۹۸۱۶۵۵۳

ابوالفضل ابراهیمی

«خلاصه‌ی نکات مهم درس اصول سیستم‌های مخابراتی»

تکلیف ۲ نمره   کوئیز ۲ نمره   پروژه ۳ نمره   میان‌ترم ۶ نمره   پایان‌ترم ۷ نمره

فصل ۱: نمایش فوریه سیگنال‌ها و سیستم‌ها

«پارت ۱»

انواع سیگنال:

- انرژی: سیگنالی که انرژی آن محدود باشد. $E<\infty$ و $P_{av}=0$
- توان: سیگنالی که توان متوسط آن محدود باشد. $P_{av}<\infty$ و $E=\infty$
- نه انرژی و نه توان!

تعاریف:

① توان لحظه‌ای: $P=|x(t)|^2$

② توان متوسط سیگنال: $P_{av}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2\,dt$

③ انرژی کل سیگنال: $E=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2\,dt$ (به‌طور کلی: $E=\int P(t)\,dt$)

$$\Rightarrow E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$

④ مقدار متوسط (میانگین) یک سیگنال (مولفه‌ی DC یک سیگنال):

$$\langle f(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{f(t)}{T}\,dt$$

با توجه به تعریف مقدار dc یک سیگنال: $P_{av}=\langle P\rangle \left(=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{E}{T}\right)$

نکات :

① در تعاریف توان یا انرژی، منظور از $|x(t)|$، اندازه‌ی سیگنال است (ونه قدر مطلق!)

② تعریف مقدار متوسط، از تعریف ریاضی زیر نشأت می‌گیرد:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx \Rightarrow E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

که $f(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x می‌باشد.

مثال: برای سیگنال‌های زیر، مولفه‌ی DC را تعیین کنید:

$$f_1(t) = u(-t) \cdot u(t+2) \quad \Big| \quad f_2(t) = 2t \;; \; -1 < t < 1$$

★1-2 برای سیگنال‌های حقیقی (غیر dc) پیوسته در زمان، تابع چگالی احتمال سیگنال، به صورت یکنواخت است.

$2t = f_2(t) =$ تابعی از متغیر تصادفی $t =$ متغیر تصادفی

چگالی احتمال متغیر تصادفی $= \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \langle f_2(t) \rangle = E(f_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \times \frac{1}{2}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{+1} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Parsian Note Book

Subject:

Date:

t = متغیر تصادفی $\qquad f_1(t)$ = تابعی از متغیر تصادفی

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $= \dfrac{1}{0-(-2)} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \langle f_1(t) \rangle = E(f_1(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \times \frac{1}{2}\, dt$$

$$= \int_{-2}^{0} 1 \times 1/2\, dt = \frac{1}{2} t \Big|_{-2}^{0} = +1$$

۲-۲ ★ متوسط سیگنال های ثابت پیوسته در زمان، برابر با مقدار ثابت سیگنال است.

③ تمام سیگنال های متناوب، نوع توان هستند و داریم: $\qquad T_0$ = دوره تناوب

$$P_{av} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2\, dt$$

← یعنی توان متوسط سیگنال متناوب در طول یک دوره تناوب، برابر توان متوسط کل سیگنال است.

④ سیگنال های فیزیکی و واقعی، معمولا نوع انرژی هستند.

«پارت ۲» «سیگنال‌های مهم»

① سیگنال سینوسی: sinusoidal $\quad x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

$T_0 = \frac{1}{f_0} \qquad |x(t)| = A \qquad \measuredangle x(t) = 0$

به φ ، فاز x می‌گویند (ولی دقت شود که با فاز اعداد مختلط فرق دارد.)

② سیگنال نمایی مختلط: Complex exp. $\quad x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$

$T_0 = \frac{1}{f_0} \qquad |x(t)| = A \qquad \measuredangle x(t) = 2\pi f_0 t + \varphi$

$$\Rightarrow x(t) = x_r(t) + j x_i(t) = A[\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j\sin(2\pi f_0 t + \varphi)]$$

③ سیگنال پله واحد: unit-step

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

معمولا به جای $u_{-1}(t)$ ، از $u(t)$ استفاده می‌کنند.

Parsian Note Book

Subject:

Date:

④ پالس مستطیلی: Rectangular pulse

$$\Pi(t)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

⑤ سیگنال مثلثی: Triangular Signal

$$\Lambda(t)=\begin{cases}t+1 & -1\leq t\leq 0\\ -t+1 & 0\leq t\leq 1\\ 0 & \text{oth.}\end{cases}$$

⑥ سیگنال سینک: Sinc Signal

$$\mathrm{Sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\rightarrow \mathrm{Sinc}(0)=1$$

⑦ سیگنال علامت: Sign Signal

$$\mathrm{Sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

۸) سیگنال ضربه واحد : Impulse or Delta

$\delta(t) = 0 \quad , t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$ (مشتق u : $u(t) = \delta(t)$)

تعریف دیگر : $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$

1) $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\,\delta(t)\,dt = x(t_0)$$

3) For all $a \neq 0$: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

4) $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$ کانولوشن :

5) $u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \quad , \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u_{-1}(t)$

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} x(t)\Big|_{t=0}$

7) $x(t) * \delta^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) * \delta'(t) = x'(t) \\ x(t) * U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

9) توابع ویژه (منفرد): Singularity Fun.

$$\begin{cases} U_0(t) \triangleq \delta(t) \qquad U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(\tau)\, d\tau = U(t) \rightarrow \text{Unit-step} \\ U_k(t) \triangleq \dfrac{d^k}{dt^k} U_0(t) \quad ; \ k \geq 1 \\ U_{-k}(t) \triangleq \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} U_{-1}(t) \quad ; \ k \geq 2 \end{cases}$$

شیب واحد ← U_{-2} ، پله واحد ← U_{-1} ، ضربه واحد ← U_0 ، دوبلت واحد ← U_1

$$\cdots \xleftarrow{D^{-1}} U_{-2}(t) = r(t) \xleftarrow{D^{-1}} U_{-1}(t) = U(t) \xleftarrow{D^{-1}} U_0(t) = \delta(t) \xrightarrow{D} U_1(t) \xrightarrow{D} U_2(t) \xrightarrow{D} \cdots$$

$$\rightarrow U_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t) = t \cdot U(t) \triangleq r(t)$$

ویژگی مهم: $U_{k_1+k_2}(t) = U_{k_1}(t) * U_{k_2}(t) \quad ; \ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

«پارت ۳» «سری فوریه و تبدیل فوریه»

① سری فوریه: اگر سیگنال $x_{T_0}(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0 باشد، داریم:

بسط سری فوریه:

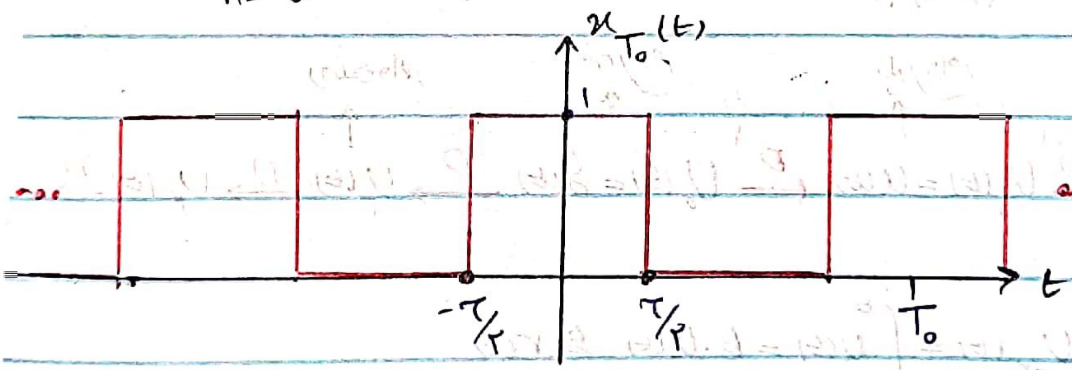
$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

ضرایب سری فوریه:

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x_{T_0}(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} \, dt$$

مثال مهم:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_0}{\tau}\right)$$



$$x_n = \begin{cases} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) & ; n \neq 0 \\ \frac{\tau}{T_0} & ; n = 0 \end{cases}$$

۲ تبدیل فوریه: اگر سیگنال $x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد ($\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$) داریم:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$$ تبدیل فوریه:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)\,e^{j2\pi f t}\,df$$ تبدیل فوریه معکوس:

★ همه سیگنال های توان و انرژی، دارای تبدیل فوریه هستند.

★ رابطه ضرایب سری فوریه با تبدیل تبدیل فوریه: $x_n=f_0\,X(nf_0)$

که در آن: f_0 ← فرکانس اصلی ($1/T_0$) ، x_n ← ضرایب سری فوریه

« Fourier-Transform Pairs »

Time Domain	Frequency Domain
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)$
$\Pi(t)$ (rect(t))	$\mathrm{sinc}(f)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
$\Lambda(t)$	$\mathrm{sinc}^2(f)$
$\mathrm{sinc}^2(f)$	$\Lambda(f)$
$A.\mathrm{rect}(\frac{t}{T})$	$A.T.\mathrm{sinc}(Tf)$
$A.\mathrm{sinc}(2Wt)$	$\frac{A}{2W}.\mathrm{rect}(\frac{f}{2W})$
$e^{-at}.u(t)$; $a>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\frac{j}{\pi t}$	$\mathrm{sgn}(f)$

Parsian Note Book

Subject:

Date:

Time Domain	Frequency Domain
$U_{-1}(t) = U(t)$ پله واحد	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$U_{1}(t) = \delta'(t)$ دوبلت واحد	$j2\pi f$
$U_{n}(t) = \delta^{(n)}(t)$; $n \geq 1$	$(j2\pi f)^{n}$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi \, \mathrm{sgn}(f)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$ $f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$

« Fourier - Transform Properties »

Signal	Fourier Transform
خطی بودن : $a x_1(t) + b x_2(t)$	$a X_1(f) + b X_2(f)$
دوگانی : $X(t)$	$x(-f)$
$X(-t)$	$x(f)$
تغییر مقیاس : $x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-f)$
انتقال زمانی : $x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$
انتقال فرکانسی : $e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
کانولوشن : $x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
مدولاسیون : $x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j2\pi f \cdot X(f)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j2\pi f)^n \cdot X(f)$
$t \cdot x(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right) \cdot \frac{d}{df} X(f)$
$t^n \cdot x(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$
توابع متناوب : $x_{T_0}(t)$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$
تابع همبستگی : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau)\, dt$	$X(f) \cdot Y^*(f)$

	Signal	Fourier Transform
	$\dfrac{-x(t)}{j2\pi t}+\dfrac{1}{2}x(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{f} X(\lambda)\,d\lambda$
	$-j2\pi t\cdot x(-t)$	$\dfrac{d}{df}X(f)$
مزدوج گیری:	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
	$x^*(-t)$	$X^*(f)$
	حقیقی $x(t)$	$X(f)=X^*(-f)$
(در اکثر موارد با سیگنال حقیقی کار می‌کنیم،		$Re\{X(f)\}=Re\{X(-f)\}$
		$Im\{X(f)\}=Im\{X(-f)\}$
به همین علت، طیف‌های مربوطه، به صورت تابعی زوج		$\lvert X(f)\rvert=\lvert X(-f)\rvert$
		$\measuredangle X(f)=-\measuredangle X(-f)$
هستند.)		
	حقیقی و زوج $x(t)$	حقیقی و زوج $X(f)$
	حقیقی و فرد $x(t)$	موهومی خالص و فرد $X(f)$
انرژی سیگنال:	$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2\,dt$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(f)\rvert^2\,df$

سطح زیر $x(t)$: $X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt$ و سطح زیر $X(f)$: $x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)\,df$

«بخش ٤» «سیگنال‌های نوع انرژی» — Energy-Type Signal

① تابع خود همبستگی (برای سیگنال‌های نوع انرژی): Autocorrelation Fun.

