

نقشه‌ها mapping

نقشه‌ها بین تبدیل نام  $D_1$  از  $z$  به  $w$

نام  $D_2$  در  $w$  تحت تابع  $f(z)$

اندازه‌های نام  $D_1$  و تابع  $f(z)$  معلوم و نام  $D_2$  مجهول

نام  $D_2$  معلوم و نام  $D_1$  مجهول

نقشه‌های بیشتر از این مدل  $w = f(z)$  معلوم و نام  $D_2$  مجهول (این است یا نه باید دید)



مثال ۱-  $w = -2jz + 2j - 3$  ،  $D_1$  معلوم ،  $D_2 = ?$

در این مدل فقط یک کاری -

$$w = -2jz + 2j - 3$$

$$w = -2j(x + jy) + 2j - 3 = (2y - 3) + j(-2x + 2)$$

$$= u + jv$$



حال محدودیت های  $x$  و  $y$  را به  $u$  و  $v$  اعمال کنیم

$$\begin{cases} u = 2y - 3 \\ v = 2(1 - x) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{u + 3}{2}, x = \frac{2 - v}{2}$$

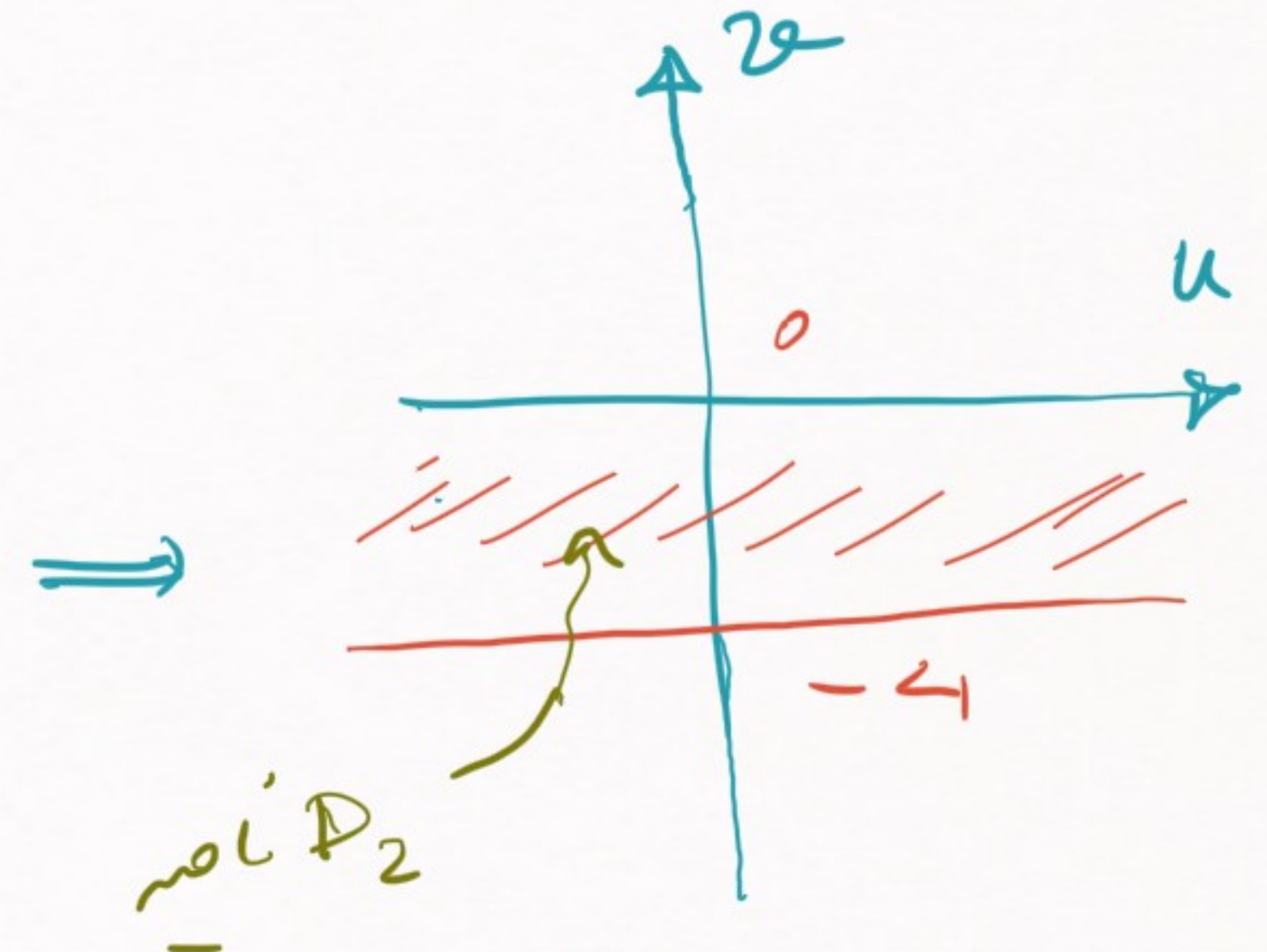
$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \frac{2 - v}{2} \leq 3 \Rightarrow -4 \leq v \leq 0$$

$$-\infty < y < \infty \Rightarrow -\infty < \frac{u + 3}{2} < \infty \Rightarrow -\infty < u < +\infty$$

