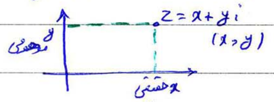
جلسه پانزدهم ۹۴/۱/۲۲

آنالیز مختلط

۱/ نمایش اعداد مختلط

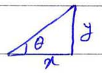
$z = x + yi$ $\qquad$ i: واحد موهومی $\qquad$ $i=\sqrt{-1}$ $\qquad$ $i^2=-1$

x: بخش حقیقی $\qquad$ y: بخش موهومی



۲/ اندازه و زاویه

$z = x + yi$ $\qquad$ $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



$\theta = \arg z = \tan^{-1} y/x$

$\Theta = \tan^{-1} y/x \qquad -\pi < \Theta \le \pi \longrightarrow \Theta =$ آرگومان اصلی z

$\arg(-1) \longrightarrow \pi$

مثال:

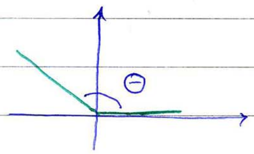
$z = -1 \qquad x = -1 \qquad y = 0$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \qquad \Theta = \tan^{-1} 0 \longrightarrow 0 \qquad x > 0 \quad ✗$

$\searrow \pi \qquad x < 0 \quad ✓$

$\arg(-1) = \Theta = \pi$

Θ: زاویه‌ای که از اتصال نقطه‌ی z به مبدأ با جهت مثبت محور x ها به دست می‌آید.



۳) مزدوج عدد مختلط

$z = x + yi$

$\bar{z} = x - yi$ مزدوج z

خواص:

$\bar{z} z = \|z\|^2 \qquad \left(\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} \right)$

اثبات $\rightarrow \bar{z} z = (x - yi)(x + yi) = x^2 - xy + xy - y^2(i^2) = x^2 + y^2 = \|z\|^2$

مثال)

$\frac{1+i}{2-i} = ?$

$$\frac{1+i}{2-i} = (1+i)\frac{1}{2-i} = (1+i)\frac{2+i}{4+1} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{(2-1+2i+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}$$

۴) نمایش قطبی اعداد مختلط

$z = x + yi$

$\theta = \tan^{-1} y/x \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad z = re^{i\theta} \qquad (e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta \rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

مثال)

$z = 1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \theta = \tan^{-1} 1/1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \checkmark, \; -\frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

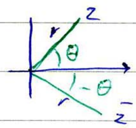
۵) محاسبه‌ی وارون و مزدوج در نمایش قطبی

$z = re^{i\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

برای محاسبه‌ی وارون استفاده از نمایش قطبی ساده‌تر است

$\bar{z} = re^{-i\theta} \qquad \left(\bar{z} = \frac{1}{z}\|z\|^2 = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\, r^2 = re^{-i\theta}\right)$



۶) توان عدد مختلط

a اسکالر حقیقی

$z^a = ?$

$z = re^{i\theta} \longrightarrow z^a = r^a e^{i(a\theta)}$

مثال)

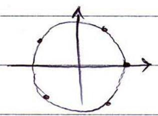
$\sqrt[5]{1} = ?$

$\sqrt[5]{1} = z \longrightarrow z^5 - 1 = 0$

$w = 1$ $\quad x = 1,\ y = 0 \longrightarrow \theta = 0$ $\quad \theta = 2k\pi,\ r = 1 \longrightarrow w = e^{2k\pi i}$

$z = \sqrt[5]{w} = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

$z = 1,\ e^{\frac{2\pi}{5}i},\ e^{\frac{4\pi}{5}i},\ e^{\frac{6\pi}{5}i},\ e^{\frac{8\pi}{5}i}$



ریشه های معادله $z^5 - 1 = 0$ ←

۵ عدد مختلط با نرم ۱ هستند

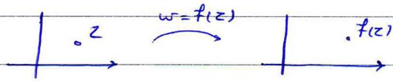
که زاویه ی هر یک با قبلی به اندازه ی $\frac{2\pi}{5}$ تفاوت دارد. این نقاط روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ قرار دارند.

توابع مختلط

$(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ حقیقی

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تابع مختلط

مجموعه اعداد مختلط



$f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$

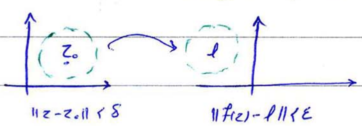
مثال)

$f(z) = z^2$

$f(x+yi) = (x+yi)^2 = (x+yi)(x+yi) = x^2 + y^2 i^2 + 2xyi = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)} i$

تعریف حد

می گوییم $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ اگر وقتی z به z_0 نزدیک می شود، $f(z)$ به l نزدیک شود



مثال) $\lim_{z\to i} z^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} x^2-y^2+2xyi = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (x^2-y^2) + i\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} 2xy = -1+0\times i = -1$

$\|z-i\|<\delta \longrightarrow \|z^2+1\|<\varepsilon$

$z^2+1=(z-i)(z+i)$ $\qquad \|z^2+1\| \le \|z-i\|\|z+i\| < \|z+i\|\delta$ (1)

$\|z+i\| = \|z-i+2i\| \le \|z-i\|+\|2i\| < \delta+2$ (2)

(1), (2) $\longrightarrow$ $\|z^2+1\| < \underbrace{(\delta+2)\delta}_{\varepsilon}$

جلسه شانزدهم ۹۴/۱/۲۴

مشتق توابع مختلط

تعریف-حد

$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ را در صورت وجود مشتق تابع f در نقطه‌ی z می‌گوییم و با $f'(z)$ نشان می‌دهیم

مثال)

$z=x+yi$

$f(z)=\bar{z}=x-yi$

$\Delta z=\Delta x+\Delta y i$ $\qquad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{(x+\Delta x)-(y+\Delta y)i-x+yi}{\Delta x+\Delta y i} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x-\Delta y i}{\Delta x+\Delta y i}$

1) $\Delta x\to 0 \quad \Delta y=0 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

2) $\Delta x=0 \quad \Delta y\to 0 \qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y i}{\Delta y i}=-1$

حد فوق برای تابع f در هیچ نقطه‌ای موجود نیست ← f در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست

تعریف: اگر تابع f به ازای هر $z\in D$ مشتق‌پذیر باشد، می‌گوییم تابع f در D تحلیلی است.

* شرایط لازم (نه کافی) برای مشتق‌پذیری

قضیه: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه‌ی z مشتق‌پذیر باشد آنگاه به ازای z شرایط زیر برقرار است

$u_x = v_y$

$v_x = -u_y$

اثبات - می‌دانیم که $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ به ازای هر $\Delta z\to 0$ موجود و برابر با $f'(z)$ است. از جمله به ازای $\Delta z=\Delta x+\Delta y\, i$ که

1) $\Delta x\to 0 \qquad \Delta y=0$

2) $\Delta x=0 \qquad \Delta y\to 0$

1) $\Delta x\to 0 \qquad \Delta y=0 \qquad \Delta z=\Delta x$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=u_x+iv_x=f'(z)$$

2) $\Delta x=0 \qquad \Delta y\to 0 \qquad \Delta z=\Delta x+\Delta y\, i=\Delta y\, i$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta y\, i}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)}{\Delta y\, i}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{i}u_y}_{\text{بخش موهومی}}+\underbrace{v_y}_{\text{بخش حقیقی}}=\frac{-i^2}{i}u_y+v_y=v_y-iu_y=f'(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x+iv_x=f'(z)\\ v_y-iu_y=f'(z)\end{array}\right\}\longrightarrow \begin{array}{l} u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{array} \qquad (v_x=-u_y)$$

* شرط فوق را شرط لازم کوشی - ریمان برای مشتق‌پذیری تابع f در z می‌گویند

* نتیجه: اگر تابع f در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد آن‌گاه به ازای هر $z\in D$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{array}\right. \qquad (*)$$

$u_{xx}+u_{yy}=0$ هم‌چنین از روابط $(*)$ نتیجه می‌شود که

$v_{xx}+v_{yy}=0$

یعنی اگر $f=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه‌ی D ~~محلی~~ تحلیلی باشد آن‌گاه u و v جواب معادله‌ی لاپلاس هستند

اثبات :

$u_x = v_y \longrightarrow u_{xx} = v_{xy}$

$u_y = -v_x \longrightarrow u_{yy} = -v_{xy}$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow u_{xy} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{array}\right\} \rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0$$

کاربرد: برای پیدا کردن جواب های معادله‌ی لاپلاس ، یک روش ممکن استفاده از نتیجه فوق است . به این ترتیب اگر تابع f تحلیلی باشد می توان مطمئن بود که u و v متناظر با آن در معادله‌ی لاپلاس صدق می کنند یعنی u و v متناظر با توابع تحلیلی دو تا از جواب های معادله‌ی لاپلاس را می دهند

مثال) بررسی شرایط کوشی ریمان

$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad u_x = 2x \qquad u_y = -2y$

$v(x,y) = 2xy \qquad v_x = 2y \qquad v_y = 2x$

$u_x = v_y$ ✓

$u_y = -v_x$ ✓ شرایط کوشی ریمان به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ برای تابع $f(z) = z^2$ برقرار است

