قضیه مانده‌ها: اگر $f(z)$ در روی و داخل کانتور (C) بجز چند نقطه جدا از هم z_1 ، z_2 ، ... ، z_n تحلیلی باشد در این صورت داریم:

$$\boxed{\oint_{(C)} f(z)\,dz = 2\pi j\,(k_1+k_2+\dots+k_n)}$$

(C) در جهت مثلثاتی (در خلاف جهت عقربه‌های ساعت)

که در آن k_1 ، k_2 ، ... مانده در نقاط z_1 ، ... ، z_n می‌باشد.

نکته: این قضیه در واقع کلی‌ترین و ساده‌ترین قضیه جهت محاسبه انتگرال‌ها است.

مثال ۱:

$$I = \oint \frac{4-3z}{z^2-z}\,dz \qquad |z| = \tfrac{1}{2}$$

$$z^2 - z = 0 \Longrightarrow \underbrace{z=0 \,,\, z=1}$$

از این نقاط فقط $z=0$ داخل کانتور است.

$$\Longrightarrow k_1 = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z\left(\frac{4-3z}{z^2-z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{4-3z}{z-1}$$

مانده در نقطه $z=0$

$$\boxed{\Longrightarrow k_1 = -4 \Longrightarrow I = 2\pi j\, k_1 = -8\pi j}$$

حاصل انتگرال

* نکته: اگر جهت ساعتگرد باشد حاصل را منفی در نظر می‌گیریم.

مثال ۳: هر دو نقطه داخل کانتور می‌باشند بنابراین:

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{4-3z}{z^2-z}\,dz \;,\quad z^2 - z = 0 \Longrightarrow z = 0 \,,\, z = 1$$

قبلاً حل شده

$$\boxed{I = 2\pi j(k_1 + k_2)} \;,\quad k_1 = \lim_{z\to 0} z f(z) = -4$$

$$k_2 = \lim_{z\to 1}(z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{4-3z}{z\cancel{(z-1)}} = \lim_{z\to 1} \frac{4-3z}{z} = 1 \Longrightarrow \boxed{I = 2\pi j(-4+1) = -6\pi j}$$

مثال ۴:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\tan(z/2)}{z^2}\,dz = ?$$

داخل کانتور نیست

مثال: $z = 0$ در تابع زیر از نظر اشکال قطب مرتبه چندم است؟

داخل کانتور قرار دارد

$$f(z) = \frac{\sin(z/2)}{\cos(z/2)\cdot z^2} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \cos\frac{z}{2} = 0 \Longrightarrow \frac{z}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow z = 2k\pi + \pi \Longrightarrow z = \pi, 3\pi, \ldots \end{cases}$$

چون فقط $z=0$ داخل کانتور می‌باشد بنابراین مانده فقط در $z=0$ محاسبه می‌شود.

$$k_1 = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z \frac{\tan(z/2)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\tan(z/2)}{z} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{I = 2\pi j k_1 = \pi j}$$

محاسبه انتگرال های حقیقی ناسره با استفاده از انتگرال های مختلط:

هدف محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \xrightarrow{\text{تحت شرایطی}} \oint_{(C)} f(z)\,dz = 2\pi j(\text{مجموع مانده‌ها})$$