$$z = re^{j\theta}, w = -2jz + 2j - 3 \Rightarrow w = -2jre^{j\theta} + 2j - 3$$

$$w = 2re^{-j\pi/2} e^{j\theta} + 2j - 3 = 2re^{j(\theta - \pi/2)} + 2j - 3$$

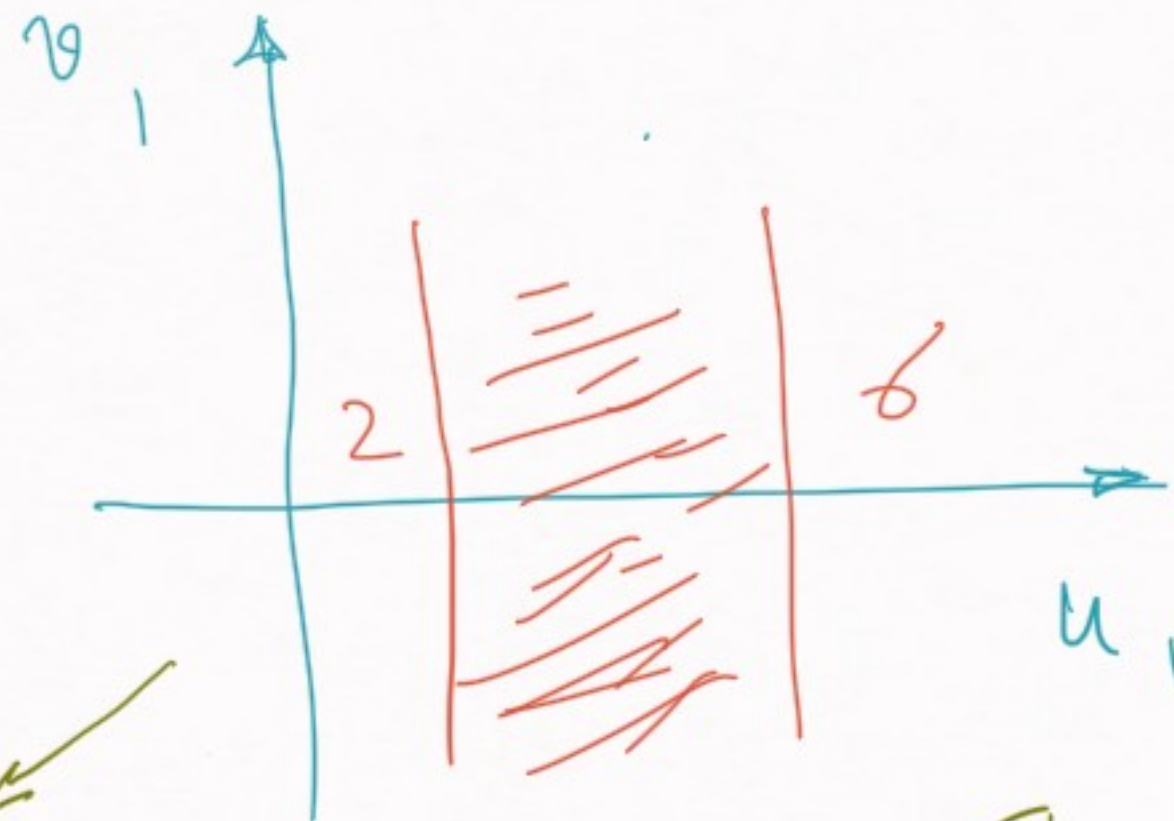
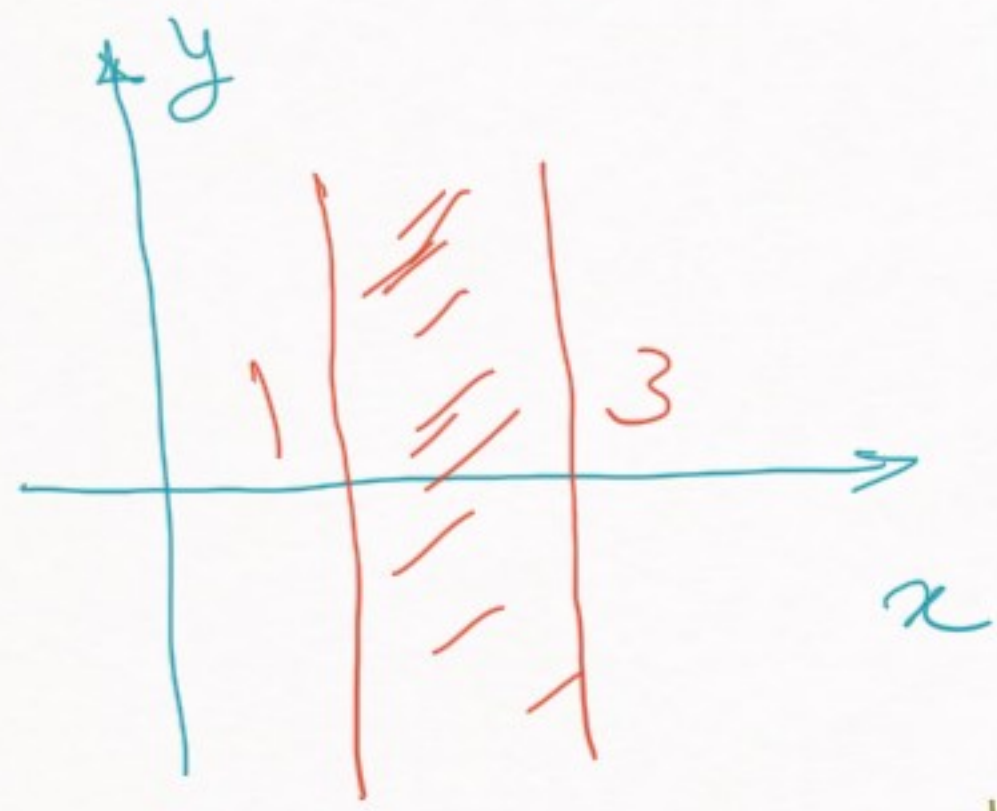
اندازه در برابر  
تغییر  $-\pi/2$  دوران



از شرط دوم - مختصات قطبی :

انتقال





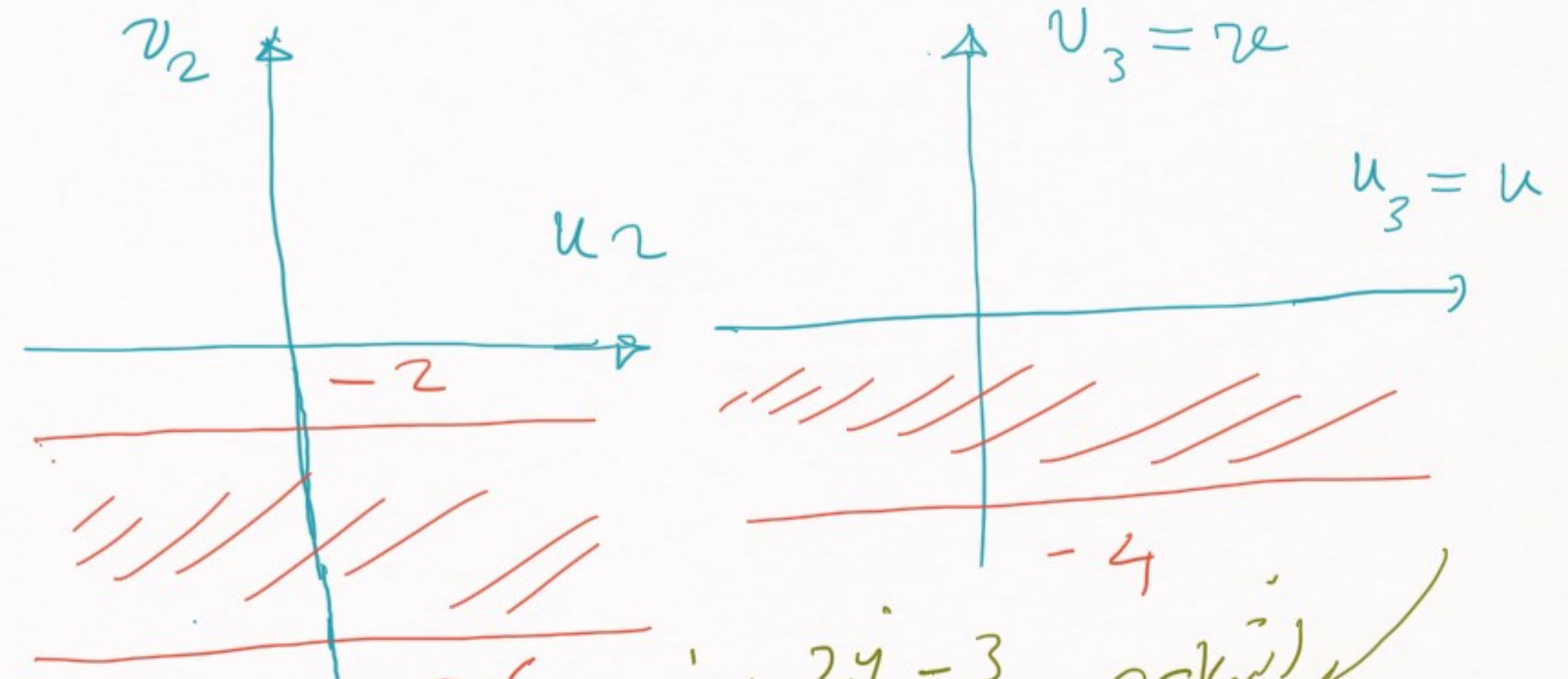
در برابر شدن اندازان  $2r$

در برابر شدن اندازان  $-\pi/2$

$$w = az + b, \quad z = re^{j\theta}, \quad a = |a|e^{j\phi}$$

$$w = |a|re^{j(\theta+\phi)} + b$$

اندازه  $|a|$  : انتقال  
 دورانی  $\phi$  : دورانی  
 و نیز در اندازان



انتقال؟  $-3 - j2$  پس؟  
 و این نقطه و دورانی کم کرد.

①  $w = az + b$   $\leftarrow$

$\left. \begin{array}{l} \text{کار } a \text{ : انتقال و دورانی} \\ \text{کار } b \text{ : انتقال} \end{array} \right\}$



