آن تابعی از چند متغیر مستقل (زمان و مکان) هستند.

مثال: میدان الکتریکی که نه تنها به زمان، بلکه به مکان نیز بستگی دارد.
میدان مغناطیسی نه تنها به زمان، بلکه به مکان نیز وابسته است.

تعاریف اولیه: یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله‌ای است که اساساً شامل یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مختلف و خود آن متغیرها را شامل خواهد بود.

(I) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله یک بعدی موج

(II) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله یک بعدی گرما

(III) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ معادله دو بعدی لاپلاس

(IV) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$ معادله دو بعدی پواسون

(V) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ معادله ۳ بعدی پواسون

مرتبه: مرتبه بالاترین مشتق موجود، مرتبه معادله گفته می‌شود.

(مرتبه اول)
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Subject:
Year: Month: Date:

درجه: درجه یک معادله، درجه بالاترین مشتق موجود در معادله است.

$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ مرتبه ۱ و درجه ۱ — $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ مرتبه ۱ و درجه ۲

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ مرتبه ۲ و درجه ۱ — $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+x=0$ درجه ۱ و مرتبه ۲

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4+n=x$ مرتبه ۲ و درجه ۳

معادله خطی: اگر معادله نسبت به متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن از درجه اول باشد، آن معادله را خطی گوییم.

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u$ خطی

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$ غیر خطی

همگن: اگر هر جمله معادله شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن باشد معادله را همگن گوییم و در غیر این صورت آن را غیر همگن گوییم.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$ همگن

$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xu=y\frac{\partial u}{\partial x}$ همگن

$y^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy=0$ غیر همگن

نکته: اصل انطباق: اگر $u_1, u_2, \dots, u_k$ حل های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن باشد

آنگاه به ازای ضرایب ثابت $c_1, c_2, \dots, c_k$ ترکیب خطی $u(x,y)=c_1u_1+\dots+c_ku_k$

Arang

پس جوابی از معادله است این تابع را در اصل انطباق بنویسیم.

مثال ۱: در ODE (معمولی)

$$y' + 2y = 0 \xrightarrow{\text{جواب}} ce^{-2x}$$

مثال ۲: در PDE نشان دهید توابع زیر در معادله دیفرانسیل صدق می‌کنند.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

① $u = x^2 - y^2 \; \begin{cases} u_{xx} = 2 \\ u_{yy} = -2 \end{cases} \to 0 \checkmark$

② $u = e^x \cos y \; \begin{cases} u_{xx} = e^x \cos y \\ u_{yy} = -e^x \cos y \end{cases} \to 0 \checkmark$

③ $u = x^2 - 3xy$

④ $u = \ln(x^2 + y^2)$

⑤ $u = \sin x \cosh y$

⑥ $u = \arctan(y/x)$

نکته: برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان با استفاده از روش حل معادلات در حل معادلات دیفرانسیل معمولی حل کرد.

مثال: معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ را در صورتی که u تابعی دو متغیره برحسب x و y باشد را حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = f(y) \xrightarrow{\text{مثال}} y^2 + 1 \quad , \quad \sin y + 10$$

مثال: معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ را در صورتی که u تابعی دو متغیره برحسب x و y باشد را حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{\partial u}{\partial x} = f(y) \xrightarrow{\text{انتگرال}} u = x f(y) + g(y)$$

مثال: جواب خصوصی معادله مقابل را بدست آورید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy^2$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u(0,y) = \sin y \\ u(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \overset{\text{انتگرال}}{=} \frac{x^2y^2}{2} + F(y)$$

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y^2}{2} + F(y)\right) = \frac{x^2y^3}{6} + \underbrace{\boxed{F(y) + g(x)}}_{x+\sin y}$$

شرایط مرزی :

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 + F(0) + g(x) \\ \sin y &= 0 + F(y) + g(0) \end{aligned}\right] +$$

$$0 = 0 + F(0) + g(0)$$

---

* معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه اول:

صورت کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول بصورت زیر است:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

z متغیر وابسته و x و y متغیر مستقل هستند. می‌توان نشان داد که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بالا باید

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را تشکیل دهیم:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

$u_1(x,y,z)=c_1$ و $u_2(x,y,z)=c_2$ می‌توان نشان داد جواب کلی معادلات مرتبه اول بصورت

$h(u_1,u_2)=0$ خواهد بود

(1) $$\underbrace{1}_{P(x,y,z)}\frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{(x+z)}_{Q(x,y,z)}\frac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{x}_{R(x,y,z)}$$

$P=1$, $Q = x+z$, $R = x$

Subject: مستقل وابسته

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{x+2}=\frac{dz}{x}$$

$(x+2)\,dx=dy \rightarrow \frac{x^2}{2}+2x+c_1=y \qquad c_1=y-\frac{x^2}{2}-2x$

$x\,dx=dz \rightarrow \frac{x^2}{2}+c_2=z \qquad c_2=z-\frac{x^2}{2}$

$h\left(\left(y-\frac{x^2}{2}-2x\right),\left(z-\frac{x^2}{2}\right)\right)=0$ ✓

«جلسه نهم»

تفکیک متغیر :

پاسخ حاصل $u(x,t)=F(x)\,G(t)$

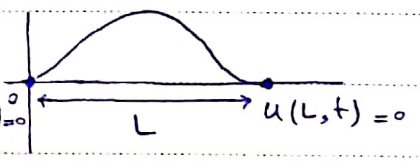
$t\cos x+t\sin x/2=\underbrace{t}_{G(t)}\underbrace{\left(\cos x+\sin x/2\right)}_{F(x)}$ ✓

$t^2\cos x+t\sin x/2$ ✗

معادله موج :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} u(x=0,t)=0 & t>0 \\ u(x=L,t)=0 & t>0 \end{cases}$$



شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(x,0)=F(x) & 0<x<l \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) & 0<x<l \end{cases}$$

$$F(x)\frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2}=c^2\,G(t)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{F(x)}{c^2 G(t)\, F(x)} \frac{d^2G(t)}{dt^2} = \frac{c^2\, G(t)}{c^2 G(t)\, F(x)} \frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\times\frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2} = \frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \underline{\underline{K}} \begin{cases} +\ ,\ \beta^2 & \times \\ 0 & \times \\ -\ ,\ -\beta^2 & \checkmark \end{cases}$$

$\underline{\underline{K=0}}$

I) $\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = K \Rightarrow \frac{d^2F(x)}{dx^2} - K\,F(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2F(x)}{dx^2} = 0$

II) $\frac{1}{c^2}\frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2} = K \Rightarrow \frac{d^2G(t)}{dt^2} - K c^2\, G(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2G(t)}{dt^2} = 0$

$F(x) = Ax+B$ $u(x=0,t)=0$ → $A\times 0 + B = 0 \rightarrow \underline{B=0}$ $u(x=L,t)=0$ → $AL=0 \rightarrow \underline{A=0}$

$G(t) = Ct+D$

$\Rightarrow u(x,t) = F(x)\,G(t) = 0$ ✗ جواب بدیهی

$\underline{\underline{K>0}}$

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} - \beta^2 F(x) = 0 \Rightarrow D^2 - \beta^2 = 0 \Rightarrow D = \pm\beta$$

$$\Rightarrow \left[Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}\right]$$

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} - \beta^2 c^2 G(t) = 0$$

$u(x=0,t)=0 \rightarrow A+B=0$ $\underline{A=-B}$

$u(x=L,t)=0 \rightarrow Ae^{\beta L} + Be^{-\beta L} = 0$

$A\left[e^{\beta L} - e^{-\beta L}\right] = 0$

جواب بدیهی $\Rightarrow \underline{A=0}$ ✗ $\underline{e^{\beta L} - e^{-\beta L}} = 0$ ✗

$\underline{\underline{K<0}}$

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} + \beta^2 F(x) = 0 \Rightarrow D^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow D^2 = -\beta^2 \Rightarrow D = \pm i\beta$$

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2}+\underbrace{\beta^2c^2}_{\lambda^2}G(t)=0$$

$$F(x)=A\sin\beta x+B\cos\beta x$$

$$u(x=0,t)=0 \longrightarrow 0=A\times 0+B=0 \longrightarrow \underline{B=0}$$

$$u(x=L,t)=0 \longrightarrow F(x)=A\sin\beta x \Rightarrow A\sin\beta L=0 \longrightarrow \underline{A=0}\ \times \quad ; \quad \sin\beta L=0$$

$$\boxed{F_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi}{L}x} \Longleftarrow \beta L=n\pi \quad \underline{\beta=\frac{n\pi}{L}}$$

$$G(t)=C\sin\lambda t+D\cos\lambda t$$

$$\boxed{G_n(t)=C_n\sin\lambda_n t+D_n\cos\lambda_n t}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x\left[C_n\sin\lambda_n t+D_n\cos\lambda_n t\right]$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nC_n\sin\lambda_n t+A_nD_n\cos\lambda_n t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$f(x)=u(x,t=0)=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$H_n=\frac{2}{T}\int_{\text{دت}}f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx \qquad \underline{T=2L}$$

$$g(x)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[K_n\lambda_n\underbrace{\cos\lambda_n t}_{1}-\underbrace{H_n\lambda_n\sin\lambda_n t}_{0}\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[K_n\lambda_n\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$ (شرط فرد سینوسی)

$$K_n\lambda_n=\frac{2}{T}\int_{\text{دت}}g(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x \qquad \underline{T=2L}$$

$$K_n=\frac{2}{T\lambda_n}\int_{\text{دت}}g(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

* فقط زمانی می‌توانیم از شیوه تفکیک متغیرها استفاده کنیم که قادر به تغییر تابع $u(x,t)$ را به صورت

$u(x,t) = G(t) \times F(x)$ تعریف کنیم

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ را با شرایط مرزی و اولیه زیر بدست آورید.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = p \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q \quad , \quad u(0,0) = p+q$$

جلسه دهم.