(C) ← محور x ها نیم دایره $R \to \infty$

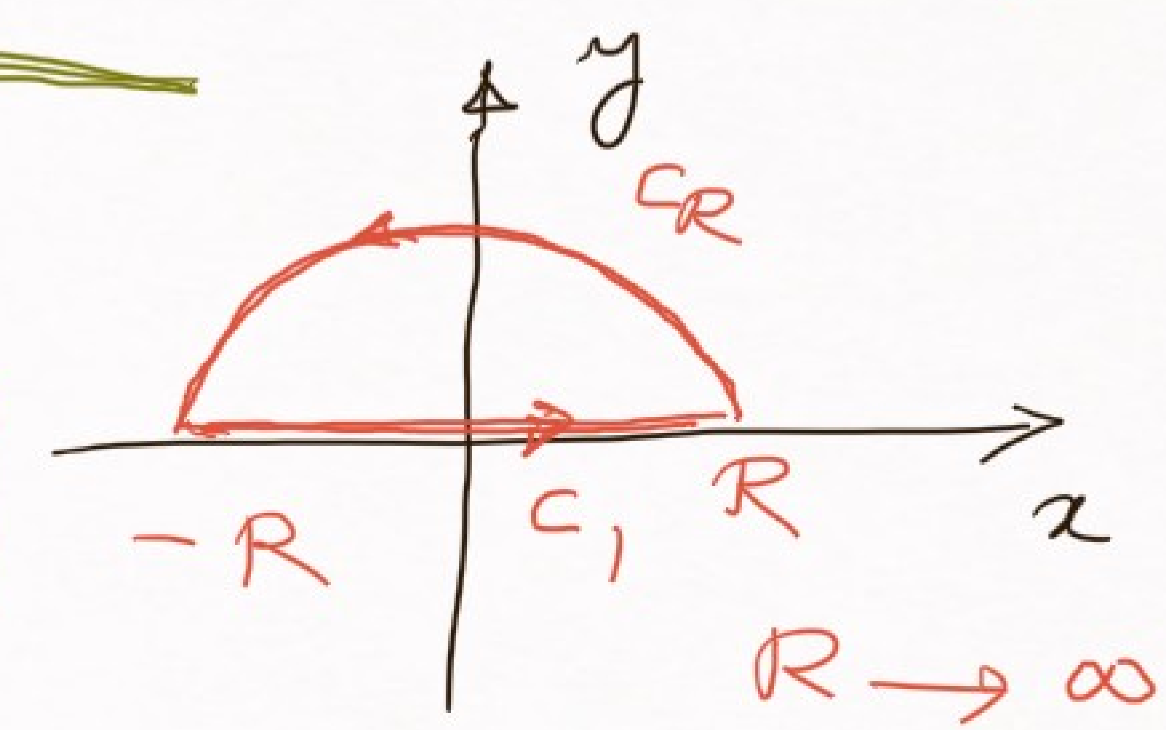
اگر $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ باشد باید p و q دارای شرایط:

الف- چندجمله‌ای p و q نسبت به هم اول باشند.

ب- $q(x)=0$ فقط ریشه مختلط داشته باشد. (حقیقی نداشته باشد)

ج- درجه $q(x)$ دو درجه از $p(x)$ بیشتر باشد.

{نیم صفحه $y \geq 0$}



$$\oint_{(C)} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

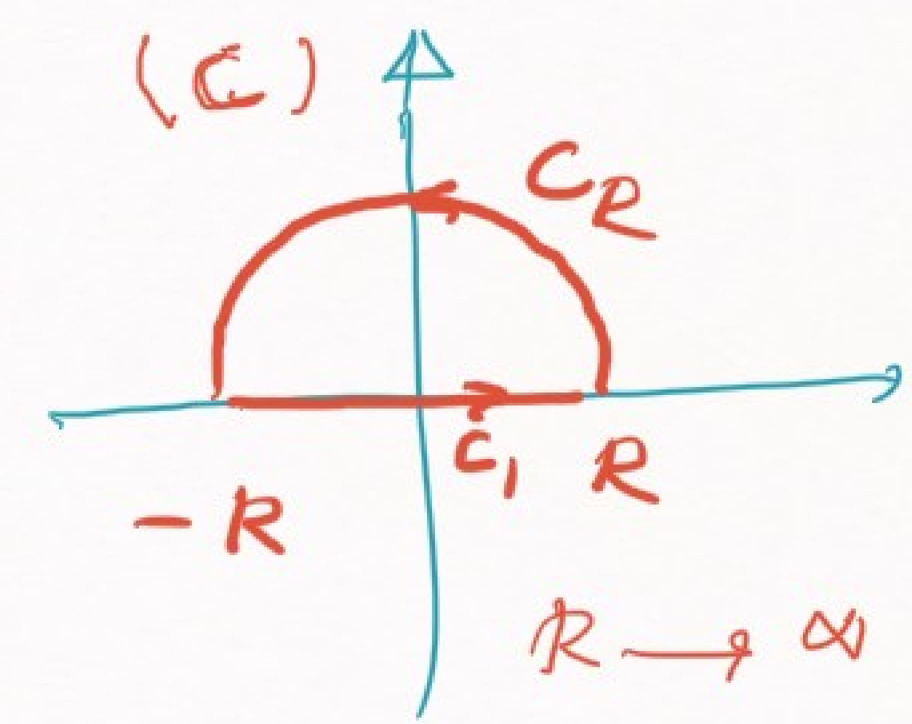
اگر $R \to \infty$ تحت شرایط بالا ثابت شده که حاصل صفر شده.