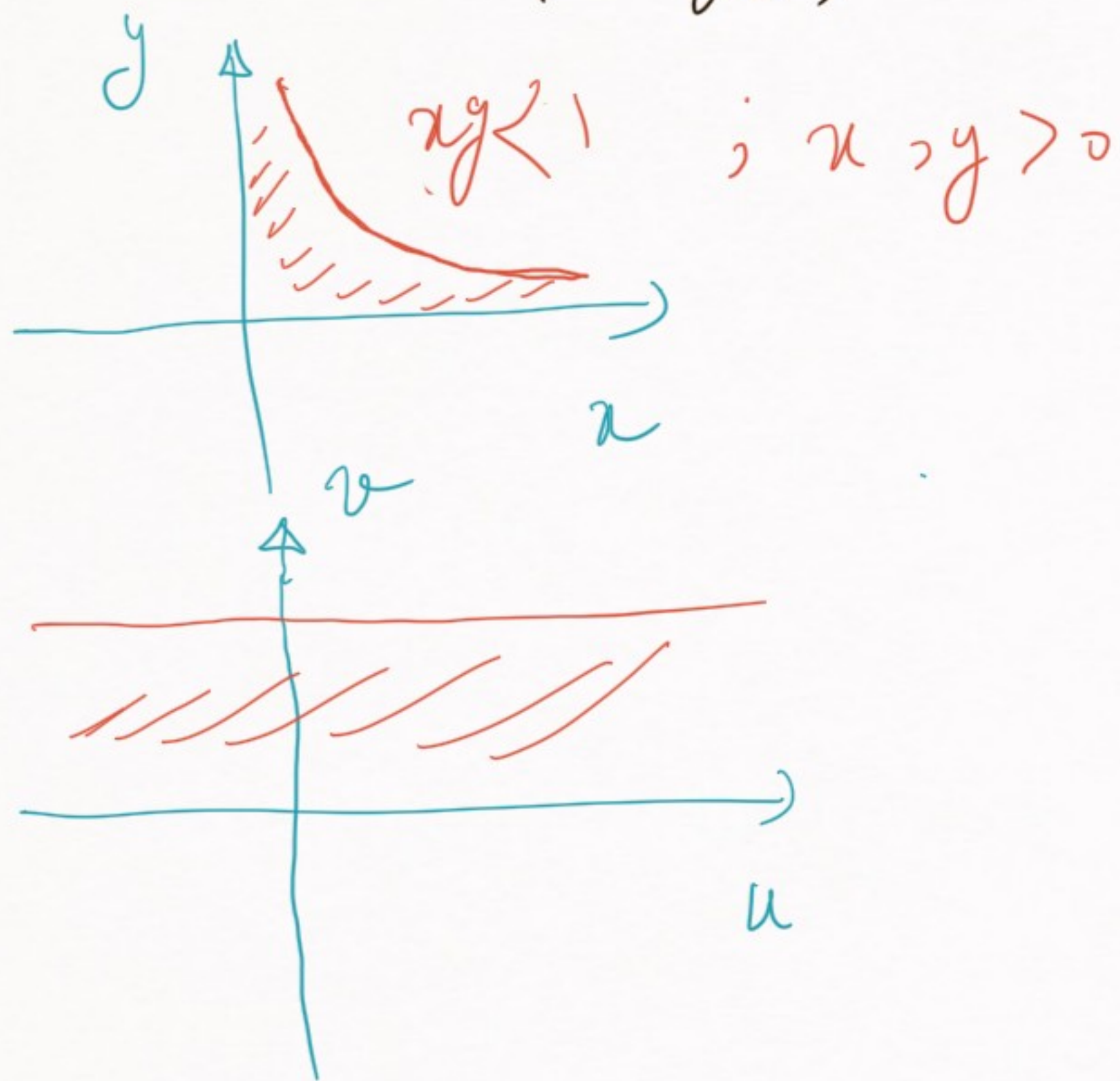
② گام -  $W = z^2$  ← فرقی با ریشه‌های دایره و دایره‌های هم‌مرکز است

فرم دکارتی با ضرایب معمولی

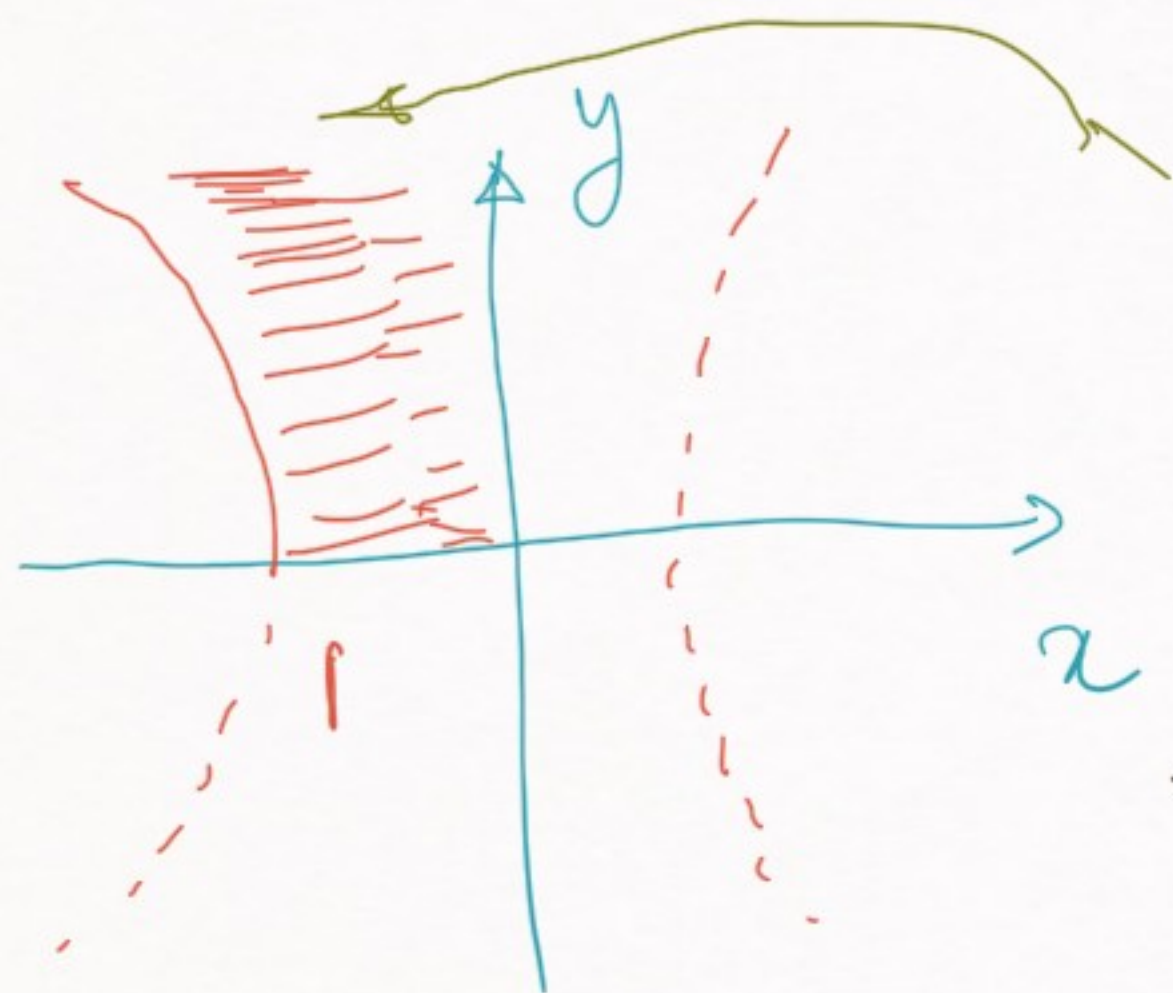
$$W = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

نقطه ۱ - گام ششم تبدیل به  $z^2$

$$\begin{cases} v = 2xy, xy < 1 \Rightarrow 0 < v < 2 \\ u = x^2 - y^2 \Rightarrow -\infty < u < +\infty \end{cases}$$





