معادلات حالت:

بردار حالت و تابع شبکه بدست آورید.

$$\dot{x} = A\,x(t) + B\,w(t)$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,w(t)$$

w: ورودی

A: ماتریس حالت

y: خروجی

x: متغیر حالت

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$D = 0$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{B} w \rightarrow \begin{bmatrix} u(t) \\ e^{-t}u(t) \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & +2 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}}_{C} x + 0$$

تابع شبکه

$$H(s) = \frac{Y}{W}\Big|_{x(0)=0} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \rightarrow sI - A = \begin{bmatrix} s+3 & +1 \\ +2 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3) - 1\times 2} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{s^2+4s+1} \times \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times$$

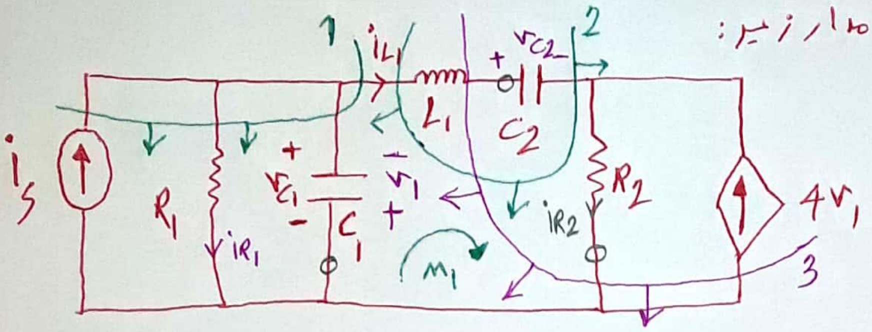
$$\begin{bmatrix} s-3 & 2s+5 \\ -2s-6 & 2s+8 \\ s+3 & -s-4 \end{bmatrix}$$

$$\times$$

$$\begin{bmatrix} 7s+1 & 4s-1 \\ -2s-2 & -2s-4 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{7s+1}{s^2+4s+1} & \dfrac{4s-1}{s^2+4s+1} \\ \dfrac{-2s-2}{s^2+4s+1} & \dfrac{-2s-4}{s^2+4s+1} \\ \dfrac{s+1}{s^2+4s+1} & \dfrac{s+2}{s^2+4s+1} \end{bmatrix}$$

معادلات حالت مدار زیر:



$$x = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{درخت کات} \\ \rightarrow \text{درخت کات} \\ \rightarrow \text{لینک حلقه} \end{array}$$

مدار مرتبه 3 ← 3 متغیر حالت ← 3 شاخه درختی: C_1 و C_2 و R_2

$$KCL@1: -i_s + i_{R_1} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{L_1} = 0 \rightarrow \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1}\left(i_s - \frac{v_C}{R_1} - i_{L_1}\right) \quad (\star)$$

$$i_{R_1} = \frac{v_C}{R_1}$$

$$KCL@2: -i_{L_1} + C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{i_{L_1}}{C_2} \quad (\star)$$

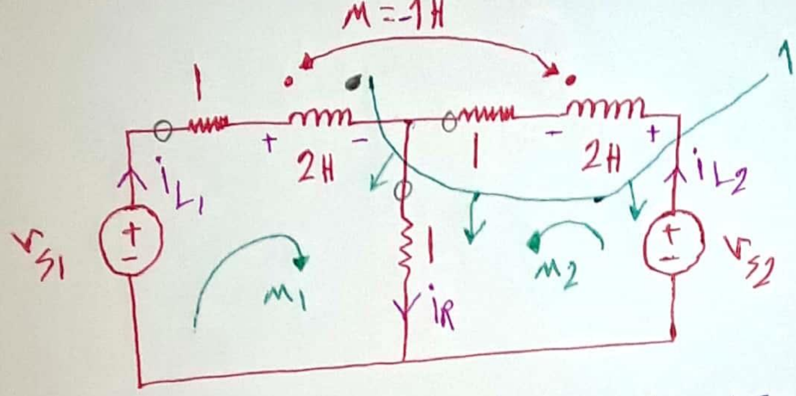
$$KVL@M_1: -v_{C_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_2} + R_2 i_{R_2} = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$KCL@3: -4v_1 + i_{R_2} - i_{L_1} = 0 \xrightarrow{v_1 = -v_{C_1}} i_{R_2} = i_{L_1} - 4v_{C_1} \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I}), (\mathrm{II})} \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1}\left(v_{C_1} - v_{C_2} - R_2 i_{L_1} + 4R_2 v_{C_1}\right)$$