* محاسبه‌ی مزدوج هارمونیک تابع $u(x,y)$

با داشتن تابع $u(x,y)$ ، هدف محاسبه‌ی تابع $v(x,y)$ است که شرایط کوشی ریمان را برقرار کند یعنی $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$

$v(x,y)$ را مزدوج هارمونیک u می گوییم

مثال

$u(x,y) = xy$

$v_y = u_x = y \longrightarrow v_y = y \longrightarrow v = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$

$v_x = -u_y = -x \rightarrow v_x = -x \qquad v_x = G'(x)$

$G'(x) = -x \rightarrow G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + H(y)$

$v = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + H(y)$

$v_y = y + H'(y) \longrightarrow H'(y) = 0 \longrightarrow H(y) = C$

$v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + C$

شرایط کوشی ریمان در مختصات قطبی

$z = re^{i\theta}$

$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

$u_x = v_y \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$u_y = -v_x \qquad\qquad \theta = tg^{-1}\, y/x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}$$

$\left[(tg^{-1}u)' = \frac{u'}{1+u^2}\right]$ یادآوری

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{r\cos\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\overset{r\sin\theta}{-y}}{\underset{r^2}{x^2+y^2}} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1/x}{1+y^2/x^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \\[2ex] \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

$$u_x = v_y \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \qquad \times\cos\theta \qquad (1)$$

$$u_y = -v_x \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} = -\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \qquad \times\sin\theta \qquad (2)$$

رابطه (۱) را در $\cos\theta$ و رابطه (۲) را در $\sin\theta$ ضرب کرده و باهم جمع می‌کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 0 = 0 + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ شرایط کوشی ریمان در نمایش قطبی

با یک ساده سازی دیگر

جلسه هفدهم ۹۴/۱/۲۹

مثال)

$f(z) = z^2 \qquad z = re^{i\theta}$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta} = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$

$v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$

$u_r = 2r\cos 2\theta \qquad v_\theta = 2r^2 \cos 2\theta \qquad u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ ✓

$v_r = 2r\sin 2\theta \qquad u_\theta = -2r^2 \sin 2\theta \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$ ✓

قضیه: اگر مشتقات جزئی u و v در نقطه‌ی z پیوسته باشند و $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ آنگاه تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه‌ی z مشتق‌پذیر است.

مثال)

$u(x,y) = e^x \cos y$

$v(x,y) = e^x \sin y$

$\left.\begin{array}{l} u_x = e^x \cos y \\ u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \qquad v_y = e^x \cos y \end{array}\right\}$ مشتقات جزئی حاصل ضرب نمایی و مثلثاتی هستند ← پیوسته‌اند سینوس و کسینوس‌ها

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x \longrightarrow$ تابع $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ به ازای هر z دلخواه تحلیلی است

خاصیت های توابع تحلیلی

اگر f و g در ناحیه‌ی D تحلیلی باشند، آنگاه به ازای هر $z \in D$ داریم

1) $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \qquad (c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$

2) $(fg)' = f'g + g'f$

3) $(f/g)' = ?$

$\tilde{D} = \{z \mid z \in D,\ g(z) \neq 0\} \qquad \forall z \in \tilde{D} \qquad (f/g)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

4) $(f(g(z)))' = g'(z)\, f'(g(z))$

تحت شرایط مشتق‌پذیر $f(g(z))$

* توابع تحلیلی تام

۱) توابع چندجمله‌ای $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

$a_i \in \mathbb{C}$

خاصیت: چندجمله‌ای $f(z)$ به ازای هر z دلخواه تحلیلی است و داریم

$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1}$

۲) تابع e^z

تعریف:

I) $e^{ix} := 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\qquad (e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots)$

$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots + ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$

$i^2 = -1 \to e^{ix} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots}_{\cos x} + \underbrace{ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots}_{i\sin x} = \cos x + i\sin x$

$\to \underline{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

II) $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y) \to e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

* خاصیت ۱) تابع $f(z) = e^z$ به ازای هر z تحلیلی است و داریم $f'(z) = e^z$

اثبات:

اثبات تحلیلی بودن: مثال بعد از قضیه‌ی شرایط کافی

اثبات $f'(z) = e^z$

به ازای هر Δz دلخواه مقدار حد همان $f'(z)$ است $\to$ مشتق وجود دارد $\to$ f تحلیلی است

(حد متناظر یکتاست)

$\Delta z = \Delta x$

$\Delta x \to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x+yi}-e^{x+yi}}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^{x}}{\Delta x}\right)e^{yi}=(e^{x})'e^{yi}=e^{x}e^{yi}=e^{z}$$

۲) خاصیت

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$$

$$e^{x_1+y_1i+x_2+y_2i}=e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i}=e^{x_1+x_2}\boxed{e^{(y_1+y_2)i}}=e^{x_1}e^{x_2}\boxed{e^{y_1i}e^{y_2i}}$$

$$=e^{x_1+y_1i}\,e^{x_2+y_2i}=e^{z_1}e^{z_2}$$

$$*\ e^{(y_1+y_2)i}=\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)=\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2)$$

$$*\ e^{y_1i}e^{y_2i}=(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)=\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2)$$

$$\to e^{(y_1+y_2)i}=e^{y_1i}e^{y_2i}$$

۳) $\sin z$ و $\cos z$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\longrightarrow\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\longrightarrow\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

تعریف ضابطه تابع:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{e^{i(x+yi)}+e^{-i(x+yi)}}{2}=\frac{e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}}{2}$$

$$=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2}=\cos x\,\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}+i\sin x\,\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}$$

$$\to\cos z=\cos x\cosh y+i\sin x(-\sinh y)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

$$\to\cos(x+yi)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+yi)}-e^{-i(x+yi)}}{2i}=\frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}=\cos x\,\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}+(i\sin x)\,\frac{e^{-y}+e^{y}}{2i}$$

$$=\cos x\,\frac{\cancel{i}(e^{y}-e^{-y})}{2\cancel{i}}+\sin x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$$

$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

مثال) $\sin(i) = ?$

$z = i \quad x = 0 \quad y = 1$

$\sin z = \sin 0 \cosh 1 + i \cos 0 \sinh 1 = 1 \times 1 \times \sinh 1 = i \sinh 1$

خاصیت مهم: توابع $\sin z$ و $\cos z$ تحلیلی هستند و داریم

$(\sin z)' = \cos z$

$(\cos z)' = -\sin z$

اثبات:

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

جلسه هجدهم ۹۴/۱/۳۱

۱۴) $\sinh z$ ، $\cosh z$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+yi} + e^{-(x+yi)}}{2} = \frac{e^x e^{yi} + e^{-x} e^{-yi}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}$$

$$= \cos y \frac{e^x + e^{-x}}{2} + i \sin y \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+yi} - e^{-(x+yi)}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}$$

$$= \cos y \frac{e^x - e^{-x}}{2} + i\sin y \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \sinh x \cos y + \cosh x \sin y$$

مثال) $\sinh(\pi + i) = ?$

$z = x + yi \longrightarrow x = \pi \quad y = 1$

$\sinh(\pi + i) = \sinh(\pi)\cos 1 + i\cosh(\pi)\sin 1$

$\sinh(1 + \pi i) = \sinh(1)\cos\pi + i\cosh(1)\sin\pi$
$= -\sinh(1)$

خاصیت ـ توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ تحلیلی هستند و داریم

$$(\cosh z)' = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^z)' + \frac{1}{2}(e^{-z})' = \frac{1}{2}e^z - \frac{1}{2}e^{-z} = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \sinh z$$

مثال:

$$(e^{-z})' \overset{?}{=} -e^{-z}$$

$f(z) = e^z \qquad e^{-z} = f(g(z))$

$g(z) = -z$

$$\left.\begin{array}{l} (e^{-z})' = g'(z)\, f'(g(z)) \\ g'(z) = -1 \quad f'(z) = e^z \quad f'(g(z)) = e^{-z} \end{array}\right\} (e^{-z})' = -1 \times e^{-z} = -e^{-z}$$

$$(\sinh z)' = \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^z)' - \frac{1}{2}(e^{-z})' = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}e^{-z} = \cosh z$$

۵) تابع لگاریتم

$\ln z = w = u + iv = ?$

$z = e^w = e^{u+iv} \qquad u, v = ?$

$$\left.\begin{array}{l} z = e^{u+iv} = e^u e^{iv} \\ z = re^{i\theta} \end{array}\right\} \to e^u = r \to u = \ln r$$

$v = \theta + 2k\pi$

قرارداد: برای v از مقدار آرگومان اصلی یعنی θ در بازه‌ی $[-\pi, \pi)$ استفاده می‌کنیم تا تابع $\ln z$ به ازای هر z مقدار یکتا داشته باشد.

$w = \ln z = \ln r + i\theta \qquad -\pi < \theta < \pi$

$z = re^{i\theta}$

$$z = e^w = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta}$$

بنابراین تابع $\ln z$ برای $z = re^{i\theta}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boxed{\ln z = \ln r + i\theta} \qquad -\pi < \theta < \pi$$

خاصیت ۱.