تابع خودهمبستگی برای تأخیر τ:

$$R_x(\tau) \triangleq x(\tau) \overset{\text{conv.}}{\star} \overset{\text{مزدوج}}{x^*(-\tau)}$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, x^*(t)\, dt$$

② چگالی طیف انرژی: Energy Spectral Density (ESD)

(مخصوص سیگنال‌های انرژی) $\Psi_X(f) \triangleq |X(f)|^2$ ← اندازه

ویژگی‌ها:

← انرژی سیگنال $x(t)$: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_X(f)\, df = R_x(0)$

← $\boxed{R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Psi_X(f)}$ — τ متغیر زمانی به کار رفته در سیگنال خودی است

← تقارن هرمیتی: $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau) \Rightarrow$ if $x(t)$ is real: $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$

← $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

← عدم وجود فرکانس‌های بالا در $\Psi_X(f)$ به معنای تغییرات آرام سیگنال $x(t)$ است.

وجود فرکانس‌های بالا در $\Psi_X(f)$ به معنای تغییرات شدید سیگنال $x(t)$ است.

یادآوری کانولوشن:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

← $\Psi_X(f)$ یک تابع حقیقی و نامنفی از f است. (حتی اگر خود $x(t)$ مختلط باشد.)

← $R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_X(f)\, df$ $\qquad$ $\Psi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, d\tau$

← عبور سیگنال از کانال $H(f)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$\Rightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f) \Rightarrow \Psi_Y(f) = H^2(f) \times \Psi_X(f)$$

③ همبستگی متقابل سیگنال‌های نوع انرژی: Cross-Correlation Fun.

همبستگی متقابل x و y برای تأخیر τ:

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

نکته:

۱) در حالت کلی $R_{xy}(\tau) \neq R_{yx}(\tau)$ زیرا که: $R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$

۲) تقارن هرمیتی: $R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$

۳) «سیگنال‌های متعامد» $x(t)$ & $y(t)$ are Orthogonal Signals if:

$$R_{xy}(\tau=0) = 0$$

سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ متعامد هستند، هرگاه ضرب داخلی آنها صفر شود. در واقع ضرب داخلی به صورت

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt$$

تعریف می‌شود.

۴) «سیگنال‌های ناهمبسته» Uncorrelated Signals:

$$R_{xy}(\tau) = 0 \quad ; \forall \tau$$

★۴-۱ اگر $x(t)$ و $y(t)$ حقیقی و ناهمبسته باشند، $\int x(t) \cdot y(t)$ برابر صفر می‌شود.

★۴-۲ برای سیگنال‌های متعامد (یا ناهمبسته)، انرژی مجموع، برابر مجموع انرژی‌هاست.

$$Z(t) = x(t) + y(t) \underset{\text{if } R_{xy}(\tau=0)=0}{\Longrightarrow} E_z = E_x + E_y$$

★۴-۳ اگر دو سیگنال در حوزه فرکانس، تداخل طیفی نداشته باشند، دو سیگنال ناهمبسته‌اند.

$$\text{if } X(f) \cdot Y(f) = 0 \rightarrow R_{xy}(\tau) = 0$$

۵)

$$R_{xy}(\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_{xy}(f) \triangleq X(f)\, Y^*(f)$$

$$R_{yx}(\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_{yx}(f) \triangleq Y(f)\, X^*(f)$$

- مشاهده می شود که در حالت کلی، بر خلاف چگالی طیف انرژی، چگالی طیف متقابل ($\Psi_{xy}(f)$) مختلط است.

در حالت کلی: $\Psi_{xy}(f) \neq \Psi_{yx}(f)$

۶) عبور سیگنال از کانال $H(f)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

$$R_y(\tau) = R_{yx} * h^*(\tau)$$

$$\Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

④ تابع خود همبستگی برای سیگنال‌های نوع توان:

$$R_x(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt$$

⑤ چگالی طیف توان: Power Spectral Density (PSD)

(مخصوص سیگنال‌های توان)

$$S_X(f) \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_T(f)|^2$$

X_T طیف سیگنال $x_T(t)$ است؛ x_T سیگنال انرژی متناظر با سیگنال توان $x(t)$ است. یعنی:

$$\rightarrow x_T(t) = x(t)\cdot\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$$

ویژگی‌ها:

← توان سیگنال $x(t)$:

$$P_{av}=\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df = R_x(0)$$

← $$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_X(f)$$ τ متغیر زمانی به کار رفته در تبدیل فوریه است.

← برای سیگنال‌های متناوب (با ضرایب سری فوریه a_k) داریم:

$$R_{x_T}(\tau)=\sum_{All\,k}|a_k|^2\cdot e^{j2\pi f_0\tau} \quad ; f_0=\frac{1}{T_0}$$

$$S_X(f)=\sum_{All\,k}|a_k|^2\cdot\delta(f-f_0k)$$

مثال صفحه ۴

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

$y(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) = R_y(\tau)$$

$$\Rightarrow S_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f+f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f-f_0) = S_y(f)$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{A^2}{2} = E_y$$

یادآوری روابط اویلر

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right]$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right]$$

۴) تابع همبستگی متقابل سیگنال های نوع توان:

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

نکته: دو سیگنال نمایی با فرکانس متفاوت، ناهمبسته هستند.

در حالت کلی‌تر: $x_1 = A_1 e^{j2\pi f_1 t}$ $\quad x_2(t) = A_2 e^{j2\pi f_2 t}$; $f_1 \neq f_2$

$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

$$\text{if } f_1 = f_2 \Rightarrow R_{xy}(\tau) = A_1 A_2^* e^{j2\pi f_1 \tau}$$

نکته: تابع چگالی انرژی (یا تابع خود همبستگی) (یا تابع چگالی توان) مجموع چند سیگنال ناهمبسته، برابر مجموع تابع چگالی انرژی تک تک آنهاست.

مثال ۴: با فرض $f_1 \neq f_2$ داریم:

$$y(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t)$$

$$\Rightarrow R_y(\tau) = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_1^2}{2}\cos(2\pi f_1 \tau) + \frac{A_2^2}{2}\cos(2\pi f_2 \tau)$$

$$\Rightarrow S_x(f) = \frac{A_0^2}{2}\delta(f) + \frac{A_1^2}{4}\left[\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1)\right]$$

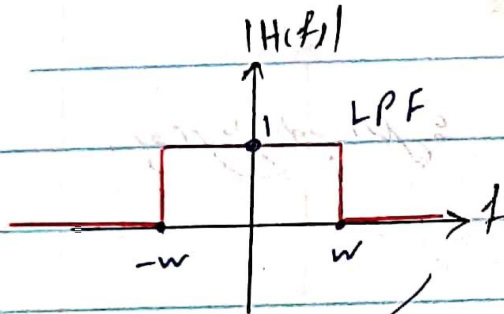
$$+ \frac{A_2^2}{4}\left[\delta(f-f_2) + \delta(f+f_2)\right]$$

Parsian Note Book
Subject:
Date:

«بخش ۵»

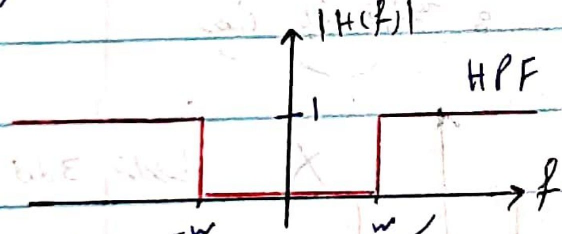
فیلترها بنا به یک سیگنال؛ معیاری برای تغییر محدوده‌ی با اهمیت طیف سیگنال، در قسمت مثبت محور فرکانس، ارائه می‌کنند.

دسته‌بندی سیگنال‌ها به طرز دیگر:



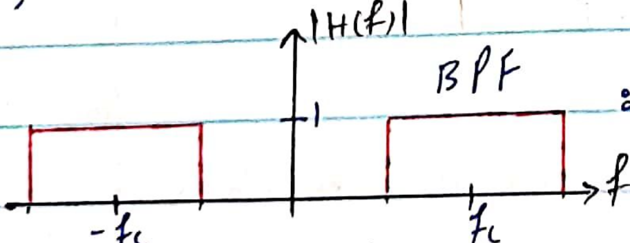
۱) سیگنال‌های پایین‌گذر (LP):

محدوده‌ی با اهمیت طیف سیگنال‌های پایین‌گذر، حول مبدأ $f=0$ متمرکز شده‌اند. (شکل LPF ایده‌آل بالا)

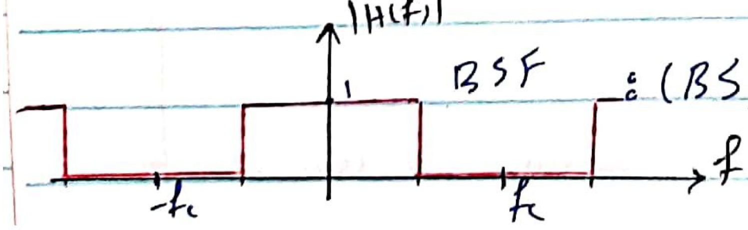


۲) سیگنال‌های بالاگذر (HP):

محدوده با اهمیت طیف سیگنال‌های بالاگذر، در یک فرکانس خاص w به بعد، قرار گرفته‌اند. (شکل HPF ایده‌آل بالا)



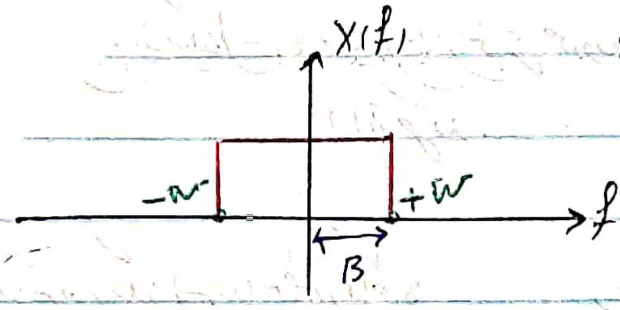
۳) سیگنال‌های میان‌گذر (BP):