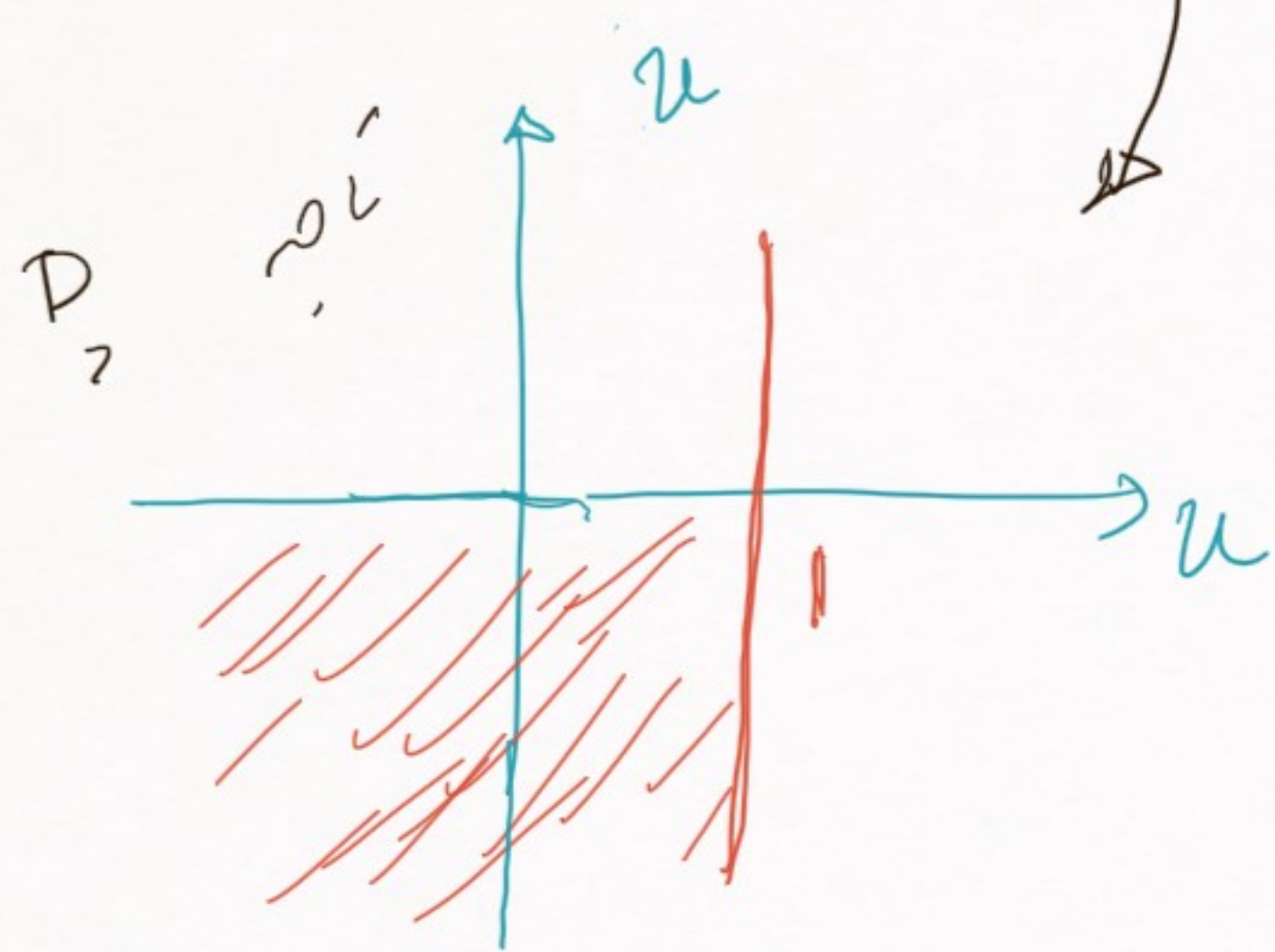


$$x^2 - y^2 < 1$$

$$x < 0, y > 0$$

نکته ۳- نمایش نامتناهی مختصات  $w^2$  می باشد.

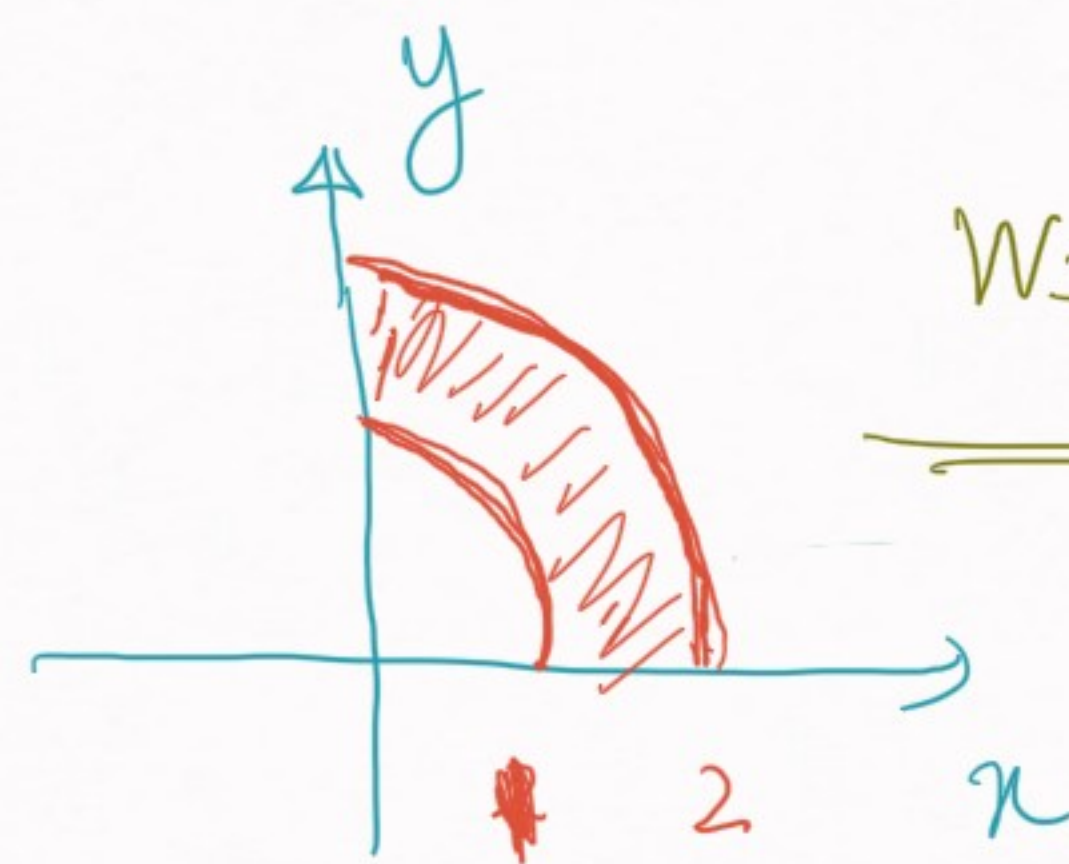
$$u = x^2 - y^2 \Rightarrow \underline{u < 1} \quad , \quad (x < 0, y > 0) \Rightarrow \underline{u < 0}$$



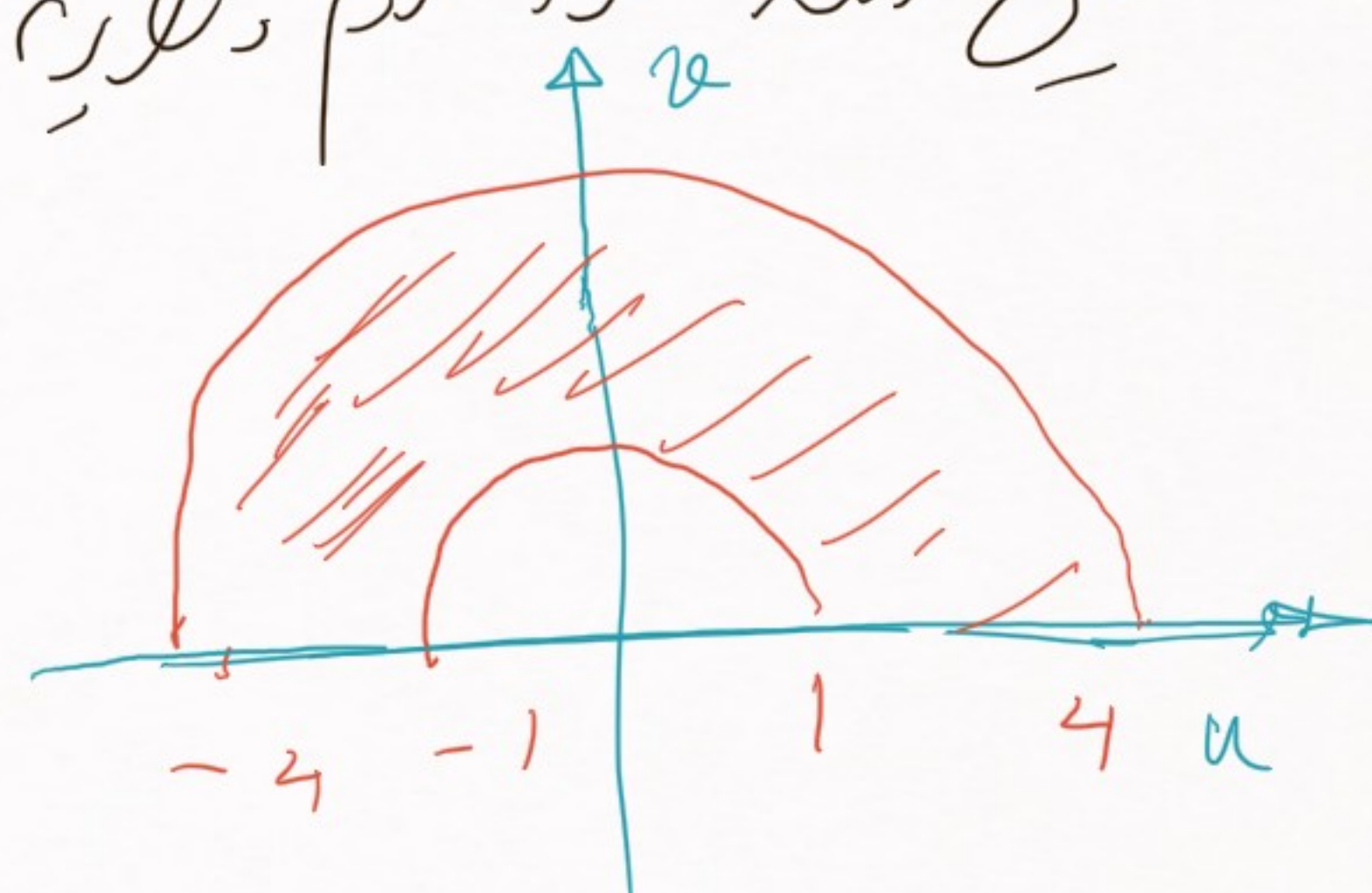
$$\begin{cases} w = z^2 \\ z = re^{j\theta} \end{cases} \Rightarrow w = r^2 e^{j2\theta}$$