تابع $\ln z$ در کل صفحه‌ی مختلط به جز نقطه‌ی $z=0$ و نیم‌خط $\theta = \pi$ تحلیلی است و داریم

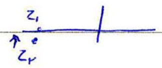
$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

اثبات :

تحلیلی بودن: ۱. در $z=0$ تابع $\ln r$ (بخش حقیقی $\ln z$) تحلیلی نیست ، پس $\ln z$ در $z=0$ تحلیلی نیست

۲.

$z_1 = re^{i\pi}$ $\qquad$ $z_2 = re^{i(-\pi)^+}$



با این انتخاب درحالی حرکت می‌توان گفت که $z_2 \to z_1$ درحالی که برای $\ln$ نقاط z_1 و z_2 داریم

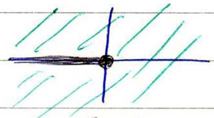
$$\left.\begin{aligned} \ln z_1 &= \ln r + i\pi \\ \ln z_2 &= \ln r + i(-\pi)^+ \end{aligned}\right\} \to \ln z_2 \not\to \ln z_1$$

با این انتخاب z_1 و z_2 پیوسته نبودن تابع $\ln$ روی نیم‌خط $\theta=\pi$ اثبات می‌شود و در نتیجه تابع $\ln$ روی $\theta=\pi$ تحلیلی هم نیست

هم‌چنین در نقاط تحلیلی داریم

$w = \ln z$

$z = e^w \to dz = e^w dw \to \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{e^w} = \dfrac{1}{z}$



ناحیه تحلیلی تابع $\ln z$

خاصیت ۲

$c \in \mathbb{C}$

$z^c = (e^{\ln z})^c = e^{c \ln z}$

مثال ۱

$i^i = ?$ $\qquad$ $i^i = (e^{\ln i})^i = e^{i \ln i}$

$\ln i = ?$

$i = 1e^{\frac{\pi}{2} i} \to \ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

$e^{i \ln i} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ $\qquad$ $\underline{i^i = e^{i \ln i} = e^{-\pi/2}}$

جلسه نوزدهم ۹۴/۲/۵

فصل ۱۷: نگاشت‌های تحلیلی

تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. با این تابع هر نقطه‌ی $z=x+yi$ به نقطه $w=u+iv$ تصویر می‌شود.

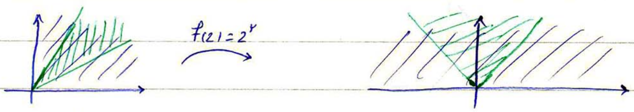
از دید هندسی هر نقطه به مختصات $\binom{x}{y}$ به نقطه‌ی $\binom{u}{v}$ نگاشته می‌شود. در این بخش هدف بررسی تصویر چند نگاشت تحلیلی مهم است.

۱) $f(z)=z^2$

$z=re^{i\theta}$

$z^2=\underbrace{r^2}_{\bar{r}}e^{2i\theta}$ $\qquad \bar{r}=r^2 \qquad \bar{\theta}=2\theta$

I)



$z=x+yi$

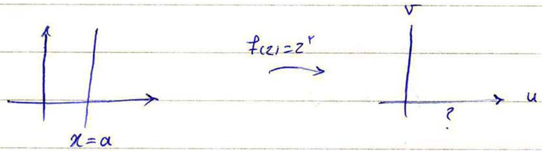
$0\leq r<\infty \longrightarrow 0\leq \bar{r}<\infty$

$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \qquad 0\leq\bar{\theta}\leq\pi$

$\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\longrightarrow\frac{\pi}{3}\leq\bar{\theta}\leq\frac{2\pi}{3}$

$0\leq\bar{r}<\infty$

II)

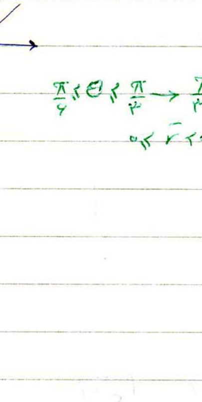


$z=a+yi$ $\qquad f(z)=f(x+yi)=x^2-y^2+2xyi$

$-\infty<y<\infty$ $\qquad f(a+yi)=a^2-y^2+2ayi$

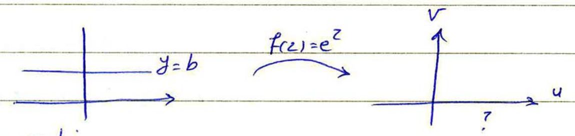
$u=a^2-y^2$

$v=2ay \longrightarrow y=\frac{v}{2a}\longrightarrow u=a^2-\left(\frac{v}{2a}\right)^2$



$f(z) = e^z$ (۳

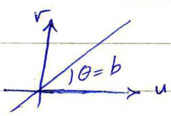
I)



$z = x + bi$

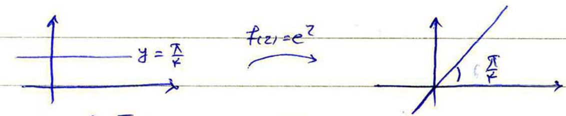
$f(z) = e^z = e^{x+bi} = e^x(\cos b + i \sin b)$ $\quad u = e^x \cos b \quad v = e^x \sin b$

$e^x = \frac{u}{\cos b} = \frac{v}{\sin b} \longrightarrow v = \tan b \, u$



$\tan\theta = \tan b \longrightarrow \theta = b$

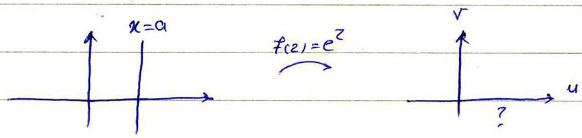
مثال) $b = \frac{\pi}{4}$



$u = e^x \sqrt{\frac{2}{2}} > 0 \qquad -\infty < x < \infty$

$v = e^x \sqrt{\frac{2}{2}} > 0$

II)



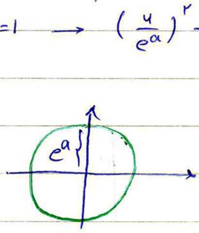
$z = a + yi \qquad e^z = e^a \cos y + i e^a \sin y \longrightarrow u = e^a \cos y$

$-\infty < y < \infty \qquad\qquad v = e^a \sin y$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \longrightarrow \left(\frac{u}{e^a}\right)^2 + \left(\frac{v}{e^a}\right)^2 = 1 \longrightarrow u^2 + v^2 = e^{2a}$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ ← دایره به مرکز $\big|^{x_0}_{y_0}$ و شعاع R)

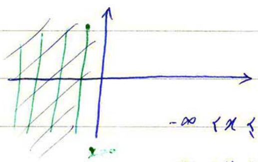
پس داریم $u^2+v^2=e^{2a}$ معادله دایره به شعاع e^a و مرکز مبدأ است.



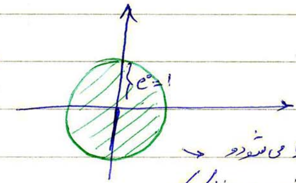
کاربرد ۳: در بسیاری از مسائل کاربردی می‌توان قبل از حل یک مسأله PDE، دامنه‌ی حل را به یک دامنه‌ی ساده تبدیل کرد، PDE را در دامنه‌ی ساده‌ی جدید حل کرد و سپس با تبدیل نگاشت وارون جواب را در دامنه‌ی اصلی بدست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال

$w_{xx} + w_{yy} = 0$



$f(z) = e^z$



$-\infty < x < 0$

$-\infty < y < \infty$

$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{cases}$

برای $x=0$ دایره به شعاع ۱ می‌شود. هرچه x کوچکتر می‌شود شعاع دایره نیز کوچکتر می‌شود و خط $\underset{a\to-\infty}{x=a}$ به دایره به شعاع صفر نگاشته می‌شود.

$w_{xx} + w_{yy} = 0 \qquad u = e^x \cos y \qquad v = e^x \sin y$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} e^x \cos y + \frac{\partial w}{\partial v} e^x \sin y$$

به همین ترتیب $\frac{\partial w}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ را محاسبه می‌کنیم. در نهایت داریم

$w_{uu} + w_{vv} = 0$

(دلیل این که معادله تغییر نکرد این است که u و v در معادله لاپلاس صدق می‌کنند)

$w_{uu} + w_{vv} = 0 \rightarrow$ این مسأله در دستگاه قطبی حل می‌شود

$\rightarrow w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} = 0 \qquad w(r,\theta) = ?$

$r = \sqrt{u^2+v^2}$

$\theta = \tan^{-1} v/u \rightarrow \left.\begin{array}{l} \tilde{w}(u,v) \\ u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{array}\right\} \rightarrow \tilde{w}(x,y)$

مرور ـ مراحل کلی:

۱) تبدیل ناحیه به فضای u و v

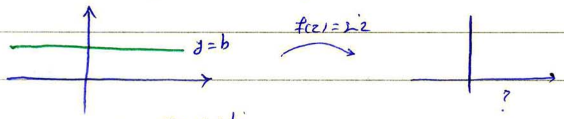
۲) تبدیل PDE به فضای u و v با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای (اگر نگاشت تحلیلی و PDE معادله‌ی لاپلاس باشد، در این مرحله همان PDE لاپلاس در فضای u و v را داریم)

