معادلات با مشتق جزئی :

بسیاری از مسائل عملی که باید حل گردند در فیزیک، به یک معادله دیفرانسیل معمولی منجر می‌گردند مثل مدار RL در حالت ساده، ولی بعضی از پدیده‌های فیزیکی مثلاً مقدار جابجایی یک سیستم مرتعش نسبت به زمان و مکان $u(x,t)$ در یک معادله با مشتق جزئی صدق می‌کند.

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله‌ای است که به صورت تابعی از متغیرهای مستقل یعنی x و y و z ... و خود تابع و مشتقات آن نسبت به x, y, ... یعنی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$F[x, y, z, \dots, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots, u_{xy}, \dots] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی، بالاترین مشتق جزئی موجود در معادله است.

معادله دیفرانسیل جزئی خطی : شکل خطی است، متغیر وابسته (یعنی u) و مشتقات جزئی آنها از درجه اول باشند.

توجه : معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی ممکن است جواب‌های زیادی داشته باشد.

$u(x,y)=?$

صورت کلی معادله دیفرانسیل جزئی خطی و مرتبه دوم با دو متغیر مستقل:

$$\boxed{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G}$$

در این رابطه A و B و ... یا اعداد ثابت یا توابعی از x و y و نباید تابعی از u باشند.

اگر $G=0$ معادله را همگن گویند.

B^2-4AC

مثبت: >0 معادله را هذلولی گون گویند.

صفر: $=0$ معادله را سهمی گون گویند.

منفی: <0 بیضی گون گویند.

مثال: معادله:

$$e^{2x}u_{xx}+2xe^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}=0$$

$$B^2-4AC=0$$

$$(2xe^{x+y})^2-4e^{2x}e^{2y}=$$

$$4e^{2(x+y)}\underline{\underline{(x^2-1)}}$$

باید تعیین علامت شود

تذکر: در صورتی که در معادله کلی اخیر ضرایب A و B و ... اعداد ثابت باشند معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت حاصل می‌شود.

معمولاً: مهمترین معادلات با مشتق جزئی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت:

۱- معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x} \qquad u(x,t) = ?$$

تذکر: معادله موج دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) ; \quad u(x,y,t) = ?$$

۲- معادله انتقال حرارت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad u(x,t) = ?$$

معادله انتقال حرارت سه بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) , \quad u(x,y,z,t) = ?$$

۳- معادله لاپلاس دو بعدی:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

۴- معادله پواسن دو بعدی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

توجه- ممکن است در بعضی مسائل معادله موج یا گرما به شکل زیر تعمیم یابند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x,t) \end{cases}$$

روش‌ها حل معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی

1- روش تبدیل: معادله دیفرانسیل معمولی با استفاده از تغییر متغیر مناسب

2- روش جدا سازی متغیرها

3- روش دالامبر

4- استفاده از تبدیل لاپلاس

نکته مهم- همانطوری که قبلاً هم بیان شد بطور کلی تعداد جواب‌ها یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی زیاد است و جواب یکتا معادله با استفاده از یک سری اطلاعات اضافی یعنی شرایط مرزی (شرایط در مرزها یا کرانه‌ها) و شرایط اولیه در $t = 0$ بدست می‌آید.

مثلاً $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Longrightarrow u(x,y) = e^x \cos y$ ، $u(x,y) = x^2 - y^2$ ، $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ همگی پاسخ معادله می‌باشند.

روش انتگرال تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی :

حل - جواب عمومی معادله شامل :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \quad ; \quad u(x,y) = ?$$

اگر از دو طرف نسبت به x انتگرال بگیریم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x^2 y \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3} x^3 y + \cancel{C} \xrightarrow{} f(y) \Longrightarrow u(x,y) = \frac{1}{6} x^3 y^2 + \int f(y)\,dy + \cancel{C} \xrightarrow{} g(x)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{6} x^3 y^2 + F(y) + g(x)$$

تمرین - با فرض $u(x,1) = x^2$ و $u(1,y) = \cos y$ پاسخ خصوصی را بیابید.