فرم قطبی  $z^2$

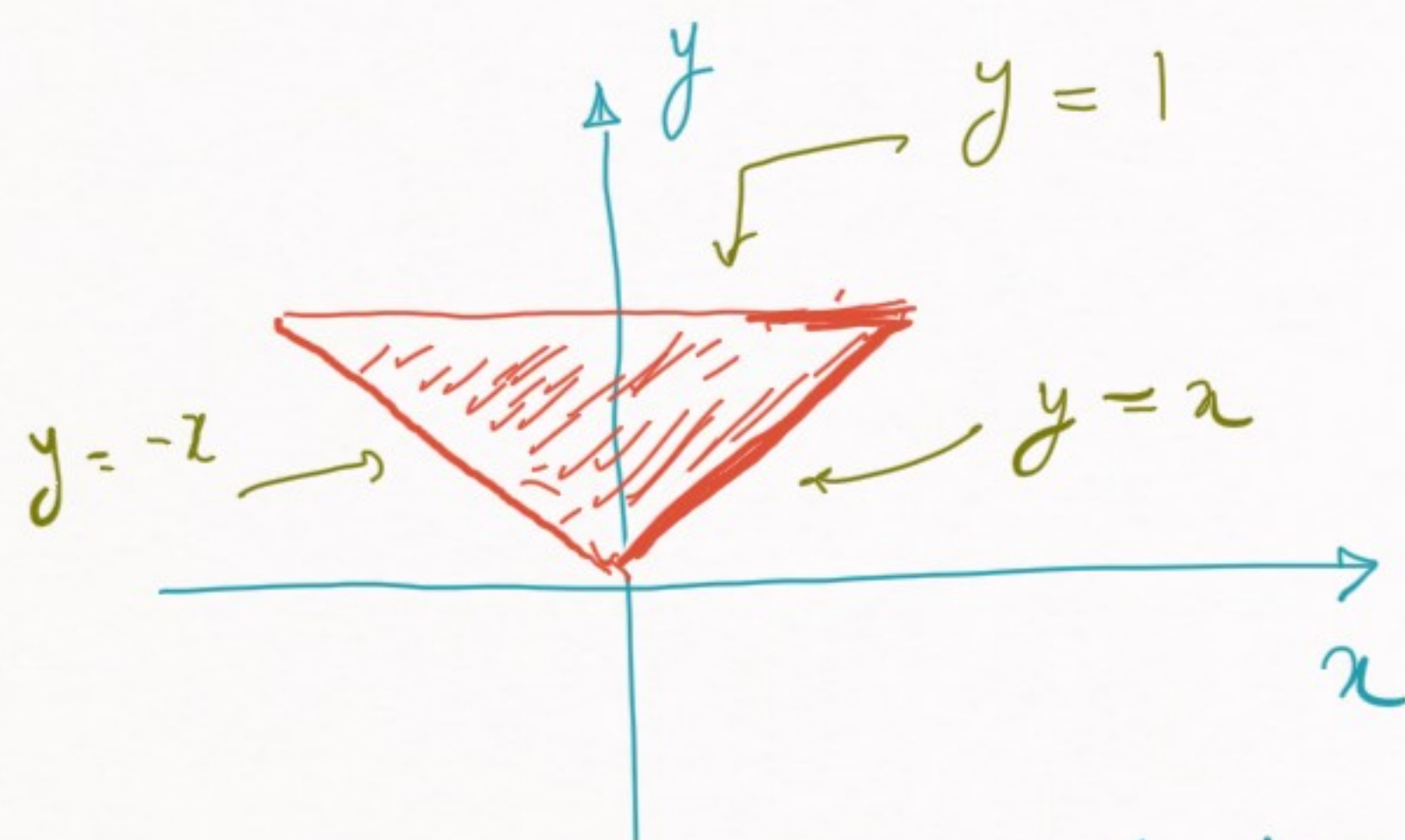
سین انداز، کوسین دام، دگر برابر



$$w = z^2$$







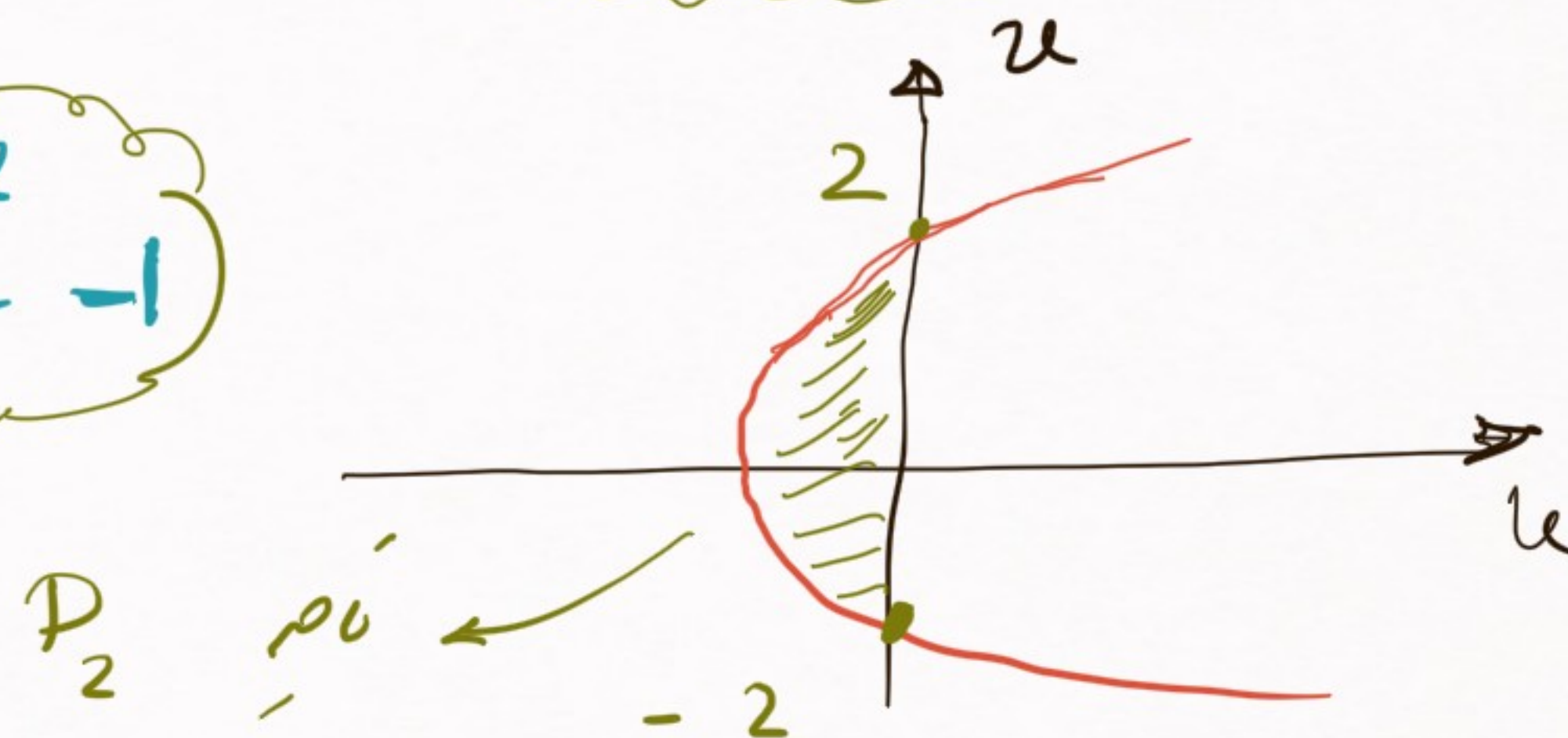
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