۳) حل PDE جدید در ناحیه‌ی به دست آمده و رسیدن به جواب $w(u,v)$

۴) u و v برحسب x و y و محاسبه‌ی جواب برحسب x و y، $\tilde{w}(x,y)$

$f(z) = \sin z$ (۳

$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

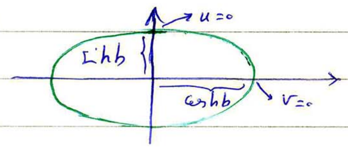


$z = x + bi$

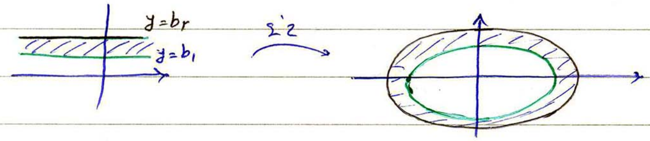
$-\infty < x < \infty$

$u = \sin x \cosh b$

$v = \cos x \sinh b \longrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh b}\right)^2 = 1$



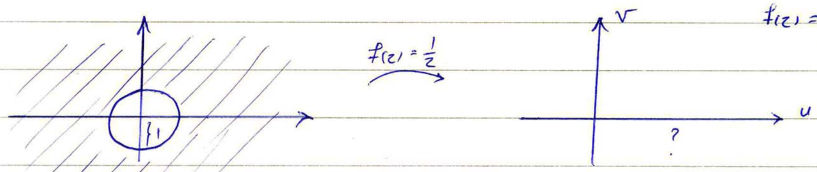
مثال ۱)



جلسه بیستم ۹۴,۲,۷

$f(z) = \frac{1}{z}$ (۴

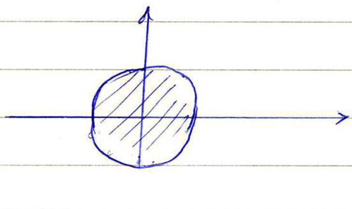
I)



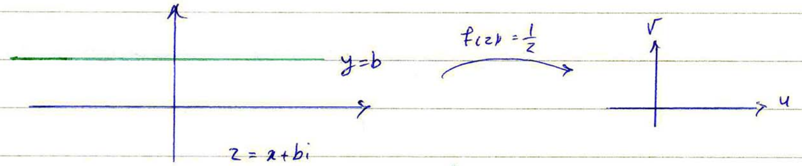
$z = re^{i\theta}$ $\quad r \geq 1 \quad -\pi < \theta \leq \pi$ $\qquad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

$\bar{r} = \frac{1}{r} \longrightarrow r \geq 1 \longrightarrow 0 < \bar{r} \leq 1$

$\bar{\theta} = -\theta \longrightarrow -\pi < \theta \leq \pi \longrightarrow -\pi \leq \bar{\theta} < \pi$



II)



$z = x+bi$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x+yi}\,\frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i$$

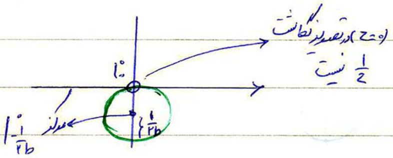
$$z = x+bi \longrightarrow f(z) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{b}{x^2+b^2}\,i \qquad u = \frac{x}{x^2+b^2} \qquad v = \frac{-b}{x^2+b^2}\ (*)$$

$$u^2 = \frac{x^2}{(x^2+b^2)^2} \qquad v^2 = \frac{b^2}{(x^2+b^2)^2} \qquad u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+b^2} \overset{(*)}{=} -\frac{v}{b}$$

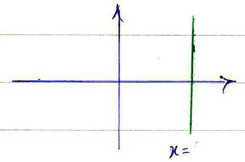
$$u^2+v^2+\frac{v}{b} = 0 \qquad u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2 - \frac{1}{4b^2} = 0$$

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2} \longrightarrow$$ معادله دایره به مرکز $\left|\begin{matrix}0\\ -\frac{1}{2b}\end{matrix}\right.$ و شعاع $\frac{1}{2b}$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$$



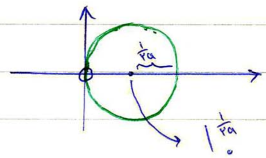
III)



$$z = a+yi \qquad f(z) = \frac{a}{a^2+y^2} - \frac{y}{a^2+y^2}\,i$$

$$\left.\begin{matrix} u = \dfrac{a}{a^2+y^2}\ (**) \\ \\ v = -\dfrac{\quad}{a^2+y^2} \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{matrix} u^2 = \dfrac{a^2}{(a^2+y^2)} \\ \\ v^2 = \dfrac{y^2}{(a^2+y^2)^2} \end{matrix} \qquad u^2+v^2 = \frac{1}{a^2+y^2} \overset{(**)}{=} \frac{u}{a}$$

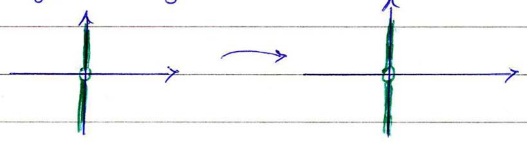
$$u^2+v^2 = \frac{u}{a} \longrightarrow u^2 - \frac{u}{a} + v^2 = 0 \longrightarrow \left(u-\frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2} \longrightarrow$$ معادله‌ی دایره به مرکز $\left|\begin{matrix}\frac{1}{2a}\\ 0\end{matrix}\right.$ و شعاع $\frac{1}{2a}$



نکته: در ۲ حالت قبلی محاسبات با فرض $b\neq 0$ و $a\neq 0$ انجام شده است. به عنوان نمونه در حالت III به ازای $a=0$ داریم:

$z = yi \qquad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{yi} = \frac{i}{yi^2} = -\frac{i}{y}$

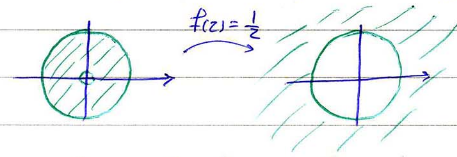
$u = 0 \qquad v = -\frac{1}{y}$

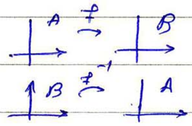


$-\infty < y < \infty \;\; y\neq 0 \;\rightarrow\; -\infty < -\frac{1}{y} < \infty \qquad -\frac{1}{y}\neq 0$

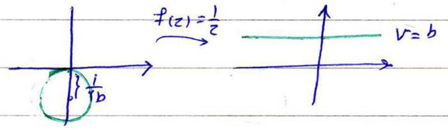
نکته: با توجه به این که وارون نگاشت $\frac{1}{z}$ برابر با خود تابع $\frac{1}{z}$ است، بنابراین در عکس تبدیل‌های بالا هم با این نگاشت آن اتفاق‌ها افتد

I′)

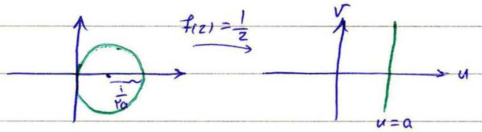




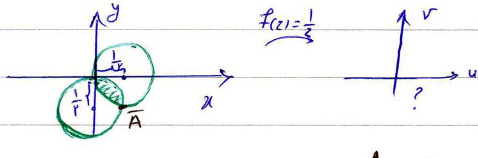
II′)

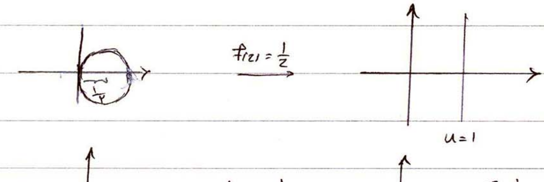


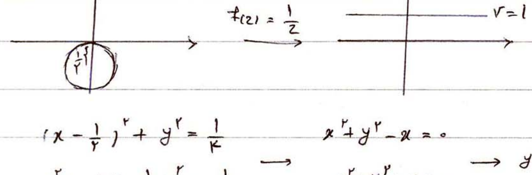
III′)



مثال)







$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \qquad\qquad x^2+y^2-x=0$

$\longrightarrow \qquad\qquad\qquad \longrightarrow \; y+x=0 \rightarrow y=-x \rightarrow 2x^2-x=0 \rightarrow x(2x-1)=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

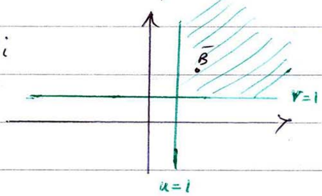
$x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \qquad\qquad x^2+y^2+y=0$

$\bar{A} = \left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$

($\bar{B}$ را با مختصات $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ انتخاب می‌کنیم تا محدوده جواب تصویر را بیابیم / $\bar{B}$ قطعاً داخل محدوده بین ۲ دایره است)

$$\bar{B} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$
$$r = \sqrt{\frac{1}{16} \times 2} = \sqrt{\frac{1}{8}}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\right\} \quad \bar{B} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \longrightarrow f(\bar{B}) = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$



۵) نگاشت هموگرافیک $f(z) = \frac{az+b}{z+c}$

قضیه: نگاشت یکتای $f(z) = \frac{az+b}{z+c}$ وجود دارد که به نقاط به ترتیب z_1 ، z_2 و z_3 را به w_1 ، w_2 و w_3 تصویر می‌کند. این نگاشت $w = f(z)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