حل معادله دیفرانسیل به روش دالامبر:

$$* \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} z = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ? \qquad \partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big/\partial t \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = ? \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ?$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ? \qquad \partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big/\partial x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = ? \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ?$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} \times \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{C} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{-C} = C\frac{\partial u}{\partial v} - C\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(C\frac{\partial u}{\partial v} - C\frac{\partial u}{\partial z}\right) \times C + \frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial u}{\partial v} - C\frac{\partial u}{\partial z}\right) \times -C$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - C^2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - C^2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + C^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Subject: Date: / /

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}(1)+\frac{\partial u}{\partial z}(1)=\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial v}\times\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z}\times\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

$$*\quad \cancel{c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}+\cancel{c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}=c^2\left[\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right]$$

$$-4\cancel{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z}=0$$ فرم کانونی معادله

$u(z,v)$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=F(z)\rightarrow u=p(z)+\phi(v)=p(x-ct)+\phi(x+ct)$$

مثال: معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ با تغییر متغیر $r=x+t$ و $s=x-t$ به کدامیک از صورت‌های زیر تبدیل خواهد شد؟

الف) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0$ ب) $\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}=0$ ✓

ج) $\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial u}{\partial r}=0$ د) $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=?\quad,\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=?$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial s}\times\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{-1}+\frac{\partial u}{\partial r}\times\underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{1}=-\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial s}\right)\times\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{-1}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial s}\right)\underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{1}$$

$$=-1\times\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}(1)+\frac{\partial u}{\partial r}(1)=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)\times 1+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)\times 1$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}}$$

$$\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}}-2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}\right)-\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}+2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}}\right)=0$$

$$-\cancel{4}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}=0\longrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}=0$$

* طبقه بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی :

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی را بطور عمومی بصورت زیر نشان میدهند:

$$P\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+Q\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=S$$

$P(x,y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$, $S\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

در طبقه بندی معادلات P ، Q ، R را مراتب ثابتی درنظر می‌گیریم که به ترتیب a ، b ، c را اختیار کرده‌اند

از این رو معادله بالا را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=S$$

حال Δ را بصورت $\Delta=b^2-4ac$ تعریف می‌کنیم و طبقه بندی را براساس مثبت و منفی و صفر بودن Δ انجام می‌دهیم

$\Delta<0$ معادله بیضوی

$\Delta=0$ معادله سهموی

$\Delta>0$ معادله هذلولوی

بطور مثال:

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad a=1,\ b=0,\ c=-c^2$

$b^2-4ac=0 \Rightarrow -4(1)(-c^2)>0$ هذلولوی

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\quad a=1,\ b=0,\ c=1$

$b^2-4ac=0 \Rightarrow 0-4<0$ بیضوی

معادلات دیفرانسیل جزئی - خطی جبر از مرتبه دوم در بسیاری از موارد بکار برده می‌شود. از این رو توجه خود را به این دسته از معادلات معطوف می‌کنیم. این دسته از معادلات حاصل از معادله زیر که در آن $S=0$ است:

$$P(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+Q(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+R(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=S$$

حال اگر مراتب P ، Q ، R را ثابت درنظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

Subject: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri Date: / /

که فقط شامل مشتقات مرتبه دوم است و یک معادله همگن بدست خواهد آمد.

نکته: در حالت کلی اگر $b \neq 0$ باشد معادله بالا را فرض داشته باشیم، یک روش تغییر متغیر که حل کنیم و لذا از

شیوه حل دالامبر استفاده می‌کنیم. تغییر متغیر لازم برای استفاده از روش حل دالامبر را می‌توان از این روابط

بدست آورد: شیب $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ منحنی $z(x,y)$ در صفحه x و y در روابط

حفظ

* اساس روش کرویت شیب

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_{1,2} = \left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) / 2a$$

با جایگذاری ضرایب معادله a, b, c در رابطه بالا و انتگرال گیری آن در روابط به صورت زیر بدست خواهد آمد:

آنگاه $\eta = y - \lambda_1 x \quad y = \lambda_1 x + \eta \xleftarrow{\text{انتگرال}} dy = \lambda_1 dx \leftarrow \frac{dy}{dx} = \lambda_1$

$\phi = y - \lambda_2 x$

که در آن λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0$ است.

« جلسه ۱۱ »

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی از مرتبه دوم و غیر همگن با ضرایب ثابت:

* شیوه اول: تغییر متغیر

الف) اگر g فقط تابعی از x باشد.

ب) اگر g فقط تابعی از y باشد.

Subject: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri Date: / /

1. $$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=G(x,y)$$

تابع (I) $G(x): \sin x,\ x^2,\ x^2+1$

تابع (II) $G(y): \sin y,\ e^y$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

دالامبر / تغییر متغیر

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1 \Rightarrow y=\lambda_1 x+c_1,\quad c_1=y-\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_2 \Rightarrow y=\lambda_2 x+c_2,\quad c_2=y-\lambda_2 x$$

$$u^{(x,y)}=v(x,y)+\phi(x)$$

$$(I)\quad a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a\frac{d^2\phi}{dx^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=G(x)$$

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

$$a\frac{d^2\phi}{dx^2}=G(x)$$

مثال

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x$$

$$u(x,y)=v(x,y)+\phi(x)=f(y-2x)+g(y+x)-\sin x+c_1x+c_2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\underbrace{\frac{d^2\phi}{dx^2}}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\underbrace{\sin x}$$

جواب خصوصی

$$(I)\quad \frac{d^2\phi}{dx^2}=\sin x \longrightarrow \frac{d\phi(x)}{dt}=-\cos x+c_1 \qquad \boxed{\phi(x)=-\sin x+c_1x+c_2}$$

$$(II)\quad \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{a=1}+\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}}_{b=1}\underbrace{-2}_{c=-2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \longrightarrow a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{dy}{dx}\right)-2=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=2 \Rightarrow y=2x+c_1,\quad c_1=y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=-1 \Rightarrow y=-x+c_2,\quad c_2=y+x$$

$$\rightarrow \boxed{f(y-2x)+g(y+x)}$$

جواب عمومی

Subject: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri Date: / /

(II) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=G(y)$

$u(x,y)=v(x,y)+\phi(y)$

$a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c\dfrac{d^2\phi}{dy^2}=G(y)$

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 & \text{پاسخ عمومی} \\ c\dfrac{d^2\phi}{dy^2}=G(y) & \text{پاسخ خصوصی} \end{cases}$$

مثال:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2y^2+2$

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2\dfrac{d^2\phi}{dy^2}=2y^2+2$

(I) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

(II) $-2\dfrac{d^2\phi}{dy^2}=2y^2+2$

* شیوه دوم: در این روش برای بدست آوردن حل عمومی معادله دیفرانسیل زیر

$a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=G$

حل همگن و حل خصوصی معادله را باهم جمع می‌کنیم. برای بدست آوردن حل همگن عموماً از شیوه‌ی حل دالامبر استفاده می‌شود. اما برای تعیین حل خصوصی معادله بالا یکی از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

(I) وقتی که شکل اپراتوری معادله قابل تجزیه است.

(II) وقتی که شکل اپراتوری معادله قابل تجزیه نیست: از فرمول $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$ استفاده میکنیم.

مثال:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=D \Rightarrow D^2u-D'^2u=xy \longrightarrow (D^2-D'^2)u=xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=D' \qquad (D-D')\underbrace{(D+D')u}_{z}=xy$$

$* \ (D+D')u=z$

$$(D-D')z=xy \xrightarrow[\text{یک}]{\text{معادله درجه}} \frac{\partial}{\partial x}z-\frac{\partial}{\partial y}z=xy$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{xy}$$

$$-dx=dy \Rightarrow -x=y+C_1 \ , \ \boxed{C_1=-x-y}$$

$$xy\,dx=dz \Rightarrow x(-x-C_1)dx=dz$$

$$\frac{-x^3}{3}-C_1\frac{x^2}{2}=z+C_2 \longrightarrow \frac{-x^3}{3}-(-x-y)\frac{x^2}{2}=z+C_2$$

$$\boxed{C_2=\frac{-x^3}{3}+(x+y)\frac{x^2}{2}-z}$$

$$C_2=F(C_1) \Rightarrow \frac{-x^3}{3}+(x+y)\frac{x^2}{2}-z=F(-x-y)$$

$$*\ \frac{\partial}{\partial x}u-\frac{\partial}{\partial y}u=z$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{du}{\frac{-x^3}{3}+(x+y)\frac{x^2}{2}-F(-x-y)}$$

(صفحه ی 62 تا صفحه ی 70 حذف) (اگر سوال تکراری داشته باشیم ← کسرل)

Subject: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri Date: / /

مثال:

(II) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy$

$D^2u+D'^2u=xy$

$(D^2+D'^2)u=xy$ $\qquad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$

$$u=\frac{1}{D^2+D'^2}xy=(D^2+D'^2)^{-1}xy=\frac{1}{D^2}\left(1+\frac{D'^2}{D^2}\right)^{-1}xy$$

$$=\frac{1}{D^2}\left[1-\left(\frac{D'^2}{D^2}\right)+\left(\frac{D'^2}{D^2}\right)^2-\left(\frac{D'^2}{D^2}\right)^3+\cdots\right]xy$$

$$=\frac{1}{D^2}(xy)-\frac{D'^2}{D^4}\cancel{(xy)}_{0}+\frac{D'^4}{D^6}\cancel{(xy)}_{0}+\cdots$$

$\frac{1}{D}(xy)=\frac{x^2}{2}y+c_1 \quad \frac{1}{D^2}(xy)=\boxed{\frac{x^3}{6}y+c_1x+c_2}$ جواب خصوصی

$a=1,\quad b=0,\quad c=1$

$1\times\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\pm i$

جواب عمومی

$y=ix+D_1,\quad D_1=y-ix$

$y=-ix+D_2,\quad D_2=y+ix$ $\longrightarrow \boxed{f(y-ix)+g(y+ix)}$

$$\boxed{u=f(y-ix)+g(y+ix)+\frac{x^3}{6}y+c_1x+c_2}$$

ECHN

میدان گرد ← کرل　　　　میدان تفاضلی ثابت ← دیورژانس

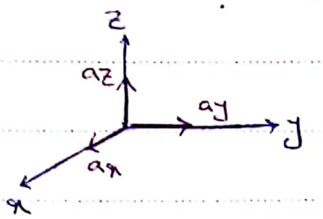
Subject:　　Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri　　Date: / /

جلسه ۱۲ :

حل معادله لاپلاس در دستگاه های مختلف در حالات دو بعدی و سه بعدی :

حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین :

(a_x, a_y, a_z)



$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\underbrace{-\vec{\nabla} V}_{E}) = 0 \qquad \frac{\cancel{\rho}^{\,0}}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot \underset{-\nabla V}{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0$$

اسکالر $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

برداری $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z$

$$V = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \Rightarrow \nabla^2 V = 0$$

$$\Rightarrow Y(y)\,Z(z)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)\,Z(z)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)\,Y(y)\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } X(x)Y(y)Z(z)} \underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{K_1} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{K_2} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{K_3} = 0$$

$$(x, y) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{K_1} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{K_2} = 0$$

حالت اول : $K_1 = 0 \,,\; K_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = 0 \,,\; \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0$

حالت دوم : $K_1 = n^2 \,,\; K_2 = -n^2$

حالت سوم : $K_1 = -n^2 \,,\; K_2 = n^2$

$$X(x) = Ax + B \qquad Y(y) = Cy + D$$

$$\boxed{V_1 = X(x)\,Y(y) = (Ax + B)(Cy + D)} \; *$$

Subject: Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri Date: / /

حالت دوم $\Rightarrow \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{d^2X(x)}{dx^2}=n^2 \quad , \quad \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{d^2Y(y)}{dy^2}=-n^2$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}=n^2X(x) \Rightarrow \frac{d^2X(x)}{dx^2}-n^2X(x)=0 \Rightarrow D^2-n^2=0$$

$$\Rightarrow D=\pm n$$

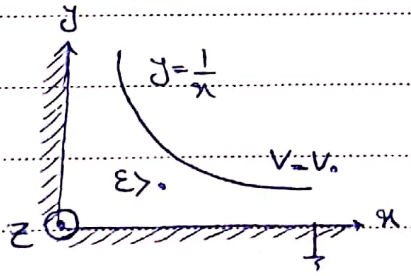
$$X(x)=\begin{cases} A_1e^{nx}+B_1e^{-nx} \\ A_2\sinh nx+B_2\cosh nx \end{cases}$$

$$Y(y)=A_3\sin ny+B_3\cos ny$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2=X(x)Y(y)=(A_2\sinh nx+B_2\cosh nx)(A_3\sin ny+B_3\cos ny)} \; **$$

حالت سوم $\Rightarrow \boxed{V_3=X(x)Y(y)=(A_5\sinh ny+B_5\cosh ny)(A_6\sin nx+B_6\cos nx)} \; ***$