۴) سیگنال‌های میان‌نگذر (BS):

انواع تعاریف رایج برای پهنای باند :

① پهنای باند در سیگنال های پایین گذر :

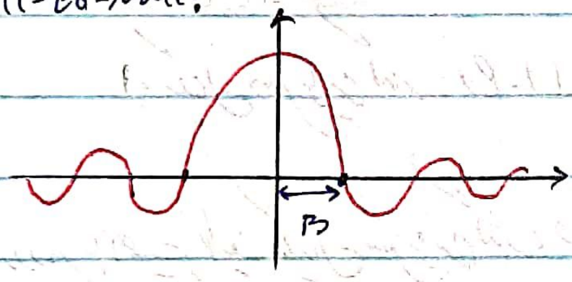


B = W

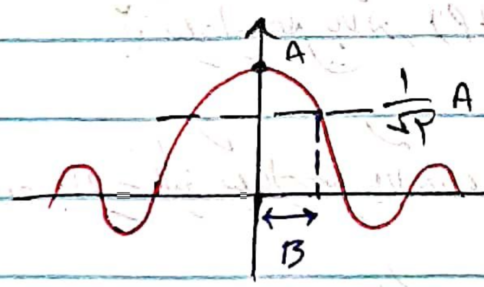
نصف پهنای باند

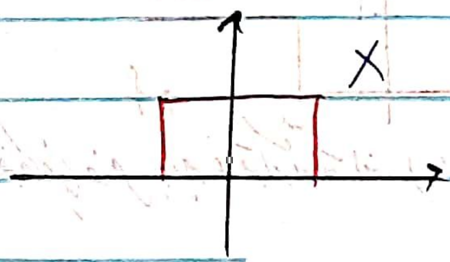
Null-to-Null:

پهنای باند لوب اصلی :



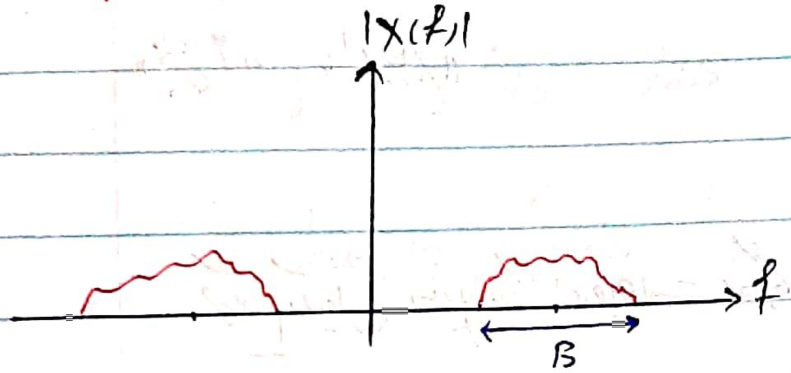
پهنای باند 3dB :



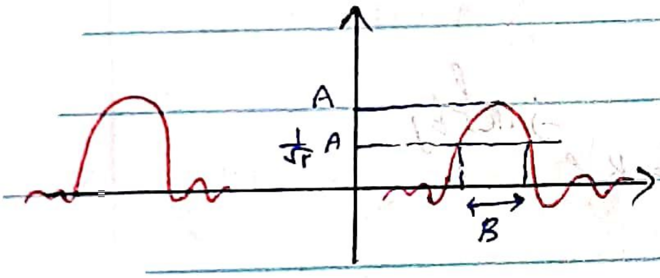


3dB ندارد!

۲) پهنای باند سیگنال های میان گذر:



پهنای باند 3dB:



۳) پهنای باند rms: (ریاضیاتی!)

$$W_{rms} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df} \right)^{1/2}$$

نکته: برای هر خانواده از سیگنال های پالسی که در یک ضریب مقیاس زمانی اختلاف دارند، از هر تعریفی که برای پهنای باند استفاده کنیم، داریم:

ثابت = پهنای باند × دوره زمانی

Parsian Note Book

Subject:

Date:

«بخش ۶» «اعوجاج»

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

می‌گوییم سیگنال $y(t)$ بدون اعوجاج است، هرگاه:

$$y(t) = k \cdot x(t-t_d)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = k e^{-j2\pi f t_d}$$

Equalizer (همسان‌ساز):

کانال دارای اعوجاج

همسان‌ساز

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_c(f)} \xrightarrow{r(t)} \boxed{H_{eq}(f)} \longrightarrow y(t)$$

برای نداشتن اعوجاج باید:

$$H(f) = H_c \cdot H_{eq} = k e^{-j2\pi f t_d}$$

$$\Rightarrow H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}$$

اتلاف توان در طی ارسال:

$$g = \frac{P_{out}}{P_{in}} \longrightarrow g_{dB} = 10 \log(g)$$

$$P_{dBW} = 10 \log(P[W]) \qquad P_{dBm} = 10 \log(P[mW])$$

$$\Rightarrow P_{dBm} = P_{dBW} + 30 \qquad P_{out,dB} = P_{in,dB} + g_{dB}$$

$$L \triangleq \frac{1}{g} \Rightarrow L_{dB} = -g_{dB} \qquad (g_{dB} < 0)$$

$$\Rightarrow P_{out,dB} = P_{in,dB} - L_{dB}$$

فیلتر تربیعی:

$$\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \Rightarrow H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

در فصل پیش رو، در هر نوع مدولاسیون، موارد زیر را با همین شماره‌های مشخص شده، بیان می‌کنیم:

1. رابطه‌ی حوزه‌ی زمان سیگنال مدوله‌شده‌ی $s(t)$
2. طیف و پهنای باند $S(f)$
3. توان ارسالی P_s
4. مدولاسیون تک آهنگ
5. بهره‌ی مدولاسیون η
6. مدولاتور (تولید $s(t)$)
7. دمدولاتور (آشکارسازی $m(t)$)
8. مزایا و معایب

فصل ۲: مدولاسیون دامنه

CW Modulation → مدولاسیون سیگنال حس زمان پیوسته

- CW Modulation
  - Amplitude Modulation
    - AM (conventional)
    - DSB
    - SSB
      - USSB
      - LSSB
    - VSB
  - Angle Modulation
    - FM
    - PM

- Carrier: $A_c \cdot \cos(2\pi f_c t)$ message: $A_m \cdot \cos(2\pi f_m t)$ or ......

---

1) Conventional Amplitude Modulation: «مدولاسیون دامنه مرسوم»

$$S_{AM}(t) = A_c \cdot [1 + k_a m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (1)$$

k_a: Amplitude Sensitivity «حساسیت دامنه» $\left[\frac{1}{v}\right]$ → ولت

envelope: $A_c \cdot |1 + k_a m(t)|$ ← اطلاعات مربوط به سیگنال پیام (m(t)) در پوش سیگنال قرار می‌گیرد.

قدر مطلق (یعنی اندازه!)

→ $\max\{|k_a m(t)|\} \times 100$ = Percentage Modulation «درصد مدولاسیون»

← در صورت برقراری ۳ شرط زیر، پوش $s(t)$ دارای همان شکل سیگنال $m(t)$ خواهد بود:

① $\langle m(t)\rangle = 0$ ② $1+K_a m(t) > 0$ ③ $f_c > W$

پهنای باند پیام

در عمل ابتدا $m(t)$ نرمالیزه می‌شود ($|m(t)|<1$) و سپس K_a عددی بین صفر و یک انتخاب می‌شود.

یعنی در عمل داریم: $|K_a m(t)| \leq 1$

② طیف سیگنال مدوله شده AM:

$m(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} M(f)$

$$\Rightarrow S_{AM}(f) = \underbrace{\frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]}_{\text{به علت وجود سیگنال حامل}} + \underbrace{\frac{K_a A_c}{2}\left[M(f-f_c)+M(f+f_c)\right]}_{\text{به علت وجود سیگنال پیام}}$$

پهنای باند سیگنال مدوله شده (پهنای باند ارسال): $B_T = 2W$

W ← پهنای باند سیگنال مدوله کننده (پیام) B_T ← پهنای باند ارسال

طیف S_{FM} شامل: ۱- باند جانبی بالایی ۲- باند جانبی پایینی ۳- خود حامل است.

③ توان ارسالی: سیگنال مدوله شده از نوع توان است، بنابراین، (به شرط برقراری ۳ شرط صفحه قبل)

$$P_s = \langle |s(t)|^2 \rangle = \underbrace{\frac{A_c^2}{2}}_{P_c} + \frac{A_c^2 K_a^2}{2} \underbrace{\langle |m(t)|^2 \rangle}_{P_m} + 0$$

$$\Rightarrow P_s = P_c + 2P_{sb} \quad ; \quad P_c = \frac{A_c^2}{2} \qquad P_{sb} = \frac{1}{4} A_c^2 . K_a^2 . P_m$$

P_s ← توان سیگنال حاصل P_m ← توان سیگنال مدوله کننده P_{sb} ← توان باند جانبی

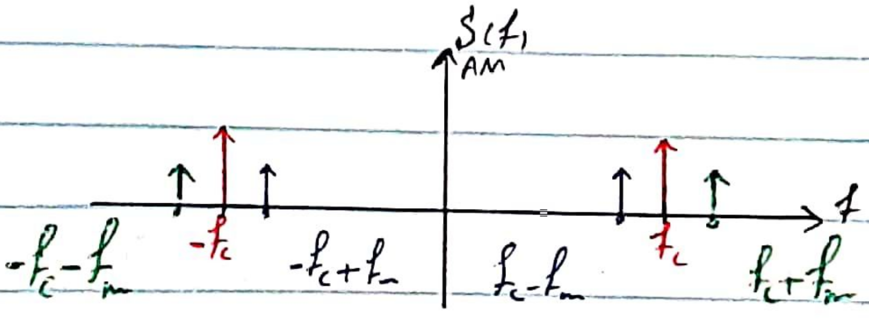
④ مدولاسیون تک تُنی   Single Tone Mod.