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{(1+4R_2)v_{C_1}}{L_1} - \frac{v_{C_2}}{L_1} - \frac{R_2}{L_1} i_{L_1} \quad (\star)$$

تمرین:



$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$ لینک حلقه

مدار مرتبه 2 ← 2 متغیر حالت

سه شاخه در فنی شامل 3 مقاومت 1Ω

$n_t = 4 \to$ 3 شاخه درختی

$$KVL @ m_1: -v_{s_1} + 1 \times i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{di_{L_2}}{dt} + i_R \quad (I)$$

$$KCL @ 1: -i_{L_1} + i_R - i_{L_2} = 0 \to i_R = i_{L_1} + i_{L_2} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I) \text{ و } (II)} \frac{di_{L_2}}{dt} = 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 2i_{L_1} + i_{L_2} - v_{s_1} \quad (III)$$

$$KVL @ m_2: -v_{s_2} + 2\frac{di_{L_2}}{dt} + i_{L_2} - \frac{di_{L_1}}{dt} + i_{L_1} + i_{L_2} = 0$$

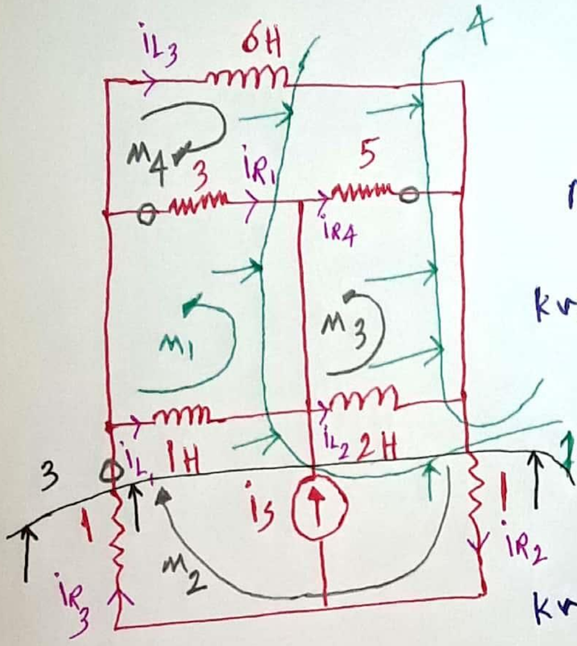
$$\frac{di_{L_1}}{dt} = 2\frac{di_{L_2}}{dt} + i_{L_1} + 2i_{L_2} - v_{s_2} \quad (IV)$$

$$\xrightarrow{(III) \text{ و } (IV)} \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-4}{3}i_{L_1} - \frac{5}{3}i_{L_2} + \frac{1}{3}v_{s_1} + \frac{2}{3}v_{s_2} \quad ★$$

$$\xrightarrow{★ \text{ و } (IV)} \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{-5}{3}i_{L_1} - \frac{4}{3}i_{L_2} + \frac{2}{3}v_{s_1} + \frac{1}{3}v_{s_2} \quad ★$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s_1} \\ v_{s_2} \end{bmatrix}$$

تمرین:



$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_3} \end{bmatrix}$ لینک حلقه — مدار مرتبه 3

$n_t = 4 \rightarrow$ 3 شاخه درختی { با 0 در مدار مشخص شده اند

$KVL@m_1: 1\dfrac{di_{L_1}}{dt} - 3i_{R_1} = 0$ (I)

درخت کاتست

$KCL@1: i_{L_3} + i_{R_1} + i_{L_1} - i_{R_2} + i_s = 0$ (II)

لینک حلقه

$KVL@m_2: i_{R_2} + i_{R_3} + 3i_{R_1} + 5i_{R_4} = 0$ (III)

درخت کاتست — درخت کاتست

$KCL@3: i_{R_3} + i_s - i_{R_2} = 0$ (IV)

$KCL@4: i_{L_3} + i_{R_4} + i_{L_2} - i_{R_2} = 0$ (V)

$\xrightarrow{(II,\dots,V)} i_{R_1} = \dfrac{i_{L_2}}{2} - \dfrac{7}{10}i_{L_1} - \dfrac{1}{5}i_{L_3} - \dfrac{3}{5}i_s$

