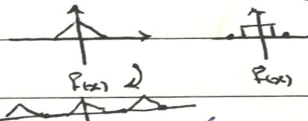
جلسه ششم

انتگرال فوریه :

به یاد داریم که سری فوریه را برای توابع متناوب نوشتیم. حال آنکه بسیاری از مسائل مهندسی شامل توابع نامتناوب هستند. برای تحلیل چنین مسائلی از انتگرال فوریه استفاده خواهیم کرد. در این حالت تابع نامتناوب $g(x)$ را همچون تابع متناوبی مانند $f(x)$ در نظر خواهیم گرفت که دوره‌ی تناوب آن بی‌نهایت است. یعنی:

$$g(x)=\lim_{T\to\infty} f_{\langle T\rangle}(x)$$

نکته: برای اثبات ابتدا یک تابع متناوب از روی تابع نامتناوب تعریف می‌کنیم.



$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$g(x)=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} g(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} g(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right]\cos\frac{2n\pi}{T}x+\left[\frac{2}{T}\int g(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right]\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$\omega_n=\frac{2\pi}{T}n \qquad \omega_{n+1}=\frac{2\pi}{T}(n+1)\Rightarrow \omega_{n+1}-\omega_n=\frac{2\pi}{T}=\Delta\omega \Rightarrow \frac{2}{T}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$$

شرط لازم برای اینکه تابعی تبدیل فوریه داشته باشد: $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$

$$g(x)=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} g(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T}\left[\left(\int_{\langle T\rangle} g(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right)\cos\frac{2n\pi}{T}x+\left(\int_{\langle T\rangle} g(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right)\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]$$

0 روی سطر x یک متغیر انتگرال‌گیری است.

if $T\to\infty$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{\pi}\left[\left(\int_{\langle T\rangle} g(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right)\cos\frac{2n\pi}{T}x+\left(\int_{\langle T\rangle} g(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right)\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right)\cos\frac{2n\pi}{T}x+\left(\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx\right)\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]\Delta\omega$$

$S=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\Delta x\to 0,\ n\to\infty}\sum f[x_n]\Delta x$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\cos\underbrace{\frac{2n\pi}{T}}_{\omega_n}x\,dx\right)\cos\underbrace{\frac{2n\pi}{T}}_{\omega_n}x+\left(\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\sin\underbrace{\frac{2n\pi}{T}}_{\omega_n}x\,dx\right)\left(\sin\underbrace{\frac{2n\pi}{T}}_{\omega_n}x\right)\right]\Delta\omega$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos\omega_n x\,dx\right)\cos\omega_n x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\omega_n x\,dx\right)(\sin\omega_n x)\right]\Delta\omega$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos\omega_n x\,dx\right]}_{A(\omega)}\cos\omega_n x+\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\omega_n x\,dx\right]}_{B(\omega)}\sin\omega_n x\right]d\omega$$

✓ $A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos\omega_n x\,dx$

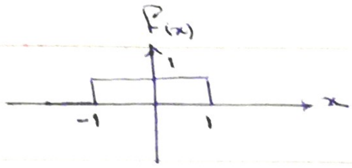
و

✓ $B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\omega_n x\,dx$

✓ و $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)\,d\omega$

s.a.m

مثال ۱: انتگرال فوریه تابع نامشخص زیر را بدست آورید؟



$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\int_{-1}^{1}1\times\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_{-1}^{1}=(2\sin\omega)/\omega$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=\int_{-1}^{1}1\times\sin\omega x\,dx=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\Big|_{-1}^{1}=0$$

✓ $$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega$$

نکات:

① اگر تابع $f(x)$، زوج باشد $A(\omega)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$ ، $B(\omega)=0$

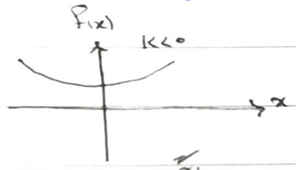
② اگر تابع $f(x)$، فرد باشد $B(\omega)=2\int_0^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$ و $A(\omega)=0$

③ در صورتی که $f(x)$ شرایط دیریکله را داشته باشد در آن صورت حتماً تبدیل فوریه خواهد داشت

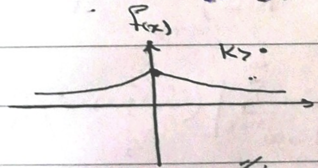
یعنی $A(\omega)$ و $B(\omega)$ معین هستند که این تبدیل در نقاط پیوستگی برابر تابع و در نقاط ناپیوستگی برابر

میانگین حد چپ و راست تابع است.