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$\Rightarrow S_{AM}(t) = A_c . [1 + \mu . \cos(2\pi f_m t)] . \cos(2\pi f_c t)$$

$\mu \triangleq K_a A_m \rightarrow$ Modulation factor «ضریب مدولاسیون»

درصد مدولاسیون % $= \mu \times 100$



$$P_{usb} = P_{lsb} = \frac{1}{8}\mu^2 A_c^2 \qquad P_c = \frac{A_c^2}{2}$$

⑤ بهره‌ی مدولاسیون: رابطه‌ی کلی:

$$\eta = \frac{\text{میزان توان مصرف شده برای ارسال پیام}}{\text{کل توان مصرف شده}}$$

رابطه‌ی η در مدولاسیون AM:

$$\boxed{\eta = \frac{2P_{sb}}{P_s} = \frac{K_a^2 \cdot P_m}{1 + K_a^2 \cdot P_m}}$$

برای مدولاسیون تک‌آهنگ:

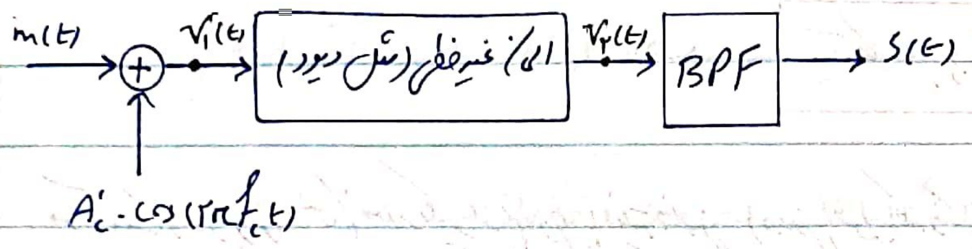
$$\eta = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$$

$$\text{در بهترین حالت} \xrightarrow[\mu=1]{} \eta = \frac{1}{3} = 33.3\%$$

★ در مدولاسیون AM، همواره $\eta < 50\%$ است، یعنی بیش از نصف توان ارسالی صرف ارسال موج حامل می‌شود.

۶) تولید شکل موج AM :

«Modulator»



$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t) \quad ; \quad v_1(t) = m(t) + A'_c \cos(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow v_2(t) = \left(a_1 m(t) + a_2 m^2(t) + a_2 \frac{A'^2_c}{2}\right) \rightarrow$$ سیگنال های پایین گذر

$$+\left[a_1 A'_c + 2a_2 A'_c m(t)\right] \cdot \cos(2\pi f_c t) \rightarrow$$ میان گذر

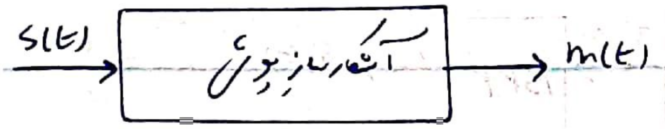
$$+ a_2 \frac{A'^2_c}{2} \cos(4\pi f_c t) \rightarrow$$ بالاگذر

$$\Rightarrow s(t) = \text{Filter}\{v_2(t)\} = A'_c a_1 \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t)\right) \cdot \cos 2\pi f_c t$$

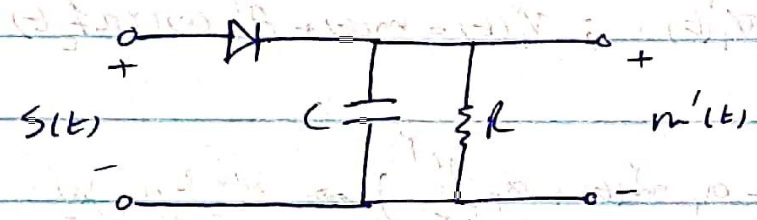
$$A_c \triangleq A'_c a_1 \qquad k_a \triangleq \frac{2a_2}{a_1}$$

«AM Demodulator»

۷ آشکارسازی پوش (envelope detector)



مدار آشکارساز پوش، همان مدار یکسوساز نیم موج با فیلتر خازنی (در درس اصول الکترونیک ۱) است:



ملاحظات طراحی:

$(r_d + R_s) \cdot C \ll \frac{1}{f_c}$: هنگام شارژ شدن خازن

R_s: مقاومت داخلی منبع ولتاژ s(t)

r_d: مقاومت دینامیکی دیود

C: ظرفیت خازن

$\frac{1}{f_c} \ll RC \ll \frac{1}{W}$: هنگام تخلیه شدن خازن

W: پهنای باند پیام

۸) مزایا و معایب:

مزایا: ← بزرگ‌ترین مزیت این روش، سادگی تولید و بازیابی آن است.

معایب: ← در مدولاسیون AM، هدر دهنده‌ی توان ارسالی است. (راه‌حل: DSB)

← در مدولاسیون AM، هدر دهنده‌ی پهنای باند کانال است. (راه‌حل: SSB)

② مدولاسیون باند جانبی دو طرفه با حامل محذوف!!

Double-Sideband Suppressed-Carrier AM. (DSB-SC)

$$s_{DSB}(t) = c(t).m(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t).m(t)$$ ①

از این به بعد تو مدولاسیون‌ها، شرط $f_c \gg W$ باید برقرار باشد.

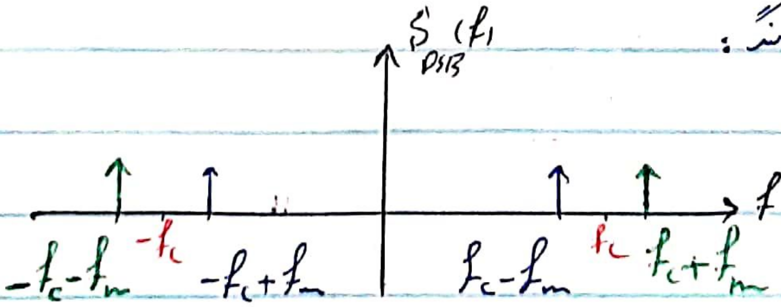
$$S_{DSB}(f) = \frac{1}{2} A_c \left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right]$$ ②

$\Rightarrow$ $$B_T = 2W$$

$$P_s = \langle |s(t)|^2 \rangle = \frac{A_c^2}{2} P_m$$ ③

بنابراین کل توان ارسالی، صرف ارسال پیام می‌شود.

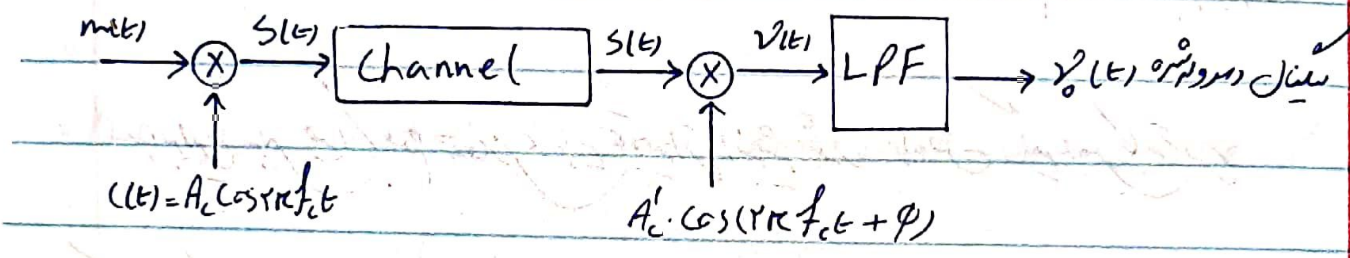
④ مدولاسیون تک آهنگ:



$$\eta = 100\%$$ ⑤

۶) مدولاتور DSB : برای ساخت مدولاتور در فرستنده، باید $m(t)$ و $c(t)$ در یکدیگر ضرب بشوند. لذا مشکله کاملاً شبیه AM است و می توان از روش مثل AM استفاده کرد.

۷) دمدولاتور DSB : برای دمدولاسیون، از تکامل موزون فرکانس استفاده می کنیم:



روش دمدولاسیون فوق را، روش Synchronized (سنکرون یا همزمان) یا آشکارساز همدوس (Coherent Detection) می گویند.

$$v(t)=s(t)\cdot A_c'\cdot\cos(2\pi f_c t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}A_cA_c'\cdot\cos(4\pi f_c t+\varphi)\cdot m(t)+\frac{1}{2}A_cA_c'\cos(\varphi)\cdot m(t)$$

$$\Rightarrow v_o(t)=\text{Filter}\{v(t)\}=\frac{1}{2}A_cA_c'\cos(\varphi)\,m(t)$$

- هر عاملی که موجب عدم تقارن بین فرستنده و گیرنده شود، منجر به اثر فوق می شود، از جمله:

← هم فاز نبودن دو اسیلاتور (Osillator) در گیرنده و فرستنده

← هم فرکانس نبودن دو اسیلاتور : $\cos(2\pi(f_c+\Delta f)t)=\cos(2\pi f_c t+\underbrace{2\pi\Delta f t}_{\varphi(t)})$

← وجود تاخیر در کانال

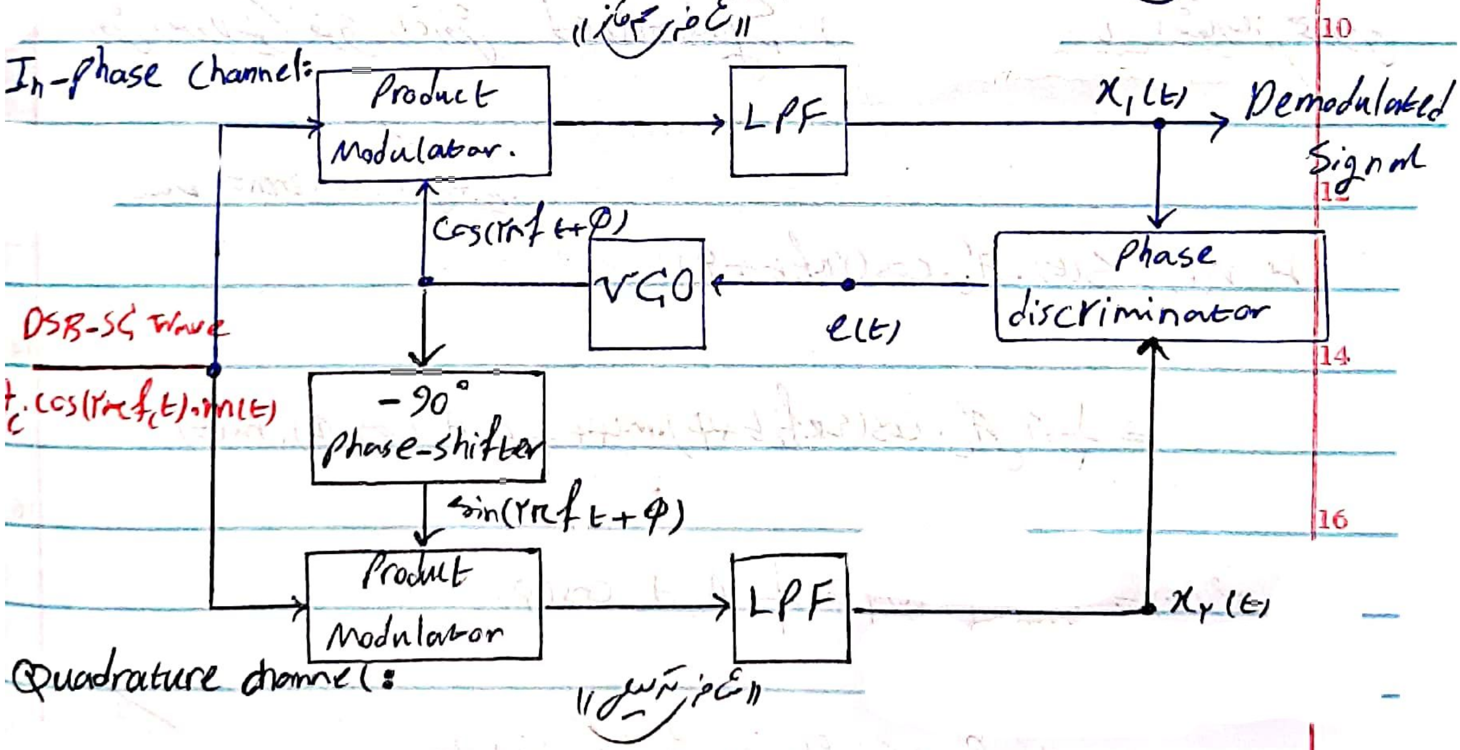
• اگر خطای فاز ϕ مقدار ثابتی باشد، سیگنال دمدوله شده $v_0(t)$ متناسب با $m(t)$ خواهد بود.

