ملی ۱
جلسه شانزدهم

ریاضیات مهندسی :

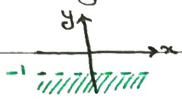
نواحی در صفحه‌ی مختلط :

1) $Re\{z\} > 1$

$x > 1$

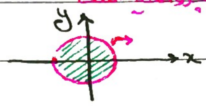
2) $Im\{z\} < -1$

$y < -1$



3) $|z| \leq 1$

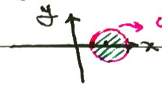
جزو ناحیه است



4) $|z-2| \leq 1 \Rightarrow$

$|x+iy-2| \leq 1 \Rightarrow |(x-2)+iy| \leq 1 \Rightarrow (x-2)^2+y^2 \leq 1$

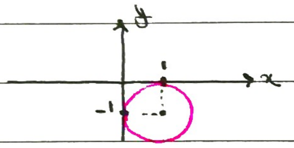
جزو ناحیه است



دایره‌ای به شعاع ۱ با مرکز $(2,0)$

۵) معادله $|z-1+i| = 1$ معرف چه شکلی است؟

$$|x+iy-1+i| = 1 \Rightarrow |(x-1)+i(y+1)| = 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 1$$



مرکز دایره $(1,-1)$

شعاع دایره برابر ۱ است

۶) مساحت شکلی که معادله‌ی آن در صفحه‌ی مختلط به صورت $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \sqrt{2}$ می‌باشد چقدر است؟

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{x+iy+i}{x+iy-i}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow |x+i(y+1)| = \sqrt{2}\,|x+i(y-1)| \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$x^2+(y+1)^2 = 2(x^2+(y-1)^2) \Rightarrow x^2+y^2+1+2y = 2(x^2+y^2+1-2y) \Rightarrow x^2+y^2+2y+1 = 2x^2+2y^2+2-4y$$

$$x^2+y^2-6y+1 = 0 \Rightarrow x^2+y^2-6y+9-9+1 = 0 \Rightarrow x^2+(y-3)^2 = 8$$

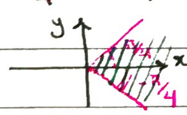
دایره‌ای به مرکز $(0,3)$ و به شعاع $\sqrt{8}$

مساحت $\pi R^2 = \pi \times (8)$

۷) نواحی مربوط به نامساوی‌های زیر را رسم کنید:

1) $-\pi/4 \leq Arg(z) \leq \pi/4$

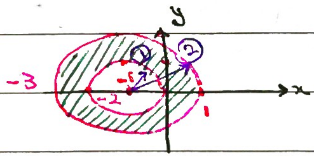
$-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$



2) $1 \leq |z+1| \leq 2$

$1 \leq |x+iy+1| \leq 2 \Rightarrow 1 \leq |(x+1)+iy| \leq 2$

$1 \leq \sqrt{(x+1)^2+y^2} \leq 2$



تعاریف :

مکان هندسی نقاط: هر قانونی که تعدادی از نقاط صفحه‌ی z را گرد آورد، مکان هندسی نقاط است.

مثال: $|z| = 1$ مکان هندسی نقاطی است که فاصله‌ی آن تا مرکز (مبدأ مختصات) ۱ است.

۲) مجموعه‌ی باز: مجموعه‌ی مانند S را باز می‌گوییم هرگاه هر نقطه‌ی S همسایگی داشته باشد که هر نقطه

از آن متعلق به S باشد. برای مثال نقاط درون یک دایره، یک مجموعه‌ی باز را تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر مجموعه‌ی S

شامل نقاط مرزی خودش نباشد.

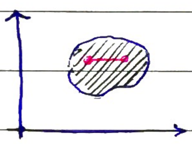
باز ←

۳) مجموعه‌ی بسته: مجموعه‌ای را بسته گوییم که شامل نقاط مرزی خودش هم باشد.

