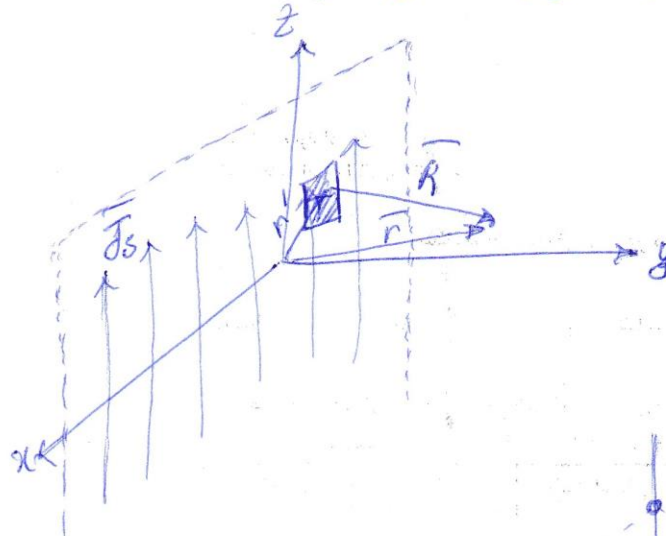
مثال: صفحه بی‌نهایت جریان در صفحه xoz با چگالی جریان سطحی $\bar{J}_s = J_{s0}\hat{a}_z$ در نظر بگیرید.
میدان را در دو طرف صفحه محاسبه نمایید.

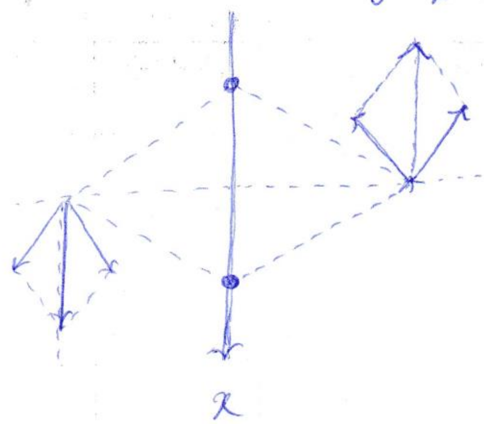


1- دستگاه مختصات کارتزین $\bar{B}(x,y,z)$

2- بررسی تقارن

اندازه ← $\bar{B}(x,y,z) = \bar{B}(y)$

جهت ← $\bar{B} = B(y)\hat{a}_x$



3: حل مستقیم:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\bar{J}_s \times \bar{R}}{|\bar{R}|^3}\, ds'$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$\bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\bar{r}' = x'\hat{a}_x + \cancel{y'\hat{a}_y} + z'\hat{a}_z = x'\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

صفر

$$\overline{ds'} = \overline{ds'_y} = \pm dx'dz'\,\hat{a}_y$$

$$ds' = dx'dz'$$

$$\bar{R} = (x-x')\hat{a}_x + y\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z$$

$$|\bar{R}| = \left[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

$$\bar{J}_s \times \bar{R} = J_{s0}\,\hat{a}_z \times \left[(x-x')\hat{a}_x + y\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z\right]$$

$$= J_{s0}\left[(x-x')\hat{a}_y - y\hat{a}_x\right]$$

$\hat{a}_x \to \hat{a}_y \to \hat{a}_z$

119

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J_{s0} \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{-y\,\hat{a}_x + (x-x')\,\hat{a}_y}{\left[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2\right]} \, dx' dz'$$

$$\mathrm{I} \qquad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II}: \hat{a}_y \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')}{\left[(x-x')^2 + \underbrace{y^2 + (z-z')^2}_{\alpha^2}\right]^{3/2}} \, dx' \qquad \begin{cases} x - x' = U \\ x' = x - U \end{cases}, \; dx' = -dU' \qquad \begin{cases} x' = -\infty \longrightarrow U = +\infty \\ x' = +\infty \longrightarrow U = -\infty \end{cases}$$

$$\mathrm{II} = \hat{a}_y \int_{U=+\infty}^{-\infty} \frac{-U\,dU}{\left[U^2 + \alpha^2\right]^{3/2}} = 0$$