مثال)

	z		w	
z_1	i	$\longrightarrow$	1	w_1
z_2	0	$\longrightarrow$	1	w_2
z_3	2	$\longrightarrow$	0	w_3

$$\frac{(w-1)(i-0)}{(w-0)(i-1)} = \frac{(z-i)(0-2)}{(z-2)(0-i)}$$

$$\longrightarrow \frac{w-1}{w}\,\frac{i}{i-1} = \frac{z-i}{z-2}\,\frac{2}{i} \longrightarrow \dots \quad w = \frac{z-2}{-(1-2i)z+2i}$$

جلسه بیست و یکم ۹۴/۲/۱۴

مثال)

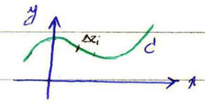
	z	w	
z_1	i	∞	w_1
z_2	0	1	w_2
z_3	∞	i	w_3

$$\frac{(w-w_1)(1-i)}{(w-i)(1-w_1)} = \frac{(z-i)(0-z_3)}{(z-z_3)(0-i)}$$
$$w_1 \to \infty \qquad z_3 \to \infty$$

$$\frac{1-i}{w-i}\;\frac{w-\cancel{w_1}^{\,1}}{1-\cancel{w_1}} = \frac{z-i}{-i}\;\frac{-\cancel{z_3}^{\,1}}{z-\cancel{z_3}} \longrightarrow \frac{1-i}{w-i} = \frac{z-i}{-i}$$
$$w_1 \to \infty \qquad z_3 \to \infty$$

$$w = \frac{-i(1-i)}{z-i} + i = \frac{-i-1}{z-i} + i = \frac{iz-i}{z-i}$$

فصل ۱۴: انتگرال مختلط

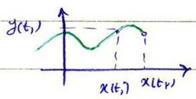


خم هموار c و تابع پیوسته‌ی $f(z)$ را در نظر می‌گیریم. هدف محاسبه‌ی $\int_c f(z)dz$ است

$$\int_c f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$$

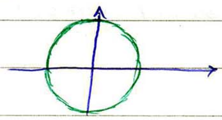
محاسبه‌ی $\qquad I = \int_c f(z)\,dz$

روش اول: پارامتری کردن خم c



$$C:\ z(t) = x(t) + y(t)i \qquad a \le t \le b$$

مثال)



$x = \cos t$ $\qquad 0 \le t \le 2\pi \longrightarrow C: z(t) = \cos t + i\sin t$

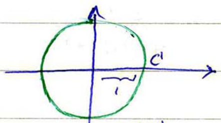
$y = \sin t$

$z := z(t)$

$$I = \int f(z(t))\,dz(t) = ?$$

$$dz(t) = z'(t)\,dt = (x'(t) + iy'(t))\,dt \qquad I = \int_a^b f(z(t))\,(x'(t) + iy'(t))\,dt$$

مثال)



$|z| = 1$

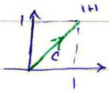
$$I = \int_c \frac{dz}{z} = ?$$

$$z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it} \qquad dz(t) = z'(t)\,dt = ie^{it}\,dt$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

مثال)



$$I = \int_c z\,dz$$

$$C:\ z(t) = x(t) + y(t)i = t + it \qquad dz(t) = z'(t)\,dt = (1+i)\,dt$$

$$0 \le t \le 1$$

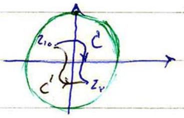
$$I=\int_0^1 (t+it)(1+i)\,dt=(1+i)^2\int_0^1 t\,dt=(1+i)^2\,\frac{1}{2}=\frac{2i+1-1}{2}=i$$

روش دوم برای محاسبه ی I (مختص توابع تحلیلی f)

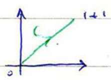
قضیه: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه ی D تحلیلی باشد آن گاه تابع $F(z)$ وجود دارد به طوری که $\forall z\in D \quad F'(z)=f(z)$

هم چنین به ازای هر خم C با ابتدا و انتهای z_1 و z_2 در ناحیه ی D داریم

$$\int_C f(z)\,dz=F(z_2)-F(z_1)$$



مثال)



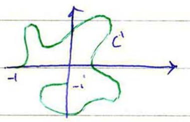
$f(z)=z \qquad I=\int z\,dz \qquad F(z)=\frac{z^2}{2}$

$(F'(z)=f(z))$

$D=\mathbb{C} \rightarrow$ زیرا تابع f در کل $\mathbb{C}$ تحلیلی است

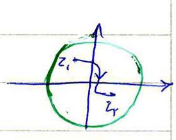
$$I=F(1+i)-F(0)=\frac{(1+i)^2}{2}-\frac{0}{2}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1-1+2i}{2}=i \checkmark$$

مثال)



$I=\int_C e^z\,dz=?$

$D=\mathbb{C} \qquad f(z)=e^z \qquad F(z)=e^z$



$$I=F(-i)-F(-1)=e^{-i}-e^{-1}=\cos 1-i\sin 1-e^{-1}=(\cos 1-e^{-1})-i\sin 1$$

* اگر خم پیچیده بود مطمئناً باید از این قضیه استفاده کرد (قطعاً در این سوال نمی شود از روش پارامتری کردن استفاده کرد)

کران انتگرال

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le B$$

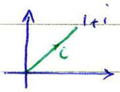
اگر تابع f پیوسته و خم C هموار باشد، می توان کران بالایی برای اندازه ی $\int f(z)dz$ به دست آورد. اگر طول خم C برابر با L و اندازه ی تابع f به ازای تمام نقاط خم کم‌تر از M باشد آن گاه

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le ML$$

اثبات :

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta z_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |f(\xi_i)\Delta z_i| \le M \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}|\Delta z_i|}_{L}$$

مثال)



$f(z) = z$

$\forall z\big|_{\text{on } C}$ $\quad |f(z)| = |z| \le |1+i| = \sqrt{2} \qquad M = \sqrt{2}$

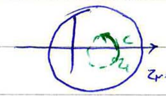
طول خم $\|C\| = \sqrt{2} \qquad L = \sqrt{2} \to \left|\int_C f(z)dz\right| \le 2 \qquad \int_C f(z)dz = i$

جلسه بیست و دوم ۹۴/۲/۱۹

نتایج به دست آمده از روش ۲

نتیجه ۱ : اگر f در D تحلیلی باشد به ازای هر خم بسته‌ی C در D داریم $\quad \int_C f(z)dz = 0$

اثبات



$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z_1) - F(z_1) = 0$$

اگر خم C بسته باشد انتگرال روی خم را به صورت $\oint_C f(z)dz$ نشان می‌دهیم.

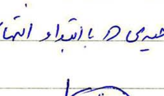
(بدون حفره)

نتیجه ۲ : اگر f روی ناحیه‌ی ساده‌ی D تحلیلی باشد به ازای هر خم C با ابتدا و انتهای z_1 و z_2 داریم

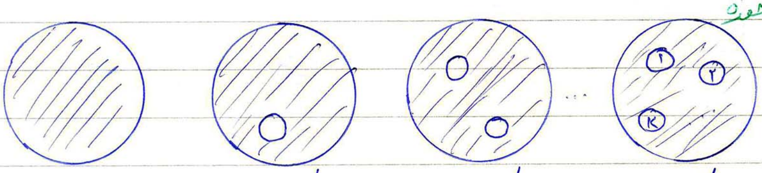
$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

پس اگر C_1 و C_2 دو خم در ناحیه‌ی D با ابتدا و انتهای z_1 و z_2 باشند داریم

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$



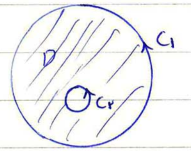
نواحی دارای حفره



ساده — دوگانه — سه گانه — $k+1$ گانه

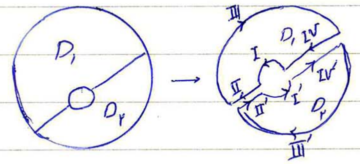
$(k+1)$ - Pieces

قضیه: اگر f در ناحیه‌ی دوگانه‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه داریم



$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

اثبات:



D_1 و D_2 دو ناحیه‌ی ساده هستند که تابع f روی آن‌ها تحلیلی است. پس از نتیجه‌ی 1 داریم:

$$\oint_{\underbrace{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}}_{\text{ناحیه ساده بسته}}} f(z)\,dz = 0 \qquad \oint_{\mathrm{I}'+\mathrm{II}'+\mathrm{III}'+\mathrm{IV}'} f(z)\,dz = 0$$

نتیجه 1

$$\rightarrow \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV} \overset{(1)}{=} 0$$ → منظور انتگرال روی این نواحی صفر است

$$\mathrm{I}'+\mathrm{II}'+\mathrm{III}'+\mathrm{IV}' \overset{(2)}{=} 0 \qquad \mathrm{II} = -\mathrm{II}' \qquad \mathrm{IV} = -\mathrm{IV}'$$