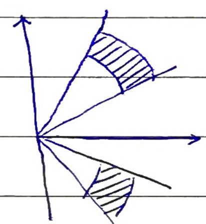
بسته ←

۴) مجموعه‌ی همبند: چنانچه هر دو نقطه‌ی مجموعه توسط خطی شکسته درون مجموعه قابل اتصال باشد

آن مجموعه نقاط را همبند می‌نامند.



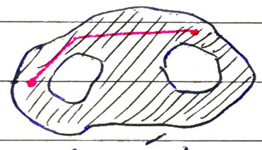
همبند ساده



غیر همبند است.

$\pi/6 < |\arg z| < \pi/3$

$1 < |z| < 1.5$



همبند مرکب (شامل حفره)

۵) حوزه: مجموعه نقاط همبند باز را گوییم.

۶) ناحیه: مجموعه نقاط همبند بسته را گوییم.

تابع: تابع قانونی است که به تمام نقاط یک ناحیه (حوزه) در صفحه‌ی Z یک عدد مختلط نسبت دهد. $w=f(z)$

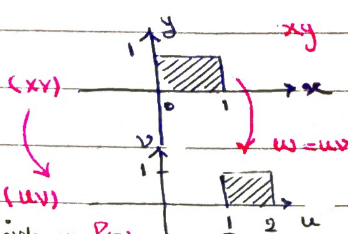
نکته: فرق تابع حقیقی و مختلط در این است که برد و دامنه در این حالت یک ناحیه است.

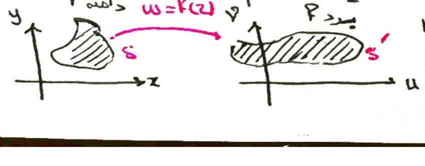
$y=\sqrt{1-x}$ $x \le 1$ دامنه

$y \ge 0$

تابع مختلط: فرض می‌کنیم دامنه به صورت مقابل باشد، حتماً برد به صورت پایین خواهد بود.

$w = z + 1$





s.a.m

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع f نقاط ناحیه S را در صفحه Z به نقاط ناحیه‌ی S' در صفحه w تبدیل می‌کند.

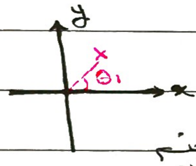
جلسه شانزدهم

نکته: فرض کنید عدد مختلط به فرم $z=re^{i\theta}$ دارای یک مقدار منحصر به فرد r است. اما اگر به θ آرگومان z بایستی $+2k\pi$ هم آرگومان z خواهد بود $(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$. در اغلب توابع مختلط این که کدام مقدار آرگومان z را لحاظ کنیم تأثیری بر مقدار خروجی تابع ندارد. برای مثال وقتی می‌خواهیم $z^n=r^ne^{in\theta}$ را بدست آورید هر کدام از مقادیر θ را استفاده کنیم خروجی یکسان خواهیم داشت. در واقع دلیل این امر به صورت زیر است.

$$z^n=r^ne^{in(\theta+2k\pi)}=r^ne^{in\theta}\underbrace{e^{i2k\pi}}_{1}=r^ne^{i\theta}$$

نکته: از طرفی در برخی از توابع مختلط انتخاب مقدار θ روی مقدار خروجی تأثیر گذار است. در چنین مواردی باید حدود کنیم. با محدود کردن θ باید مشکل را برطرف کرد.

$$w=\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}=z^{1/2}$$



$$w=\sqrt{r}\,e^{i\theta_1/2}$$

یک دور بزنیم $\theta_1 \to \theta_1+2\pi \Rightarrow w=\sqrt{r}\,e^{i\left(\frac{\theta_1+2\pi}{2}\right)}$

$0<\theta<2\pi$ ✓

$$w=\sqrt{r}\,e^{i(\theta_1/2+\pi)}=\sqrt{r}\,e^{i\theta_1/2}e^{i\pi}=-\sqrt{r}\,e^{i\theta_1/2}$$