۲- روش جداسازی متغیرها: این روش یکی از پرکاربردترین روش ها می باشد. در این روش ابتدا تابع مجهول سوال را $u(x,y)$ را به صورت دو تابع جدا از هم که یکی وابسته به x و دیگری y به صورت زیر در نظر می گیریم. البته این فرض در خیلی از کارها فرض معقولی است.

$$u(x,y) = f(x)\,g(y)$$

مثال ۱- معادله

$$x u_x = y u_y \longrightarrow u(x,y) = ?$$

$$u(x,y) = f(x)\,g(y) \Longrightarrow u_x = f'(x)\,g(y) \quad , \quad u_y = f(x)\,g'(y)$$

(در بعضی کتب مشتقات نسبت به x و y به صورت زیرنویس نشان داده می شوند.)

تا در معادله قرار دهیم:

$$x f'(x)\,g(y) = y f(x)\,g'(y)$$

حال دو طرف را بر $f(x)g(y)$ تقسیم می کنیم:

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} = y \frac{g'(y)}{g(y)}$$

چون طرف اول فقط تابعی از x و طرف دوم تابعی از y لذا در صورتی این دو برابر می باشند که هر دو برابر مقدار ثابتی مثل k باشند:

پس :

$$\begin{cases} \dfrac{x f'(x)}{f(x)} = k \longrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{k}{x} \Longrightarrow \ln f(x) = k \ln x + \ln c_1 \\[2ex] \dfrac{y g'(y)}{g(y)} = k \Longrightarrow \dfrac{g'(y)}{g(y)} = \dfrac{k}{y} \Longrightarrow \ln g(y) = k \ln y + \ln c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x) = c_1 x^k \\ g(x) = c_2 y^k \end{cases} \Longrightarrow u(x,y) = f(x) g(y) = c_1 x^k c_2 y^k = \boxed{c\,(xy)^k}$$

ضرایب c و k با توجه به شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

مثال ۲-

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Longrightarrow u(x,y) = ?$$

$u_{xx}+u_{yy}=0$ حل سوال ۲ -

$$u(x,y)=f(x)g(y) \Longrightarrow u_{xx}=f''(x)g(y) \quad , u_{yy}=g''(y)\,g(y)$$

$$f''(x)g(y)+g''(y)g(y)=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } fg} \frac{f''(x)}{f(x)}=-\frac{g''(y)}{g(y)}=k$$

زمانی برابر می‌شوند که برابر : عدد ثابت

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{f''(x)}{f(x)}=k \Longrightarrow f''(x)-kf(x)=0 \Longrightarrow m^2-k=0 \\ \dfrac{g''(y)}{g(y)}=-k \Longrightarrow g''(y)+kg(y)=0 \Longrightarrow m^2+k=0 \end{cases}$$