تابع فرد نسبت به U و بازه متقارن

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} J_{s0}\, y\, \hat{a}_x \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dz'}{\left[(x-x')^2 + \underbrace{y^2 + (z-z')^2}_{\alpha^2}\right]^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{\left[(x-x')^2 + \alpha^2\right]^{3/2}} : \quad \begin{matrix} x - x' = U \\ dx' = -dU \end{matrix} \quad \begin{matrix} \to x' = -\infty, U = +\infty \\ \to x' = +\infty, U' = -\infty \end{matrix}$$

$$= \int_{U=+\infty}^{-\infty} \frac{-dU}{\left[U^2 + \alpha^2\right]^{3/2}} = \frac{-U}{\alpha^2 \left[U^2 + \alpha^2\right]^{1/2}} \Bigg|_{U=+\infty}^{-\infty} = \frac{2}{\left[U^2 + \alpha^2\right]}$$

120

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} J_{s_0}\, \hat{a}_x \times 2 \underbrace{\int_{z'=-\infty}^{+\infty} \frac{y\,dz'}{\left[(z-z')^2+y^2\right]}}_{I}$$

$$\begin{cases} z - z' = u \\ du = -dz' \\ z' = -\infty \rightarrow u = +\infty \\ z' = +\infty \rightarrow u = -\infty \end{cases} \qquad I = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-y\,du}{\left[u^2+y^2\right]}$$

$$u = y\tan\alpha \rightarrow du = y\sec^2\alpha\, d\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{u}{y} \rightarrow \alpha = tg^{-1}\frac{u}{y} \qquad u^2 + y^2 = y^2(1+tg^2\alpha) = y^2\sec^2\alpha$$

$$I = \int \frac{-y^2\sec^2\alpha\, d\alpha}{y^2\sec^2\alpha} = -\alpha = -tg^{-1}\frac{u}{y}\Bigg|_{+\infty}^{-\infty}$$

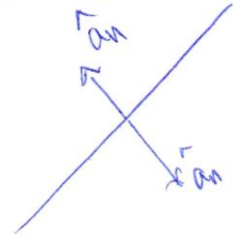
$$\text{if } y > 0 \rightarrow I = \left(+\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right) = +\pi$$

$$\text{if } y < 0 \rightarrow I = \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(+\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} J_{s_0}\, \hat{a}_x \times 2 \begin{cases} +\pi & y > 0 \\ -\pi & y < 0 \end{cases}$$

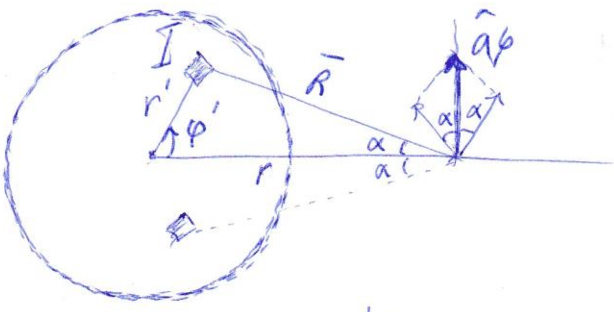
$$\bar{B} = \begin{cases} -\frac{1}{2} J_{s_0} \mu_0\, \hat{a}_x & y > 0 \\ +\frac{1}{2} J_{s_0} \mu_0\, \hat{a}_x & y < 0 \end{cases}$$

$\bar{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \bar{J}_s \times \hat{a}_n$: [illegible]



$\bar{J} = J_{s_0}\, \bar{a}_y$

مثال: جریان الکتریکی به صورت یکنواخت با چگالی حجمی $\bar{J}_v = J_0 \hat{a}_z$ از استوانه‌ای به شعاع a و طول بی‌نهایت عبور می‌کند. میدان مغناطیسی را در همه نقاط فضا بیابید.