مثال ۴- محاسبه $I=\int_{0}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ به کمک انتگرال های مختلط

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx \quad , \quad f(x)=\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{p(x)}{q(x)}$$

دارای شرایط لازم می‌باشد.

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_C \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz=\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz$$



$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ حاصل نهایی می‌گردد.

$0 =$ وقتی $R\to\infty$

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi j\,(\text{مجموع مانده‌ها قطب‌ها داخل نیم دایره به شعاع بی‌نهایت})$$

قطب‌ها

$$\text{مخرج (نقاط تکین)}=0 \Rightarrow \begin{cases} z^2+1=0 \Longrightarrow \begin{cases} z=+j & \text{داخل کانتور} \\ z=-j \end{cases} \\ z^2+4=0 \Longrightarrow \begin{cases} z=+2j & \text{داخل کانتور} \\ z=-2j \end{cases} \end{cases}$$

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi j\left(\operatorname{Res}\{j\}+\operatorname{Res}\{2j\}\right)$$

$$\operatorname{Res}\{j\} = \lim_{z\to j}(z-j)f(z) = \frac{j}{2} \quad , \quad \operatorname{Res}\{2j\} = \lim_{z\to 2j}(z-2j)f(z) = \frac{-3j}{4}$$

$$\Longrightarrow \oint_{(C)} f(z)\,dz = 2\pi j\left(\frac{j}{2} - \frac{3j}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{I = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

حال اثبات می‌کنیم که

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0 \quad *$$

برای اینکار ابتدا یک نکته بیان می‌کنیم:

نکته مهم: اگر f روی کانتور C پیوسته باشد و به ازای جمیع نقاط z روی کانتور برقرار باشد $|f(z)| \leq M$

در این صورت $\left|\int_{(C)} f(z)\,dz\right| < Ml$ که l طول کانتور است.

حال داریم:

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} \frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz \quad , \; |z| = R$$

روی نیم دایره

C_R ← نیم دایره، R شعاع

$$\begin{cases} \text{مخرج} \quad |(z^2+1)(z^2+4)| = |z^2+4||z^2+1| \geq (|z|^2-4)(|z|^2-1) = (R^2-4)(R^2-1) \\ \text{صورت} \quad |2z^2+1| \leq 2|z|^2+1 = 2R^2+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \\ |z_1+z_2| \geq |z_1|-|z_2| \end{cases}$$

$$\left|\frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \leq \frac{2R^2+1}{(R^2-4)(R^2-1)}$$

با ارزش چون نیاز به صورت مقدار بیشترش و مخرج کمترش لذا گذاشته شده حاصل کسر کوچکتر شد.

$$\left|\int \frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right| \leq \frac{2R^2+1}{(R^2-4)(R^2-1)}\,dz \rightarrow \pi R$$