مثال: شکل زیر سطح مقطع محفظه‌ای متشکل از سه کره رسانا را نشان می‌دهد. پتانسیل سطح $y=\frac{1}{x}$ برابر V_0 و دو سطح دیگر زمین شده‌اند. سطح کره‌ای در امتداد محور z از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارند. تابع پتانسیل را در فضای محصور سه کره‌ای را بیابید.



$$V_1=(Ax+B)(Cy+D)$$

$$V_2=(A_1\sinh nx+B_1\cosh nx)(C_1\sin ny+D_1\cos ny)$$

$$V_3=(A_2\sin nx+B_2\cos nx)(C_2\sinh ny+D_2\cosh ny)$$

شرایط مرزی:

$y=0 \;,\; x>0 \rightarrow V=0 \rightsquigarrow D=0$

$x=0 \;,\; y>0 \rightarrow V=0 \rightsquigarrow B(Cy+D)=0 \quad B=0$

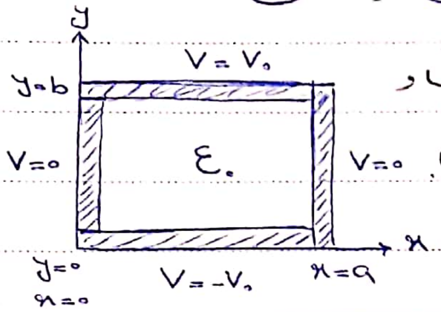
$y=\frac{1}{x} \longrightarrow V=V_0 \quad \Rightarrow (AC)(xy)=K'(xy)=V_0xy$

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow K'x\frac{1}{x}=K'=V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{V=V_0xy}$$

جلسه 13:

مثال: شکل زیر سطح مقطع سیستمی متشکل از چهار رسانا و پتانسیل هر سطح را نشان می‌دهد. هر چهار سطح رسانا در امتداد محور z از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارند. پتانسیل ناحیه محصور بین چهار سطح رسانا را محاسبه کنید.



* تابع‌های هایپربولیک تابعی غیرنوسانی است پس برای y مناسب است و

تابع sin تابعی معمولی و تناوبی است پس برای x مناسب است.

$h \uparrow \qquad \xrightarrow{\sin}$

مختصات دکارتی: $\nabla . \nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

$V = X_{(x)} Y_{(y)} Z_{(z)}$

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = k_1 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k_2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = k_3 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

$$V(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = k_1 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k_2 \end{cases} \longrightarrow k_1 + k_2 = 0 \begin{cases} k_1 = k_2 = 0 \\ k_1 = -k_2 = k^2 \\ k_1 = -k_2 = -k^2 \end{cases}$$

X ① $V(x,y) = (Ax+B)(Cy+D)$

X ② $V(x,y) = (A_1 \sinh kx + B_1 \cosh kx)(C_1 \sin ky + D_1 \cos ky)$

✓ ③ $V(x,y) = (A_2 \sin kx + B_2 \cos kx)(C_2 \sinh ky + D_2 \cosh ky)$

شرایط مرزی

① $V=0 \ , \ x=0 \ , \ 0<y<b \ \rightarrow B_2 = 0$

② $V=0 \ , \ x=a \ , \ 0<y<b \ \rightarrow A_2 \sin ka = 0 \ \rightarrow \sin ka = n\pi \ \rightarrow \ k = \frac{n\pi}{a}$

③ $V=-V_0 \ , \ 0<x<a \ , \ y=0$

④ $V=V_0 \ , \ 0<x<a \ , \ y=b$

$$\Rightarrow V(x,y) = \left(A_2 \sin \frac{n\pi}{a} x\right)\left(C_2 \sinh \frac{n\pi}{a} y + D_2 \cosh \frac{n\pi}{a} y\right)$$

$$\Rightarrow V(x,y) = \left(A_2 \sin \frac{n\pi}{a} x\right)\left(C_2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right)\right)$$

$$= \overbrace{A_2 C_2}^{C} \left[\sin \frac{n\pi}{a} x\right]\left[\sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right)\right]$$

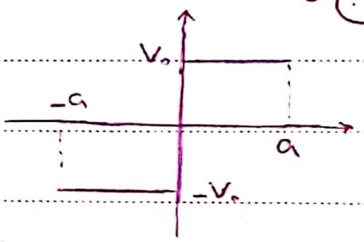
$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right)$$

4 شرط مرزی: $V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(b - \frac{b}{2}\right)$

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(\frac{b}{2}\right)$$

$T = 2a$ تابع فرد

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(C_n \sinh \frac{n\pi}{a} \times \frac{b}{2}\right)}_{b_n} \sin \frac{n\pi}{a} x$$



$$b_n = \frac{2}{T}\int f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x \, dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x \, dx$$

$$= \frac{4}{2a}\int_0^a V_0 \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx = \frac{-2V_0}{a}\left[\frac{a}{n\pi}\right]\left[\cos \frac{n\pi}{a} x\right]_0^a$$

$$= \frac{-2V_0}{n\pi}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2V_0}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

$$\Rightarrow C_n \sinh \frac{n\pi}{a} \times \frac{b}{2} = \frac{2V_0}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

$$C_n = \frac{2V_0}{n\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{\sinh \frac{n\pi}{a} \times \frac{b}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0 (1 - \cos n\pi)}{n\pi \sinh \frac{n\pi}{a} \times \frac{b}{2}} \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)}$$

* حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای دو بعدی:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$\nabla V = \underset{u_1}{\frac{\partial V}{\partial r}} a_r + \underset{u_2}{\frac{\partial V}{r\partial \phi}} a_\phi + \underset{u_3}{\frac{\partial V}{\partial z}} a_z$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{\underset{1}{h_1}\underset{r}{h_2}\underset{1}{h_3}}\left[\partial h_2 h_3 A_{u_1}/\partial u_1 + \partial h_1 h_3 A_{u_2}/\partial u_2 + \partial h_1 h_2 A_{u_3}/\partial u_3\right]$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{1\times r\times 1}\left[\frac{\partial r \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial 1\times 1 \frac{\partial V}{r\partial \phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial 1\times r \frac{\partial V}{\partial z}}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + r\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]$$

در مختصات استوانه‌ای $\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \underset{0}{\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}}$

$$V(r,\phi) = R(r)\,\Phi(\phi)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(R(r)\,\Phi(\phi)\right)\right) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1\times \frac{\partial}{\partial r}\left(R(r)\,\Phi(\phi)\right) + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(R(r)\,\Phi(\phi)\right)\right] + \frac{1}{r^2} R(r)\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

$$= \underbrace{\frac{\Phi}{r}}_{\frac{R\Phi}{r^2}}\frac{\partial}{\partial r}R(r) + \underbrace{\Phi}_{\frac{R\Phi}{r^2}}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\frac{R\Phi}{r^2}} R(r)\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

$$= \frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}R + \frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

$$\text{(I)}\quad \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = n^2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{1}{\phi(\varphi)}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = -n^2$$

$$n=0 \longrightarrow \begin{cases} R(r) = A_1 \ln r + A_2 \\ \phi(\varphi) = B_1\varphi + B_2 \end{cases}$$

$$n\neq 0 \longrightarrow \begin{cases} R(r) = A_3 r^n + A_4 r^{-n} \\ \phi(\varphi) = B_3 \sin n\varphi + B_4 \cos n\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(r,\phi) = \begin{cases} (A_1 \ln r + A_2)(B_1\varphi + B_2) & \underline{n=0} \\ (A_3 r^n + A_4 r^{-n})(B_3 \sin n\varphi + B_4 \cos n\varphi) & \underline{n\neq 0} \end{cases}$$

جلسه ۱۴ :

معادلات لاپلاس و پواسون و روش حل آن:

معادلات لاپلاس و پواسون

معادلات لاپلاس و حل آن در دستگاه های مختصات مختلف:

الف) حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین یک بعدی

ب) حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای ← وابسته: r ، وابسته: ϕ

ج) حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی ← وابسته: R ، وابسته: ϕ ، وابسته: θ

① کارتزین (a_x, a_y, a_z)

استوانه ای (a_r, a_ϕ, a_z)

کروی (a_R, a_θ, a_ϕ)

② $\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\nabla\cdot(-\nabla V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

معادله پواسون $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → بار آزاد حامل فقط $\rho=0$

معادله لاپلاس $\nabla^2 V = 0$

③ کارتزین $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$

استوانه‌ای $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} a_r + \frac{\partial V}{r\,\partial \phi} a_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$

کروی $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R} a_R + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} a_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} a_\phi$

$\nabla \cdot (\nabla V) = \circ$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial h_2 h_3 A_{u_1}}{\partial u_1} + \frac{\partial h_1 h_3 A_{u_2}}{\partial u_2} + \frac{\partial h_1 h_2 A_{u_3}}{\partial u_3}\right]$$

$A = A_{u_1} a_{u_1} + A_{u_2} a_{u_2} + A_{u_3} a_{u_3}$

کارتزین $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{1 \times r \times 1}\left[\frac{\partial r \times 1 \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial\, 1 \times 1 \frac{\partial V}{r\,\partial \phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial\, 1 \times r \frac{\partial V}{\partial z}}{\partial z}\right]$$

استوانه‌ای $\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{1 \times R \times R\sin\theta}\left[\frac{\partial R^2 \sin\theta \frac{\partial V}{\partial R}}{\partial R} + \frac{\partial R\sin\theta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} R \times \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right]$$

کروی $\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$

TECHNO

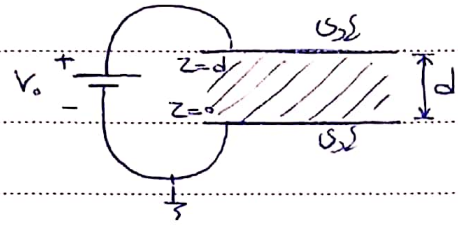
Subject: Date: / /

(x, y, z) $V(z) \rightarrow \frac{\partial^2 V(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = 0$

تابعی از z

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \rightarrow \boxed{V = Az + B}$$

مثال



$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V = Az + B$$

$$\begin{cases} z = 0 \rightarrow V = 0 \rightarrow B = 0 \\ z = d \rightarrow V = V_0 \rightarrow A = \frac{V_0}{d} \end{cases} \Rightarrow \boxed{V = \frac{V_0}{d} z}$$

مثل خازن

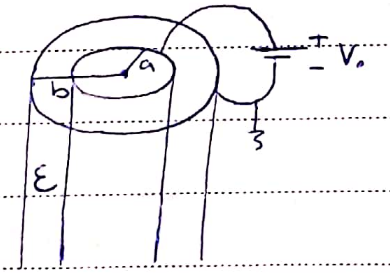
(r, ϕ, z) ① $V(r)$, ② $V(\phi)$

① فقط تابعی از r باشد $\underline{V(r)} \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(r)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V(r)}{\partial z^2} = 0$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{r}}\cancel{\frac{\partial}{\partial r}} r \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0 \xrightarrow{\int} r \frac{\partial V(r)}{\partial r} = A \rightarrow \frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = A \ln r + B}$$