$$\overline{dB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \times \cos\alpha \times 2$$

$$I = \bar{J} \cdot ds_z = J_0\, r'dr'd\varphi'$$

$$R = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'\right)^{1/2}$$

$$r'\cos\varphi' + R\cos\alpha = r \rightarrow \cos\alpha = \frac{r - r'\cos\varphi'}{R}$$

$$\overline{dB} = \frac{\mu_0 \times J_0\, r'dr'd\varphi' \times 2}{2\pi R} \times \frac{r - r'\cos\varphi'}{R}$$

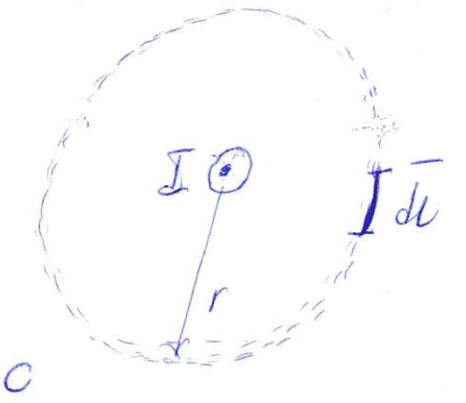
$$\overline{dB} = \frac{\mu_0 J_0\, r'(r - r'\cos\varphi')}{\pi(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi')}\, dr'd\varphi'$$

$$\bar{B} = \int_{r'=0}^{a}\int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{\mu_0 J_0}{\pi} \frac{r'(r - r'\cos\varphi')}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}\, dr'd\varphi' \ldots$$

$$\vdots$$

$$\bar{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 J_0}{\pi r} \dfrac{\pi a^2}{2} \hat{a}_\varphi & r > a \\[2ex] \dfrac{\mu_0 J_0}{\pi r} \times \dfrac{\pi r^2}{2} \hat{a}_\varphi & r < a \end{cases}$$

قانون مداری آمپر :



$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

$$\bar{dl} = \bar{dl_\varphi} = r\, d\varphi\, \hat{a}_\varphi$$

$$\bar{B} \cdot \bar{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\oint_C \bar{B} \cdot \bar{dl} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

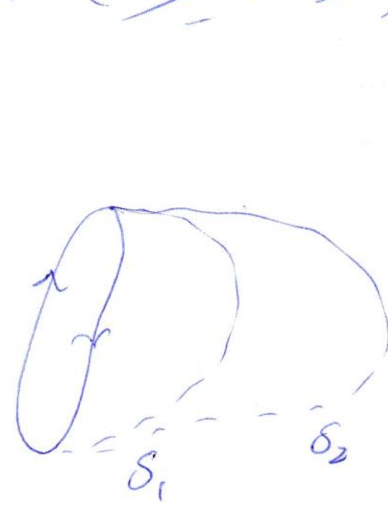
وابسته به شعاع مسیر بسته نیست.

در حالت کلی :

$$\oint_C \bar{B} \cdot \bar{dl} = \mu_0 \left(C \text{ کل جریان عبوری از مسیر } \right)$$

هر مسیر بسته دلخواه

- جهت جریان، قانون دست راست



$$\oint_C \bar{B} \cdot \bar{dl} = \mu_0 \int_S \bar{J_v} \cdot \bar{ds}$$

هر مسیر بسته دلخواه

قانون مداری آمپر

- همواره صادق است.