$$dz = \sqrt{dx^2+dy^2} = \pi R$$

از طرفی

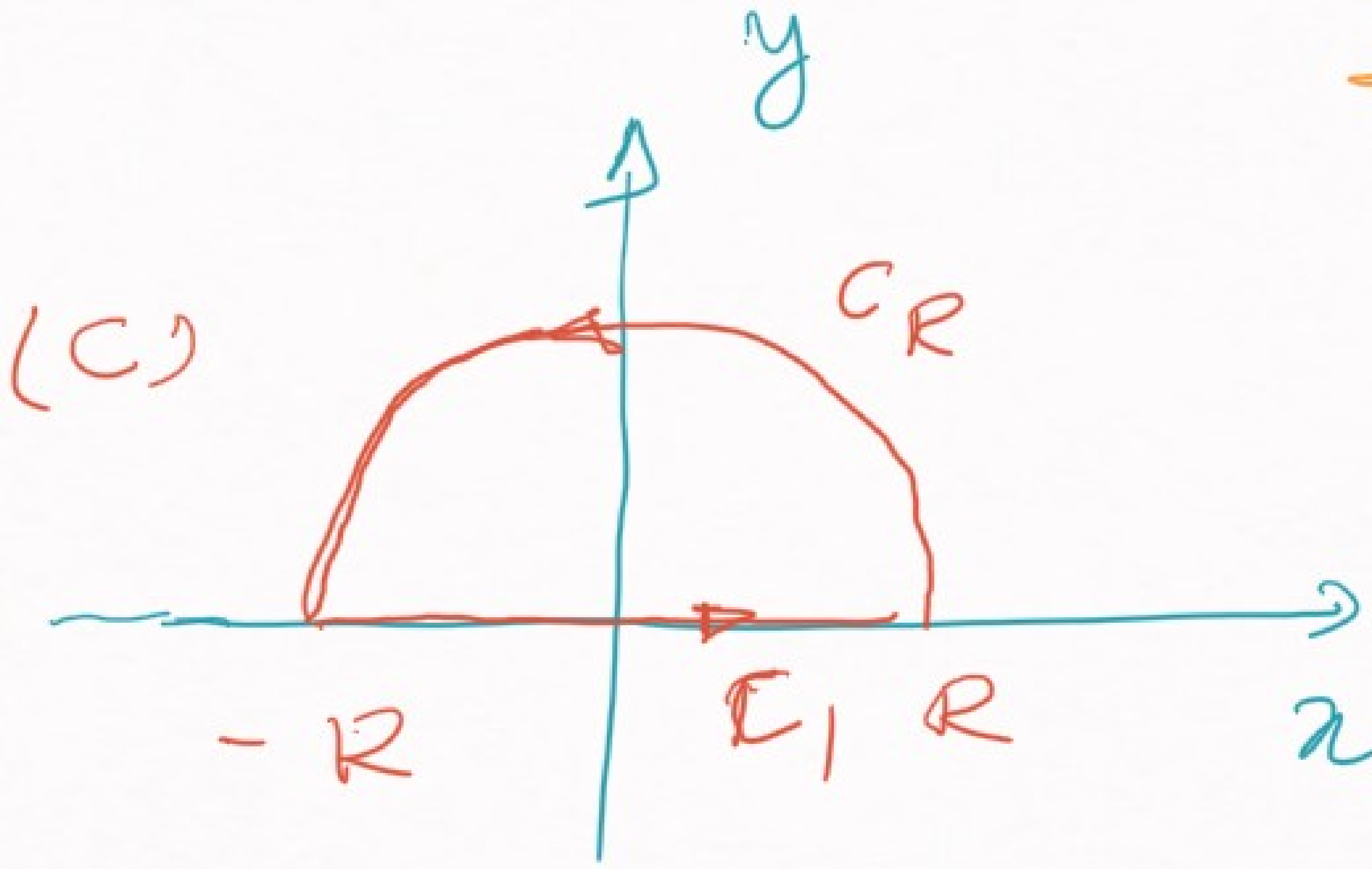
$$\lim_{R\to\infty} \frac{2R^2+1}{(R^2-4)(R^2-1)}\,\pi R = 0$$

پس حاصل انتگرال روی C_R صفر است.