مثال



$$\begin{cases} r = b & V = 0 \\ r = a & V = V_0 \end{cases}$$

$$0 = A \ln b + B \Rightarrow -B = A \ln b \Rightarrow A = \frac{-B}{\ln b}$$

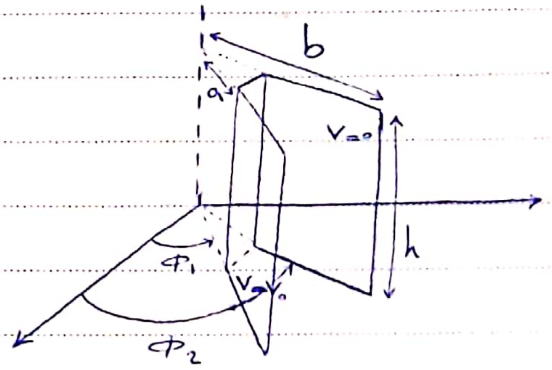
$$V_0 = A \ln a + B$$

$$V_0 = \frac{-B}{\ln b} \ln a + B \rightarrow V_0 = B\left(1 - \frac{\ln a}{\ln b}\right)$$

$$B = \frac{V_0}{1 - \frac{\ln a}{\ln b}} , \quad A = \frac{\left(-V_0 / 1 - \frac{\ln a}{\ln b}\right)}{\ln b} \Rightarrow V = \frac{\left(-V_0 / 1 - \frac{\ln a}{\ln b}\right)}{\ln b} \ln r + \frac{V_0}{1 - \frac{\ln a}{\ln b}}$$

② فقط تابعی از ϕ باشد $V(\phi) \longrightarrow \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \boxed{V = A\phi + B}$

مثال:



$$\begin{cases} \phi = \phi_1 \Rightarrow V = V_0 \\ \phi = \phi_2 \Rightarrow V = 0 \end{cases}$$

خازن استوانه‌ای با صفحات کروی ϕ ثابت

فرض $b, h \gg a$

$$V_0 = A\phi_1 + B \Rightarrow V_0 = \frac{-B}{\phi_2}\phi_1 + B = B\left(1 - \frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{V_0}{1 - \frac{\phi_1}{\phi_2}} = \frac{V_0 \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}$$

$$0 = A\phi_2 + B \Rightarrow A = \frac{-B}{\phi_2} \Rightarrow A = \frac{-1}{\phi_2}\left(\frac{V_0 \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}\right) = \frac{V_0}{\phi_1 - \phi_2}$$

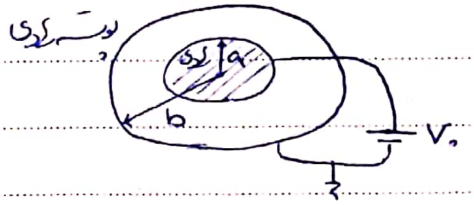
$$V_{(\phi)} = \left(\frac{V_0}{\phi_1 - \phi_2}\right)\phi + \frac{V_0 \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}$$

(R, θ, ϕ) ① $V(R)$, ② $V(\theta)$, ③ $V(\phi)$

① $V(R) \longrightarrow \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial R} R^2 \dfrac{\partial V}{\partial R} = 0 \Rightarrow R^2 \dfrac{\partial V}{\partial R} = K_1$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{K_1}{R^2} \Rightarrow V = \frac{-K_1}{R} + K_2 \Rightarrow \boxed{V_{(R)} = \frac{K'}{R} + K_2}$$

مثال:



$$\begin{cases} R = a & V = V_0 \\ R = b & V = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \frac{K'}{a} + K_2 \qquad ? \; K_2, K_1$$

$$0 = \frac{K'}{b} + K_2$$

SEPEHR

② $V(\theta) \longrightarrow \dfrac{1}{R^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=0 \longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=0$

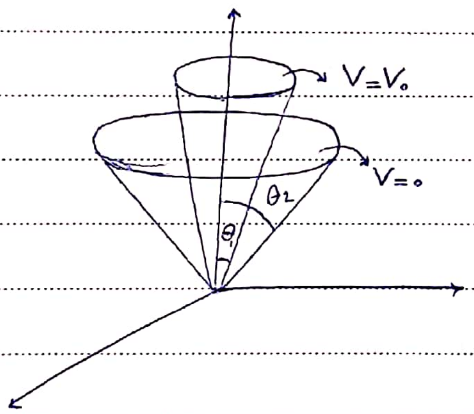
(R,ϕ) ثابت

$$\longrightarrow \sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}=K_1 \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{K_1}{\sin\theta} \Longrightarrow V=\int\frac{K_1}{\sin\theta}d\theta$$

$$V=\int\frac{K_1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}d\theta=\int\frac{K_1/\cos\theta/2}{2\sin\theta/2}d\theta=\int\frac{K_1/\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\,\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}}d\theta$$

$$=\int\frac{K_1\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\tan\theta/2}d\theta=K_1\int\frac{\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\theta/2\right)}{\tan\theta/2}d\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_{(\theta)}=K_1\operatorname{Ln}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+K_2}$$



مثال: پتانسیل بین دو مخروط با θ ثابت:

$R=(0,\infty)$

$\theta=\theta_1$

$\phi=[0,2\pi]$

$$V=K_1\operatorname{Ln}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+K_2$$

$$\begin{cases}0=K_1\operatorname{Ln}\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right)+K_2\\ V_0=K_1\operatorname{Ln}\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right)+K_2\end{cases}$$

K_1, K_2 ؟

③ $V(\phi) \longrightarrow \dfrac{1}{R^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$

$$\Longrightarrow \boxed{V_{(\phi)}=A\phi+B}$$

فصل سوم: اعداد مختلط

تعریف ۱: عبارتی یک عدد، فرم مختلط، فرم $z=x+iy$ خواهد بود که x و y هر دو حقیقی بوده و $i=\sqrt{-1}$ و لذا $i^2=-1$ است.

(فرم دکارتی)

$z=x+iy$

قسمت حقیقی — قسمت موهومی

$x=Re\{z\}$

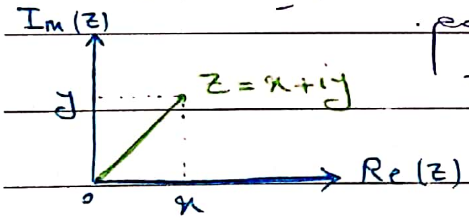
$y=Im\{z\}$

پس به طور کلی مجموعه اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

مجموعه اعداد مختلط

$$C=\{x+iy \mid x,y\in \mathbb{R},\ i^2=-1\}$$

نکته: هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت یک عدد مختلط فرض کرد که مولفه موهومی آن صفر است. مثلاً اگر x عدد حقیقی باشد می‌توان آن را به صورت $z=x+iy$ نوشت. پس بنابراین می‌توان مولفه اعداد مختلط را بر روی اعداد حقیقی اعمال نمود. برای نمایش عدد مختلط z، دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم و بر روی محور افقی قسمت حقیقی z و بر روی محور عمودی قسمت موهومی z را نشان می‌دهیم.



تعریف ۲: به ازای هر عدد مختلط $z=x+iy$ عدد مختلط $-z=-x-iy$ را قرینه z می‌نامیم.

تعریف ۳: قدرمطلق یا اندازه عدد مختلط $z=x+iy$، به صورت مقابل تعریف می‌شود: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

قدرمطلق یک عدد مختلط، عددی حقیقی و غیرمنفی است و فاصله آن عدد مختلط را از مبدا مختصات نشان می‌دهد.

اعمال حسابی در اعداد مختلط: قوانین جمع و تفریق، تقسیم و ضرب اعداد مختلط مشابه اعداد حقیقی می‌باشد.

* جمع: مجموع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بصورت زیر است:

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

* تفریق: تفاضل دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بصورت زیر است:

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

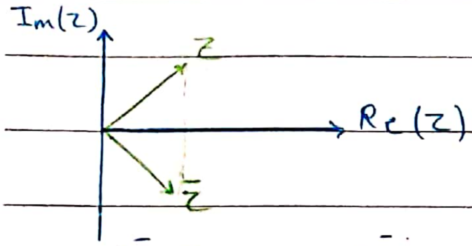
* ضرب: برای ضرب دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ کافی است دو عدد را بصورت معمولی جمله به جمله در هم ضرب کنیم و بجای i^2 مقدار (-1) قرار دهیم.

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

* تقسیم: برای بدست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

* مزدوج یک عدد مختلط: به ازای هر عدد مختلط مانند $z = x + iy$ مزدوج z بصورت $\bar{z} = x - iy$ تعریف می‌شود و آن را $\bar{z}$ می‌خوانند. برای مثال مزدوج عدد مختلط $z = 5 + 2i$ بصورت $\bar{z} = 5 - 2i$ و مزدوج مختلط $z = -i$ بصورت $\bar{z} = i$ تعریف می‌شود.



از نظر هندسی $\bar{z}$ قرینه z نسبت به محور حقیقی است.

* نکته ۱: مزدوج هر عدد حقیقی خودش می‌شود یعنی اگر در عدد مختلط $z=x+iy$ مقدار y صفر شود آن‌گاه $z=x$ و لذا $\bar{z}=x$ خواهد بود.

* نکته ۲: هرگاه $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ آن‌گاه $z\bar{z}$ به شکل زیر حساب می‌شود:

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2-(-1)y^2=x^2+y^2$$

می‌دانیم x^2+y^2 برابر $|z|^2$ است پس تساوی مقابل را خواهیم داشت: $z\bar{z}=|z|^2$

* خواص اعداد مختلط: فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند در این صورت روابط زیر برقرار است:

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

2) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

3) $|z|=|\bar{z}|$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

5) $\overline{(\bar{z})}=z$

6) $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$

7) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

8) $|z|\leq|R_e(z)|+|I_m(z)|$

9) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

10) $|z_1|-|z_2|\leq\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1-z_2|$

* نکته: مجموع هر ۴ توان متوالی از i برابر صفر است یعنی داریم:

$$i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0 \Rightarrow i^k(1+i+i^2+i^3)=0$$

* نکته: به ازای هر عدد مختلط $z=x+iy$ روابط مقابل را همواره داریم:

$$\begin{cases} Re(z)=x=\dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ Im(z)=y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

* ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط:

دو عدد مختلط (یا دو بردار) $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ مفروض است. ضرب داخلی z_1 , z_2 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2$$
$$=x_1x_2-y_1y_2$$

* زاویه بین دو عدد مختلط (دو بردار):

زاویه بین دو عدد مختلط z_1 , z_2 را می‌توان توسط یکی از دو بردار زیر محاسبه کرد:

$$\cos\theta=\frac{z_1\cdot z_2}{|z_1||z_2|}$$

* شکل قطبی اعداد مختلط:

هر دو عدد مختلط $z=x+iy$ ، $(z\neq 0)$ را می‌توان به شکل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ نوشت.

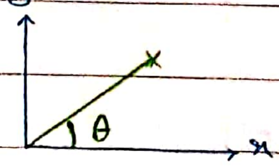
این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$z=x+iy$

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\theta=\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$



θ: آرگومان یا زاویه عدد مختلط z

r: قدر مطلق یا اندازه عدد مختلط z

Subject: Page: ( )

* محاسبه اندازه و آرگومان اعداد مختلط :

برای یک عدد مختلط با اضافه کردن مضارب 2π ، آرگومان‌های دیگر متعددی می‌توان برای آن نسبت داد ، عدد مختلط z آرگومان‌های متعددی خواهد داشت. اگر θ را به بازه $(-\pi,\pi]$ محدود می‌کنیم و این مقدار θ ، آرگومان اصلی z می‌گوییم. آن را با $Arg(z)$ نمایش می‌دهیم ، مجموعه زوایای عدد مختلط z را به صورت $\arg z$ نمایش می‌دهیم.

$$\arg z = \{ Arg\, z + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \}$$

$$z = 1+i \Rightarrow A = \operatorname{Arctan}\frac{1}{1} = 45 = \frac{\pi}{4} \rightarrow \text{آرگومان اصلی}$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi \rightarrow \text{مجموعه زوایا}$$

جلسه ۱۶ :

(* آرگومان را همیشه به صورت رادیانی می‌نویسیم.)