معادله مشخصه

معادله مشخصه

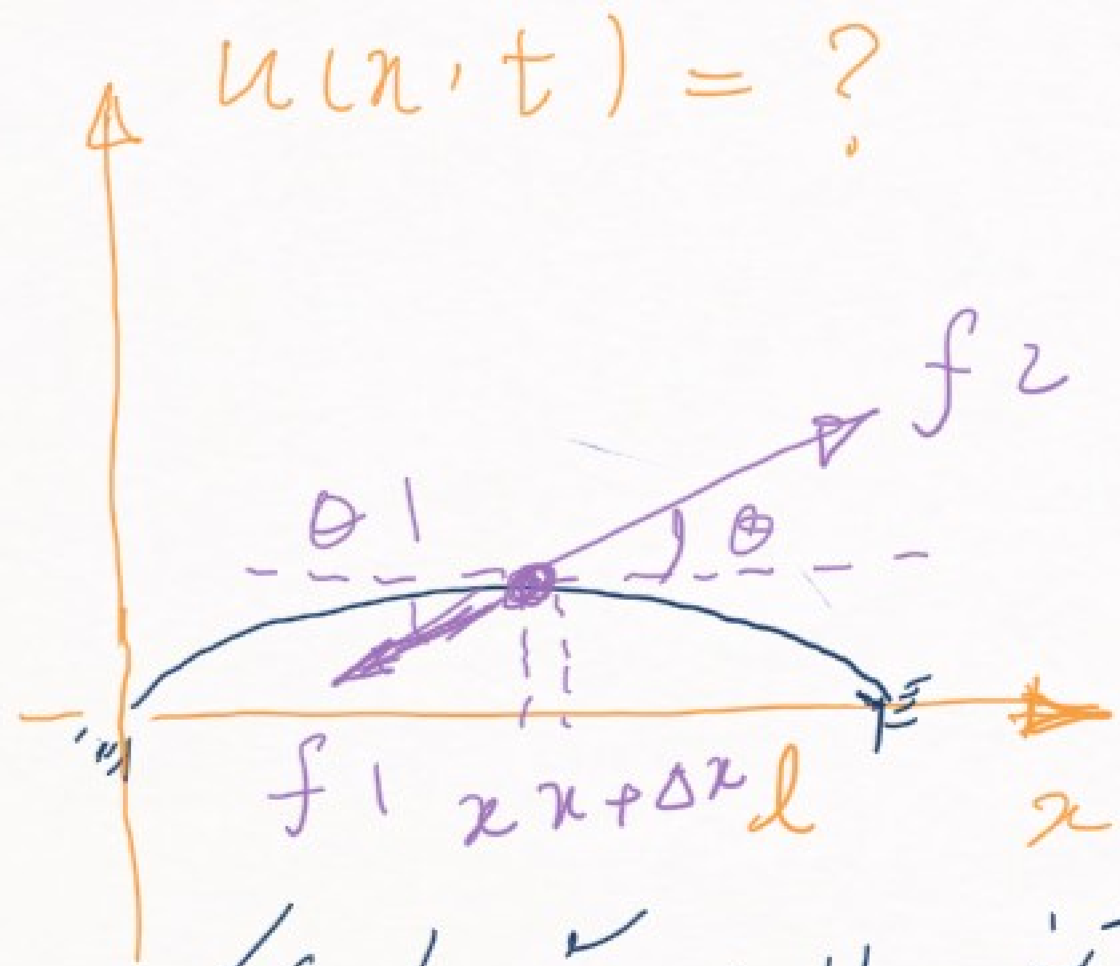
با فرض $k=-\lambda^2$

$$\begin{cases} m^2+\lambda^2=0 \Longrightarrow m=\pm j\lambda \Longrightarrow f(x)=c_1e^{j\lambda x}+c_2e^{-j\lambda x}=(k_1\cos\lambda x+k_2\sin\lambda x) \\ m^2-\lambda^2=0 \Longrightarrow m=\pm\lambda \Longrightarrow g(x)=(k_1'e^{\lambda y}+k_2'e^{-\lambda y}) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,y) = (k_1' e^{\lambda y} + k_2' e^{-\lambda y})(k_1 \cos \lambda x + k_2 \sin \lambda x)}$$