$i_{R_2} = \dfrac{3}{10}i_{L_1} + \dfrac{1}{2}i_{L_2} + \dfrac{4}{5}i_{L_3} + \dfrac{2}{5}i_s$

$i_{R_3} = \dfrac{3}{10}i_{L_1} + \dfrac{1}{2}i_{L_2} + \dfrac{4}{5}i_{L_3} - \dfrac{3}{5}i_s$

$i_{R_4} = \dfrac{3}{10}i_{L_1} - \dfrac{1}{2}i_{L_2} - \dfrac{1}{5}i_{L_3} + \dfrac{2}{5}i_s$

$\xrightarrow{(I)} \dfrac{di_{L_1}}{dt} = 3i_{R_1} = \dfrac{-21}{10}i_{L_1} + \dfrac{3}{2}i_{L_2} - \dfrac{3}{5}i_{L_3} - \dfrac{9}{5}i_s$ ★

$KVL@m_3: 2\dfrac{di_{L_2}}{dt} - 5i_{R_4} = 0 \rightarrow \dfrac{di_{L_2}}{dt} = \dfrac{5}{2}i_{R_4} = \dfrac{3}{4}i_{L_1} - \dfrac{5}{4}i_{L_2} - \dfrac{1}{2}i_{L_3} + i_s$ ★

$$\text{KVL @ } M_4 : 6\frac{di_{L3}}{dt} - 5i_{R4} - 3i_{R_1} = 0 \rightarrow$$

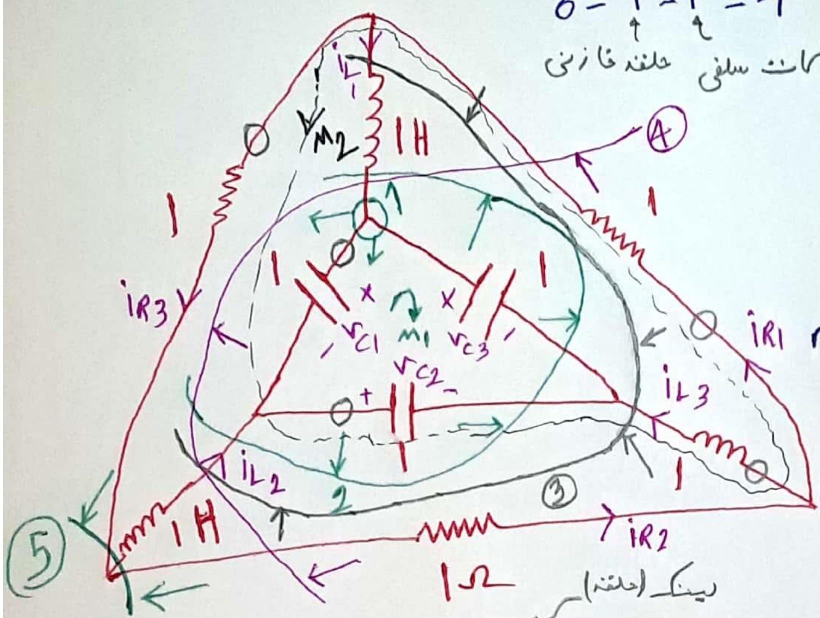
$$\frac{di_{L3}}{dt} = \frac{1}{6}(3i_{R_1} + 5i_{R4}) = \frac{1}{6}\Big[\frac{3}{2}i_{L2} - \frac{21}{10}i_{L_1} - \frac{3}{5}i_{L3} - \frac{9}{5}i_s + \frac{3}{2}i_{L_1} - \frac{5}{2}i_{L2} - i_{L3} + 2i_s\Big]$$

$$\frac{di_{L3}}{dt} = -\frac{1}{10}i_{L_1} - \frac{1}{6}i_{L2} - \frac{4}{15}i_{L3} + \frac{1}{30}i_s$$

تمرین : مرتبه مدار = $6 - \underset{\text{حلقه خازنی}}{1} - \underset{\text{کات سلفی}}{1} = 4$

4 متغیر حالت داریم.

$$x = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \to \text{درخت کات} \\ \\ \} \to \text{لینک حلقه} \\ \end{array}$$



$n_t = 6 \to$ 5 شاخه درختی

شاخه های درختی شامل: C_1 و C_2 و L_3 و 2 مقاومت ها

شاخه هایی که ○ دارند.