قضیه :

$$\boxed{[r\cos\theta + ir\sin\theta]^n = r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta}$$

اثبات :

$$I = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$[re^{i\theta}]^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta$$

مثال :

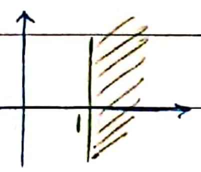
$$(1+i)^8 = ? \quad \text{آرگومان}$$

$$1+i = \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{اندازه}}\, e^{i\pi/4} \Rightarrow (\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^8 = 2^{\frac{1}{2}\times 8} \times \underbrace{e^{i2\pi}}_{\cos 2\pi + i\sin 2\pi} = 16\times 1$$

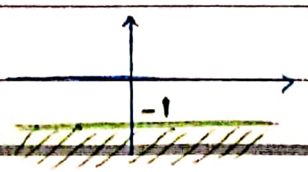
همه

* نواحی در صفحه مختلط : (مکان هندسی)

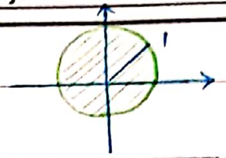
1) $Re(z) > 1 \rightarrow x > 1$



2) $Im(z) < -1 \rightarrow y < -1$



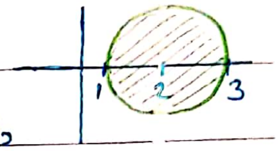
3) $|z| \leqslant 1 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1 \rightarrow x^2+y^2 \leqslant 1$



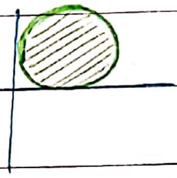
4) $|z-2| \leqslant 1 \rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} \leqslant 1 \rightarrow (x-2)^2+y^2 \leqslant 1$

$|x+iy-2|=1$

دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز $(2,0)$



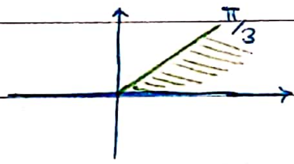
5) $|z-(1+i)| \leqslant 1 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \leqslant 1$



6) $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$

$z = re^{i\theta} \rightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{3}$

به هر زاویه‌ای



$1<r<2$

$\frac{\pi}{2} < \arg < \pi$

7) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 4 \rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 4 \rightarrow \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} = 16$

$(x-1)^2+y^2 = 17(x+1)^2+17y^2 \rightarrow \left(x+\frac{17}{15}\right)^2+y^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2$

دایره‌ای به مرکز $(\frac{-17}{15}, 0)$ و شعاع $\frac{8}{15}$

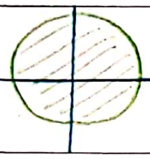
* چند تعریف: ① مکان هندسی نقاط: به هر مکانی که تعدادی از نقاط صفحه C را در بر دارد مکان هندسی نقاط گوییم. مانند $|z|=1$ مکان هندسی نقاطی است که فاصله‌شان تا مرکز برابر است.

② مجموعه نقاط باز: مجموعه S را مجموعه باز می‌نامیم هرگاه هر نقطه‌اش همسایگی داشته باشد که هر نقطه از آن متعلق به S باشد. مثال: نقاط درون یک دایره.

③ نقاط کرانه‌ای: نقاطی هستند که در همسایگی آن که هم نقاطی درون مجموعه و هم نقاطی خارج از مجموعه وجود دارد.

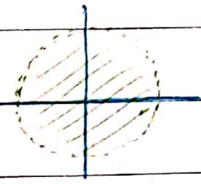
PARDIS

۴) مجموعه نقاط بسته: مجموعه نقاطی است که شامل نقاط کرانه‌اش هم می‌شود (متمم مجموعه بسته، باز خواهد بود)



$|z| \leq 1$

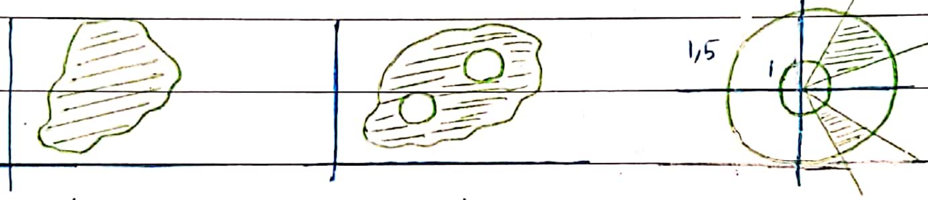
بسته



$|z| < 1$

باز

* مجموعه نقاط همبند: چنانچه هر دو نقطه از مجموعه توسط خطی شکسته درون مجموعه قابل اتصال باشند آن مجموعه نقاط را همبند گوییم.



همبند همبند ناهمبند

$\frac{\pi}{6} < |\arg z| < \frac{\pi}{3}$

$1 < |z| < 1{,}5$

* حوزه: مجموعه نقاط همبند باز را گویند.

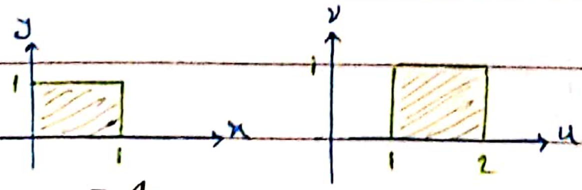
* ناحیه: مجموعه نقاط همبند بسته را گویند.

* تابع: تابع قانونی است که به تمام نقاط یک ناحیه (حوزه) در صفحه z یک عدد مختلط نسبت می‌دهد.

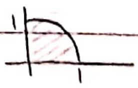
$$\overset{u+iv}{W} = f(\overset{x+iy}{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$$

* تابع مختلط: در این جا می‌خواهیم دامنه تصویر را بیابیم.

$W = z + 1$



$f(z) = z^2$



$0 < r < 1$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$(re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta}$ نمایش

$0 < r^2 < 1$

$0 < 2\theta < \pi$

PARDIS

مثال:

① $w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2ixy}_{iv(x,y)}$ $\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

② $w = (1+i)z - (2-i) = (1+i)(x+iy) - 2 + i = x+iy-y-2+i+ix$

$= \underbrace{(x-y-2)}_{u(x,y)} + \underbrace{i(x+y+1)}_{iv(x,y)}$

③ $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

$= \underbrace{(x^3-3xy^2)}_{u(x,y)} + \underbrace{i(3x^2y-y^3)}_{iv(x,y)}$

* حد تابع: تابع $w=f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد L است چنانچه به ازای ε دلخواه (ε عددی است به اندازه دلخواه کوچک) δ وجود داشته باشد چنانچه $|z-z_0|<\delta$ باشد در آن صورت $|w-L|<\varepsilon$ باشد. تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ دارای مشتق است چنانچه حد زیر وجود داشته باشد

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

نکته: در توابع حقیقی وقتی این مشتق وجود داشت که حد چپ و راست برابر بودند.

در توابع مختلط باید این حد به ازای تمام حالات در نقطه z موجود و برابر باشد.

جلسه ۱۷ :

تعریف: گوییم تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر است هرگاه حد زیر وجود داشته باشد:

$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$. این حد مشتق تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ نامیده می‌شود. با قرار دادن

$z_0+\Delta z=z$ خواهیم داشت $\Delta z=z-z_0$ و می‌توان نوشت $f'(z)=\lim\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

از این رو مشتق پذیری بدین معناست که این حد از تمام مسیرهایی که z به z_0 میل می‌کند، مقدار واحد حاصل می‌کند.

نکته ۱: اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق پذیر باشد آنگاه در نقطه z_0 پیوسته نیز است.

نکته ۲: تمام قواعد مشتق پذیری توابع حقیقی در مورد مشتق گیری توابع مختلط صادق است.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(z)=\bar{z}$ را بررسی کنید.

$f(z)=\bar{z}=x-iy$

$$f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)=\boxed{1}$$

* $\bar{z}$ ، $Re(z)$ ، $Im(z)$ معمولاً مشتق‌پذیر نیست و باید بررسی کنیم. ( )

Subject: Page: ( )

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\right)=\boxed{-1}\neq 1$$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(z)=Re(z)$ را بررسی کنید.

$$z=x+iy \Rightarrow Re\{z\}=Re\{x+iy\}=x$$

$x+iy+\Delta x+i\Delta y$
$=(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{Re\{z+\Delta z\}-Re\{z\}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+im\Delta x}=\frac{1}{1+mi}$$

چون وابسته به m است پس مقادیر متفاوت در مسیرهای متفاوت خواهد داشت بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

$$\boxed{\Delta y=m\Delta x}$$

* توجه: توابع چندجمله‌ای در تمام نقاط مشتق‌پذیر و توابع گویا بجز در ریشه‌های مخرج در همه جا مشتق‌پذیرند.

* تعریف: گوییم تابع تک مقداری $f(z)$ در حوزه‌ی D تحلیلی است اگر تابع $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد. تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ تحلیلی نامیم.

* هدف: بدست آوردن معیاری برای تعیین تحلیلی بودن تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

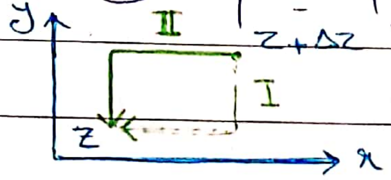
است. فرض کنید تابع تک مقداری $f(z)$ در یک همسایگی از نقطه دلخواه z تعریف شده و پیوسته باشد و دارای مشتق

Subject: Page: (   )

مشتق پذیری باید از این روش تعریف. مشتق در نقطه z وجود دارد. $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

یعنی Δz در امتداد هر مسیر از یک همسایگی z می‌تواند به صفر میل کند و در نتیجه حد عبارت بالا دارای جواب یکتایی

خواهد بود. حال اگر Δz را به صورت $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ تعریف کنیم و از بین تمام مسیرهای ممکن که Δz می‌تواند



به صفر میل کند مسیرهای I و II را انتخاب کنیم داریم:

(I) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\overset{0}{\Delta y}) + iv(x+\Delta x, y+\overset{0}{\Delta y})] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y \to 0}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{[u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x} \right]$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\, \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right]$$

$$f'(z) = \left[\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}}_{\text{تعریف مشتق } u \text{ در جهت } x} + i \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}}_{\text{تعریف مشتق } v \text{ در جهت } x} \right]$$

$$\Longrightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad *$$

مهم: دو مسیر مخصوص که باید در سوالات انتخاب کنیم و بررسی نماییم:

۱) یکبار Δx را به صفر میل می‌دهیم و Δy را برابر صفر می‌گذاریم.

