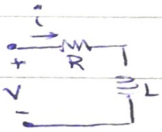
جلسه ۱

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی :

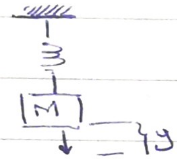
(ODE)

مقدمه : قبلاً با معادلات دیفرانسیل معمولی آشنا شدیم . چند مثال از سیستم های فیزیکی که با معادلات دیفرانسیل (ode) معمولی مدل می شوند را در زیر بیان می نمائیم .

مثال ۱ : $v = Ri + L\frac{di}{dt}$



مثال ۲ :



$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = f$

ضریب اصطکاک

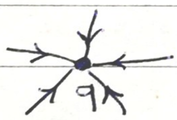
مثال ۳ : $T = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega$

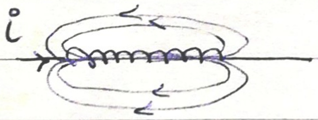
اینرسی — ضریب اصطکاک

نکته : در مثال های بالا متغیرهای در نظر گرفته شده (جریان ، ولتاژ ، نیرو ، گشتاور و ...) همگی تابعی از یک متغیر یعنی زمان هستند : $i(t), v(t), f(t), y(t), T(t), \omega(t), \ldots$

(PDE)

نکته : سیستم هایی را می توان مثال زد که متغیرهای آن تابعی از چند متغیر مستقل (زمان و مکان) می باشند مثل : میدان الکتریکی که نه تنها به زمان ، بلکه به محل نقطه مورد نظر نیز بستگی دارد ، میدان مغناطیسی نه تنها به زمان ، بلکه به مکان نیز بستگی خواهد داشت . (PDE) ، ارتعاش ، انتقال حرارت :





تعاریف اولیه :

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله ای است که ارتباط بین یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مختلف و خود آن متغیر را نشان خواهد داد (در زیر چند نمونه از این معادلات ارائه شده است) .

معادله یک بعدی موج $\quad (I) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad$ مرتبه دوم

معادله یک بعدی گرما $\quad (II) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad$ مرتبه دوم

معادله دو بعدی لاپلاس $\quad (III) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad$ مرتبه دوم

s.a.m

معادله‌ی دوبعدی پواسون $$\text{(IV)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$ مرتبه دوم

معادله‌ی سه‌بعدی لاپلاس $$\text{(V)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$ مرتبه دوم

در این معادلات t نشانه‌ی زمان، و x و y و z مختصات مکان هستند

مرتبه: مرتبه‌ی بالاترین مشتق موجود، مرتبه‌ی معادله گفته می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ مرتبه اول

درجه: درجه‌ی یک معادله، درجه‌ی بالاترین مشتق موجود در معادله است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ درجه اول

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ درجه دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ درجه اول

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+x=0$$ درجه اول

سه درجه

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4+u=x$$ درجه سوم

بالاترین مرتبه مشتق

معادله خطی: اگر معادله نسبت به متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن از درجه‌ی اول باشد، آن را معادله خطی

توضیح به طور مثال:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u$$ خطی

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$$ غیرخطی

همگن: اگر هر جمله معادله شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن باشد معادله را همگن می‌نامیم

در غیر این صورت آن را غیرهمگن نامیم به طور مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$$ همگن

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xu=y\frac{\partial u}{\partial x}$$ همگن

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy=0$$ غیرهمگن

s.a.m

ص ۳۰
۲۴

در این درس با معادلات دیفرانسیل خطی و همگن کار می‌کنیم (عموماً از مرتبه دو)

نمونه معادلاتی که بررسی خواهند شد

الف) معادله‌ی لاپلاس (توصیف کننده انواع میدان‌ها)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$ یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ سه بعدی

ب) معادله‌ی موج: (توصیف کننده انواع ارتعاشات)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$ دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$ سه بعدی

ج) معادله‌ی گرما (توصیف کننده انواع سیستم‌های انتقال گرما)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$ دو بعدی

مثال ①: ODE ←

$$\dot{y}+2y=0 \qquad y(t)=Ce^{-2t} \begin{cases} e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{cases}$$

مثال ②: نشان دهید توابع زیر در معادله لاپلاس صدق خواهند کرد:

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$u=x^2-y^2$, $u=\ln(x^2+y^2)$

$u=e^x\cos y$, $u=\sin x\cosh y$

$u=x^2-3xy$, $u=\operatorname{Arctan}(y/x)$

الف) $u=x^2-y^2 \rightarrow u_x=2x \rightarrow u_{xx}=2$

$u_y=-2y \rightarrow u_{yy}=-2$ $\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$

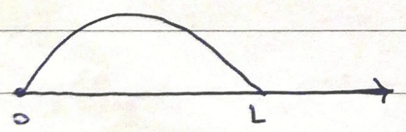
ب) $u=e^x\cos y \longrightarrow u_x=e^x\cos y \rightarrow u_{xx}=e^x\cos y$

$u_y=-e^x\sin y \rightarrow u_{yy}=-e^x\cos y$ $\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=e^x\cos y-e^x\cos y=0$

نکته چهارم: در بدست آوردن پاسخ خاص در ODE باید شرایط اولیه معلوم باشد

$$\dot{y}+2y=0 \longrightarrow y(t)=Ce^{-2t} \ , \ y(0)=1 \longrightarrow y(t)=e^{-2t}$$

در PDE علاوه بر شرایط اولیه باید شرایط کرانه‌ای داشته باشیم.