مثال ۵- $I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = ?$

* شرایط $p(x)$, $q(x)$ را دارند بنابراین:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$



$$\oint_{(C)} \frac{dz}{1+z^4}\,dz = ?$$

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}$$

$\int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} \to 0$ (وقتی $R\to\infty$) ثابت می‌کنیم

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi j \left(\text{مجموع مانده‌ها داخل } C\right)$$

$$1+z^4=0 \Longrightarrow z = \underline{\underline{e^{j\pi/4}}},\ \underline{\underline{e^{3\pi j/4}}},\ e^{5\pi j/4},\ e^{7\pi j/4}$$

ریشه‌های مخرج

از قطب‌ها فقط ریشه‌های اول داخل کانتور (C) قرار دارند. پس مانده فقط در این قطب‌ها پیدا شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \oint_{(c)} f(z)\,dz = 2\pi j\left[\operatorname{Res}\left\{e^{j\pi/4}\right\} + \operatorname{Res}\left\{e^{3\pi j/4}\right\}\right]$$

همچون لوپیتال

$$\operatorname{Res}\left\{e^{j\pi/4}\right\} = \lim_{z\to e^{j\pi/4}} \left(z - e^{j\pi/4}\right)\cdot\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{j\pi/4}} = \boxed{\frac{1}{4}e^{-3\pi j/4}}$$

$$\operatorname{Res}\left\{e^{3j\pi/4}\right\} = \lim_{z\to e^{3j\pi/4}} \left(z - e^{3j\pi/4}\right)\frac{1}{z^4+1} = \lim \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{3j\pi/4}} = \boxed{\frac{1}{4}e^{-9\pi j/4}}$$

$$\oint_{(c)} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi j\left(\frac{1}{4}e^{-3\pi j/4} + \frac{1}{4}e^{-9\pi j/4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \oint_{(C)} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} \Longrightarrow I = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \boxed{\frac{\pi}{4}\sqrt{2}}$$

حالا نشان بدهیم که

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = 0$$

$$|z^4+1| \geq |z|^4 - 1 \quad \text{یا} \quad |z^4+1| \geq |R|^4 - 1$$

$$\Longrightarrow \left| \int \frac{dz}{z^4+1} \right| < \frac{dz}{R^4-1} = \frac{\pi R}{R^4-1} \Longrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^4-1} = 0$$

محاسبه انتگرال های : $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(x)}{p(x)} \cos x \, dx$ و $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(x)}{p(x)} \sin x \, dx$

توجه: p و q نسبت به هم اول اند، ریشه حقیقی ندارد و درجه صورت کمتر از مخرج است.

در این حالت نمی‌توان از $\oint \frac{p(z)}{q(z)} \cos z \, dz$ با شرایط آن ها نتیجه استفاده کرد. (چرا؟)

با توجه به اینکه $I_1 = \text{Real}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(x)}{p(x)} e^{jx} dx \right\}$ و $I_2 = \text{Imag}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(x)}{p(x)} e^{jx} dx \right\}$

لذا تابع $\oint \frac{p(z)}{q(z)} e^{jz} dz$ استفاده می کنیم.

مثال ۴-

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = ?$$

$$\oint_{(C)} \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2}\,dz$$ حل انتگرال $$I = \text{Real}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{(x^2+1)^2}\,dx\right\}$$ می دانیم که

را محاسبه می کنیم.

$$\oint_{C} \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{-R \to -\infty}^{R \to +\infty} \frac{e^{jx}}{(x^2+1)^2}\,dx + \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2}\,dz}_{\to 0}$$