هر سطح دلخواه که مسیر بسته C، مرز آن باشد

خاصیت میدان :

$$\bar{B} = |\bar{B}|\hat{a}_B$$

مسیر آمپری :

$$C \text{ مسیر بسته } \rightarrow |\bar{B}| = cte$$

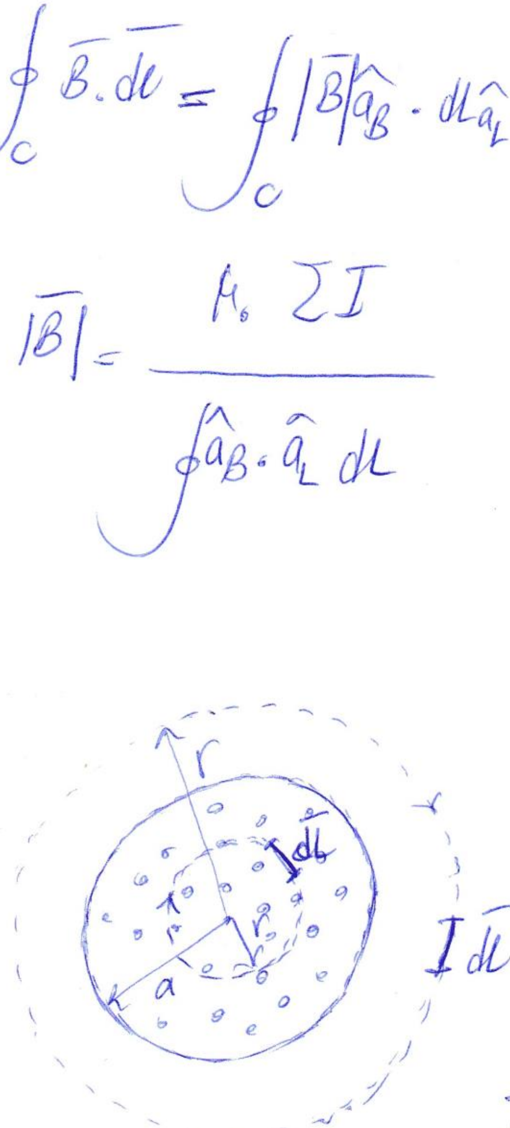
$$\hat{a}_B \cdot \hat{a}_L = \text{ مشخص باشد}$$

$$\oint_C \bar{B}\cdot\bar{dl} = \oint_C |\bar{B}|\hat{a}_B \cdot dl\,\hat{a}_L = |\bar{B}|\oint_C \hat{a}_B\cdot\hat{a}_L\, dl = \mu_0 \sum I$$

$$|\bar{B}| = \frac{\mu_0 \sum I}{\oint \hat{a}_B\cdot\hat{a}_L\, dl}$$

- توسط قانون مداری آمپر، اندازه میدان مغناطیسی بدست می آید

- جهت میدان از روی تقارن حاصل می شود.



مثال : مثال قبلی را با کمک تقارن حل کنید :

1- دستگاه استوانه ای $\bar{B} = \bar{B}(r,\varphi,z)$

2- بررسی تقارن : جهت $\bar{B} = |B|\hat{a}_\varphi$

اندازه $\bar{B}(r,\varphi,z) = \bar{B}(r)$

$$\bar{B} = B(r)\hat{a}_\varphi$$

$$|\bar{B}| = cte \rightarrow r = cte$$ دایره ای با شعاع r   مسیر آمپری

$$\bar{dl} = \bar{dl}_\varphi = r\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

124

$$\bar{B}\cdot\bar{dl} = B(r)\hat{a}_\varphi \cdot r\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi = B(r)\,r\,d\varphi$$

$$\oint_C \bar{B}\cdot\bar{dl} = \int_{\varphi=2\pi}^{0} B(r)\,r\,d\varphi = -2\pi r B(r)$$

$$\sum I = \int_S \bar{J}_0\cdot\bar{ds} \quad , \quad \bar{ds} = \bar{ds}_z = \pm r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z \quad , \pm ?$$

با قانون دست راست

$$\bar{ds} = -r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z$$

$$\bar{J}_0\cdot\bar{ds} = -J_0\hat{a}_z\cdot r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z = -J_0\,r\,dr\,d\varphi$$

$$\sum I \rightarrow r<a: \quad \sum I = -\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r} J_0\,r\,dr\,d\varphi = -\pi r^2 J_0$$

$$r>a: \quad \sum I = -\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} J_0\,r\,dr\,d\varphi = -\pi a^2 J_0$$