لینک (حلقه)

$$KCL@1: -i_{L_1} + \frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{dv_{C3}}{dt} = 0 \quad (I)$$

درخت (کات)

$$KVL@M_1: v_{C3} = v_{C1} + v_{C2} \xrightarrow{(I)} -i_{L_1} + 2\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{dv_{C2}}{dt} = 0 \quad (II)$$

$$KCL@2: -i_{L_1} + \frac{dv_{C3}}{dt} + \frac{dv_{C2}}{dt} - i_{L2} = 0 \to$$

$$\frac{dv_{C1}}{dt} + 2\frac{dv_{C2}}{dt} = i_{L_1} + i_{L2} \quad (III) \xrightarrow{(II),(III)} \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{3} i_{L_1} + \frac{2}{3} i_{L_2} \quad ★$$

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{3} i_{L1} - \frac{1}{3} i_{L2} \quad ★$$

$$KVL@M_2: \frac{di_{L1}}{dt} + v_{C1} + v_{C2} - \underbrace{\frac{di_{L3}}{dt}}_{\text{درختی (کات)}} + \underbrace{i_{R1}}_{\text{درختی (کات)}} = 0 \quad (IV)$$

$$KCL@3: i_{L3} = -i_{L1} - i_{L2} \quad (V)$$

ادامه حل ص بعد

$$KCL@4: \; i_{R_1} - i_{L_1} - i_{L_2} - i_{R_2} = 0$$

لینک (حلقه)

حلقه شامل R_1 و R_2 و R_3 KVL: $i_{R_1} + i_{R_2} + i_{R_3} = 0$

درخت (کات اساسی)

$$KCL@5: \; i_{R_3} - i_{L_2} - i_{R_2} = 0$$

$$i_{R_1} = \frac{2}{3} i_{L_1} + \frac{1}{3} i_{L_2} \quad (VI)$$

$$i_{R_2} = -\frac{1}{3} i_{L_1} - \frac{2}{3} i_{L_2}$$

i_{L_2}

$$i_{R_3} = \frac{i_{L_2}}{3} - \frac{1}{3} i_{L_1} \quad (VII)$$

$$\xrightarrow[(VI)]{(IV) \text{ و } (V)} \; 2\frac{di_{L_1}}{dt} + \frac{di_{L_2}}{dt} = -v_{C_1} - v_{C_2} - \frac{2}{3} i_{L_1} - \frac{1}{3} i_{L_2} \quad (IX)$$

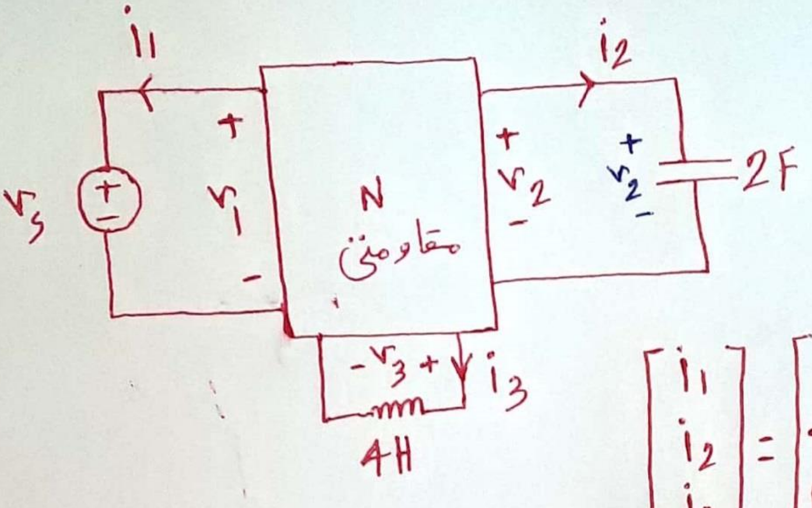
$L_2 \rightarrow$ لینک $\rightarrow$ حلقه $\rightarrow$ شامل L_2 و C_2 و R_1 و R_3 KVL: $\frac{di_{L_2}}{dt} + v_{C_2} - \frac{di_{L_3}}{dt} + i_{R_1} + i_{R_3} = 0$ (VIII)

$$\xrightarrow[(V)]{(VIII) \text{ و } (VII) \text{ و } (VI)} \; 2\frac{di_{L_2}}{dt} + \frac{di_{L_1}}{dt} = -v_{C_2} - \frac{1}{3} i_{L_1} - \frac{2}{3} i_{L_2} \quad (X)$$

$$\xrightarrow{(X) \text{ و } (IX)} \; \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{2}{3} v_{C_1} - \frac{1}{3} v_{C_2} - \frac{1}{3} i_{L_1} \quad (*)$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{3} v_{C_1} - \frac{1}{3} v_{C_2} - \frac{1}{3} i_{L_2} \quad (*)$$