وقتی $R \to \infty$

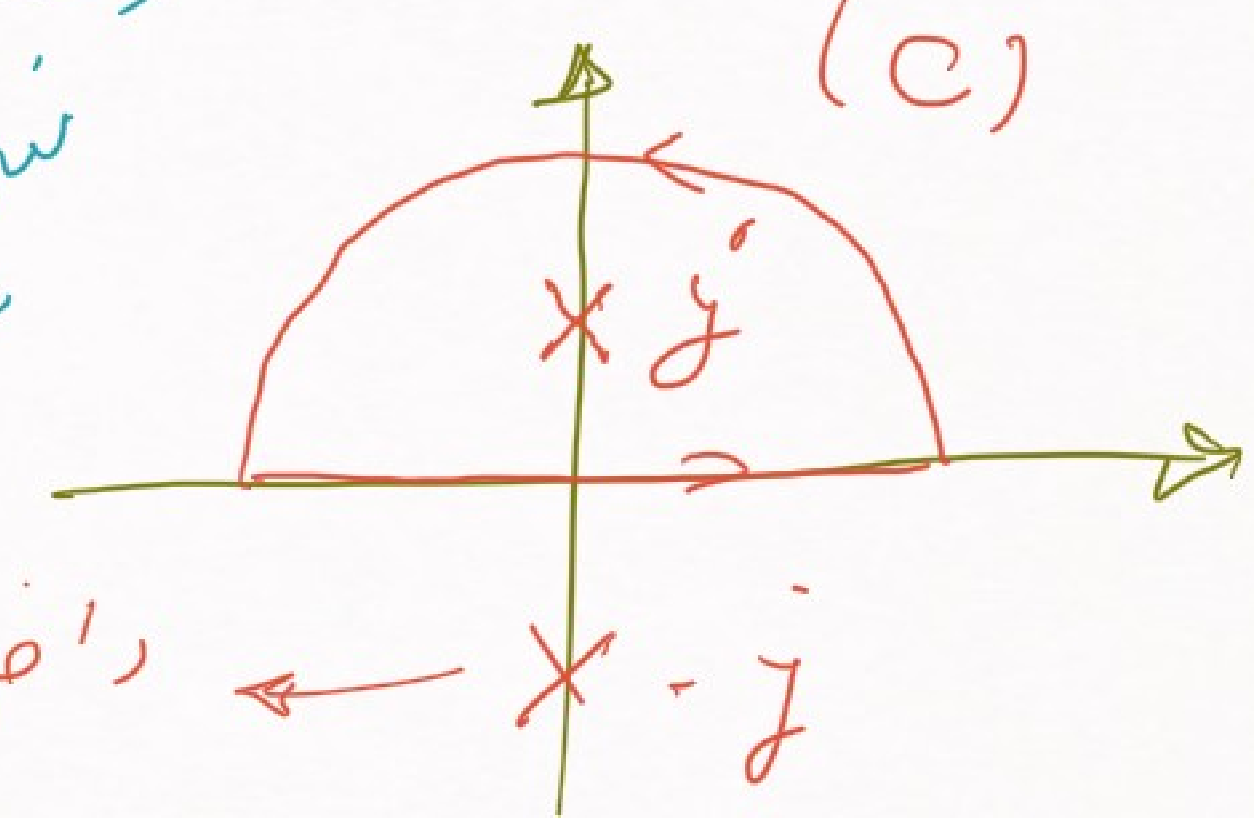
(بعنوان تمرین - ثابت کنید)

بنابراین :

$$\oint_{(C)} \frac{e^{jz}}{(z^2+1)}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi j\,(\text{مجموع مانده ها داخل کانتور } (C))$$

نیم صفحه $y \geq 0$

$$z^2+1=0 \Rightarrow z = \pm j$$



داخل کانتور نیست

$$\oint_{(C)} \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi j \left(\text{Res}\{j\}\right)$$

$$\text{Res}\{j\} = \frac{d}{dz}\left\{ (z-j)^2 \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2} \right\} = \frac{d}{dz}\left\{ \frac{e^{jz}}{(z+j)^2} \right\} = \frac{-j}{2e}$$