$$\text{if } \phi = 0 \Rightarrow v_0(t) = \frac{1}{2} A_c A_c' m(t)$$

$$\text{if } \phi = \pm \pi/2 \Rightarrow v_0(t) = 0 \quad !!!$$

بنابراین برای جبران عدم همفازی، باید تمهیداتی اندیشیده شود. راه حل: گیرنده‌ی کاستاس

• گیرنده‌ی کاستاس: «Costas Receiver»



بلوک دیاگرام بالا، تشکیل یک سیستم با فیدبک منفی را می‌دهد.

$$x_1(t) = LPF\{A_c \cdot \cos(2\pi f_c t)\cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f t + \phi)\}$$

چون $f \simeq f_c$ فرض شده داریم:

$$= \frac{A_c}{2}\cdot m(t)\cdot \cos(2\pi \Delta f t - \phi)$$

$(\Delta f \triangleq f_c - f)$

$$x_2(t) = \frac{A_c}{2}\cdot m(t)\cdot \sin(2\pi \Delta f - \phi)$$

کار جداساز فاز (Phase Discriminator): یک ضرب کننده به همراه انتگرال گیر (یا LPF):

$$e(t) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x_1(t)\cdot x_2(t)\, dt = \frac{A_c^2}{4} \times \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \frac{1}{2} m^2(t)\cdot \sin(4\pi \Delta f t - 2\phi)\, dt$$

$$\Rightarrow \text{if } \Delta f = 0 \ \& \ \phi = 0 \Rightarrow e(t) = 0$$

اما اگر $e(t) \neq 0$ باشد، بیانگر نوعی اختلاف فاز یا فرکانس بین اسیلاتور فرستنده و گیرنده است.

⇐ پس اسیلاتور گیرنده باید با تغییر مثلاً فرکانس خود، سعی در رفع این عدم هم‌فازی بنماید.

VCO (Voltage-Controlled Oscillator)، اسیلاتوری است که فرکانس آن متناسب با ولتاژ ورودی ($e(t)$) تغییر می‌کند ← حلقه سعی می‌کند $e(t)$ را به سمت صفر ببرد (اصطلاحاً می‌گوییم حلقه قفل شده است.)

برای مثال: $\Delta f = 0$, $\phi \neq 0$, $\phi \ll 1$

$$\Rightarrow e(t) \simeq \frac{A_c^2}{8T}\cdot\int -\frac{1}{2} m^2(t)\cdot 2\phi\, dt = \alpha\phi$$

پس فرکانس خروجی VCO متناسب با $\alpha\phi$ تغییر می‌کند و سعی در جبران عدم هم‌فازی می‌نماید:

$e(t) \to 0$

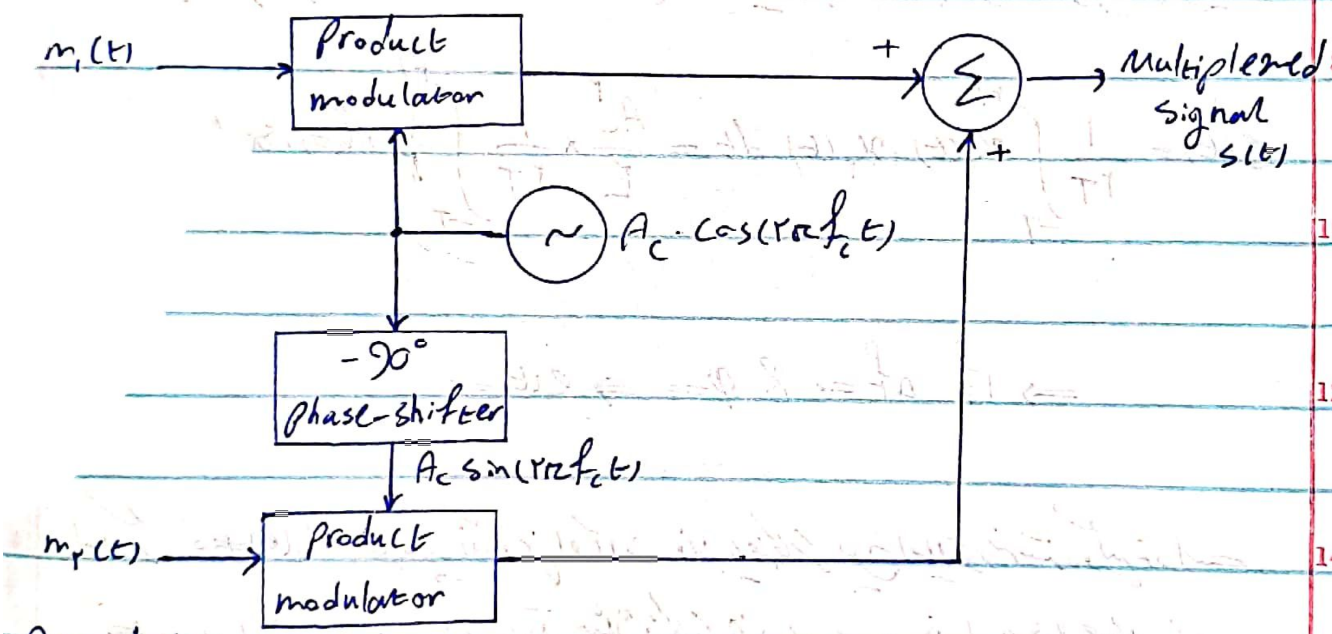
Scanned with CamScanner

Quadrature-Carrier Multiplexing   مالتی پلکس حامل تربیعی:
or Quadrature-Amplitude Modulation.

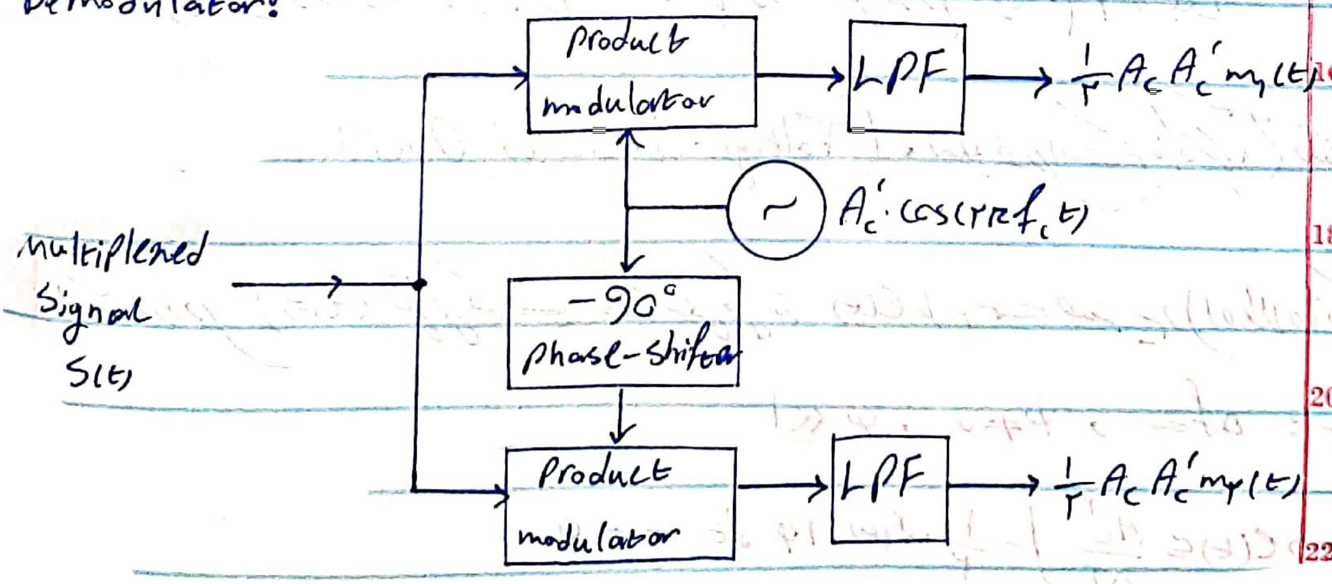
یعنی بهره‌وری دو برابری در پهنای باند کانال است.

$$S_{QAM}(t) = A_c \cdot m_1(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + A_c \cdot m_2(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

Modulator:



Demodulator:



۸) مزایا و معایب:

مزایا ← با حذف موج حامل، یکی از محدودیت‌های اصلی AM، یعنی اتلاف توان را برطرف می‌نماید.

معایب ← همچنان هدر رفتن پهنای باند کانال است. (راه حل: SSB)

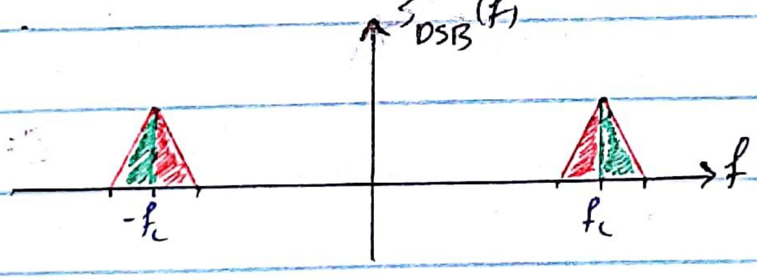
3 «مدولاسیون باند جانبی تک طرفه» Single Sideband AM.