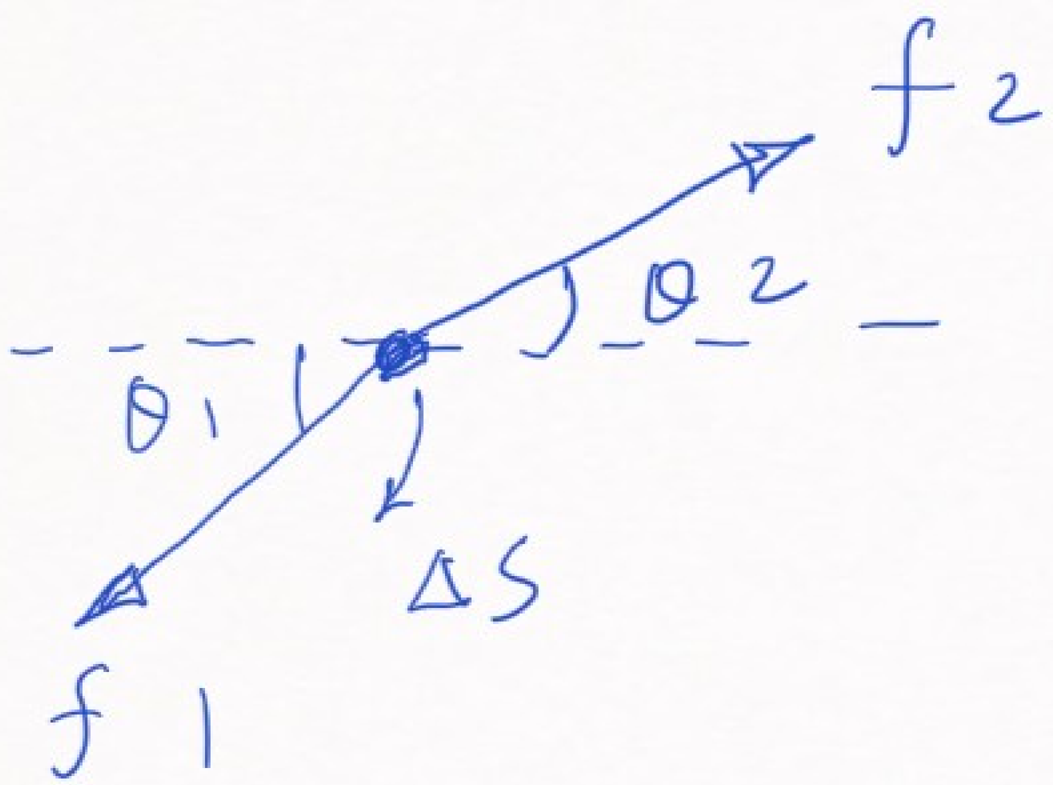
مقادیر k_1 و k_2 و k_1' و k_2' و ... با توجه به شرایط مرزی محاسبه می‌شوند

تمرین - معادله دیفرانسیل $x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0$ را حل نمایید.



معادله موج یک بعدی (معادله نخ یا سیم مرتعش):

نخ یا سیم قابل ارتجاع بوده و در دو انتهای آن ثابت است.
در $t=0$ در اثر اعمال نیروی خارجی از حالت تعادل خارج شده است و لذا دارای نوسان یا ارتعاش خواهد شد. می‌خواهیم مقدار ارتعاشات در مکان x و زمان t را بررسی کنیم. طول سیم کشش و کاملاً کشسان
نیروی کشش در تمامی نقاط ثابت و صرفاً بطور قائم حرکت می‌نماید.



$F = ma$

قطعه کوچکی از سیم بطول Δs در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} f_2\cos\theta_2 = f_1\cos\theta_1 = T = \text{ثابت} \\ f_2\sin\theta_2 - f_1\sin\theta_1 = ma = m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

Δs در جهت محور x حرکت ندارد.

Δs در راستای محور yها بالا و پایین می‌رود.

$$\Longrightarrow \frac{T}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 - \frac{T}{\cos\theta_1}\sin\theta_1 = \rho\Delta s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad m = \rho\Delta s$$

چگالی طولی سیم

$$\Longrightarrow T\left[\tan\theta_2 - \tan\theta_1\right] = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (*)$$

$\tan\theta_1$ ، $\tan\theta_2$ ضریب زاویه خط های مماس بر منحنی در نقاط x و $x+\Delta x$ می باشند بنابراین:

$$\tan\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} \quad , \quad \tan\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه $(*)$ حاصل می شود:

$$\frac{T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}\right]}{\Delta s} = \frac{\rho \cancel{\Delta s} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{\cancel{\Delta s}} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad , \quad \frac{T}{\rho} = c^2 = \text{ثابت}$$