به دو عدد مختلف رسیدیم

تابع نمایی: $e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$

$|e^z|=e^x \quad , \quad \theta=Arg(z)=y$

تابع لگاریتمی: $\ln z=\ln(re^{i\theta})=\ln r+i\theta \quad , \quad z=1+i \Rightarrow \ln z=\sqrt{2}+i(\pi/4+2k\pi)$

$k\in\mathbb{Z}$

بی‌شمار z برای $\ln(1+i)$ متصور هستیم. به این ترتیب $\ln z$ حتی یک تابع هم نیست. باید این مشکل را به نحوی حل نماییم

به این صورت که بازه‌ای به طول 2π برای مقادیر θ انتخاب می‌کنیم. برای مثال شرط می‌کنیم که $\pi/2<\theta<2\pi+\pi/2$

باشد. اگر بخواهیم $\ln(1+i)$ را با شرط فوق بدست آوریم $\ln(1+i)=\sqrt{2}+i(\pi/4+2\pi)$

* مقدار اصلی تابع $-\pi<\theta<\pi$

s.a.m

اکنون این پرسش مطرح است که شرط $\pi/2 < \theta < 2\pi + \pi/2$ را از کجا آورده‌ایم. در واقع ما می‌توانستیم این شرط را با هر شرط دیگری به صورت $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ جایگزین کنیم. در واقع بی‌شمار تابع داریم که همه‌ی آن‌ها را لگاریتم می‌نامند. اما محدوده‌ی θ در آن‌ها با هم متفاوت است. پس فرم کلی رابطه فوق به صورت زیر است

$$Lnz = Lnr + i(2k\pi + \theta)$$ ✓

توابع مثلثاتی مختلط:

دوره‌ی تناوب آن‌ها 2π است.

$$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i \quad , \quad \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \cos z/\sin z \quad , \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc(z) = \frac{1}{\sin z}$$

نکته ۱: توابع $\tan z$ و $\sec z$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی که ریشه‌های معادله $\cos z = 0$ هستند مشتق‌پذیر می‌باشند و توابع $\cot z$ و $\csc z$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی که ریشه‌های معادله $\sin z = 0$ هستند مشتق‌پذیر هستند.

نکته ۲: روابط مثلثاتی زیر با استفاده از روابط مثلثاتی برای هر $z = x + iy$ صادق است.

1) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ 2) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

✓ $\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$

✓ $\sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2i}$

از روابط فوق می‌توان نتایج زیر را به دست آورد.

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad , \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

مثال: معادله $\cos z = 2$ وقتی که z عدد مختلط باشد.

۱) دارای بی‌نهایت جواب حقیقی است ۲) دارای هیچ جوابی نیست چون $-1 \le \cos z \le 1$ است

✓ ۳) دارای بی‌نهایت جواب مختلط است ۴) دارای تعداد محدودی جواب مختلط است.

$(\cos z) = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + \sin x \sinh y\, i = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\Rightarrow \cos x \cosh y = 2$

$\sin x \sinh y = 0$

$\to \sin x \to \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \cos x = (-1)^k \Rightarrow (-1)^k \cosh y = 2 \Rightarrow \cosh y = \pm 2$ — 2 ✓ $\to x = 2k\pi$ بی‌شمار جواب دارد؛ -2 ✗

$\to \sinh y = 0 \Rightarrow \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \cosh y = 1 \Rightarrow \cos x = 2$ امکان ندارد ✓

بی‌نهایت جواب دارد

s.a.m

توابع توانی به صورت z^c :

اگر c عددی مختلط باشد و $z\neq 0$ باشد آن گاه به کمک لگاریتم داریم

$$z^c = e^{c\ln z}$$

همان طور که می بینیم این تابع هم بی نهایت مقداری است چون $\ln z$ بی نهایت مقدار دارد. اما اگر Ln شاخه اصلی در نظر گرفته شود آن گاه مقدار اصلی این تابع هم قابل تعریف است. برای مثال مقدار i^i به صورت مقابل حساب می شود

$$z = i^i = e^{i\ln i} = e^{i\ln e^{i\pi/2}} = e^{i\times i\pi/2} = e^{-\pi/2}$$

مثال: قسمت حقیقی عدد مختلط $z=(1+i\sqrt{3})^{(1+i\sqrt{3})}$ را بدست آورید.