تمرین : معادلات حالت برای مدار زیر :



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$i_2 = 2\dfrac{dv_2}{dt}$ و $v_3 = 4\dfrac{di_3}{dt}$ $\qquad x = \begin{bmatrix} v_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ مرتبه مدار 2

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ 2\dfrac{dv_2}{dt} \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_2 \\ 4\dfrac{di_3}{dt} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = v_2 + 4\frac{di_3}{dt} \quad (\mathrm{I})$$

$$2\frac{dv_2}{dt} = -v_s + 4\frac{di_3}{dt} \quad (\mathrm{II})$$

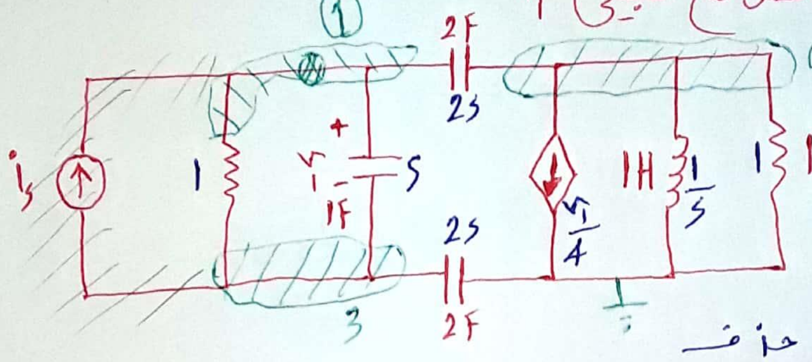
$$i_3 = v_s - v_2 \quad (\mathrm{III})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{III})} \frac{di_3}{dt} = \frac{dv_s}{dt} - \frac{dv_2}{dt} \; (\mathrm{IV}) \xrightarrow{(\mathrm{II})} 2\frac{dv_2}{dt} = -v_s + 4\frac{dv_s}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dv_s}{dt} - \frac{1}{6}v_s \; (*) \xrightarrow{(\mathrm{IV})} \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{6}v_s \; (*)$$

تمرین : فرکانس های طبیعی v_1

مرتبه 3 است



منابع مستقل حذف

از روش گره استفاده می کنیم ← مدار ادمیتانسی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+s+2s & -2s & -(s+1) \\ -2s+\frac{1}{4} & 2s+1+\frac{1}{s} & 0-\frac{1}{4} \\ -(s+1) & 0 & 1+s+2s \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_1}{4} \to 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$v_1 = E_1 - E_3$

$$\det\{A\} = 0 \to (3s+1)\left[(3s+1)\left(2s+1+\frac{1}{s}\right) - 0\right] + 2s\left[(3s+1)\left(-2s+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}(s+1)\right] - (s+1)\left[(s+1)\left(2s+1+\frac{1}{s}\right)\right] = 0$$

$$\det\{A\} = 0 \to 4s^3 + 13s^2 + 12s + 4 = 0 \;,\; s_1 = -2 \to \text{ریشه}$$

با سعی و خطا

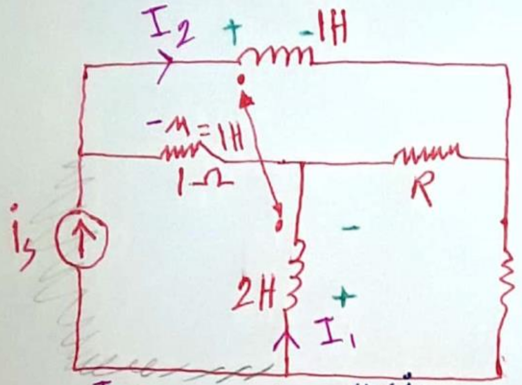
$$
\begin{array}{l|l}
4s^3 + 13s^2 + 12s + 4 & s+2 \\
\cline{2-2}
 & 4s^2 + 5s + 2 \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$4s^3 + 12s + 13s^2 + 4 = (s+2)(4s^2+5s+2) = 0$$

$$4s^2 + 5s + 2 = 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-7} = \sqrt{7 \times j^2} = \sqrt{7}\, j$$

$$s_1, s_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{7}\, j}{8}, \quad s_3 = -2 \longrightarrow$$ 3 فرکانس طبیعی

تمرین: $R=?$ تا $s=-3$ یکی از فرکانس ها طبیعی باشد.