محل ۴- نقاط نیمه منحنی تحت  $z^2$   
نقاط مرزها را تحت  $z^2$  پیدا کنیم

$$\text{in } y=x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=2x^2 \end{cases}, 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < v < 2$$

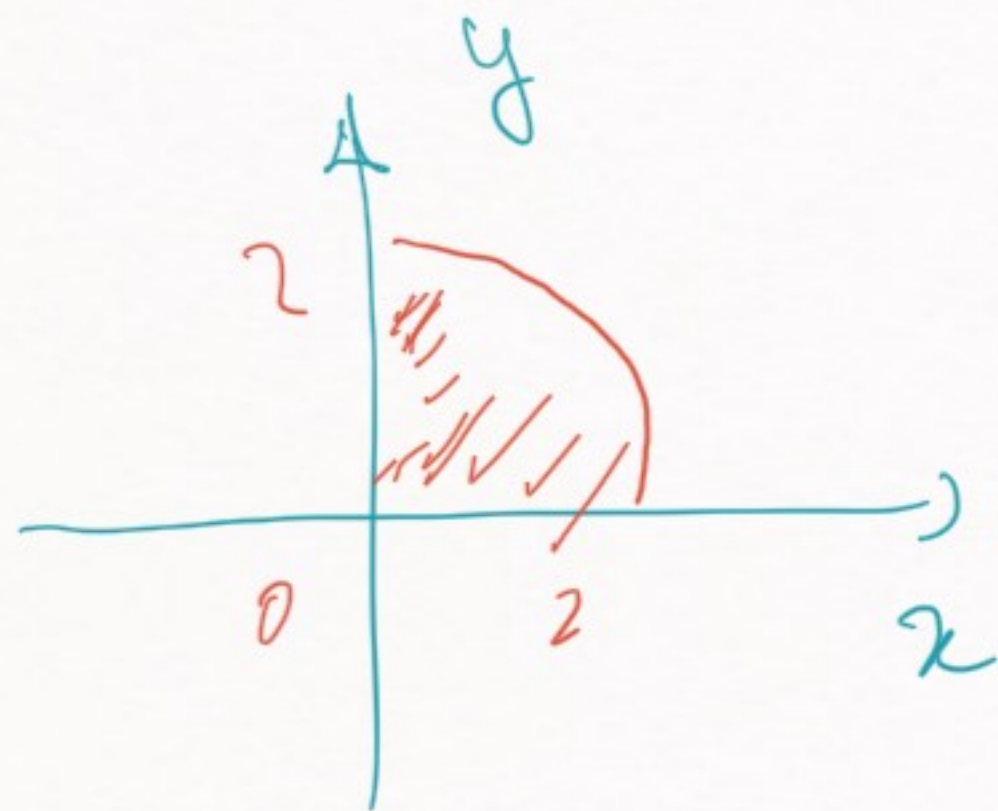
$$\text{in } y=-x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-2x^2 \end{cases}; -1 < x < 0 \Rightarrow -2 < v < 0$$