مثال در ارتعاش نخ:

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x,0)=f(x)$ $\qquad$ $u(0,t)=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)=g(x)$ $\qquad$ $u(L,t)=0$

***

s.a.m

در این درس عموماً با معادلات دیفرانسیل خطی، عموماً از درجه دوم سروکار خواهیم داشت.

نکته ۱: **اصل انطباق:** اگر $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$ حل های یک معادله ی دیفرانسیل خطی و همگن باشند

آنگاه به ازای ضرایب ثابت $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ ترکیب خطی

$$u(x,y) = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \dots + c_ku_k$$

نیز جوابی از معادله است این قضیه را اصل انطباق نیز گویند.

نکته دوم: u را پاسخ یک PDE در فضای R نامند به شرط آنکه اولاً در فضا مشتقات تعریف شده باشند و ثانیاً در معادله صدق کنند.

2++ دنبال

معادلات دیفرانسیل جزئی خاص:

نکته سوم: پاسخ ODE فقط با مقدار ثابت با هم متفاوت هستند ولی در PDE چنین نیست (پاسخ های PDE از نظر ظاهر ممکن است تفاوت زیادی با هم داشته باشند)

نکته ۵: برخی از انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می توان با استفاده از روش های مشابه حل معادلات

دیفرانسیل معمولی حل کرد.

① معادله دیفرانسیل جزئی $\partial u/\partial x = 0$ را در صورتی که u تابعی دو متغیره بر حسب x و y باشد را حل کنید.

$$\partial u/\partial x = 0 \Rightarrow u = f(y)$$

② معادله دیفرانسیل $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ را در صورتی که u تابعی دو متغیره بر حسب x و y باشد را حل کنید.

$$\partial^2 u/\partial x^2 = 0 \Rightarrow \partial u/\partial x = f(y) \Rightarrow u = x f(y) + g(y)$$

③ جواب عمومی معادله زیر را مشخص کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy^2 \quad = \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = xy^2 \Rightarrow \partial u/\partial y = x^2/2\, y^2 + f(y)$$

$$u(x,0) = x \qquad u = x^2/2 \times y^3/3 + g(y) + f_1(x) \Rightarrow$$

$$u(0,y) = \sin y \qquad \begin{aligned} u(x,0) &= g(0) + f_1(x) \\ u(0,y) &= g(y) + f_1(0) \end{aligned} \Rightarrow g(y) + f_1(x) + \underbrace{g(0) + f_1(0)}_{0} = x + \sin y$$

$$u(0,0) = 0 \qquad u(0,0) = g(0) + f_1(0) = 0$$

$$u(x,y) = x^2y^3/6 + x + \sin y$$

ادامه در صفحه 2+

s.a.m

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه‌ی اول :

صورت کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه اول بصورت زیر است.

$$P(x,y,z)\,\partial z/\partial x + Q(x,y,z)\,\partial z/\partial y = R(x,y,z)$$

z متغیر وابسته و x و y متغیرهای مستقل هستند. می توان نشان داد که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بالا باید دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را تشکیل دهیم.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

مسلم است که دستگاه مذکور دارای دو معادله مستقل است. چنانچه دو معادله مستقل این دستگاه را حل کنیم

به جواب کلی به فرم زیر خواهیم رسید. $u_1(x,y,z) = c_1$ و $u_2(x,y,z) = c_2$

می توان نشان داد جواب کلی معادله مرتبه اول شبه خطی مورد نظر به صورت زیر است. $h(u_1,u_2) = 0$

✓ به عبارت دیگر، باید رابطه‌ای به صورت $c_1=f(c_2)$ بین c_1 و c_2 برقرار باشد.

مثال ۱: معادله دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید.

$$\partial z/\partial x + (x+2)\,\partial z/\partial y = x$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{(x+2)} = \frac{dz}{x}$$

① $(x+2)dx = dy \quad \rightarrow \quad x^2/2 + 2x = y + c_1 \Rightarrow c_1 = x^2/2 + 2x - y = c_1$

② $x\,dx = dz \quad \rightarrow \quad x^2/2 + 0 = z + c_2 \Rightarrow c_2 = x^2/2 - z$

$$h\left(x^2/2 + 2x - y,\; x^2/2 - z\right) = 0$$