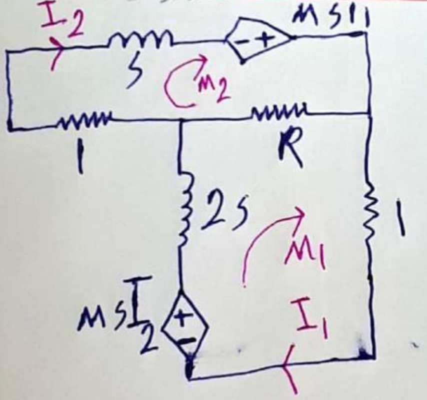


مرتبه مدار 2 ← 2 فرکانس طبیعی

از روش مش استفاده می کنیم

مدار امپدانسی رسم می کنیم.

منابع مستقل حذف



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2s+R+1 & -Ms-R \\ -R-Ms & s+R+1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ms I_2 \xrightarrow{} 0 \\ Ms I_1 \xrightarrow{} 0 \end{bmatrix}$$

$M=1$

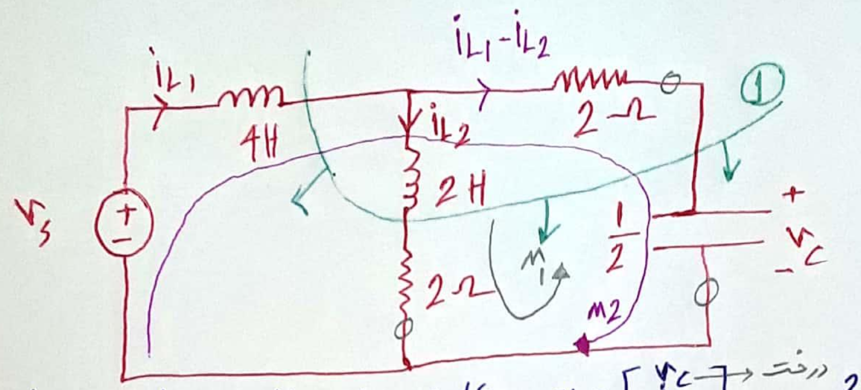
$$\det\{A\}=0 \rightarrow (2s+R+1)(s+R+1)-(R+s)(R+s)=0$$

$$2s^2+2sR+2s+Rs+R^2+R+s+R+1-R^2-2sR-s^2=0$$

$$s^2+(R+3)s+2R+1=0 \xrightarrow{s=-3} 9-3R-9+2R+1=0$$

$$\rightarrow \boxed{R=1\Omega}$$

تمرین: شرایط اولیه = ? تا مدار کوچکترین فرکانس طبیعی داشته باشد



مرتبه مدار 3 $\quad x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$ $v_C \to$ درخت، $i_{L_1}, i_{L_2} \to$ لینک

شاخه درختی شامل: خازن $\frac{1}{2}F$

هر 2 مقاومت 2Ω

$n_t = 4 \longrightarrow$ 3 شاخه درختی

$$KCL@1: \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} + i_{L_2} - i_{L_1} = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = 2i_{L_1} - 2i_{L_2} \quad (*)$$

$$KVL@M_1: 2\frac{di_{L_2}}{dt} + 2i_{L_2} - v_C - 2(i_{L_1} - i_{L_2}) = 0$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{v_C}{2} + i_{L_1} - 2i_{L_2} \quad (*)$$

$$KVL@M_2: -v_s + 4\frac{di_{L_1}}{dt} + 2i_{L_1} - 2i_{L_2} + v_C = 0$$

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{v_C}{4} - \frac{1}{2}i_{L_1} + \frac{1}{2}i_{L_2} + \frac{1}{4}v_s \quad (*)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & +1 & -2 \end{bmatrix} \qquad sI - A = \begin{bmatrix} 0+s & -2 & +2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+s & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det\{sI - A\} = 0 \rightarrow s\left((s+0.5)(s+2) - \frac{1}{2}\right) + 2\left(0.25(s+2) - 0.25\right) + 2\left(-0.25 + 0.5(s+0.5)\right)$$