$$z=(1+i\sqrt{3})^{(1+i\sqrt{3})} \ , \ z^c = e^{c\ln z} \ , \Rightarrow z^c = e^{(1+i\sqrt{3})\ln(1+i\sqrt{3})} = e^{(1+i\sqrt{3})\ln 2e^{i\pi/3}}$$

$$= e^{(1+i\sqrt{3})(\ln 2+i\pi/3)} = e^{(\ln 2+i\pi/3+i\sqrt{3}\ln 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi)} = e^{(\ln 2-\pi/\sqrt{3})}[i(\pi/3+\sqrt{3}\ln 2)] =$$

$$Re\{z\} = e^{(\ln 2-\pi/\sqrt{3})}[\cos(\pi/3+\sqrt{3}\ln 2)] \ , \ Im\{z\} = e^{(\ln 2-\pi/\sqrt{3})}\sin(\pi/3+\sqrt{3}\ln 2)$$

(قسمت حقیقی)

توابع هذلولوی مختلط :

توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ , \ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ , \ \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \ , \ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

تذکر: تابع $\tanh z$ در تمام صفحه مختلط به جز ریشه های معادله $\cosh z = 0$ پیوسته و مشتق پذیر است و دوره تناوب آن πi است.

تذکر: کلیه روابط حاکم بر توابع هیپربولیک در این توابع نیز صادق است

1) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ 2) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

3) $(\sinh z)' = \cosh z$ 4) $(\cosh z)' = \sinh z$

s.a.m

با استفاده از روابط فوق فرمول های زیر بدست خواهد آمد:

$$\cosh iz = \cos z \quad , \quad \sinh iz = i\sin z$$
$$\cos iz = \cosh z \quad , \quad \sin iz = i\sinh z$$

مثال ۱: اگر $f(z) = z^{\ln z}$ آن گاه مقدار اصلی تابع f به ازای $z = i$ را بدست آورید.

$$i^{\ln i} = i^{\ln 1 \times e^{i\pi/2}} = i^{\ln e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/2 \times i\pi/2} = e^{-\pi^2/4}$$

مثال ۲: قدر مطلق و آرگومان عدد مختلط $w = e^{\bar{z} - i}$ را بدست آورید.

$$w = e^{x - iy - i} = e^{x - i(y+1)} = e^{x + i(y-1)} \Rightarrow |e^{\bar{z} - i}| = e^{x} \quad , \quad Arg(w) = -y-1$$

مثال ۳: مجموعه جواب های معادله $\sin z = 2i$ ، $Z = x + iy$ مختلط را بدست آورید (؟)

$$\sin(x+iy) = 2i \quad , \quad \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = 2i \quad , \quad \sin x \cosh y + i\sinh y \cos x = 2i$$

$$\Rightarrow \sin x \cosh y = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \longrightarrow \cos x = (-1)^k \\ \cosh y = 0 \longrightarrow \text{غیرممکن است} \end{cases}$$

$$\sinh y \cos x = 2 \Rightarrow \sinh y (-1)^k = 2 \Rightarrow \sinh y = 2(-1)^k \Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 2(-1)^k \Rightarrow$$

$$\frac{e^{2y} - 1}{e^y} = 4(-1)^k \Rightarrow e^{2y} - 1 = 4(-1)^k e^y \Rightarrow e^{2y} - 4(-1)^k e^y - 1 = 0 \quad e^y = \frac{+4(-1)^k \pm \sqrt{16 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$e^y = (4(-1)^k \pm \sqrt{20})/2 = (4(-1)^k \pm 2\sqrt{5})/2 = 2(-1)^k \pm \sqrt{5} \Rightarrow e^y = 2(-1)^k \pm \sqrt{5} \Rightarrow y = \ln(2(-1)^k \pm \sqrt{5})$$

s.a.m