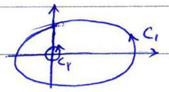
$$(2) \rightarrow \mathrm{I}' - \mathrm{II} + \mathrm{III}' - \mathrm{IV}' = 0$$

$$(1) \rightarrow \mathrm{II} + \mathrm{IV} = -\mathrm{I} - \mathrm{III} \Bigg\} \rightarrow \underbrace{\mathrm{I}+\mathrm{I}'}_{C_2} = \underbrace{-\mathrm{III}-\mathrm{III}'}_{C_1} \rightarrow \oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

$$C_1 \rightarrow -(\mathrm{III}+\mathrm{III}')$$

چون جهتشان قرینه است

مثال:



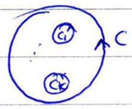
$f(z)$ در ناحیه‌ی دوگانه بین C_1 و C_2 تحلیلی است.

$$I=\oint_{C_1}\frac{z^2+5}{z}\,dz=\oint_{C_2}\frac{z^2+5}{z}\,dz=?$$

$C_2:\ \|z\|=2 \qquad z=2e^{it} \qquad 0\le t\le 2\pi$

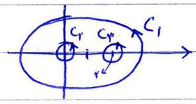
$$I=\int_0^{2\pi}\frac{4e^{2it}+5}{2e^{it}}\,2ie^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}(4e^{2it}+5)\,dt=\frac{i}{2i}4e^{2it}+5it\Big]_0^{2\pi}=0+10i\pi=10\pi i$$

تعمیم: اگر f در ناحیه‌ی $k+1$ گانه تحلیلی باشد داریم



$$\oint_C f(z)\,dz=\sum_{i=1}^{k}\oint_{C_i}f(z)\,dz$$

مثال ۱



$$I=\oint_{C_1}\frac{7z^2-6}{z^2-2z}\,dz$$

$C_2:\ \|z\|=r \qquad z=re^{it} \qquad dz=rie^{it}\,dt$

$$\oint_{C_2}\frac{7z^2-6}{z^2-2z}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-6}{r^2e^{2it}-2re^{it}}\,rie^{it}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-6}{re^{it}-2}\,i\,dt$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-3re^{it}+3re^{it}-6}{re^{it}-2}\,dt=i\int_0^{2\pi}\left(\frac{7r^2e^{2it}-3re^{it}}{re^{it}-2}+3\right)dt$$

$$=\underbrace{i\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-3re^{it}}{re^{it}-2}\,dt}_{I^*}+6\pi i \longrightarrow I^*=\int_1^1\frac{7r^2u-3r}{ru-2}\underbrace{ie^{it}\,dt}_{du}=0$$

$e^{it}=u$

$\longrightarrow \oint_{C_2}f(z)\,dz=6\pi i$ از طریق مشابه $\oint_{C_3}f(z)\,dz=22\pi i$ راهنمایی برای پارامتری کردن ($z-2=re^{it}$)

$$\oint_{C_1}f(z)\,dz=\oint_{C_2}f(z)\,dz+\oint_{C_3}f(z)\,dz=28\pi i$$

فرمول انتگرال کوشی

اگر تابع f در ناحیه‌ی ساده‌ی D تحلیلی باشد به ازای هر نقطه‌ی $z_0 \in D$ و خم بسته‌ی C حول z_0 داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

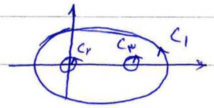
تعمیم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(z_0)$$

$$\vdots$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = 2\pi i\, \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

مثال)



$$\oint_{C_1} \frac{7z^2-6}{z^2-2z}\,dz$$

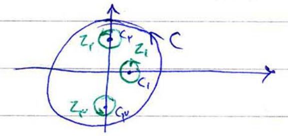
$$\oint_{C_2} \frac{\frac{7z^2-6}{z-2}}{z}\,dz = \left.\frac{7z^2-6}{z-2}\right|_{z=0} \times 2\pi i = 6\pi i$$

$$\oint_{C_3} \frac{\frac{7z^2-6}{z}}{z-2}\,dz = \left.\frac{7z^2-6}{z}\right|_{z=2} \times 2\pi i = 22\pi i \longrightarrow \oint_{C_1} f(z)\,dz = 28\pi i$$

جلسه بیست و سوم ۹۴/۲/۲۱

مثال)

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz$$



$z_1 = 1 \qquad z^2+4=0 \rightarrow z_2 = 2i \qquad z_3 = -2i$

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

1) $\oint_{C_1} = ?$ $\qquad f(z) = \dfrac{\overbrace{e^z/(z^2+4)}^{g(z)}}{(z-1)^2}$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_1} \frac{e^z/(z^2+4)}{(z-1)^2}\,dz \overset{k=1}{=} 2\pi i\, \frac{g'(1)}{1!}$$

$$g(z) = \frac{e^z}{z^2+4} \qquad g'(z) = \frac{e^z(z^2+4) - 2ze^z}{(z^2+4)^2}$$

$$g'(z) = \frac{e^z(z^2+4) - 2ze^z}{(z^2+4)^2} \longrightarrow g'(1) = \frac{e\times 5 - 2e}{25} = \frac{3e}{25}$$

$$\longrightarrow \oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{3e}{25} = \frac{6\pi e i}{25}$$

2) $\oint_{C_2} = ?$

محل $2i$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{\overbrace{e^z/(z-1)^2(z+2i)}^{g(z)}}{z-2i}$$

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz \overset{k=0}{=} \frac{2\pi i\, g(2i)}{0!} = 2\pi i\, g(2i)$$

$$g(2i) = \frac{e^{2i}}{(2i-1)^2(4i)} = \frac{\cos 2 + i\sin 2}{(-4+1-4i)4i} \longrightarrow \oint_{C_2} f(z)\,dz = \frac{\cos 2 + i\sin 2 \times 2\pi i}{(-3-4i)4i}$$

$$\longrightarrow \oint_{C_2} f(z)\,dz = \frac{\pi\,\cos 2 + i\sin 2}{-6-8i}$$

3) $\oint_{C_3} = ?$ $\qquad f(z) = \dfrac{\overbrace{e^z/(z-1)^2(z-2i)}^{g}}{(z+2i)}$

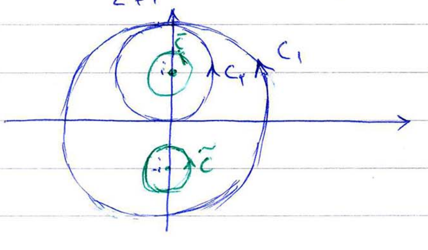
$$\oint_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i\, g(-2i) = 2\pi i\,\frac{e^{-2i}}{(-2i-1)^2(-4i)}$$

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3} = \frac{6\pi e i}{25} + \frac{\pi\,\cos 2 + i\sin 2}{-6-8i} + 2\pi i\,\frac{e^{-2i}}{(-2i-1)^2(-4i)}$$

مثال)

$C_1: \|z\| = 2 \qquad C_2: \|z-i\| = 1$

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+1} \qquad I_1 = \oint_{C_1} f(z)\,dz \qquad I_2 = \oint_{C_2} f(z)\,dz$



$z^2+1=0 \longrightarrow z_1 = i \qquad z_2 = -i$

$$I_1 = \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{\bar{C}} + \oint_{\tilde{C}} \qquad I_2 = \oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{\bar{C}}$$

$$\oint_{\bar{C}} f(z)dz = \oint_{\bar{C}} \frac{\sin z/(z+i)}{z-i}\, dz \overset{k=0}{=} 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z+i}\right|_{i} = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi \sin i$$

$$\oint_{\tilde{C}} f(z)dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{\sin z/(z-i)}{z+i}\, dz = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z-i}\right|_{-i} = 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-2i} = -\pi \sin(-i)$$

$$I_1 = \oint_{\bar{C}} + \oint_{\tilde{C}} = \pi \sin i - \pi \sin(-i)$$

$$I_2 = \oint_{\bar{C}} = \pi \sin i$$

$$\sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\sin i = 0 + i \times 1 \times \sinh 1 = i \sinh 1 \qquad \sin(-i) = -i \sinh 1$$

$$I_1 = \pi \times i \sinh 1 - \pi(-i \sinh 1) = 2\pi i \sinh 1 \qquad I_2 = \pi i \sinh 1$$

فصل ۱۵ سری‌های مختلط

سری‌های توانی: سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ را یک سری توانی حول z_0 می‌گوییم. این سری در صورت همگرایی به تابعی از z همگرا است.

تعریف: اگر سری $\sum a_n (z-z_0)$ به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\| < R$ همگرا باشد و به ازای هیچ z ی در ناحیه‌ی $\|z-z_0\| > R$ همگرا نباشد R را شعاع همگرایی سری می‌گوییم.

قضیه: R (شعاع همگرایی سری $\sum a_n (z-z_0)^n$) از روابط زیر قابل محاسبه است

$$1)\ R = \lim \sqrt[n]{\|a_n\|} \qquad 2)\ R = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$$

مثال) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$a_n = 1 \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{1} \right\| = 1 \qquad z_0 = 0 \longrightarrow \|z\| < 1$$

سری‌های توانی معروف

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \|z\|<1$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) = e^z \qquad \forall z\in\mathbb{C} \qquad R=\infty$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$

5) $\ln(1-z) = ?$ $\qquad \ln(1-z) = -\int \frac{dz}{1-z} = -\int (1+z+\dots)\,dz = -z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\dots$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad \|z\|<1$$

مثال

$\frac{1}{2-z} \qquad \|z\|<2 \quad z_0=0$

$t=\frac{z}{2} \qquad \|t\|<1$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$\frac{1}{2-z} \qquad \|z-1\|<1$

$t=z-1 \qquad \|t\|<1$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

جلسه بیست و چهارم ۹۳/۲/۲۸

محاسبات سری‌های توانی

I) مشتق: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ به تابع $f(z)$ همگرا باشد، آن گاه:

۱) به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ تابع f تحلیلی است.