* بیان SSB در حوزه‌ی زمان کمی پیچیده است و به پیش‌نیازی در مورد نمایش سیگنال‌های باند میانگذر و باند پایه نیاز دارد. بنابراین در ابتدا رابطه‌ی حوزه‌ی فرکانسی آن را بیان می‌کنیم:

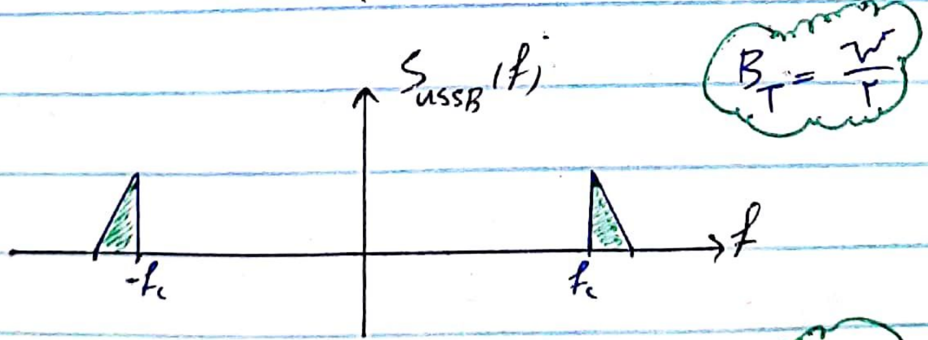
$$\text{USSB}: \quad S_{USSB}(f) = \frac{A_c}{2} M(f-f_c)\cdot u(f-f_c) + \frac{A_c}{2} M(f+f_c)\cdot u(\underbrace{-f-f_c}_{-f-f_c}) \qquad (2)$$

$$\text{LSSB}: \quad S_{LSSB}(f) = \frac{A_c}{2} M(f-f_c)\cdot u(\underbrace{-f+f_c}_{f_c-f}) + \frac{A_c}{2} M(f+f_c)\cdot u(f+f_c)$$

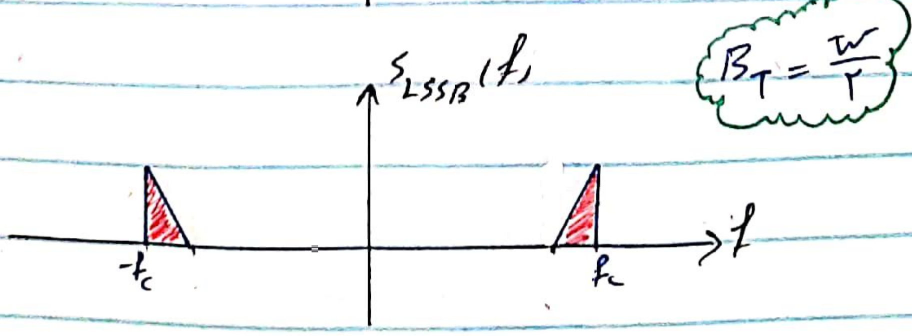
DSB:



USSB:



LSSB:



• نمایش سیگنال‌های باند میانی در باند پایه:

۱) اگر سیگنال باند میانی، متقارن حول یک فرکانس (f_c) باشد، به راحتی می‌توان آن را به صورت حاصلضرب یک سیگنال حقیقی باند پایه در $\cos 2\pi f_c t$ نوشت:

$$x(t) = x_{lp}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$; \; x_{lp}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_{lp}(f)\} \; ; \; X_{lp}(f) = 2X(f+f_c) \cdot u(f+f_c)$$

۲) اما اگر سیگنال باند میانی، حول هیچ فرکانسی تقارن نداشته باشد، نمی‌توان سیگنال فوق را به این شکل بیان کرد، اما می‌توان اثبات کرد که حتی در این حالت، سیگنال باند میانی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$X_{lp}(f) = 2X(f+f_c) \cdot u(f+f_c) \rightarrow x_{lp}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_{lp}(f)\}$$

$$\rightarrow x_{lp}(t) = R(t)\, e^{j\varphi(t)} = x_i(t) + j\, x_q(t)$$

$$\rightarrow x(t) = R(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) = x_i(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - x_q(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

$x_i(t) =$ مولفه هم‌فاز (In-Phase) $\quad x_q(t) =$ مولفه تربیعی (Quadrature)

$R(t) =$ اندازه (پوش) $\quad \varphi(t) =$ فاز

پس هر سیگنال باند میانی را می‌توان به صورت یک موج سینوسی که دامنه و فاز آن تغییرات آرامی دارند، نمایش داد. یا به فرم مجموع دو سینوسی با اختلاف فاز 90° که دامنه آن‌ها تغییرات آرامی دارند.

(منظور سیگنال‌های حقیقی باند میانی است.) (سیگنال معادل، سیگنال‌های باند پایه هستند)

$$x_i(t) = R(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \qquad x_q(t) = R(t) \sin(\varphi(t))$$

$$R(t) = \sqrt{x_i^2(t) + x_q^2(t)} \qquad \varphi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{x_q(t)}{x_i(t)}\right)$$

تعبیر فازوری:

$$\tilde{x}(t) = R(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \quad (= x_{lp}(t))$$

$$\rightarrow x(t) = Re\left\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_c t}\right\} = R(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

★ فازور مجموع دو سیگنال، مجموع فازورهای آن‌هاست (البته به شرط یکسان بودن فرکانس)

① بیان تحلیلی SSB در حوزه زمان

USSB: $S_{lp}(f) = 2S_{USSB}(f+f_c).u(f+f_c) = A_c.M(f).u(f)$

$$\Rightarrow S_{lp}(t) = A_c m(t) * \left(\frac{1}{j2\pi(-t)} + \frac{1}{2}\delta(-t)\right)$$

$$= \frac{A_c}{2} m(t) + j\frac{A_c}{2}\hat{m}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{USSB}(t) = \frac{A_c}{2} m(t).\cos(2\pi f_c t) - \frac{A_c}{2}\hat{m}(t).\sin(2\pi f_c t)}$$

LSSB: $S_{lp}(f) = 2S_{LSSB}(f+f_c)u(f+f_c) = A_c.M(f).u(-f)$

$$\Rightarrow S_{lp}(t) = A_c m(t) * \left(\frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t)\right)$$

$$= \frac{A_c}{2} m(t) - j\frac{A_c}{2}\hat{m}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{LSSB}(t) = \frac{A_c}{2} m(t).\cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c}{2}\hat{m}(t).\sin(2\pi f_c t)}$$

$$\boxed{\hat{m}(t) = \text{Hilbert}\{m(t)\} = m(t) * \frac{1}{\pi t}}$$ یادآوری

$$P_s = \langle |s(t)|^2 \rangle = \langle |s^2(t)| \rangle$$ ۳

$$= \Big\langle \Big| \frac{A_c^2}{4} m^2(t) \frac{1+\cos 4\pi f_c t}{2} + \frac{A_c^2}{4} \hat{m}^2(t) \frac{1-\cos 4\pi f_c t}{2}$$

$$- 2\frac{A_c^2}{4} m(t).\hat{m}(t) \frac{\sin 4\pi f_c t}{2} \Big| \Big\rangle$$

$$= \Big\langle \Big| \frac{A_c^2}{4} m^2(t) \frac{1+\cos 4\pi f_c t}{2} \Big| \Big\rangle + \Big\langle \Big| \frac{A_c^2}{4} \hat{m}^2(t) \frac{1-\cos 4\pi f_c t}{2} \Big| \Big\rangle$$

$$+ \Big\langle \Big| -\frac{A_c^2}{4} m(t)\hat{m}(t) \sin 4\pi f_c t \Big| \Big\rangle$$

اندازه است و
نه قدر مطلق!

$$\Longrightarrow P_s = \frac{A_c^2}{8} P_m + \frac{A_c^2}{8} P_{\hat{m}} + 0$$

$$P_{\hat{m}} = \langle |-j\,\mathrm{sgn}(f)\, m(f)|^2 \rangle = \langle \mathrm{sgn}^2(f).\, m^2(f) \rangle = \langle m^2(f) \rangle = P_m$$

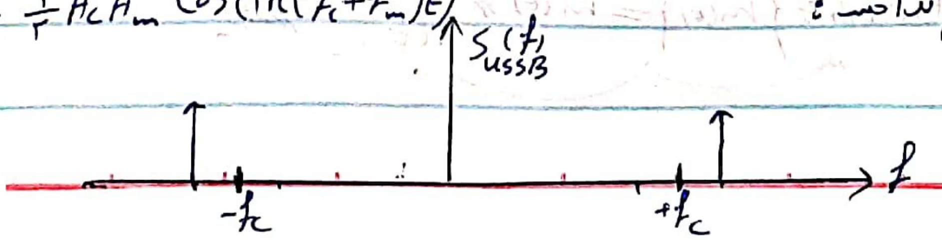
$$\Longrightarrow \boxed{P_s = \frac{A_c^2}{4} P_m}$$

مشاهده می شود که توان ارسالی، نصف توان ارسالی در DSB شد.

$\rightarrow \eta = 100\,\%$ ۵

۴ مدولاسیون تک تن:

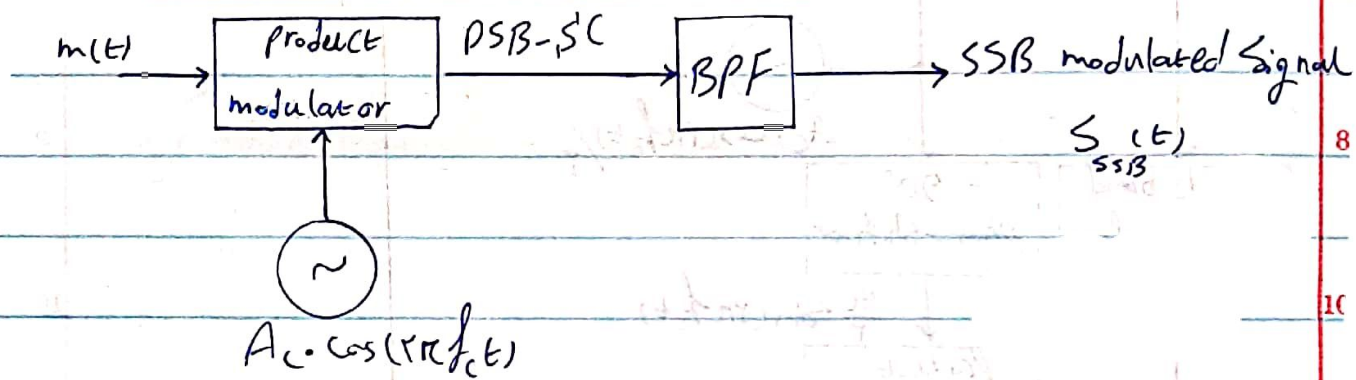
$$s_{USSB}(t) = \frac{1}{2} A_c A_m \cos(2\pi(f_c+f_m)t)$$