$(z-j)(z+j)$

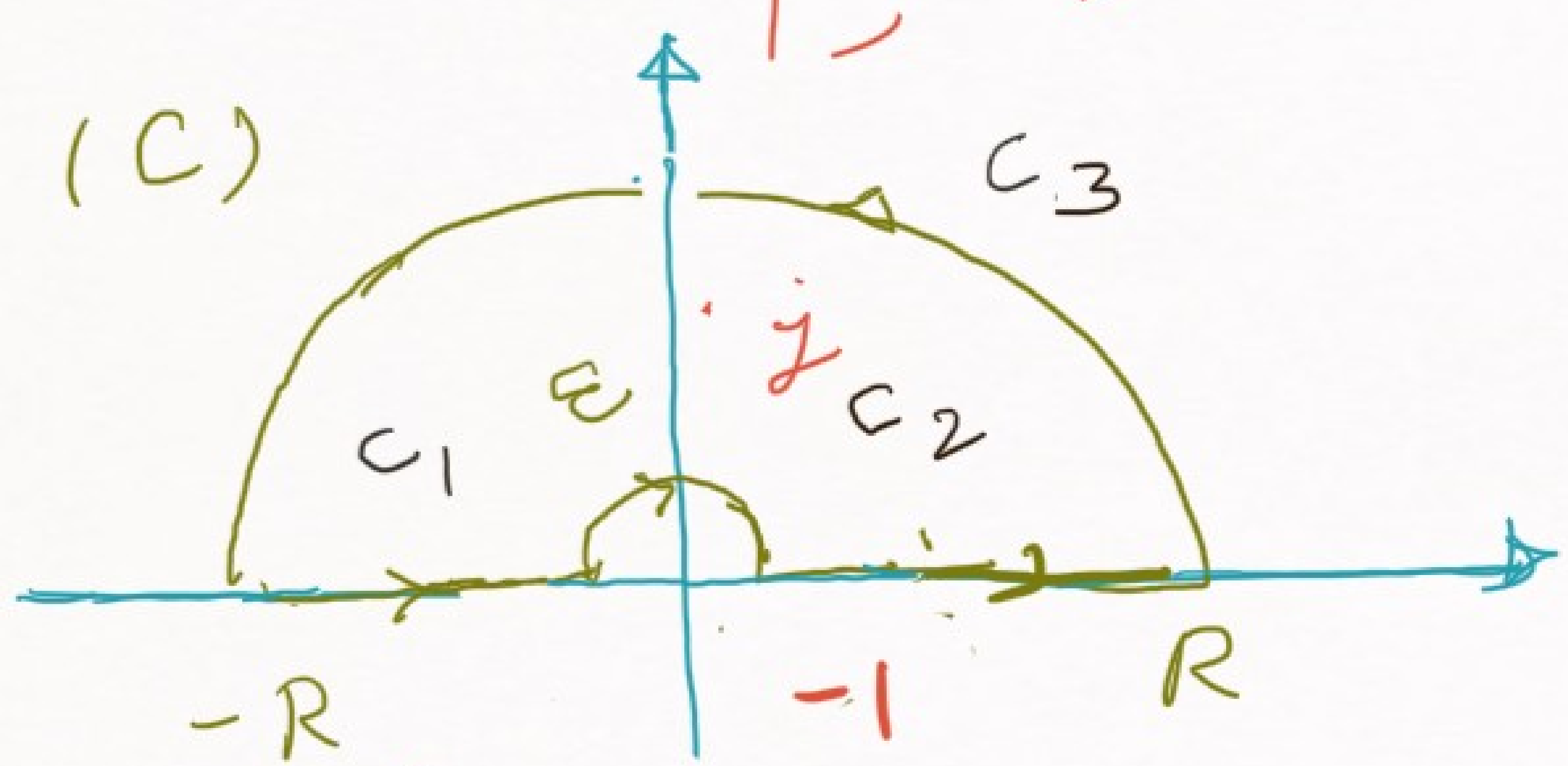
$$\Longrightarrow \oint_{(C)} \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi j \left(\frac{-j}{2e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

$$I = \text{Real}\{\ \} = \frac{\pi}{e}$$

[illegible]

نکته مهم - اگر در دوگذاری کانتور نقطه منفرد روی محور x ها باشد در این صورت نیم دایره ای به شعاع ε حول نقطه تکین مورد نظر گرفته و سپس انتگرال گیری شده و $\varepsilon \to 0$ میل می دهیم.

مثال ۷- $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=?$ $\longrightarrow$ $I=\text{Real}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x(x^2+1)}dx\right\}$



روش کلی و تفصیلی:

حاصل سه انتگرال مختلف محاسبه شود.