۲) یکبار Δy را به صفر میل می‌دهیم و Δx را برابر صفر می‌گذاریم.

$$(\mathrm{II})\quad f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}\right]$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-[u(x,y)+iv(x,y)]}{i\Delta y}\right]$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$f'(z)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\Longrightarrow f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\quad **$$

$$\Longrightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

با مساوی قرار دادن قسمت های حقیقی و موهومی روابط زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

روابط کوشی - ریمان
(Cauchy-Riemann equations)

یا $f(z)=u+iv=\underbrace{u_x+iv_x}=-iu_y+v_y$

* قضیه ۱: تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در همسایگی نقاط $z=x+iy$ تعریف شده و پیوسته است را در نظر بگیرید. اگر این تابع در نقطه z مشتق پذیر باشد آنگاه در آن نقطه مشتقات مرتبه اول u و v وجود دارند و در معادلات کوشی - ریمان صدق می کنند:

لازم ذکر است معادلات کوشی - ریمان را فقط با در نظر گرفتن دو مسیر از بی‌نهایت مسیری که Δz می‌تواند به صفر میل کند بدست آوردیم. از این رو، عکس فقط از برقراری روابط کوشی - ریمان نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع مشتق پذیر است. اما از عدم برقراری روابط کوشی - ریمان می‌توان نتیجه گرفت تابع تحلیلی نیست.

مثال: آیا تابع $f(z)=\bar{z}$ تابع تحلیلی است؟

$$f(z)=\bar{z}=x-iy \quad \begin{cases} u=x & \begin{cases} u_x=1 \\ u_y=0 \end{cases} \\ v=-y & \begin{cases} v_x=0 \\ v_y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x \overset{?}{=} v_y$$

$1 \neq -1$ X تحلیلی نیست.

مثال: در مورد تحلیلی بودن تابع $f(z)=I_m(z)$ تحقیق کنید.

$$f(z)=Im\{z\}=0+iy \quad \begin{cases} u=0 \\ v=y & \begin{cases} v_x=0 \\ v_y=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$u_x+iv_x=-iu_y+v_y \Rightarrow u_x \overset{?}{=} v_y$$ تحلیلی نیست.

$0 \neq 1$ X

قضیه ۲: تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید. اگر u، v، $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ در حوزه D پیوسته باشند، آنگاه معادلات کوشی - ریمان ($u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$) شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در حوزه D هستند. در این صورت مشتق تابع $f(z)$

Subject: Page: ( )

توسط هر یک از روابط زیر مشتق محاسبه می‌شود

$$\begin{cases} f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

مثال: در مورد تحلیلی بودن تابع $f(z)=z^2$ تحقیق کنید.

$$f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy \quad \begin{cases} u=x^2-y^2 \begin{cases} u_x=2x \\ u_y=-2y \end{cases} \\ v=2xy \begin{cases} v_x=2y \\ v_y=+2x \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u_x \overset{?}{=} v_y \quad , \quad v_x \overset{?}{=} -u_y$$

$$2x=2x \checkmark \qquad 2y=-(-2y) \checkmark$$

شرط کوشی-ریمان برقرار است.

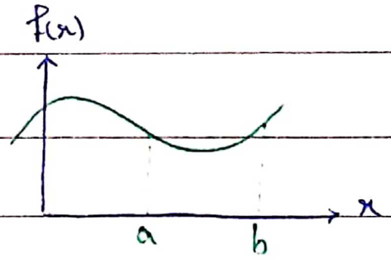
همانطور که ملاحظه می‌شود u، v و $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial v}{\partial y}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$ در همه جا پیوسته هستند و لذا تابع $f(z)=z^2$ در همه صفحه مختلط تحلیلی است از این رو مشتق آن را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i2y=2(x+iy)=\boxed{2z}$$

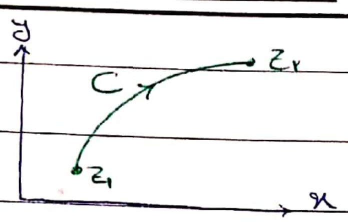
جلسه ۱۸ :

«فصل چهارم: انتگرال توابع مختلط»

یادآوری: انتگرال توابع حقیقی:



$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum f(x_i)\,\Delta x$$



در ازای معادل انتگرال روی محور x ، منحنی C داریم:

(انتگرال روی کمان) $W' = f(z)$

صفحه z

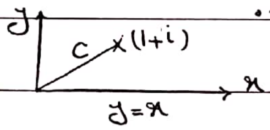
در حالت کلی انتگرال تابع $f(x)$ از نقطه z_1 به نقطه z_2 به مسیر انتگرال گیری وابسته است. در نتیجه انتگرال تابع مختلط روی یک منحنی خاص (C) تعریف می‌شود:

$$\int_C f(z)\,dz$$

نکته: هر منحنی در صفحه z به صورت $z(t)$ قابل نمایش است.

مثال ۱: $0<t<1$

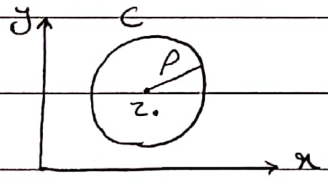
$z(t) = t + it$



مثال ۲: برای پاره خط روی $y = ax+b$ ،

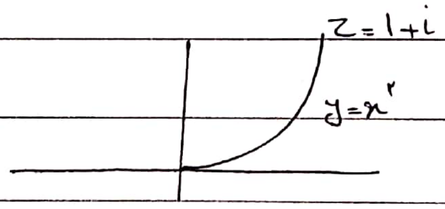
$$\underset{t}{z = x} + i\underset{at+b}{y} \Rightarrow z(t) = t + i(at+b)$$

مثال ۳: دایره ای با شعاع ρ و مرکز z_0 :



$z(t) = z_0 + \rho e^{it}$ $\quad 0<t<2\pi$

مثال ۴: $z(t) = t + it^2$, $0<t<1$:



$$z = x+iy = x + ix^2 = t + it^2$$

مثال ۵: منحنی C پاره خط واصل $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-4i$:

$$z(t) = \underbrace{(1+i)}_{z_1} + \underbrace{(1-5i)t}_{(z_2-z_1)t} = (1+t) + i(1-5t)$$

نکته: اگر بخواهیم خط واصل بین $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ را به‌صورت پارامتری بنویسیم داریم

اثبات هم:

$$z_c(t) = \underbrace{x_1 + iy_1}_{z_1} + \underbrace{\left[(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)\right]}_{z_2 - z_1} t$$

* تعریف:

$$\int_C f(z)\, d\underset{z(t)}{z} = \int_a^b f(z)\, \dot{z}(t)\, dt$$

$dz = \dot{z}\, dt$

$dz(t) = \frac{\partial z}{\partial t}\, dt$

$\dot{z}$ یعنی (z')

اثبات:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(z)\, \dot{z}(t)\, dt$$

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{\Delta z \to 0} \sum f(z)\, \Delta z$$

$$\omega = f(z) = u + iv \quad , \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum (u + iv)\left[\Delta x + i\Delta y\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum u\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum iv\Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} \sum iu\Delta y - \lim_{\Delta y \to 0} \sum v\Delta y$$

$$= \int u\, dx + i\int v\, dx + i\int u\, dy - \int v\, dy$$

$$= \int_a^b u\dot{x}\, dt + i\int_a^b v\dot{x}\, dt + i\int_a^b u\dot{y}\, dt - \int_a^b v\dot{y}\, dt$$

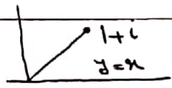
$$= \int_a^b \underbrace{(u + iv)}_{f(z)} \underbrace{(\dot{x} + i\dot{y})}_{\dot{z}}\, dt = \int_a^b f(z)\, \dot{z}(t)\, dt$$

* در جهت عکس عقربه‌های ساعت $(0\to 2\pi)$ $+$

در جهت عقربه‌های ساعت $(2\pi\to 0)$ $-$

مثال: از تابع $f(z)=\underbrace{Re(z)}_{x}$ روی پاره خط واصل بین $z_1=0$, $z_2=1+i$ انتگرال بگیرید.

$f(z)=x$



$z=x+iy=x+ix=t+it=z(t)$

$f(t)=0+(1+i)t=t+it$, $\dot z(t)=1+i$

$$\int_0^1 t(1+i)\,dt=\int_0^1 (t+it)\,dt=\frac{t^2}{2}+i\frac{t^2}{2}\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$$

مثال: روی دایره واحد در جهت عکس عقربه‌های ساعت از تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ انتگرال بگیرید.

$0<t<2\pi$, $\overset{\text{دایره واحد}}{z(t)=e^{it}}$, $\underset{0<t<2\pi}{\dot z(t)=ie^{it}}$, $f(z)=\frac{1}{z}=e^{-it}$

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,\dot z(t)\,dt=\int_0^{2\pi} e^{-it}(ie^{it})\,dt=i\int_0^{2\pi}dt=\boxed{2\pi i}$$

مثال: از تابع $\underset{m\in\mathbb{Z}}{f(z)=(z-z_0)^m}$ روی دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع ρ و روی تمام دایره در جهت عکس عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید.

$z(t)=z_0+\rho e^{it}$ $\quad 0<t<2\pi$

$\dot z(t)=\rho i e^{it}$

$f(z)=(z_0+\rho e^{it}-z_0)^m=\rho^m e^{imt}$ $\qquad \underbrace{\cos(m+1)2\pi}_{1}+i\underbrace{\sin(m+1)2\pi}_{0}$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}\underbrace{\rho^m e^{imt}}_{f(z)}\cdot\underbrace{i\rho e^{it}}_{\dot z}\,dt=i\rho^{m+1}\int_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}\,dt$$

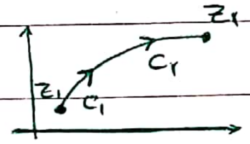
$$=i\rho^{m+1}\times\begin{cases}\frac{1}{i(m+1)}e^{i(m+1)t}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{i(m+1)}\left[e^{i(m+1)2\pi}-\cancel{e^{0}}\right]=0 & m\neq -1\\ 2\pi \rightarrow i\underbrace{\cancel{\rho^{-1+1}}}_{1}\int_0^{2\pi}\underbrace{\cancel{e^{i(-1+1)t}}}_{1}\,dt=2\pi i & m=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_C (z-z_0)^m\,dz=\begin{cases}2\pi i & m=-1\\ 0 & m\neq -1\end{cases}$$

* خواص انتگرال مختلط :

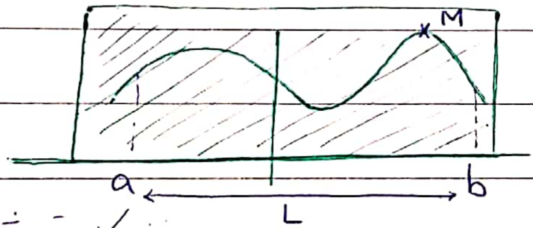
① اگر منحنی c، دو منحنی یا چند پاره خط تقسیم شود (مانند c_1 , c_2 در شکل زیر) در این صورت :

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$



نتیجه : اگر مسیر انتگرال گیری برعکس شود مقدار انتگرال منفی مقدار اولیه خواهد بود.

② $\left|\int_c f(z)dz\right| \le ML$ که در آن M حداکثر مقدار $|f(z)|$ و L طول منحنی c می باشد.



اثبات : یادآوری این رابطه برای انتگرال های حقیقی :

اندازه ماکزیمم مقدار باشد

$$\left|\int_c f(z)dz\right| = \left|\lim_{\Delta z \to 0} \sum f(z)\Delta z\right| \le \lim_{\Delta z \to 0} \sum |f(z)||\Delta z| \le \lim \sum M|\Delta z|$$

$$= M \underbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \sum \Delta z}_{L} = ML$$

③ در حالت کلی انتگرال، به مسیر انتگرال گیری وابسته است.

