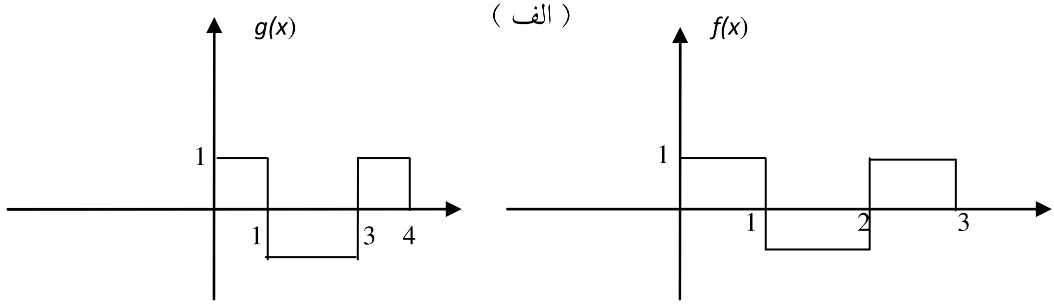
تمرینـــــات :

۱- نشان دهید که چند جمله ای $P_0(x)=1$ ، $P_1(x)=x$ ، $P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$ و $P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$ در فاصله (۱ ، ۱-) عمود بر هم می باشند.

۲ – بررسی نمائید که کدامیک از جفت توابع *f(x)* و *g(x)* زیر عمود بر هم می باشند؟

(الف)



شکل(۱۹-۱)

ب) $g(x)=\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4})$ $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$

۳ – نشان دهید:

(الف) اگر تابع f(x) زوج باشد آنگاه ضرائب سینوسی سری فوریه (b_n) صفر می باشند.

(ب) اگر تابع f(x) فرد باشد آنگاه ضرائب کسینوسی سری فوریه (a_n) صفر می باشند.

٤ – ثابت کنید که اگر $f(x+T)=f(x)$ باشد داریم : (T پریود)

هارمونیک های زوج صفر است. $\Leftrightarrow$ $f\left(x+\frac{T}{2}\right)=-f(x)$

هارمونیک های فرد صفر است. $\Leftrightarrow$ $f\left(x+\frac{T}{2}\right)=f(x)$

٥ – اگر $(b_n.a_n,a_0)$ و (d_n,c_n,c_0) به ترتیب ضرائب فوریه بسط f(x) و g(x) با پریود های T باشند، ثابت کنید :

الف) اتحاد تعمیم یافته پارسوال : $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x)dx=\frac{a_0c_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n)$

ب) اگر f(x)=g(x) باشد اتحاد بند الف بصورت اتحاد معروف پارسوال در می آید یعنی :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx=\frac{a_0^{\ 2}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\right)$$

٦ – مطلوبست سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ با دوره تناوب 2π در فاصله $[0,2\pi]$.

با استفاده از نتیجه فوق ثابت کنید : $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$

٧ – تابع $f(x)=x^3$ با دوره تناوب 2π درفاصله $[-\pi,\pi]$ مفروض است :

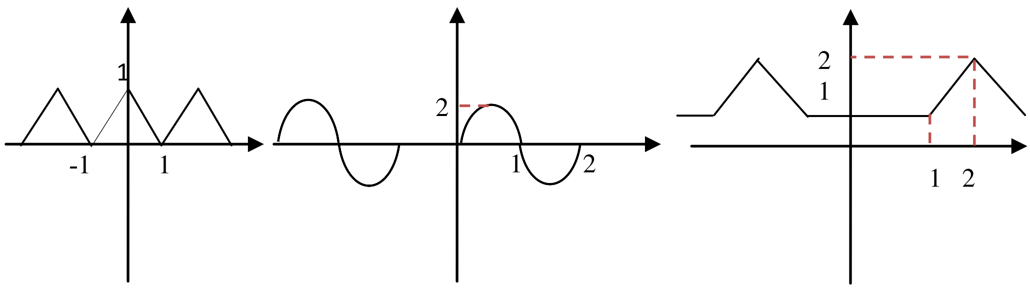
اولاً : سری فوریه آن را بدست آورید .

ثانیاً : مقدار سری فوریه در نقاط پیوستگی به سمت چه اعدادی همگراست.

٨ – از بسط تابع $f(x)=\cos\mu x$ $\left(\mu\text{غیر صحیح},\quad -\pi<x<\pi\right)$ نتیجه بگیرید :

$$\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}=1+2\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\mu^2}$$

۹ – مطلوبست سری فوریه هر یک از توابع پریودی ذیل :



شکل(۲۰-۱)

۱۰ – تابع $0<x<2$ $f(x)=x,$ مفروض است بسطی برای این تابع در فاصله فوق بـه گونه ای بنویسید که :

الف) فقط جملات سینوسی داشته باشد.   ب) فقط جملات کسینوسی داشته باشد

ج) هارمونیک های زوج آن صفر باشند.   هـ) هم جملات سینوسی و هم جملات کسینوسی داشته باشد.

۱۱ – با استفاده از بسط سری فوریه نمودار مسئله (الف–۹) مجموع هر یک از سـری هـای عددی زیر را بدست آورید :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+....=?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+....=?$$

۱۲ – اولاً بسط سری فوریه تابع یک پریودیک $f(x)=e^{-x}$ درفاصله $[-\pi,\pi]$ را بدست آورید.

ثانیاً ثابت کنید که :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\coth\pi-1}{2}$$

۱۳ – (تست کارشناسی ارشد) اگر سری فوریه تابع $f(x)=x^2$, $-\pi\le x\le\pi$ به صورت

$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ در دست باشد بسط فوریه تابع $\int_0^x f(x)dx$ کدام است؟

الف) $\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2 x}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n^3}\cos nx$

ب) $\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2 x}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)n}{n^3}\sin nx$

ج) بسط فوریه $\int_0^x f(x)dx$ با انتگرال گیری از بسط فوریه $f(x)=x^2$ بدست نمی آید.

د) $\frac{x^3}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$

۱٤ – (تست کارشناسی ارشد) اگر $f(t+2)=f(t)$, $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1\\ 2-t, & 1\le t\le 2\end{cases}$

آنگاه سری فوریه تابع *f(t)* عبارتست از :

الف) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}t$

ب) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi t$

ج) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2\sin\frac{n\pi}{2})\cos n\pi t$

د) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}t$