$$\oint_C \frac{e^{jz}}{z(z^2+1)}dz=\int_{-R}^{R}+\int_{C_2}+\int_{C_3}$$

روی محور حقیقی

نیم دایره کوچک

$z=\varepsilon e^{j\theta}$

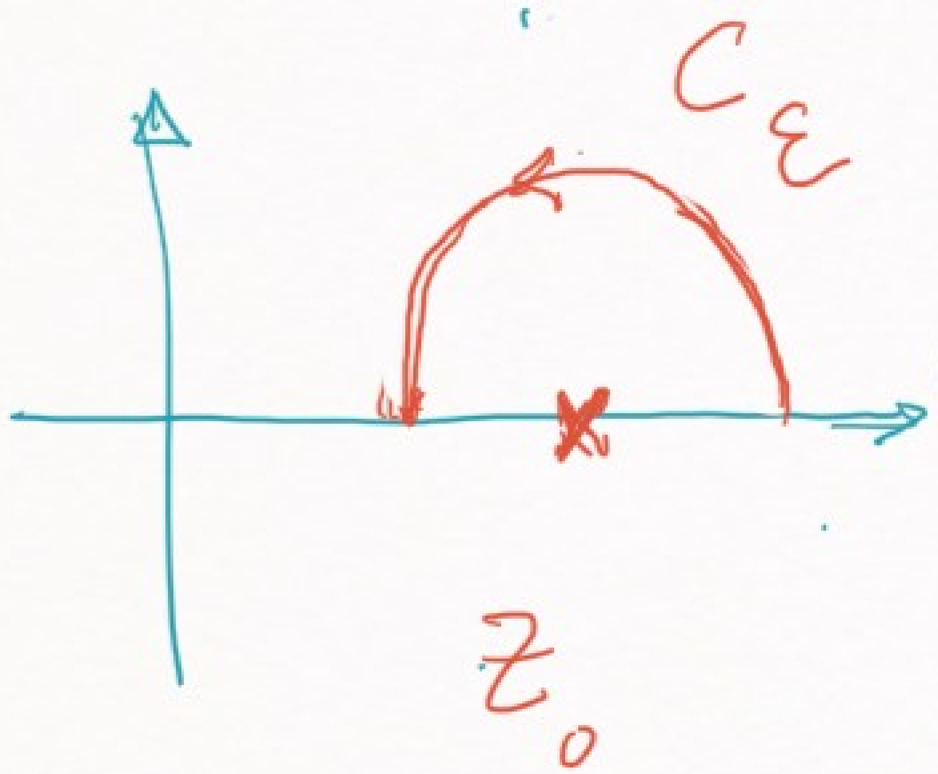
$dz=\varepsilon j e^{j\theta}d\theta$

نیم دایره بزرگ

$z=Re^{j\theta}$,

$dz=Rje^{j\theta}d\theta$

روش ساده :



$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi j \,(\text{مانده در } z_0)$$

نکته - اگر نقطه z_0 قطب ساده تابع $f(z)$ باشد و f در درون دایره ای به شعاع ε تحلیلی باشد داریم

بنابراین با توجه به نکته فوق می‌توان حاصل انتگرال صفحه تحتانی را به فرم زیر نوشت :

$$\oint_{(C)} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \int f(z)\,dz + \int f(z)\,dz = 2\pi j\,(\text{مجموع مانده‌ها داخل کانتور } (C))$$

$z=0$ داخل کانتور نیست

نیم دایره کوچک

نیم دایره بزرگ $\to 0$

مجهول سوال ما

(منفی) $-\pi j$ (مانده در $z=0$)

فقط $\mathrm{Res}\{j\}$

★ چون در محاسبه جهت نیم دایره خلاف جهت نیم دایره شکل بالا است

$$\oint \frac{e^{jz}}{z(z^2+1)}\,dz = 2\pi j\{Res\{j\}\} + \pi j\{Res\{0\}\}$$

$$Res\{j\} = \lim_{z\to j} (z-j)\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)} = \frac{e^{-1}}{-2} = \boxed{-\tfrac{1}{2}e^{-1}}$$

$$Res\{0\} = \lim_{z\to 0} z\,\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)} = \boxed{+1} \Longrightarrow \oint \frac{e^{jz}}{z(z^2+1)}\,dz = 2\pi j\left(-\tfrac{1}{2}e^{-1}\right) + \pi j \times 1$$

$$\oint \frac{e^{jz}}{z(z^2+1)}\,dz = \pi j(1-e^{-1}) \Longrightarrow I = Img\{\ \} = \pi(1-e^{-1})$$

بخش موهومی