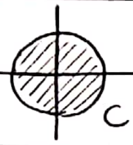
* قضیه انتگرال کوشی : مهم

اگر D یک حوزه همبند ساده و کراندار باشد که تابع $f(z)$ درون حوزه تحلیلی است و c یک منحنی بسته درون D باشد :

$$\int_c f(z)dz = 0$$

Subject: Page: ( )

مثال: در جهت مثلثاتی روی مسیر $C: |z|=1$ ، $\int_C e^z\,dz$ را بدست آورید.



e^z تحلیلی $\Rightarrow \int_C e^z\,dz = 0$

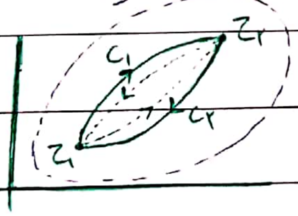
مثال: در مثال زیر فرض کنید: $C = |z| = 1$

$\int \cos z\,dz = 0$; $\int_C (z^3+z^2)\,dz = 0$; $\int (e^{4z}\cos z + 5z^3)\,dz = 0$

جلسه ۱۹:

* دو نتیجه از قضیه انتگرال کوشی:

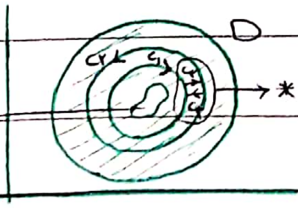
(1) اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 (درون حوزه D) انتگرال گیری کنیم، مقدار این انتگرال بستگی به مسیر ندارد.



$\int_C f(z)\,dz = 0$

$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

(2) اگر تابع $f(z)$ در حوزه همبند D تحلیلی باشد و C_1، C_2 دو منحنی بسته درون D (داخل همدیگر) باشند



در این صورت: $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \underbrace{- \int_{C_3} f(z)\,dz - \int_{C_4} f(z)\,dz}_{0} = 0$$

* خیلی نزدیک هم هستند تقریباً همدیگر را خنثی می‌کنند

Subject: Page: ( )

* جمع بندی :

انواع جمع‌بندی :
- در تمام سطح تحلیلی هستند : e^z , $\cos z$, ...
- در تمام سطح تحلیلی نیستند : $|z|$, $Im(z)$, $Re(z)$
- در بعضی سطح تحلیلی نیستند : (نقاط تکین) (در نقاط مخرج تحلیلی نیستند) ← $\frac{1}{z^3+z}$, $\frac{1}{\cos z}$,

* اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 را انتگرال بگیریم با انتگرال مثل انتگرال حقیقی برخورد میکنیم.

$$\int_0^i \cos 2z\,dz = \frac{1}{2}\sin 2z\Big|_0^i = \frac{1}{2}\sin 2i$$

** اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم روی یک مسیر بسته انتگرال بگیریم طبق قضیه انتگرال کوشی :

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

*** اگر تابع از نوع دوم باشد راهی جز استفاده از فرمول اصلی نداریم :

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dz$$

« فصل پنجم : سری‌های مختلط »

ناحیه همگرایی سری‌های مختلط : برای یافتن ناحیه همگرایی یک سری مختلط $\sum_{n=0}^{\infty} a(n,z)$ مانند است

شرط همگرایی این سری این است که حد نسبت دو جمله متوالی سری وجود دارد :

الف) شرط همگرایی، روش دالامبر:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,z)}{a(n,z)}\right|<1$$

ب) شرط همگرایی، روش کوشی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n,z)|}<1 \quad (\text{سری های توانی})$$

* توجه کنید که اگر ناحیه همگرایی یک دایره باشد، شعاع دایره را شعاع همگرایی می نامیم و می توان ثابت کرد سری حاصل از انتگرال گیری یک سری توانی و همچنین سری حاصل از مشتق یک سری توانی دارای شعاع همگرایی سری اصلی خواهد بود.

مثال: ناحیه همگرایی؟

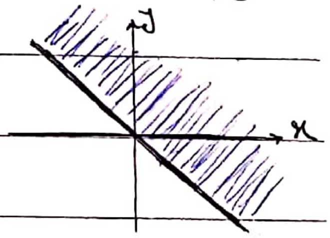
$$① \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n \xrightarrow{\text{کوشی}} \lim\sqrt[n]{\left|\frac{(z-i)^n}{(z+1)^n}\right|}<1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{z+1}\right|<1 \Rightarrow |z-i|<|z+1|$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}<\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}<\cancel{x^2}+\cancel{1}+2x+\cancel{y^2}$$

$$0<2x+2y \Rightarrow 0<x+y \Rightarrow -x<y$$

$$y=-x$$



$$② \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz^2} \xrightarrow{\text{دالامبر}} \lim\left|\frac{e^{-(n+1)z^2}}{e^{-nz^2}}\right|<1$$

$$\lim\left|e^{z^2(-n-1+n)}\right|<1 \Rightarrow \left|e^{-z^2}\right|<1$$

$$z^2=(x+iy)^2$$

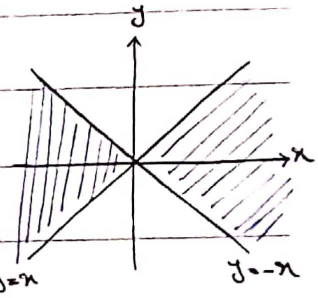
$$\left|e^{-(x^2-y^2+2xyi)}\right| = \left|e^{-(x^2-y^2)}\,e^{-2ixy}\right| < e^0$$

$$\Rightarrow \left|e^{-(x^2-y^2)}\right|\underbrace{\left|e^{-2ixy}\right|}_{1} < e^0 \Rightarrow \left|e^{-(x^2-y^2)}\right| < e^0$$

$$|e^{i\theta}|=1 \rightarrow |e^{2xi}| = \sqrt{\cos^2 2x+\sin^2 2x}=1$$

$$\Rightarrow -(x^2-y^2)<0 \rightarrow (x^2-y^2)>0 \Rightarrow x^2>y^2$$

$$\pm x = y$$



* بسط تیلور یک تابع مختلط: هرگاه تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد می‌توان این تابع را برحسب توان‌های صحیح نامنفی از عبارت $(z-z_0)$ که به بسط تیلور تابع معروف است، به فرم زیر بسط داد.

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

تذکر: بسط تیلور حول نقطه $z_0=0$ را بسط مک‌لورن می‌نویسیم.

* توجه کنید که باتوجه به بسط‌های زیر این امکان وجود دارد که بسط بسیاری از توابع دیگر را بدون اینکه لازم باشد که مشتقات آن‌ها را پیدا کنیم به سادگی مشخص کنیم. به خصوص که می‌توان از بسط‌های زیر جمله به جمله مشتق‌گیری یا جمله به جمله انتگرال‌گیری کرد و بسط توابع دیگر را بدست آورد.

بسط مک لورن توابع زیر را به خاطر داشته باشید:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$|z|<1 \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ \dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \end{cases}$$

مثال: تابع $P(z) = (z^3 + 2z - 1)e^{-z}$ مفروض است. ضریب z^4 را در بسط مک لورن این

تابع باشد:

$$(z^3 + 2z - 1)\left[1 - z + \left(\frac{(-z)^2}{2!}\right) + \frac{(-z)^3}{3!} + \frac{(-z)^4}{4!} + \dots\right)$$

$$z^3(-z) \;,\; 2z\left(\frac{-z^3}{3!}\right) \;,\; (-1)\frac{z^4}{4!} = \boxed{-1 - \frac{2}{3!} - \frac{1}{4!}}$$

ضریب z^4

PArdis

* انواع نقاط تکین یا منفرد:

اگر تابع $P(z)$ در تمام نقاط منفرد یعنی نقاطی خاص تحلیلی نباشد، آن نقاط خاص نقطه تکین تابع گفته می‌شود.

که این نقاط تکین را می‌توان به دو دسته تکین یا تنها و تکین یا غیر تنها دسته بندی کرد.

در حین سوال وقتی نقاط تکین یک تابع را مشخص می‌کنیم که تابع دارای بی شمار نقاط تکین است که همگی در حال نزدیک شدن یا انباشته شدن در یکی از نقاط تکین می‌باشند که اصطلاحاً آن تکین انباشته می‌گوییم.

مثال: برای توابع زیر نقاط تکین و نوع آن را مشخص کنید.

مخرج را صفر می‌کند (قطب مرتبه اول)

(1) $P(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$ $\quad (z-2i)(z+2i)$

زمانی که دو یا نقطه بدست آید.

$z^2+4=0 \longrightarrow z^2=-4 \longrightarrow z=\pm 2i \left\langle \begin{array}{l} 2i \\ -2i \end{array}\right.$ نقاط تکین تنها

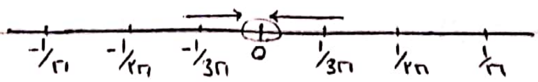
۱۰ ← قطب مرتبه ده

(2) $P(z)=\dfrac{1}{(z-1)^{10}}$ $\quad \lim_{z\to 1}(z-1)^{m}\dfrac{1}{(z-1)^{10}}=\underline{\text{عدد}}$ $\quad \times\ \infty,\ 0$

(m را طوری انتخاب می‌کنیم که جواب عدد شود.)

$(z-1)^{10}=0 \longrightarrow z=1$ (ده بار) نقطه تکین غیر تنها

(3) $P(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$



$\sin\frac{1}{z}=0 \longrightarrow \frac{1}{z}=k\pi \longrightarrow z=\frac{1}{k\pi}=\pm\frac{1}{\pi},\ \pm\frac{1}{2\pi},\ \pm\frac{1}{3\pi},\ \dots$ تکین انباشته

هریک از نقاط فوق تکین تنها است و صفر نقطه تکین انباشته است.

PARDIS

Subject: Page: ( )

نکته: نقطه تکین تنها خود به دو دسته تکین که از انواع قطب و تکین اساسی تقسیم بندی می شوند.

(قطب: توان محدود — تکین اساسی: توان نامحدود)

* تعریف: اگر z_0 یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد و بتوان m ای پیدا کرد که حاصل $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد آنگاه z_0 قطب مرتبه m تابع $f(z)$ است در غیر این صورت z_0 را تکین اساسی تابع $f(z)$ گوییم.

مثال:

$$f(z)=\frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\frac{0}{0}$$

$1-e^{z^3} \longrightarrow$ صفر مرتبه 3

$z^7 \longrightarrow$ صفر مرتبه 7

$\Longrightarrow$ قطب مرتبه 4

$$\lim_{z\to 0} z^5 \times \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim \frac{1-e^{z^3}}{z^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{2z}=0 \quad \times$$

$$\lim z^{4} \times \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim \frac{1-e^{z^3}}{z^3}=0\xrightarrow{H}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{3z^2}=-1\neq 0 \quad \checkmark$$

راه دوم:

* بسط لوران:

اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد حول این نقطه دارای بسط تیلور است اما اگر در این نقطه تحلیلی نباشد در اطراف آن نقطه دارای بسط تیلور نخواهد بود. اما چنانچه z_0 یک نقطه تکین از نوع تنها برای

PARDIS

تابع $f(z)$ باشد می‌توان تابع را حول این نقطه، بسطی که اصطلاحاً بسط لوران تابع می‌باشد نوشت.

ویژگی اساسی این بسط این است که بر خلاف بسط تیلور توان‌های صحیح و منفی عبارت $(z-z_0)$ نیز در آن وجود دارد.