بنابراین

$$r<a: -B(r)\,r\,2\pi = -\pi r^2 J_0 \mu_0 \longrightarrow B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 J_0 r$$

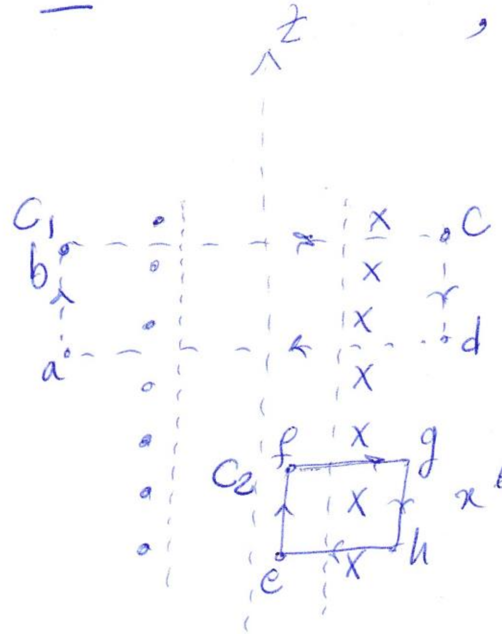
$$r>a: -\bar{B}\,r\,2\pi = -\pi a^2 J_0 \mu_0 \longrightarrow B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 J_0 \frac{a^2}{r}$$

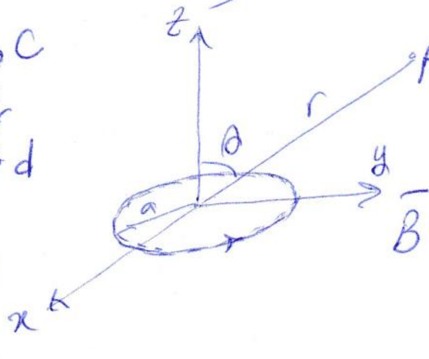
$$\bar{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 J_0 \pi a^2}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & r>a \\ \dfrac{\mu_0 J_0 \pi r^2}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & r<a \end{cases}$$

[illegible]

مثال: میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم‌لوله طویل با شعاع a و تعداد دور سیم‌پیچ در واحد طول n و جریان I

یادآوری:

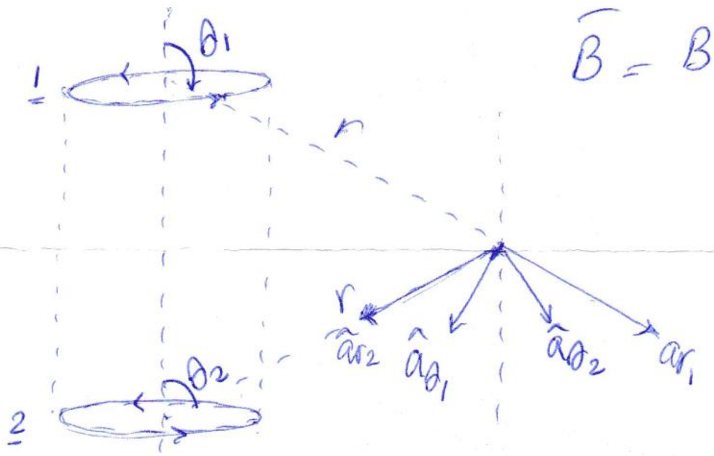




$$\bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\, \hat{a}_r + \sin\theta\, \hat{a}_\theta\right)$$

$$\bar{B} = \bar{B}(r,\varphi,z) = \bar{B}(r)$$ ← اندازه

$$\bar{B} = B(r)\,\hat{a}_z$$ ← جهت



$$\bar{B}_1 = B_0\left(2\cos\theta_1\, \hat{a}_{r_1} + \sin\theta_1\, \hat{a}_{\theta_1}\right)$$