معادله موج $\Longleftarrow$

حل معادله موج تک بعدی (روش جداسازی متغیرها و استفاده از سری فوریه)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = h(x) \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = k(x) \end{cases}$$ شرایط اولیه

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$ شرایط مرزی

$$u(x,t) = ?$$

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

$$u_{tt} = f(x)g''(t) \quad , \quad u_{xx} = f''(x)g(t)$$

با جایگذاری در معادله موج داریم:

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$$

با طرفین تقسیم بر $f(x)g(t)$ داریم:

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} \Rightarrow \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) - k f(x) = 0 \\ g''(t) - c^2 k g(t) = 0 \end{cases}$$

دو معادله دیفرانسیل معمولی

برای k سه حالت هست:

① $k=0 \Rightarrow f''(x) - 0 f(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$ * پاسخ نیست.

شرط مرزی $u(0,t) = 0 \Rightarrow u(x,t) = f(x)g(t) = f(0)g(t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

شرط مرزی $u(l,t) = 0 \Rightarrow u(l,t) = f(l)g(t) = 0 \rightarrow f(l) = 0 \Rightarrow Al + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$

② $k = \mu^2 > 0 \Rightarrow f''(x) - \mu^2 f(x) = 0 \Rightarrow m^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\mu$ * پاسخ نیست.

$\Rightarrow f(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \Rightarrow$ اعمال شرایط مرزی $\Rightarrow \begin{cases} u(0,t) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ u(l,t) = 0 \Rightarrow Ae^{l} + Be^{-l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

③ $k = -\lambda^2 < 0 \Rightarrow f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm j\lambda$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x} \xrightarrow{\text{شرط مرزی}} u(0,t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$

$u(l,t) = 0 \Rightarrow f(l) = 0 \Rightarrow B_1 \sin\lambda l = 0 \,,\, B_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi$

$$\lambda = \frac{n\pi}{l}$$

$$\boxed{f(x) = B_1 \sin \frac{n\pi}{l} x} \quad , \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

از معادله دوم داریم:

$$g''(t) + c^2\lambda^2 g(t) = 0 \implies m^2 + c^2\lambda^2 = 0 \implies m = \pm\, j c\lambda \quad , \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

$$g(t) = A_1 \cos c\lambda t + B_2 \sin c\lambda t \quad \text{یا} \quad \boxed{g(t) = A_2 \cos \mu_n t + B_2 \sin \mu_n t} \quad , \quad \boxed{\mu_n = c\frac{n\pi}{l}}$$

در حالت کلی:

$$u_n(x,t) = f(x)g(t) = B_{1n} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_{2n} \cos \mu_n t + B_{2n} \sin \mu_n t\right)$$

مشاهده می‌شود که اگر n تغییر کند μ_n نیز تغییر کرده و ضرایب A, ... نیز تغییر می‌کنند، وابسته به n می‌باشند و $u(x,t)$ نیز وابسته به n است.

به n بستگی دارد. پس $u_n(x,t)$ را نوشتیم. در این توابع از توابع دیگر با توابع نگه داریم و μ ها را بر اساس n بنویسیم.

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل مجموع کل جوابهای خصوصی است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \implies$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{B_{1n}A_{2n}}_{a_n}\cos\mu_n t+\underbrace{B_{1n}B_{2n}}_{b_n}\sin\mu_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

* اعمال شرط اولیه یعنی $u(x,0)=h(x)$ در رابطه (*):

$$u(x,0)=h(x)\Longrightarrow h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

یعنی اگر $h(x)$ تابعی فرد متناوب با پریود $2l$ باشد a_n ضرایب بسط سینوسی آن هستند:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

** اعمال شرط اولیه $u_t(x,0)=k(x)$ در رابطه (*):

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=k(x)\Longrightarrow k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n b_n)\sin\frac{n\pi}{l}x\Longrightarrow$$ اگر $k(x)$ تابعی فرد متناوب با پریود $2l$

$$\mu_n b_n=\frac{2}{l}\int_0^l k(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\longrightarrow b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l k(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$