مثال ۲: انتگرال فوریه $f(x)=e^{-k|x|}$ را بیابید؟ $k>0$ است چون اگر $k<0$ باشد شرط دیریکله را نخواهیم داشت:



انتگرال فوریه ندارد.



انتگرال فوریه دارد.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)\,d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|k}\cos\omega x\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x\times k}\cos\omega x\,dx=$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\Rightarrow I=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx=\frac{e^{-kx}}{\omega}\sin\omega x+\frac{-ke^{-kx}}{\omega^2}\cos\omega x+-\int\frac{k^2e^{-kx}}{\omega^2}\cos\omega x$$

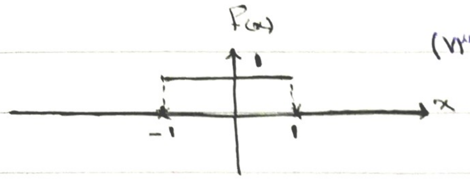
انتگرال	مشتق
$\cos\omega x$	e^{-kx} +
$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$	$-ke^{-kx}$ −
$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$	k^2e^{-kx} +$\int$

صفر چون زوج است.
$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=0$$

$$I\left(1+\frac{k^2}{\omega^2}\right)=e^{-kx}\sin\omega x-\frac{ke^{-kx}}{\omega^2}\cos\omega x\Big|_0^{+\infty}$$

$$0-\left(0-\left(-\frac{k}{\omega^2}\times 1\right)\right)=-\frac{k}{\cancel{\omega^2}}\times\frac{\cancel{\omega^2}}{\omega^2+k^2}=\frac{-k}{k^2+\omega^2},\ A(\omega)=\frac{-2k}{k^2+\omega^2}$$

مثال ۲: $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ به صورت زیر می باشد. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$



حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega$ کدام است؟ (مطلب ۷۳)

$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega \longrightarrow f(1) \longrightarrow$ در نقطه ناپیوستگی $\left(f(1^+)+f(1^-)\right)/2=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$

$$\frac{0+1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega\,d\omega \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega\,d\omega \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega$$

مثال ۳: توسط انتگرال فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ عبارت است از: $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega$

در این صورت حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx$ برابر با چه مقداری خواهد بود؟

صورتش ۲ تقسیم می شود.

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx \Rightarrow x^2=u \Rightarrow 2x\,dx=du \Rightarrow \frac{2x\,dx}{x^2}=\frac{du}{u}$$

$$I=\int_0^\infty \sin u\left(\frac{du}{2x}\right)\times\frac{1}{x}=\int_0^\infty \frac{\sin u}{2x^2}du=\int_0^\infty \frac{\sin u}{2u}du=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du$$

$$f(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega \Rightarrow \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\int_0^\infty (\sin\omega\cos\omega)/\omega\,d\omega \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\int_0^\infty (\sin\omega\cos\omega)/\omega\,d\omega$$

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (\sin\omega)/\omega\,d\omega \Rightarrow 1\times\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \sin\omega/\omega\,d\omega \Rightarrow \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۴: در صورتیکه $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ c & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$ و متقارن $\alpha<0,\ \beta>0$

و c اعداد ثابتی باشند و انتگرال فوریه آن $f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ باشد α,β,c را بیابید؟

$$f(x)=\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega \qquad \alpha=-\beta$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} c\cos\omega x\,dx=\frac{c}{\pi}\times\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{c}{\omega\pi}\left[\sin\alpha\omega\right]\times 2$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \qquad \frac{2c}{\lambda\pi}\sin\alpha\lambda=\frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

$$\boxed{\alpha=1},$$

$$\frac{2c}{\pi}=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{\pi}{2}},$$

$$\boxed{\beta=-1}$$

مثال: نشان دهید $\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \pi/2 & x=0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$ است؟