$$\text{in } y=1 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4} - 1$$

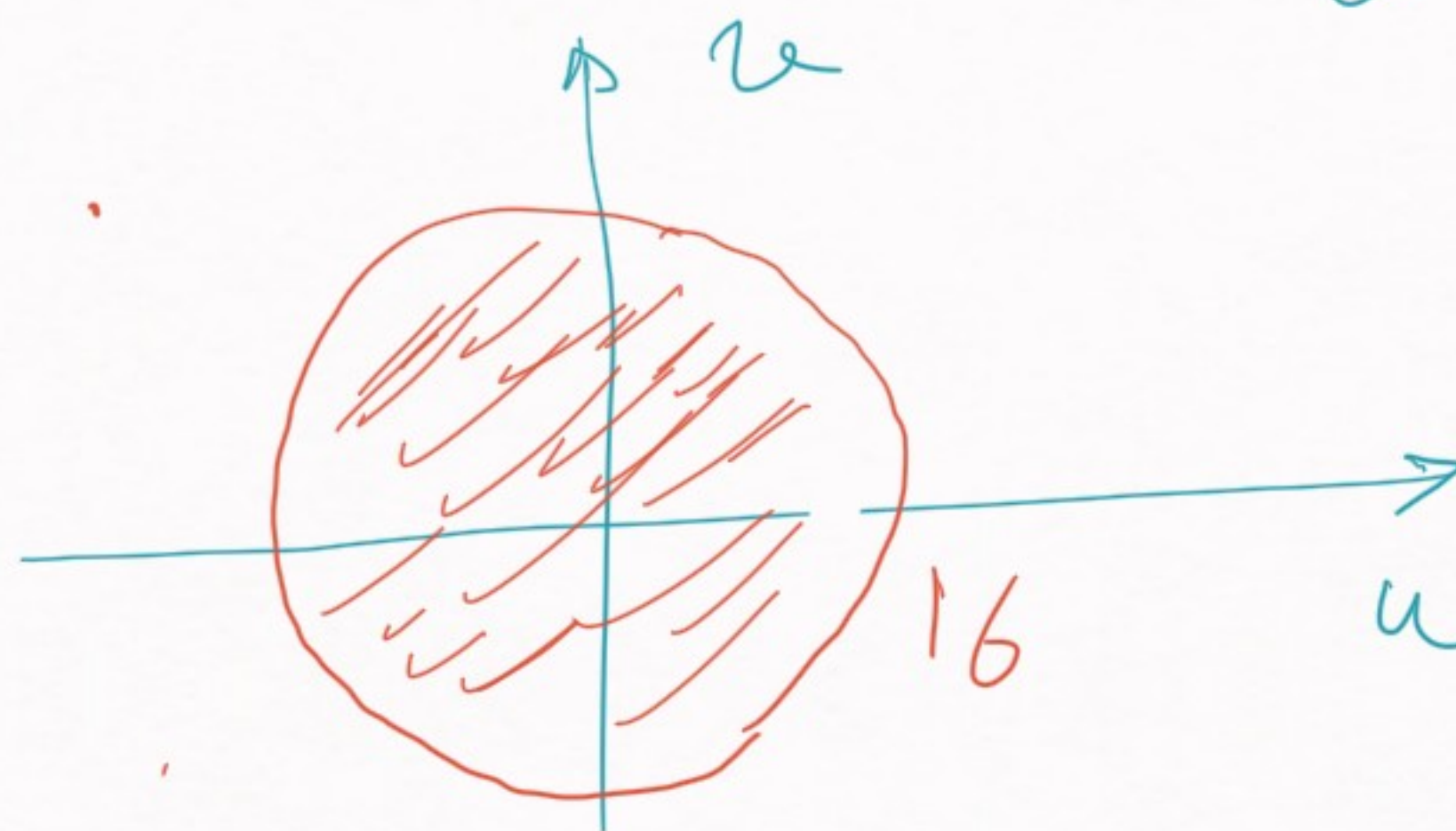




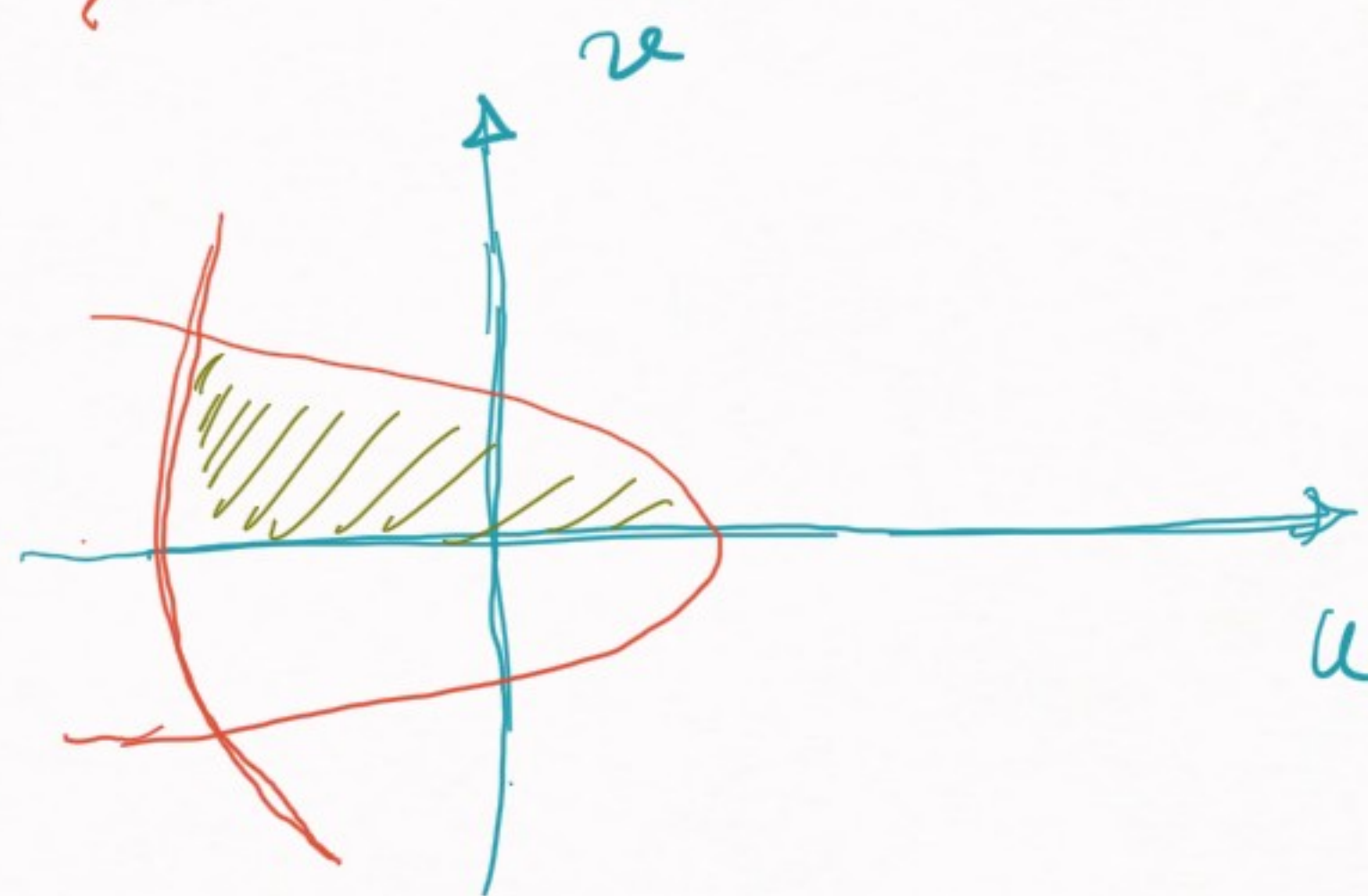
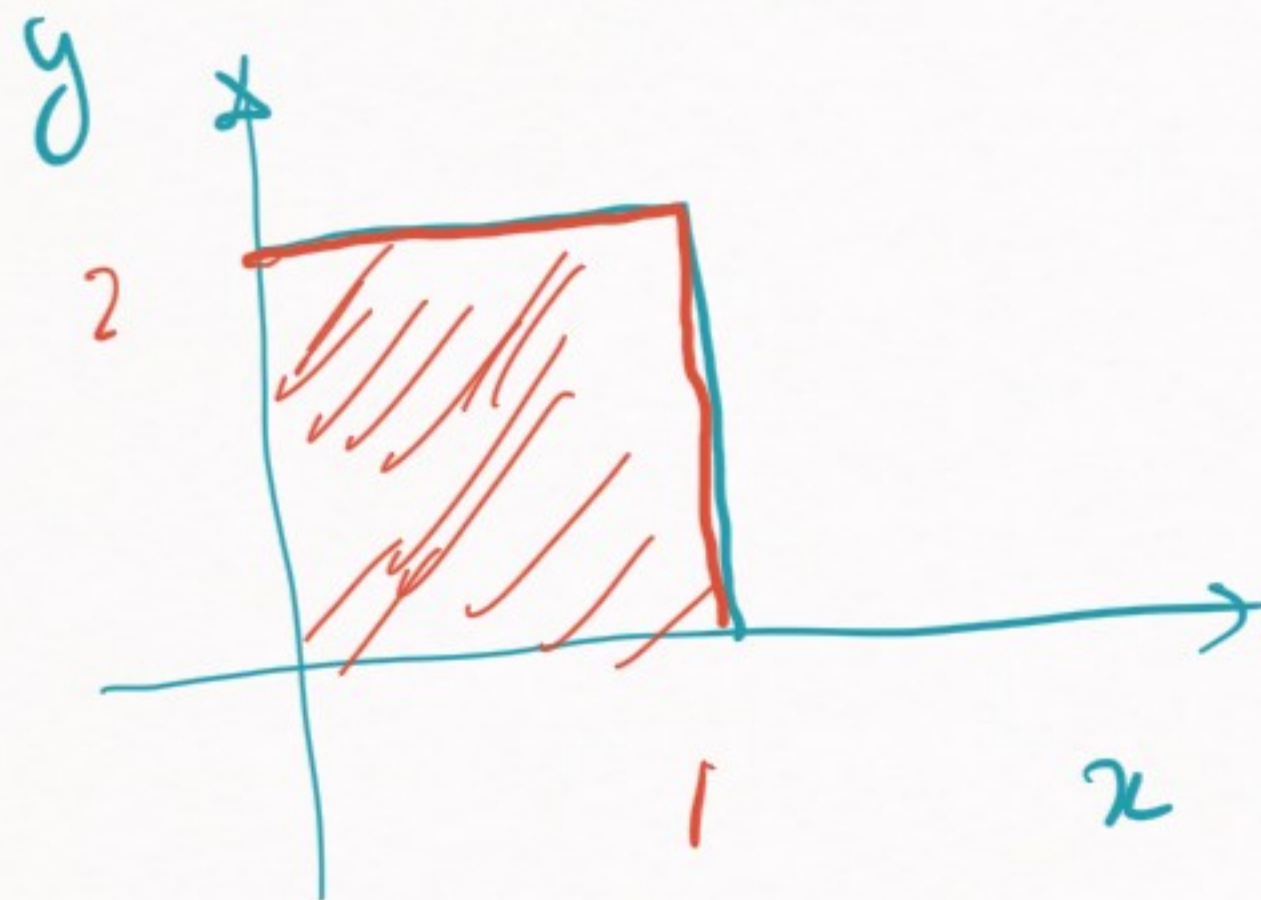
$$W = z = r e^{jn\theta}$$



$$W = Z^4$$

[illegible]

•  $f(t) = z^2$



تخمین برآورد - نیم شبین راحت

$$\begin{cases} v^2 = 2(1-u) \\ v^2 = 16(u+4) \end{cases}$$



$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

نکات:  $w = \frac{1}{z}$

در ترازان نشان دارد:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

در  $w = \frac{1}{z}$  تحت  $y = c > 0$  نشان



$$y = \frac{-v}{u^2+v^2} = c \Rightarrow v = \frac{-c}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{c} = 0$$