۲) سری $\sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$ به ازای هر z در ناحیه‌ی فوق به $f'(z)$ همگراست.

II) انتگرال: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ به ازای هر z در $\|z-z_0\|<R$ به $f(z)$ همگرا باشد آن گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ به تابع $\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*$ همگراست.

مثال)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \|z\|<1$$

$$\longrightarrow -\ln(1-z^*)\Big]_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \longrightarrow \ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \qquad \|z\|<1$$

III) ضرب و تقسیم: مشابه به حالت حقیقی دو سری مانند دو چند جمله‌ای جمله به جمله در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند.

مثال ۱)

$$f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2} \qquad \|z\|<1$$

$$f_1(z) = \sin z \qquad f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} \longrightarrow f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

$$f_1(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = (1 - z^2 + z^4 - \dots)$$

$$-z^2 = t$$

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - \dots\right)$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) + \left(-z^3 + \frac{z^5}{3!} - \frac{z^7}{5!} + \dots\right) + \left(z^5 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^9}{5!} - \dots\right)$$

جلسه بیست و چهارم ۹۳/۲/۲۸

خواص سری‌های توانی

I) مشتق: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ به تابع $f(z)$ همگرا باشد، آنگاه:

۱) به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ تابع f تحلیلی است.

۲) سری $\sum n a_n(z-z_0)^{n-1}$ به ازای هر z در ناحیه‌ی فوق به $f'(z)$ همگراست.

II) انتگرال: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ به ازای هر z در $\|z-z_0\|<R$ به $f(z)$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ به تابع $\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*$ همگراست.

مثال)

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \|z\|<1$$

$$\longrightarrow \quad -\ln(1-z^*)\Big]_0^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1} \longrightarrow \ln(1-z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1} \qquad \|z\|<1$$

III) ضرب و تقسیم: شبیه به حالت حقیقی دو سری مانند دو چندجمله‌ای جمله به جمله در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند.

مثال ۱)

$$f(z)=\frac{\sin z}{1+z^2} \qquad \|z\|<1$$

$$f_1(z)=\sin z \qquad f_2(z)=\frac{1}{z^2+1} \longrightarrow f(z)=f_1(z)\,f_2(z)$$

$$f_1(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

$$f_2(z)=\underset{-z^2=t}{\frac{1}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=(1-z^2+z^4-\dots)$$

$$f(z)=f_1(z)\,f_2(z)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)\left(1-z^2+z^4-\dots\right)$$

$$=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)+\left(-z^3+\frac{z^5}{3!}-\frac{z^7}{5!}+\dots\right)+\left(z^5-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^9}{5!}-\dots\right)$$

$$= z - \frac{7}{6} z^3 + \frac{47}{40} z^5 + \cdots$$

مثال ۲) $f(z) = \tan z$

$f_1(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \qquad f_2(z) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \longrightarrow \tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \cdots$$

ارتباط توابع تحلیلی و غیر تحلیلی از طریق سری ها

سری تیلور: اگر تابع f در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ تحلیلی باشد آنگاه دارای سری تیلور با فرم کلی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ است که در آن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

C خم بسته ای شامل نقطه‌ی z_0 در درون ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$

سری لوران: چنانچه تابع f در ناحیه‌ی بین دو دیسک $\|z-z_0\|=R_1$ و $\|z-z_0\|=R_2$ تحلیلی باشد

در این صورت سری لوران تابع f به ازای هر z در ناحیه‌ی فوق به f همگرا است. سری لوران f حول z_0 به فرم کلی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

است که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1} dz$$

معمولا این گونه است که ما سری را داریم و از روی آن انتگرال ها را حساب می‌کنیم

C خم بسته ای حول z_0 و درون ناحیه‌ی تحلیلی.

مثال) $f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \|z\|>1 \qquad t = \frac{1}{z} \to \|t\|<1$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = -t\frac{1}{1-t} = -t(1+t+t^2+\cdots) = -t-t^2-t^3-\cdots$$

$$= -\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 - \cdots$$

مثال)

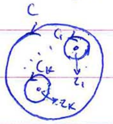
$$g(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2}$$

سری لوران تابع g حول $z_0=0$

تعریف: مقدار b_1 در سری لوران تابع f حول z_0 را مانده‌ی تابع f در z_0 می‌نامیم و با $\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$ نشان می‌دهیم. (نظریه مانده‌ها)

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1}\,dz \rightarrow b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz$$

توجه: اگر تابع f در تمام نقاط درون خم C به جز نقاط $z_1, \dots, z_k$ تحلیلی باشد، برای محاسبه‌ی $\oint_C f(z)dz$ داریم:



$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{C_i} f(z)\,dz$$

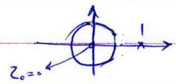
همچنین از تعریف مانده داریم:

$$\oint_{C_i} f(z)\,dz = 2\pi i \underset{z=z_i}{\operatorname{Res}} f(z) \longrightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \underset{z=z_i}{\operatorname{Res}} f(z) \quad (*)$$ ← قضیه اساسی مانده‌ها

درصورت محاسبه شدن مقادیر مانده مقدار $\oint_C f(z)dz$ از رابطه‌ی $(*)$ به دست می‌آید. رابطه‌ی $(*)$ را رابطه‌ی اساسی مانده می‌گویند.

مثال)

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} \qquad \|z\| = \frac{1}{2}$$



$$\oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i \underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) \qquad \underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = ? \longrightarrow$$ سری لوران

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} \overset{(\|z\|<1 \text{ در ناحیه})}{=} \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}(1+z+z^2+\dots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

$b_1 =$ ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در سری لوران $= 1$

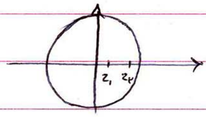
$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = 1 \rightarrow \oint_C = 2\pi i$$

جلسه‌ی بیست و پنجم ۹۴/۳/۴

مثال) (با استفاده از سری لوران)

$$f(z) = \frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)} \qquad |z| = 3$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = 2$$



$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2} f(z)\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = ?$$

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right) \qquad \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)}$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \longrightarrow$$ تابع تحلیلی حول $z=1$ سری تیلور دارد $$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = -1 \longrightarrow \oint_c = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} + \operatorname*{Res}_{z=2}\right) = 2\pi i \times (-2) = -4\pi i$$

محاسبه‌ی مانده بدون استفاده از سری لوران

تعریف: فرض می‌کنیم f در z_0 تحلیلی نیست. در این صورت اگر $f(z)(z-z_0)^k$ در z_0 تحلیلی باشد و $f(z)(z-z_0)^{k-1}$ در z_0 تحلیلی نباشد آن‌گاه z_0 قطب مرتبه‌ی k ام برای f است.

(نقطه‌ی غیرتحلیلی)

نتیجه: اگر z_0 نقطه‌ی غیرتحلیلی مرتبه‌ی k برای تابع f باشد آن‌گاه سری لوران f حول z_0 به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad \frac{b_{k+1}}{(z-z_0)^{k+1}} \not\to \frac{b_{k+1}}{(z-z_0)}$$

است

محاسبه‌ی مانده در نقطه‌ی غیرتحلیلی مرتبه‌ی k

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \dots + \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

$$\xrightarrow{\times (z-z_0)^k} (z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k} + b_1 (z-z_0)^{k-1} \underbrace{+ \dots + b_k}_{\text{چندجمله‌ای از درجه } k-2}$$

(k-1) بار مشتق

$$\xrightarrow{} \left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z-z_0)^{n+1} + (k-1)!\, b_1 + 0$$

$z = z_0$

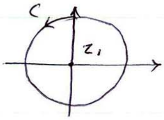
$$\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}\Big|_{z=z_0} = 0 + (k-1)!\, b_1$$

$$\rightarrow b_1 = \frac{1}{(k-1)!}\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}\Big|_{z=z_0} = \underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$$

مثال:

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi)z^2} \qquad \|z\| = 1$$

$z_1 = 0 \qquad z_2 = \pi$



$$\oint_C f(z) = 2\pi i \underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) \qquad \underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = ?$$

$$f(z) = \frac{\frac{\cos z}{z-\pi}}{z^2} \qquad k = 2$$

$\frac{\cos z}{z-\pi} \rightarrow$ حول z_0 تحلیلی

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = \frac{1}{1!}\left((z-0)^2 f(z)\right)'\Big|_{z=0}$$

$$= \left(z^2 \frac{\cos z}{(z-\pi) z^2}\right)'\Big|_{z=0} = \left(\frac{\cos z}{z-\pi}\right)'\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{-\sin z(z-\pi) - 1\times\cos z}{(z-\pi)^2}\Big|_{z=0} = \frac{0-1}{\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}$$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \frac{-1}{\pi^2} = \frac{-2i}{\pi}$$

* حالت خاص $k = \infty$

در بسیاری از موارد توان‌های منفی در سری لوران تابع f حول z_0 تا توان $-\infty$ ادامه دارند، به مثال زیر توجه کنید

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

در این صورت مقدار k برابر ∞ است و محاسبه‌ی مانده از رابطه‌ی $\frac{1}{(k-1)!}\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}$ ممکن نیست. به چنین نقطه‌ای نقطه‌ی غیرتحلیلی اساسی می‌گوییم. در این حالت فقط اگر سری لوران f حول z_0 مشخص باشد می‌توان مانده را حول z_0 به دست آورد.