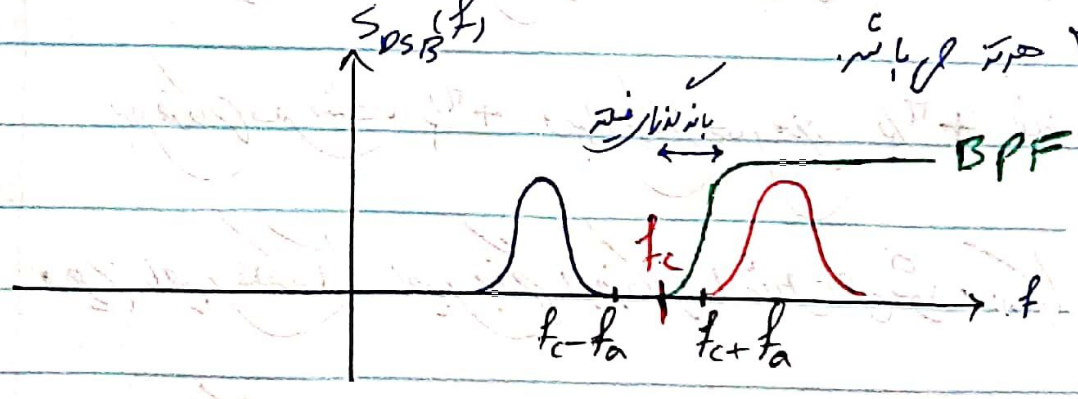
۶) مدولاتور SSB : «SSB Modulator»

۲ روش رایج برای تولید سیگنال مدوله شده‌ی SSB ارائه نمود:

۱- روش جداسازی فرکانسی: «Frequency Discriminator»

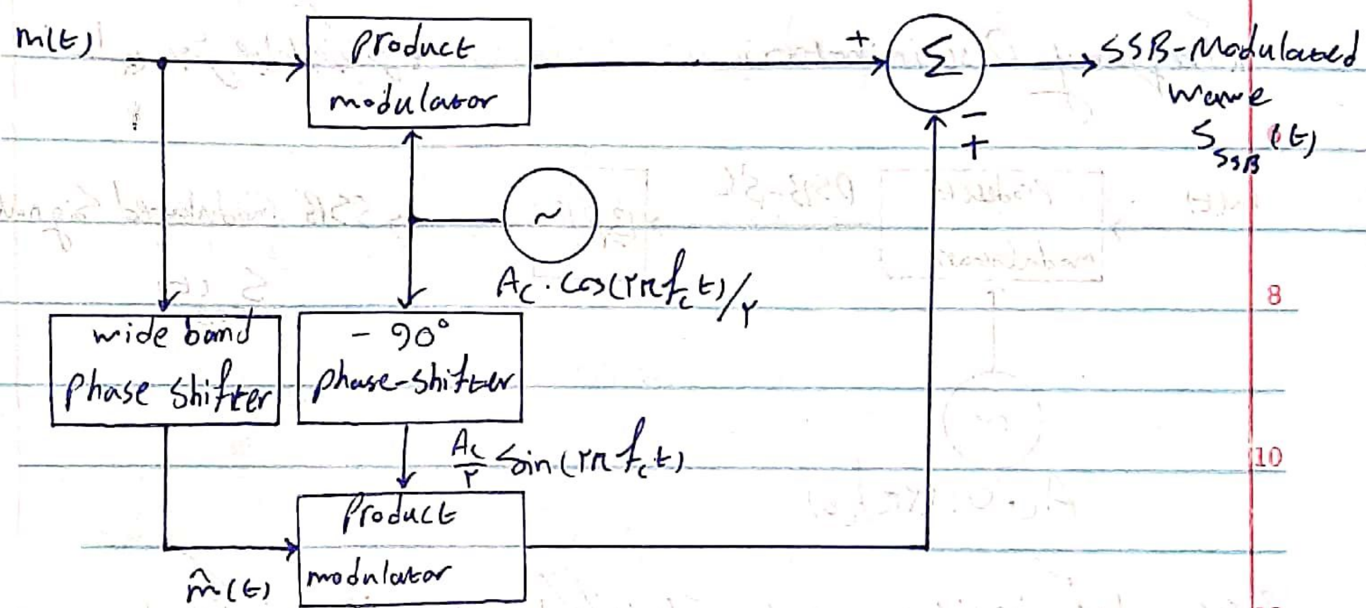


برای اینکه طراحی چنین مدولاتوری امکان‌پذیر باشد، باید بین دو باند جانبی سیگنال DSB-SC فاصله‌ی کافی وجود داشته باشد، تا باند گذار فیلتر میان‌گذر تطبیق یابد؛ این فاصله‌ی لازم بین دو باند جانبی، به کارگیری مدولاسیون SSB را محدود به سیگنال صحبت نموده که در آن فاصله‌ی بین دو باند جانبی، حدود ۲۰۰ هرتز می‌باشد.



«Phase Discrimination» ← ۲) روش جداسازی فاز:

ساختار این مدولاتور براساس تحلیل رابطه حوزه زمان SSB است:



← علامت − در جمع کننده برای ارسال USSB و علامت + برای LSSB است.

← تغییر دهنده فاز باند پهن: با توجه به رابطه حوزه فرکانس تبدیل هیلبرت می‌توان دریافت که تبدیل هیلبرت در حوزه فرکانس، اندازه را تغییر نمی‌دهد و فقط فاز را شیفت می‌دهد. برای فرکانس‌های مثبت، $-\pi/2$ و برای فرکانس‌های منفی $+\pi/2$ فاز را شیفت می‌دهد. و چون ناحیه عملکرد آن ناحیه بزرگی از فرکانس‌ها را شامل می‌شود، به آن تغییر دهنده فاز باند پهن می‌گویند.

۷) دمدولاتور SSB: برای آشکارسازی سیگنال پیام، از همان روش حس دمدولاسیون DSB، می‌توان استفاده کرد. خروجی آشکارساز همدوس برای SSB: $v_0(t) = \frac{A_c A_c'}{4} m(t)$

برای جبران عدم تطابق، سنتزکننده‌ی کامل استفاده می‌شود.

۸) مزایا و معایب: مدولاسیون SSB، ۲ عیب مدولاسیون AM را برطرف می‌کند.

• انتقال فرکانس (مخلوط کننده فرکانس) : Friquency Translation

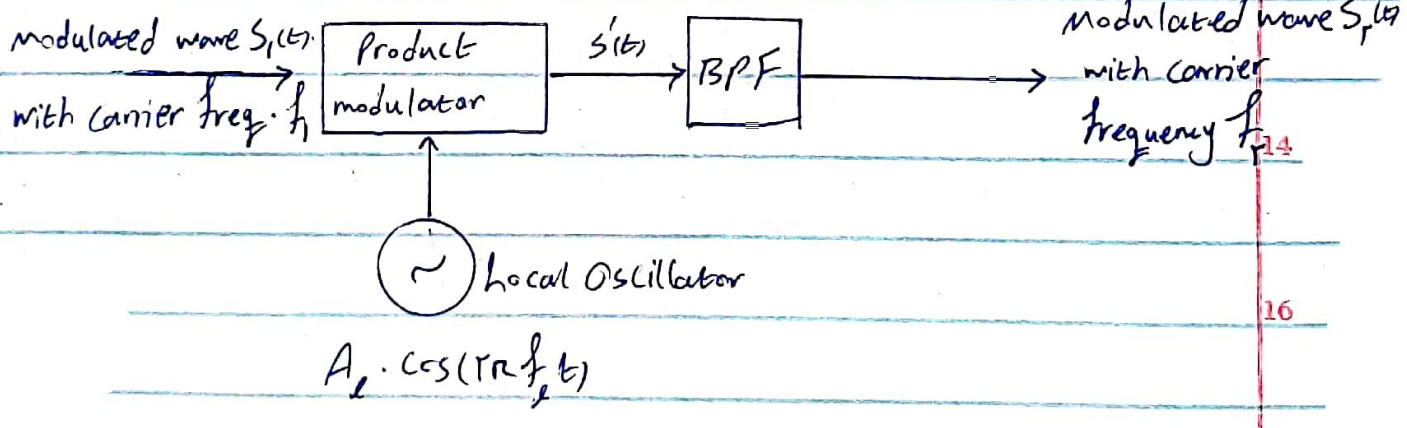
or ,, ,, Mixing

سیگنال مدوله شده ی $s_1(t)$ که به صورت حول فرکانس حامل f_1 قرار گرفته است را

در نظر بگیرید، می خواهیم در حوزه ی فرکانس آن را به فرکانس بالاتر یا پایین تر انتقال دهیم،

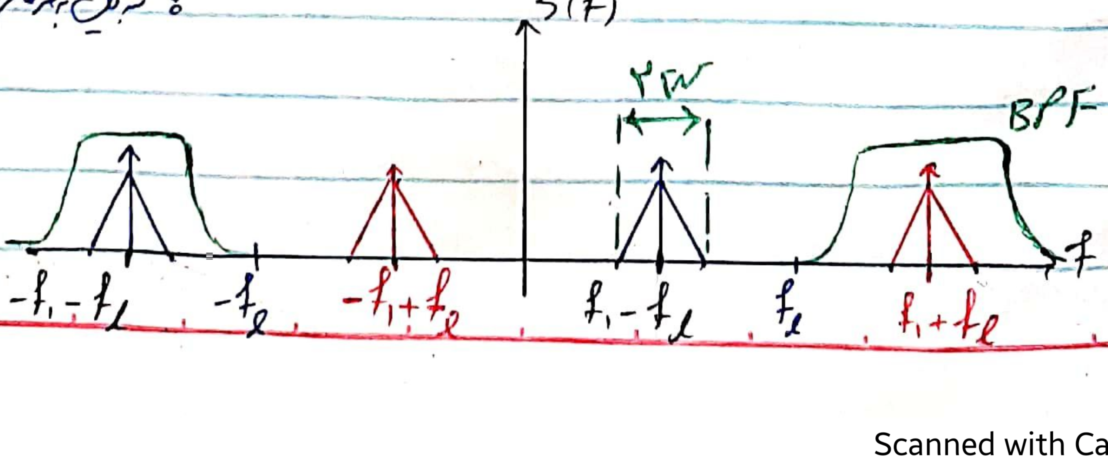
به گونه ای که فرکانس حامل از f_1 به f_2 تغییر یابد.

از این مدولاتور SSB می توان استفاده کرد:



اگر s_1 به صورت DSB باشد داریم:

تبدیل به فرکانس بالا :



→ تبدیل به فرکانس بالا : $f_2 = f_1 + f_l \Rightarrow f_l = f_2 - f_1$

BPF باید روی $f_2 = f_1 + f_l$ تنظیم شود.

→ تبدیل به فرکانس پایین : $f_2 = f_1 - f_l \Rightarrow f_l = f_1 - f_2$

BPF باید روی $f_2 = f_1 - f_l$ تنظیم شود. در این حالت، حتماً $f_2 > W$ باید باشد، تا تداخل طیفی صورت نگیرد.

نکته : باند گذر فیلتر BPF می‌تواند در فاصله $f_1 - f_l + W$ تا $f_1 + f_l - W$ قرار گیرد.