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

انتگرال مشتق

$$\begin{array}{c|c} e^{-x} & \cos\omega x \\ -e^{-x} & \frac{1}{\omega}\sin\omega x \\ e^{-x} & -\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x \end{array}$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\cos\omega x\,dx=\pi\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\omega x\,dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,dx=\frac{e^{-x}}{\omega}\sin\omega x - \frac{e^{-x}}{\omega^2}\cos\omega x+\int -\frac{e^{-x}}{\omega^2}\cos\omega x\,dx$$

$$I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)=+\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \quad I=\frac{1}{\cancel{\omega^2}}\times\frac{\cancel{\omega^2}}{1+\omega^2}=\frac{1}{1+\omega^2} \Rightarrow A(\omega)=\frac{\pi}{(1+\omega^2)}$$

انتگرال مشتق

$$\begin{array}{c|c} e^{-x} & \sin\omega x \\ -e^{-x} & -\frac{1}{\omega}\cos\omega x \\ e^{-x} & -\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x \end{array}$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\sin\omega x\,dx=\pi\int_0^{\infty}e^{-x}\sin\omega x\,dx=$$

$$I=-\frac{e^{-x}}{\omega}\cos\omega x+\frac{e^{-x}}{\omega^2}\sin\omega x-\int\frac{e^{-x}}{\omega^2}\sin\omega x\,dx$$

$$I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)=-\frac{e^{-x}}{\omega}\cos\omega x+\frac{e^{-x}}{\omega^2}\sin\omega x$$

$$I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{\omega}{(1+\omega^2)} \qquad B(\omega)=\frac{\pi\omega}{(1+\omega^2)}$$

$$f(x) \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\pi}{(1+\omega^2)}\cos\omega x+\frac{\pi\omega}{(1+\omega^2)}\sin\omega x\right)d\omega=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

$$\int \frac{(\cos\omega x+\omega\sin\omega x)}{(1+\omega^2)}\,d\omega=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

چون $x=0$ نقطه ناپیوستگی است لذا $g(x)$ دارای نقطه صعود $\left(g(x_0^-)+g(x_0^+)\right)/2=\pi/4$ نوشته خواهد شد.

s.a.m

جلسه ششم

فرم مختلط انتگرال فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{A(\omega)}{2}\left[e^{j\omega x}+e^{-j\omega x}\right]+\frac{B(\omega)}{2j}\left[e^{j\omega x}-e^{-j\omega x}\right]\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\underbrace{\left(A(\omega)-jB(\omega)\right)}_{C(\omega)}e^{j\omega x}+\underbrace{\left(A(\omega)+jB(\omega)\right)}_{K(\omega)}e^{-j\omega x}\right]d\omega$$

$$C(-\omega)=K(\omega)$$

$$C(\omega)=A(\omega)-jB(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx-j\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\cos\omega x-j\sin\omega x\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$K(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx+j\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\cos\omega x+j\sin\omega x\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{j\omega x}dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

مثال: انتگرال فوریه به صورت مختلط تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ را بدست آورید.

$$C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$C(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}1\times e^{-j\omega x}dx=\frac{-1}{j\omega}\times e^{-j\omega x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega\pi}-e^{+j\omega\pi}\right]=\frac{e^{j\omega\pi}-e^{-j\omega\pi}}{j\omega}$$

$$\frac{2}{\omega}\times\frac{e^{j\omega\pi}-e^{-j\omega\pi}}{2j}=\frac{2}{\omega}\times\frac{(\cos\pi\omega+i\sin\theta)-(\cos\omega\pi-i\sin\omega\pi)}{2j}=\frac{2}{\omega}\times\frac{2\cancel{j}\sin\omega\pi}{2\cancel{j}}=\frac{2\sin\omega\pi}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cancel{2}\sin\omega\pi}{\omega}e^{j\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}e^{j\omega x}d\omega$$

s.a.m

بنام خدا

مسائل مربوط به جلسه ششم

انتگرال فوریه

با استفاده از نمایش انتگرال فوریه، نشان دهید که

۱) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos \pi\omega}{\omega} \sin \omega x \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

۲) $$\int_0^\infty \frac{\omega^3 \sin \omega x}{\omega^4+4} = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \qquad x > 0$$

۳) $$\int_0^\infty \frac{\sin \pi\omega \sin \omega x}{1-\omega^2} \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

۴) انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ را بیابید.