$$\det\{sI - A\} = s^3 + 2.5s^2 + 2s + 0.5 = 0$$

$$\det\{sI - A\} = (s+1)(s+1)(s+0.5) = (s+1)^2(s+0.5) = 0$$

$$s_{1,2} = -1 \qquad s_3 = -0.5$$

مدار فقط شامل

$$s = -1$$

$$s_{1,2} < s_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & +2 \\ 0.25 & -0.5 & -\frac{1}{2} \\ -0.5 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1}(0) \\ i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &-v_{C1}(0) - 2i_{L1}(0) + 2i_{L2}(0) = 0 \\ &0.25v_{C1}(0) - 0.5i_{L1}(0) - 0.5i_{L2}(0) = 0 \\ &-0.5v_{C}(0) - i_{L1}(0) + i_{L2}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &v_{C1}(0) = 2i_{L1}(0) - i_{L2}(0) \\ &i_{L1}(0) = i_{L2}(0) \end{aligned}$$

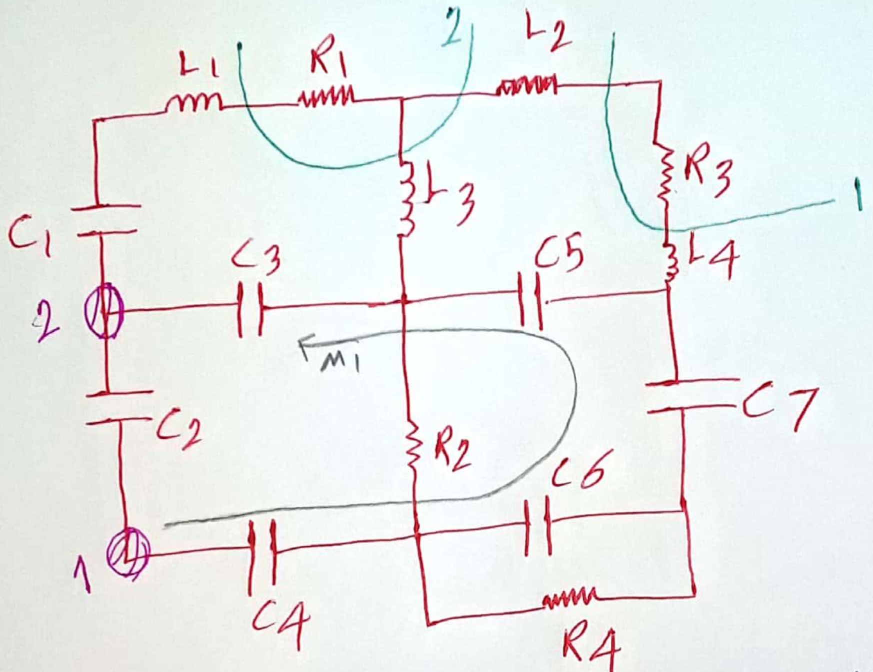
$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{I})\ v_{C1}(0) = 2i_{L2}(0) - 2i_{L1}(0) \\ &\mathrm{II})\ i_{L1}(0) = 0.5v_{C1}(0) - i_{L2}(0) \\ &\mathrm{III})\ i_{L2}(0) = 0.5v_{C1}(0) + i_{L1}(0) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[i_{L1}(0) = 0^{*}]{} v_{C1}(0) = 2i_{L2}(0)$$

باید باشد

مثلاً

$$\begin{cases} i_{L1}(0) = 0 \\ v_{C1}(0) = 2\,\mathrm{V} \\ i_{L2}(0) = 1\,\mathrm{A} \end{cases}$$

تمرین: تعداد فرکانس ها صفر و غیر صفر مدار زیر



تعداد کل فرکانس ها طبیعی = مرتبه مدار = مجموع خازن + مجموع سلف ها - حلقه خازنی - کات سلفی

تعداد فرکانس صفر = تعداد کل فرکانس ها طبیعی - کات خازنی - حلقه سلفی

مجموع خازن ها + مجموع سلف ها = 11

کات ست های سلفی = 2 (رنگ سبز در مدار)

حلقه خازنی = 1 (C)

کات ست خازنی = 2 (Ø)

حلقه سلفی = 0

مرتبه مدار = تعداد کل فرکانس ها طبیعی = $11 - 1 - 2 = 8$

تعداد فرکانس ها طبیعی غیر صفر = $8 - 2 - 0 = 6$