به شرط $f_l > W$; $2(f_l - W) =$ محدوده مجاز باندگذر $\Rightarrow$

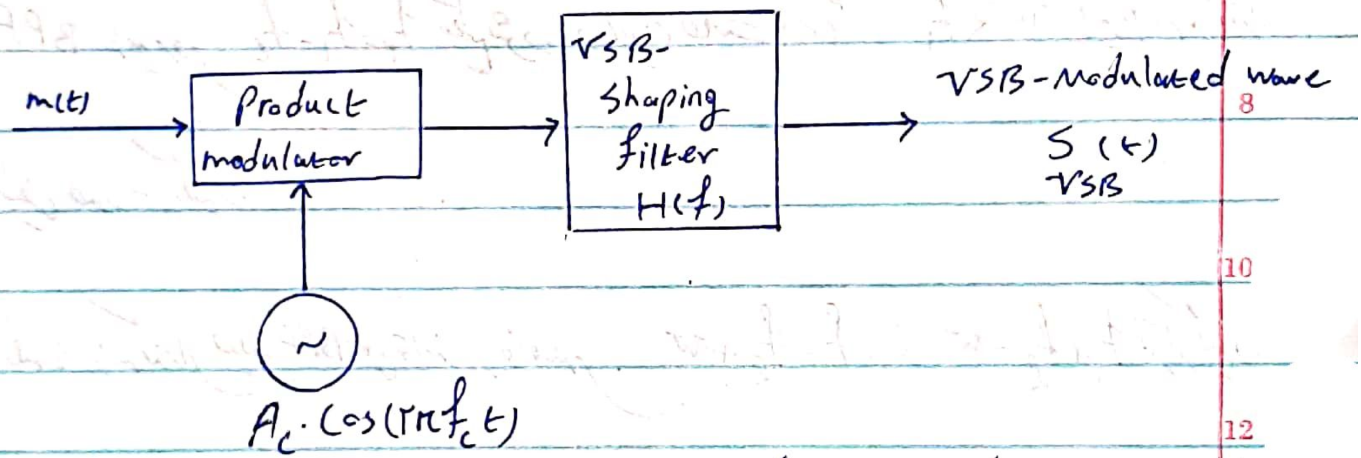
نکته : مخلوط کردن فرکانس‌ها، یک کار غیرخطی است.

Scanned with CamScanner

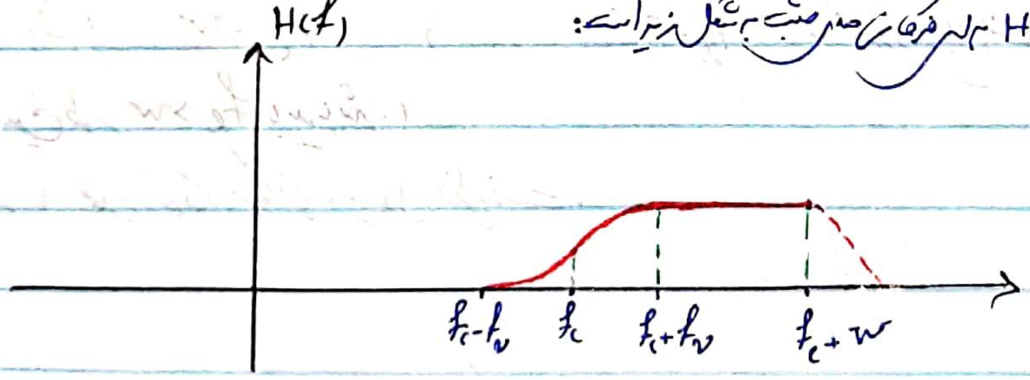
۴ «مدولاسیون باند جانبی تک‌طرفه اثری» Vestigial Sideband Modulation

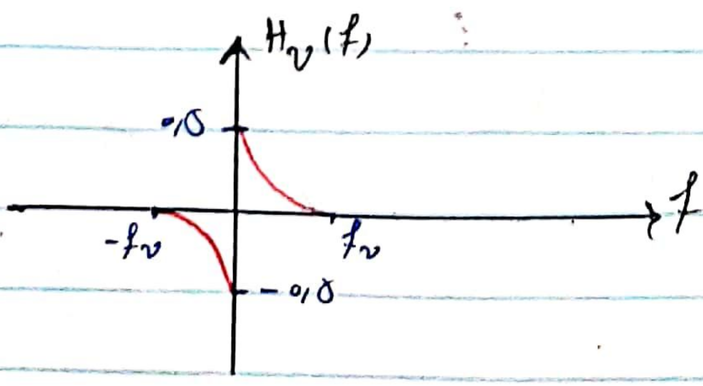
ابتدا با تحلیل حوزه‌ی فرکانس آغاز می‌کنیم:

۲ و ۶: تحلیل رابطه‌ی حوزه‌ی فرکانس به همراه ساخت مدولاتور:



که $H(f)$ پاسخ فرکانسی صورت مثبت به شکل زیر است:





$$\Rightarrow \boxed{S_{VSB}(f) = \frac{1}{2} A_c \cdot [M(f-f_c) + M(f+f_c)] \cdot H(f)}$$

$H(f)$: تابع انتقال فیلتر شکل دهنده ی باند جانبی اثری

* مشاهده می شود که مدولاسیون VSB از دو جنبه کلی با مدولاسیون SSB متفاوت است:

۱. در این مدولاسیون به جای حذف کامل باند جانبی، اثری از آن ارسال می شود.

۲. به جای ارسال باند جانبی دیگر به طور کامل، این باند نیز به طور تقریباً کامل ارسال می شود.

$$\Rightarrow \boxed{B_T = W + f_v}$$

f_v پهنای باند اثری بوده و W پهنای باند پیام. معمولاً f_v، ۲۵٪ W است.

← $H(f)$ باید شرط زیر را برآورده سازد:

$$\boxed{H(f+f_c) + H(f-f_c) = 1 \quad ; \quad -W \leqslant f \leqslant +W}$$

← $H(f)$ را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$\boxed{H(f) = U(f-f_c) - H_v(f-f_c) \quad ; \quad f_c - f_v < |f| < f_c + W}$$

$H_v(f)$ به وسیله ی اثر باقیمانده ی باند جانبی در سیگنال مدوله شده ی $S_{VSB}(t)$ کاملاً مشخص می شود.

تابع انتقال $H(f)$ می‌تواند هرگونه مشخصات دلخواهی را در بازه‌ی $|f|>f_c+W$ داشته باشد.

① رابطه‌ی حوزه‌ی زمان: با تبدیل $S_{lp}(f)$ و بدست آوردن $s_{lp}(t)$ می‌توان به رابطه‌ی $s(t)$ دست یافت که برابر است با:

$$s_{lp}(t)=\frac{A_c}{2}m(t)+j\left(\frac{A_c}{2}\hat{m}(t)+\frac{A_c}{2}m_v(t)\right)$$

ارسال اثری از باند بالایی

$$s_{VSB}(t)=\frac{A_c}{2}m(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\pm\frac{A_c}{2}m_q(t)\cdot\sin(2\pi f_c t)$$

ارسال اثری از باند پایینی

$$m_q(t)\triangleq\hat{m}(t)+m_v(t)$$

$$m_v(t)\triangleq 2j\int_{-f_v}^{+f_v}M(f)\cdot H_v(f)\cdot e^{j2\pi ft}\,df$$

۳

$P_s = \langle |s(t)|^2 \rangle = \langle |S(f)|^2 \rangle$

$= \langle \frac{1}{4} A_c^2 M^2(f-f_c) \cdot H^2(f) \rangle + \langle \frac{1}{4} A_c^2 M^2(f+f_c) \cdot H^2(f) \rangle$

شیفت فرکانس تاثیری در توان سیگنال ندارد :

$\Rightarrow P_s = \frac{A_c^2}{4} P_m \cdot P_H + \frac{A_c^2}{4} P_m \cdot P_H$

$$\Rightarrow P_s = \frac{A_c^2}{2} P_m \cdot P_H$$

P_H : توان فیلتر شکل دهنده‌ی باند جانبی

۵

$\eta = 100\%$

④ مدولاسیون تک آهنگ: (مراجعه به مثال صفحه ۱۶۱ کتاب درسی (ترجمه شده!))

فرض کنید فرکانس جانبی بالایی در f_c+f_m و تصویر آن در $-(f_c+f_m)$ با ضریب K تضعیف شده باشند، بنابراین فرکانس‌های جانبی پایینی با ضریب $(1-K)$ تضعیف شوند تا شرط لازم برای $H(f)$ شکل گیرد.

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow S_{VSB}(t) = \frac{1}{2} A_c A_m \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_m t)$$

$$+ \frac{1}{2} A_c A_m \cdot (1-2K) \cdot \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t)$$

if $K = 1/2 \Rightarrow$ $S_{VSB}(t)$ همان $S_{DSB}(t)$ می‌شود.

if $K = 0 \Rightarrow$ 〃 $S_{LSSB}(t)$ 〃.

if $K = 1 \Rightarrow$ 〃 $S_{USSB}(t)$ 〃.

if $0 < K < 1/2 \Rightarrow$ اثر باقیمانده $S_{VSB}(t)$، تضعیف شده‌ی باند فرکانس بالایی می‌شود.

if $1/2 < K < 1 \Rightarrow$ 〃 〃 〃 〃 پایینی 〃.

⑦ دمدولاتور VSB مشابه دمدولاسیون حسن DSB و SSB ، در دمدولاسیون VSB نیز می‌توان از آشکارساز همدوس استفاده کرد.

$$\text{if } \phi = 0 \Rightarrow v(t) = A'_c \cdot s_{VSB}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow V(f) = \frac{1}{2} A'_c \cdot [S'(f-f_c) + S'(f+f_c)]$$

$$v(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(f) \quad , \quad s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S'(f)$$

(از طرفی) $S'(f) = \frac{1}{2} A_c [M(f-f_c) + M(f+f_c)] \cdot H(f)$

$$\Rightarrow V(f) = \frac{1}{4} A_c A'_c M(f) \cdot [H(f-f_c) + H(f+f_c)]$$

$$+ \frac{1}{4} A_c A'_c \cdot [M(f-2f_c) H(f-f_c) + M(f+2f_c) H(f+f_c)]$$

بنابراین اگر شرط لازم $H(f)$ برقرار باشد، داریم: $\text{if } H(f+f_c) + H(f-f_c) = 1$

$$\Rightarrow V(f) = \frac{1}{4} A_c A'_c M(f) \quad + \cdots$$

$$v_o(t) = LPF\{v(f)\} = \frac{1}{4} A A'_c m(t)$$

یک ترفند! : برای ساده نمودن فرایند دمدولاسیون، می‌توان قبل از ارسال، سیگنال حامل را به سیگنال VSB (با ضریب مناسب K_a) اضافه کرده و پس در گیرنده از آشکارساز پوش استفاده نمود.

$$S_{VSB+C}(t) = A_c\cos(2\pi f_c t) + K_a S_{VSB}(t)$$

K_a همان ضریب حساسیت دامنه در AM است.

برای سیگنال SSB نیز می‌توان این کار را انجام داد.

$$S_{SSB+C}(t) = A_c\cdot\cos(2\pi f_c t) + K_a S_{SSB}(t)$$

★ از $S_{VSB+C}(t)$ در سیگنال صوت آنالوگ تلویزیون استفاده می‌شود.