* ویژگی‌های بسط لوران:

① بالاترین توان منفی عبارت $z-z_0$ را مرتبه قطب در نقطه تکین z_0 گوییم و اگر بالاترین توان منفی وجود نداشته باشد به معنای آن است که z_0 یک تکین اساسی تابع بوده است.

② ضریب جمله $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران $\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_0}$ و یا به تعبیری مانده تابع در نقطه z_0 گوییم.

مثال: بسط تابع زیر را حول نقطه $z_0=0$ بیابید.

① $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z\,1!}+\frac{1}{z^2\,2!}+\frac{1}{z^3\,3!}+\frac{1}{z^4\,4!}+\dots$$ ضریب توان ۱- : مانده

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3+\frac{z^2}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!\,z}+\dots$$ (تکین اساسی حول توان‌های منفی بی‌نهایت شده)

ضریب $\frac{1}{(z-z_0)} \Rightarrow \frac{1}{(z-0)} \Rightarrow \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{4!}$ مانده تابع

(2) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2} \longrightarrow$ قطب مرتبه ۲

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$1-\cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots$$

$$\frac{1}{z^2}(1-\cos z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots$$

چون می‌توانیم از z^2 فاکتور بگیریم
پس قطب مرتبه ۲ است، چون توان‌ها
مثبت هستند پس سری تیلور می‌شود و مانده‌اش صفر است.

(3) $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z}$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{z^2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{z^4}\frac{1}{4!} - \frac{1}{z^6}\frac{1}{6!} + \dots$$

$$z^3 \cos\frac{1}{z} = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{z}\frac{1}{4!} - \frac{1}{z^3}\frac{1}{6!} + \dots \qquad \text{(تکنیک اساسی)}$$

مانده‌اش

توان‌ها + در $(z-z_0)$ ← سری تیلور
توان‌ها + در $(z-z_0)$، $(z_0=0)$ ← سری مک‌لورن
توان‌ها − در $(z-z_0)$ ← سری لوران

PARDIS

« فصل ششم : انتگرال گیری به روش باقیمانده »

* چند روش برای پیدا کردن مانده یک تابع در نقطه ای که تکین از نوع قطب :

اگرچه راه حل همیشگی برای پیدا کردن مانده با استفاده از بسط لوران تابع می باشد که در بسط لوران تابع را حول نقطه z_0 می نویسیم و ضریب جمله $\frac{1}{z-z_0}$ مانده تابع در آن نقطه می باشد اما چنانچه z_0 یک تکین از نوع قطب باشد مانده را می توان با روش زیر بدست آورد :

الف) اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد داریم :

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

ب) تابع $f(z) = \frac{p(z)}{Q(z)}$ را در نظر بگیرید. چنانچه z_0 یک قطب مرتبه اول این تابع باشد،

$p(z_0) \neq 0$ است داریم :

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0} = \frac{p(z)}{Q'(z)}\Big|_{z_0}$$

ج) چنانچه z_0 یک قطب مرتبه m ام تابع $f(z)$ باشد داریم :

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

مثال ۱: مانده تابع $f(z)=\frac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ در نقطه تکین $z=2i$ را بیابید.

(تکین نقطه)

$$\lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\times\frac{2z+3}{(z-1)\cancel{(z-2i)}(z+2i)}=\frac{2(2i)+3}{(2i-1)(2i+2i)}$$

مثال ۲: مانده تابع $f(z)=\frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}$ در نقطه $z=-\frac{1}{2}$ را بیابید.

$$2^4\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^4$$

$z=\frac{1}{2} \longrightarrow$ قطب مرتبه 4

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{(4-1)!}\,\frac{d^3}{dz^3}\left[\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^4\times\frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}\right]$$

$$=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{3!}\,\frac{d^3}{dz^3}\left[\cancel{\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^4}\times\frac{1}{16}\times\frac{\sin 3z}{\cancel{\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^4}}\right]$$

$$=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{6\times16}\times\frac{d^3}{dz^3}\left[\sin 3z\right]=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{6\times16}\times3^3\left(-\cos 3z\right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{3^3}{6\times16}\left(-\cos\frac{-3}{2}\right)$$

سوال امتحان

---

* مثال ۳: مانده تابع $f(z)=\frac{e^{1/z}}{1-z}$ در نقطه $z=0$ را بیابید.

$$f(z)=\frac{e^{1/z}}{1-z}=e^{\frac{1}{z}}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z\,1!}+\frac{1}{z^2\,2!}+\frac{1}{z^3\,3!}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=e-1$$

$$e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \rightarrow$$ (مانده تابع)

مثال ۴: مانده تابع $f(z)=\frac{\cos z}{z(e^z-1)}$ را در نقطه تکین $z=2\pi i$ بدست آورید.

جلسه ۲۱:

* انتگرال گیری به روش مانده ها:

فرض کنید C یک منحنی بسته در جهت مثلثاتی باشد برای محاسبه انتگرال $\oint_C f(z)\,dz$ با این فرض که $f(z)$ در تمام سطح محدوده نقاط تکین منفرد تنها نقطه تکین است بصورت زیر عمل می کنیم

نقاط تکین تابع را یافته و مانده تابع را در آن نقاط تکین که داخل ناحیه محدود به مرز C باشد محاسبه می کنیم. حال می توان ادعا کرد که با جمع مانده های محاسبه شده و ضرب آن در $2\pi i$ حاصل انتگرال مورد نظر محاسبه خواهد شد.

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\left[\sum \operatorname{Res} f(z)\right]$$

* محاسبه برخی از انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال مختلط:

الف) محاسبه انتگرال های به فرم $I=\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$ با توجه به آنچه داریم:

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{z-1/z}{2i}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{z+1/z}{2}$$

لذا انتگرال های مورد نظر به فرم زیر خواهند آمد:

$$I=\int_{|z|=1} f(z)\,dz$$

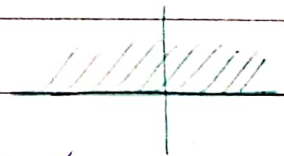
که با استفاده از روش مانده ها قابل حل است.

ب) محاسبه انتگرال های به فرم $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{Q(x)}\,dx$ که در آن $Q(x)$ دو درجه از $p(x)$ بزرگتر

و $Q(x)$ صفر حقیقی ندارد، می توان نوشت ($p(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله ای هستند)

ریشه های حقیقی مثل ۱، ۲، ۳، ...

$$I=\int_{Im z>0}\frac{p(z)}{Q(z)}\,dz$$



دایره با شعاع بی نهایت می تواند جواب های مختلط داشته باشد.

فقط کافی است مانده تابع $\frac{p(z)}{Q(z)}$ در نقاطی که در نیم صفحه بالایی واقع است را حساب

نموده و با ضرب در $2\pi i$ در مجموع آن مانده ها جواب انتگرال را محاسبه کنیم. $2\pi i\left(\text{Res} f(z)\right)\ Im z>0$

ج) در محاسبه انتگرال های حقیقی به فرم $A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx$, $B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx$

که در آن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ وضعیتی مشابه وضعیت (ب) دارد کافی است نصف انتگرال مختلط زیر را محاسبه کرد.

$$I=\int_{Im z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}\,dz \qquad A=Re(I) \qquad B=Im(I)$$

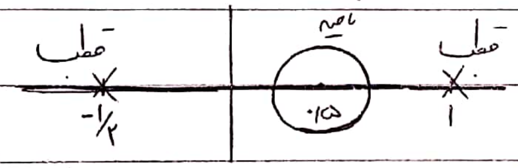
مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I=\oint\frac{e^{z}dz}{(z-1)^{2}(2z+1)}$ که در آن C دایره $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{3}$ باشد.

(اول قطب ها را مشخص می کنیم)

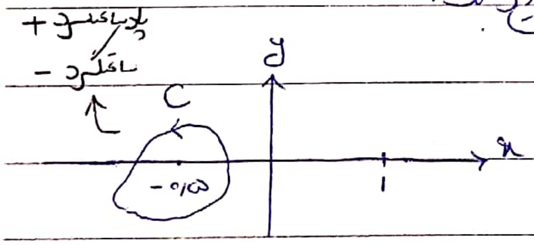
$z=1 \rightarrow$ مرتبه ۲

$z=-\frac{1}{2} \rightarrow$ مرتبه ۱

$I=0$ ناحیه هیچ کدام از قطب ها را در بر نگرفته است.



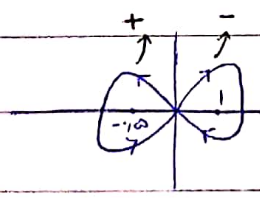
ب) همان مسئله قبل وقتی C مرزش داده شده در شکل زیر باشد.



$$I=2\pi i\left(Res\,f(z)\right)_{-0.5}$$

$$\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{z}}{2(z-1)^{2}(z+\frac{1}{2})}=\frac{2}{9e^{1/2}} \Rightarrow I=2\pi i\,\frac{2}{9\sqrt{e}}$$

ج) همان مسئله قبل وقتی C مرزش داده شده در شکل زیر باشد.



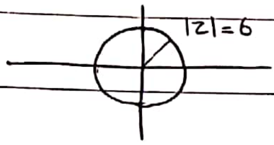
یا $I=$ " $\ominus$ "

$$I=2\pi i\left(Res\,f(z)\right)_{-\frac{1}{2}}+2\pi i\left(Res\,f(z)\right)_{1}$$

$$\left(Res\,f(z)\right)_{1}=\lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^{2}\frac{e^{z}}{(z-1)^{2}(2z+1)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{2z+1}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z(2z+1) - 2e^z}{(2z+1)^2} = \frac{3e-2e}{9} = \frac{e}{9}$$

حول جهت ساعتگرد $\longrightarrow \frac{-e}{9}$ $\Longrightarrow I = 2\pi i\left(\frac{2}{9\sqrt{e}} - \frac{e}{9}\right)$



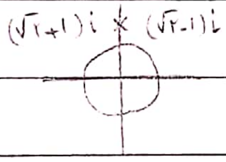
مثال: مطلوب است محاسبه $I = \oint_{|z|=6} \left(z^3 - 2z + \frac{1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}}$ ؟

$z=0$ تکین اساسی

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{z\,1!} + \frac{1}{z^2\,2!} + \frac{1}{z^3\,3!} + \frac{1}{z^4\,4!} + \dots\right)\left(z^3 - 2z + \frac{1}{z}\right)$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4!} - \frac{2}{2!} + 1\right)$$ (ضریب $\frac{1}{z}$ مانده)



مثال: مطلوب است محاسبه $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin\theta}$ ؟

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \sin\theta = \frac{z - 1/z}{2i}, \quad I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{zi\left(\sqrt{2} - \frac{z-1/z}{2i}\right)}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{2\sqrt{2}zi - z^2 + 1} \longrightarrow 2\sqrt{2}zi - z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 - 2\sqrt{2}zi - 1 = 0 \qquad \Delta = -4$$

$$z = \frac{2\sqrt{2}i \pm 2i}{2} = \sqrt{2}i \pm i = (\sqrt{2} \pm 1)i$$

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z)\right)_{(\sqrt{2}-1)i}$$

$$\left(\operatorname{Res} f(z)\right)_{(\sqrt{2}-1)i} = \lim_{z\to(\sqrt{2}-1)i} (z - \sqrt{2}i + i)\frac{2}{-(z-\sqrt{2}i+i)(z-\sqrt{2}i-i)} = \frac{2}{2i} = -i$$

$$\Longrightarrow I = 2\pi i(-i) = 2\pi$$