$$\bar{B}_2 = B_0\left(2\cos\theta_2\, \hat{a}_{r_2} + \sin\theta_2\, \hat{a}_{\theta_2}\right)$$

$$\begin{cases}\theta_1 + \theta_2 = \pi \\ \theta_2 = \pi - \theta_1\end{cases}$$

$$\cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1$$

$$\sin\theta_2 = \sin(\pi - \theta_1) = \sin\theta_1$$

$\underline{C_1}$:

$$\oint_{C_1} \bar{B}\cdot \bar{dl} = \mu_0 \sum I = 0$$

$$= \int_a^b \bar{B}\cdot\bar{dl} + \underbrace{\int_b^c \bar{B}\cdot\bar{dl}}_{\text{صفر}\ \bar{B}\perp \bar{dl}} + \int_c^d \bar{B}\cdot\bar{dl} + \underbrace{\int_d^a \bar{B}\cdot\bar{dl}}_{\text{صفر}\ \bar{B}\perp \bar{dl}} = 0$$

$$B_{z1} \cdot ab - B_{z2} \cdot cd = 0$$

اضلاع ab , cd از سیم لوله به یک فاصله نیستند. لذا میدان خارج سیم لوله یا همه جا ثابت است

$B_{z1} = B_{z2}$ یا همه جا صفر است ؛ میدان خارج سیم لوله صفر است چرا؟

$$\oint_{C_2} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \underbrace{\int_e^f}_{} + \underbrace{\int_f^g}_{\substack{\text{صفر} \\ B \perp dl}} + \underbrace{\int_g^h}_{\substack{\text{صفر} \\ \bar{B}=0}} + \underbrace{\int_h^e}_{\substack{\text{صفر} \\ \bar{B} \perp dl}} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 n I (ef)$$

$$= B_z \cdot ef = \mu_0 n I \, ef \rightarrow B_z = \mu_0 n I$$

$$\bar{B} = \begin{cases} 0 & r > a \\ \mu_0 n I \hat{a}_z & r < a \end{cases}$$

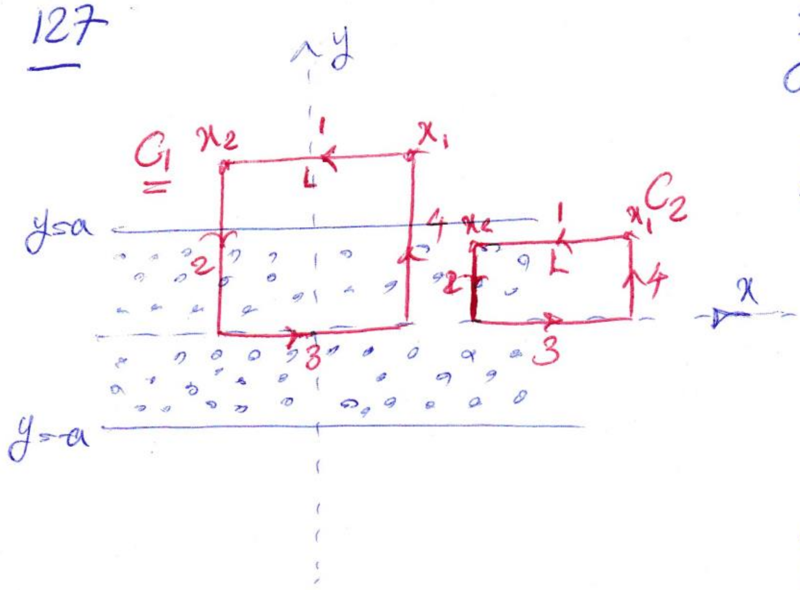
یادآوری:

۱- میدان مغناطیسی خطوط بسته‌ای را تشکیل می‌دهند

2- میدان مغناطیسی همدیگر را قطع نمی‌کنند

3- میدان مغناطیسی پیرامون منبع ایجاد خود بسته می‌شوند و آن را قطع نمی‌کنند

127



$\bar{J} = J_0 \hat{a}_z$

حل:

$\bar{B} = \bar{B}(x, y, z)$

$\bar{B} = B(y)$

$\bar{B} = \pm B(y)\hat{a}_x$

اندازه

جهت

$$\begin{cases} \bar{B} = -B(y)\hat{a}_x & y > 0 \\ \bar{B} = +B(y)\hat{a}_x & y < 0 \end{cases}$$

$|\bar{B}| = cte \rightarrow y = cte$

$L = x_1 - x_2$

at $y = 0 \rightarrow \bar{B} = 0$

C_1:
$$\oint_{C_1} \bar{B}\cdot\bar{dl} = \int_1 + \underbrace{\int_2}_{\bar{B}\perp dl} + \underbrace{\int_3}_{\bar{B}=0} + \underbrace{\int_4 \bar{B}\cdot\bar{dl}}_{\bar{B}\perp dl} = \int_1 \bar{B}\cdot\bar{dl} = \int_{x=x_1}^{x_2} -B(y)\hat{a}_x \cdot dx\hat{a}_x$$

$$= -B(y)\, x \Big|_{x_1}^{x_2} = -B(y)(x_2 - x_1) = B(y)L$$

C_2:
$$\oint_{C_2} \bar{B}\cdot\bar{dl} = \int_1 + \underbrace{\int_2}_{B\perp dl} + \underbrace{\int_{C3}}_{B=0} + \underbrace{\int_4 \bar{B}\cdot\bar{dl}}_{B\perp dl} = \int_{x_1}^{x_2} -B(y)\hat{a}_x \cdot dx\hat{a}_x = B(y)L$$

$\sum I$:
$$\int_{C_1} \bar{J}\cdot\bar{ds} = \int_S J_0\hat{a}_z \cdot dx\,dy\,\hat{a}_z = J_0 \int_{y=0}^{a}\int_{x=x_2}^{x_1} dx\,dy = J_0 a(x_1 - x_2)$$

$= J_0 aL$

$\bar{ds} = \bar{ds_z} = \pm dx\,dy\,\hat{a}_z = +dx\,dy\,\hat{a}_z$

با قانون دست راست

$$\sum_{C_2} I = \int_S \bar{J}_0 \hat{a}_z \cdot dx\,dy\,\hat{a}_z = J_0 \int_{y=0}^{y}\int_{x=x_2}^{x_1} dx\,dy = J_0\, y(x_1 - x_2)$$
$$= J_0\, y L$$

$0 < y < a$: $B(y) L = J_0 y L \mu_0 \rightarrow B(y) = \mu_0 J_0 y$

$y > a$: $B(y) L = J_0 a L \mu_0 \rightarrow B(y) = \mu_0 J_0 a$

$$\bar{B} = \begin{cases} y > a : & \bar{B} = -\mu_0 J_0 a\, \hat{a}_x \\ 0 < y < a : & \bar{B} = -\mu_0 J_0 y\, \hat{a}_x \\ -a < y < 0 & \bar{B} = +\mu_0 J_0 y\, \hat{a}_x \\ y < -a & \bar{B} = +\mu_0 J_0 a\, \hat{a}_x \end{cases} = \begin{cases} y > a & -\mu_0 J_0 a \hat{a}_x \\ y < -a & +\mu_0 J_0 a \hat{a}_x \\ -a < y < a & -\mu_0 J_0 y \hat{a}_x \end{cases}$$

شکل نقطه‌ای قانون آمپر

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J}_0 \cdot d\bar{s}$$

قانون استوکس

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_S \nabla \times \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_S \mu_0 \bar{J}_0 \cdot d\bar{s}$$

$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}_v$ ؛ قانون را ماکسول برای بیان نقطه‌ای ساخت

- برای بحث‌های سطحی و حجمی و خطی، از توابع دلتا بهره می‌بریم. (در بخش شکل نقطه‌ای قانون گوس گفته شد)