مثال ۱

$$\oint_{\|z\|=1} e^{1/z}\, dz = ?$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{z} \longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$$

$$\oint_{\|z\|=1} e^{1/z}\, dz = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$$

مثال ۲

$$\oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}}{1+z^2}\, dz$$

$z=0$ نقطه غیرتحلیلی اساسی ← سری لوران

$$f_1(z) = e^{1/z}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \frac{1}{1+z^2} \underset{\|z\|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \qquad \left(\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad t=-z^2\right)$$

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right)$$

ضریب $\frac{1}{z}$ در سری حاصل‌ضرب $= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \longrightarrow \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \sin 1 \qquad \oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz = 2\pi i \sin 1$$

محاسبه ی انتگرال روی خم شامل نقاط غیرتحلیلی - مرور

I) مرتبه ی k متناهی

- روش اول: فرمول کوشی

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \longrightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \, \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

- نظریه ماندهها

- فرمول مانده

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{j} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \left((z-z_i)^k f(z)\right)^{(k-1)} \Big|_{z=z_i}$$

- استفاده از سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$$

II) $k=\infty$

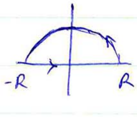
در این حالت فقط در صورت موجود بودن سری لوران می توان مانده و سپس مقدار انتگرال را به دست آورد (مثال ۱ و ۲)

جلسه بیست و ششم ۹۴/۳/۹

محاسبه برخی انتگرال حقیقی با استفاده از نظریه مانده ها

برخی از انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال مختلط متناظر قابل محاسبه هستند. به ۳ نمونه ی زیر توجه می کنیم

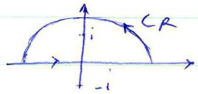
I) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$



۰) تابع $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ و خم C را شامل نیم دایره‌ی C_R و بخش $-R$ تا R از محور حقیقی در نظر می‌گیریم.

۱) از نظریه مانده‌ها داریم:

$$z^2+1=0 \rightarrow z_1=i \qquad z_2=-i$$



$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} = \frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

۲) از تعریف خم C داریم

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1}$$
$R\rightarrow\infty$

$$\underbrace{\oint_C f(z)\,dz}_{\pi} = \int_{C_\infty} f(z)\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

۳) نشان می‌دهیم $\int_{C_\infty} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\int_{C_\infty} f(z)\,dz\right| \leq ML \rightarrow C_\infty \text{ طول خم}$$

M: $\max_{C_\infty}|f|$

ابتدا برای C_R محاسبه می‌کنیم و سپس $R\rightarrow\infty$ میل می‌دهیم

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq ?$$

C_R: طول خم $=\pi R$ (*)

$$M = \max_{C_R}|f| = \max_{|z|=R}|f| = \max_{|z|=R}\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \qquad \left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq ?$$

$$|z^2+1| \geq |z^2|-1 = |z|^2-1 = R^2-1 \rightarrow \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R^2-1} \quad (**)$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq ML \leq \frac{1}{R^2-1}\,\pi R$$
$R\rightarrow\infty$

$$\left|\int_{C_\infty} f(z)\,dz\right| \le 0 \longrightarrow \int_{C_\infty} f(z)\,dz = 0$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \pi = \cancel{\int_{C_\infty} f(z)\,dz} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$ ۴)

توجه: محاسبات فوق درحالت کلی برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{q(x)}\,dx$ که P و q چندجمله‌ای هایی از درجه dp و dq هستند برقرار است درصورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

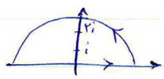
$$M \le \frac{\tilde{P}(R)}{\tilde{q}(R)} \qquad L = \pi R \longrightarrow \left|\int_{C_\infty}\right| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\tilde{P}(R)\,\pi R}{\tilde{q}(R)} = 0$$

$$d_p + 1 < d_q \rightarrow \underline{d_q - d_p > 1}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$ II)

تابع $f(z) = \frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ انتخاب می‌کنیم وخم C را مانند مثال قبل تعریف می‌کنیم

۱) از نظریه‌ی مانده‌ها داریم:



$$\oint_C f(z)\,dz = ?$$

$$(z^2+1)(z^2+4) = 0 \rightarrow \pm i \quad \pm 2i$$

$$z_1 = i \qquad z_2 = 2i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{4iz}/(z+i)(z^2+4)}{(z-i)} = \left(\frac{e^{4iz}}{(z+i)(z^2+4)}\right)\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-4}}{2i\times 3} = \frac{e^{-4}}{6i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \operatorname*{Res} \frac{e^{4iz}/(z^2+1)(z+2i)}{z-2i} = \left(\frac{e^{4iz}}{(z+2i)(z^2+1)}\right)\Bigg|_{z=2i} = \frac{e^{-8}}{4i\times(-3)} = -\frac{e^{-8}}{12i}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-4}}{6i} - \frac{e^{-8}}{12i}\right) = \frac{\pi e^{-4}}{3} - \frac{\pi e^{-8}}{6}$$

۲) از تعریف خم C داریم

$$\oint_{\substack{C \\ R\to\infty}} = \int_{C_R} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

$$\oint_C = \int_{C_\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

۳) کران $\int_{C_\infty}$:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right| \le ML$$

$L=\pi R$ $\qquad M = \max_{|z|=R} \frac{|e^{4iz}|}{|(z^2+1)(z^2+4)|} \le ?$

i) $\left|e^{4iz}\right|_{|z|=R} \le ?$

$|z|=R \qquad z = R\cos\theta + iR\sin\theta$

$\hookrightarrow x = R\cos\theta$

$y = R\sin\theta \qquad \left|e^{4i(R\cos\theta + iR\sin\theta)}\right| = \left|\overset{\tilde{r}}{e^{-4R\sin\theta}}\, e^{\overset{\tilde{\theta}}{4R\cos\theta}\, i}\right| = e^{-4R\sin\theta}$

ii) $\left|\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right|_{|z|=R} \le \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}$

$$\begin{cases} |z^2+1| \ge R^2-1 \\ |z^2+4| \ge R^2-4 \end{cases}$$

$i, ii \longrightarrow M = \max\left|\frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \le \frac{e^{-4R\sin\theta}}{(R^2-1)(R^2-4)}$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right| \le ML \le \frac{\pi R e^{-4R\sin\theta}}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$\left|\int_{C_\infty} \quad '' \quad \right| \le 0 \longrightarrow \int_{C_\infty} = 0$

۴) $\oint_C f(z) = \frac{\pi e^{-4}}{3} - \frac{\pi e^{-8}}{6} = \int_{C_\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

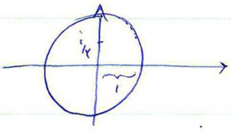
۵) از انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ لازم است انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ محاسبه شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x + i\sin 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = re(\alpha) = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = imag(\alpha) = 0$$

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\sin\theta} \qquad (\text{III}$$



$X = \cos\theta$

$Y = \sin\theta \qquad z = \cos\theta + i\sin\theta$

۰) خم C را دایره به شعاع ۱ و مرکز مبدأ درنظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{z + 1/z}{2} \qquad \sin\theta = \frac{z - 1/z}{2i}$$

پس در انتگرال I ، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ از روابط بالا جایگذاری می‌شوند هم‌چنین معادل با $d\theta$ برحسب z داریم:

$$z = e^{i\theta} \qquad dz = i\cancel{e^{i\theta}}^{\,z}\, d\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

۱) با جایگذاری $d\theta$ ، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ برحسب z داریم:

$$I = \oint_C \frac{dz/iz}{5 - 4\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}} = \oint_C \frac{dz}{5iz - 2z^2 + 2} = ?$$

۲) از نظریه مانده‌ها داریم:

$$2z^2 - 5iz - 2 = 0 \longrightarrow z_{1,2} = \frac{5i \pm \sqrt{-25+16}}{4} = \frac{5i \pm 3i}{4} \rightarrow z_1 = \frac{i}{2} \qquad z_2 = 2i$$

بیرون دایره

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = i/2} f(z) \qquad \operatorname*{Res}_{z=i/2} \frac{1}{-2z^2 + 5iz + 2} = \operatorname*{Res}_{z=i/2} \frac{1}{(-2z+i)(z-2i)} = \operatorname*{Res}_{z=i/2} \frac{\frac{1}{2(z-2i)}}{z - i/2}$$

$$= \frac{1}{-2(z-2i)}\Bigg|_{z = i/2} = \frac{1}{3i}$$

$$I = 2\pi i \times \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$