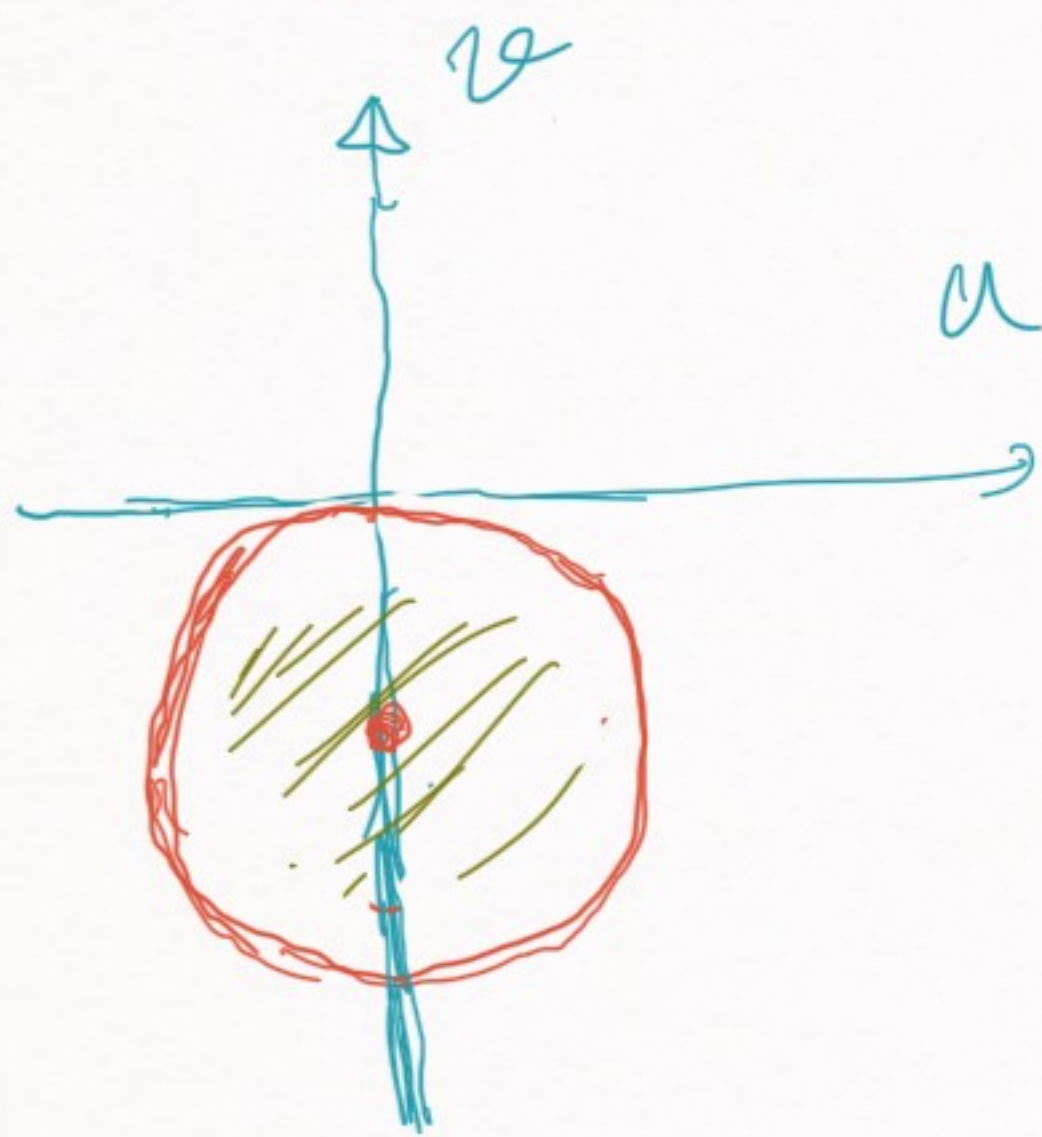
$$\Rightarrow u^2 + \left(v + \frac{1}{2c}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 \Rightarrow$$

دایره با مرکز  $\left(0, -\frac{1}{2c}\right)$  و شعاع  $\frac{1}{2c}$

برای  $y > c \Rightarrow \frac{-c}{u^2+v^2} > c \Rightarrow$

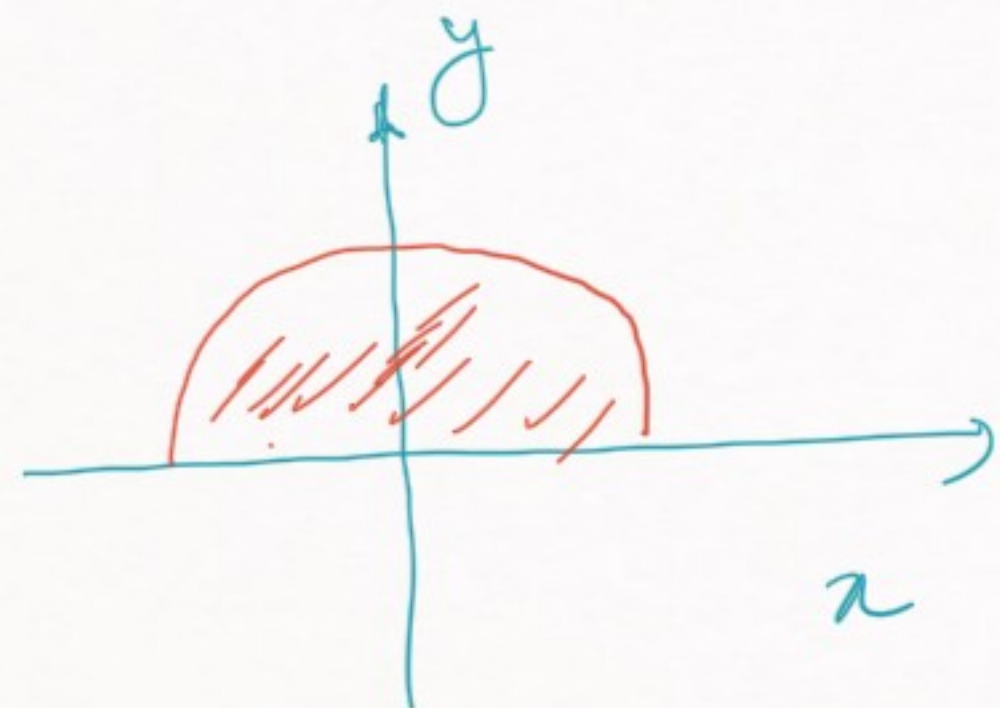
$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c}\right)^2 < \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

داخل دایره





$$z = re^{j\theta} \Rightarrow w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

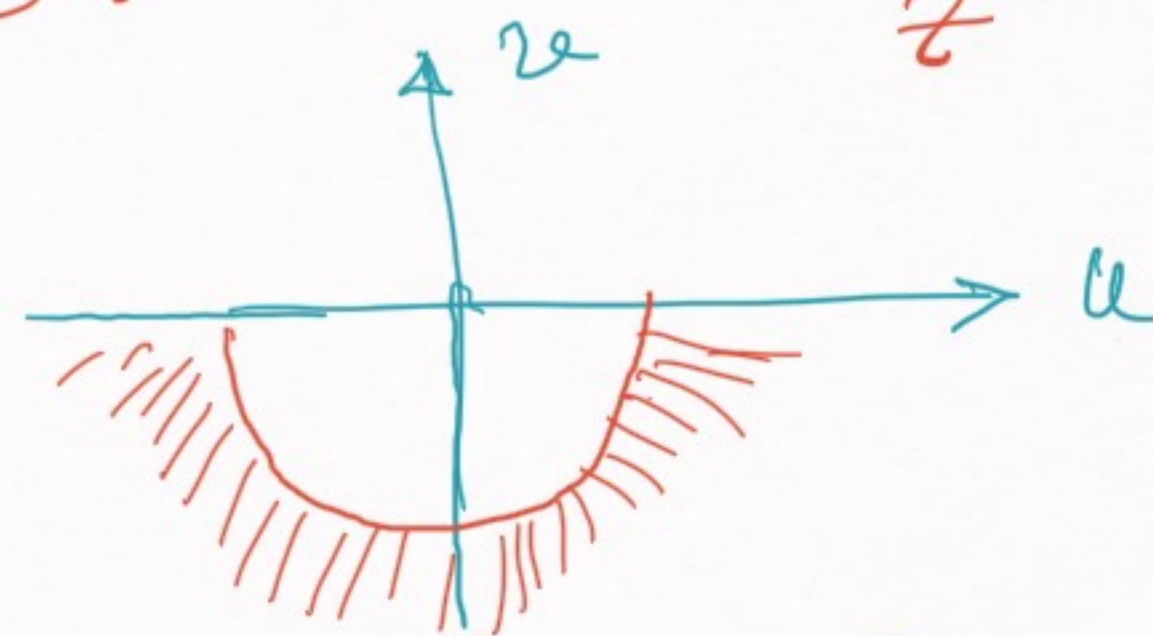


$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$|r| < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\pi \leq -\theta \leq 0 \\ \frac{1}{r} > 1 \end{cases}$$

$$w = \frac{1}{z}$$



نکات -  
مثال -

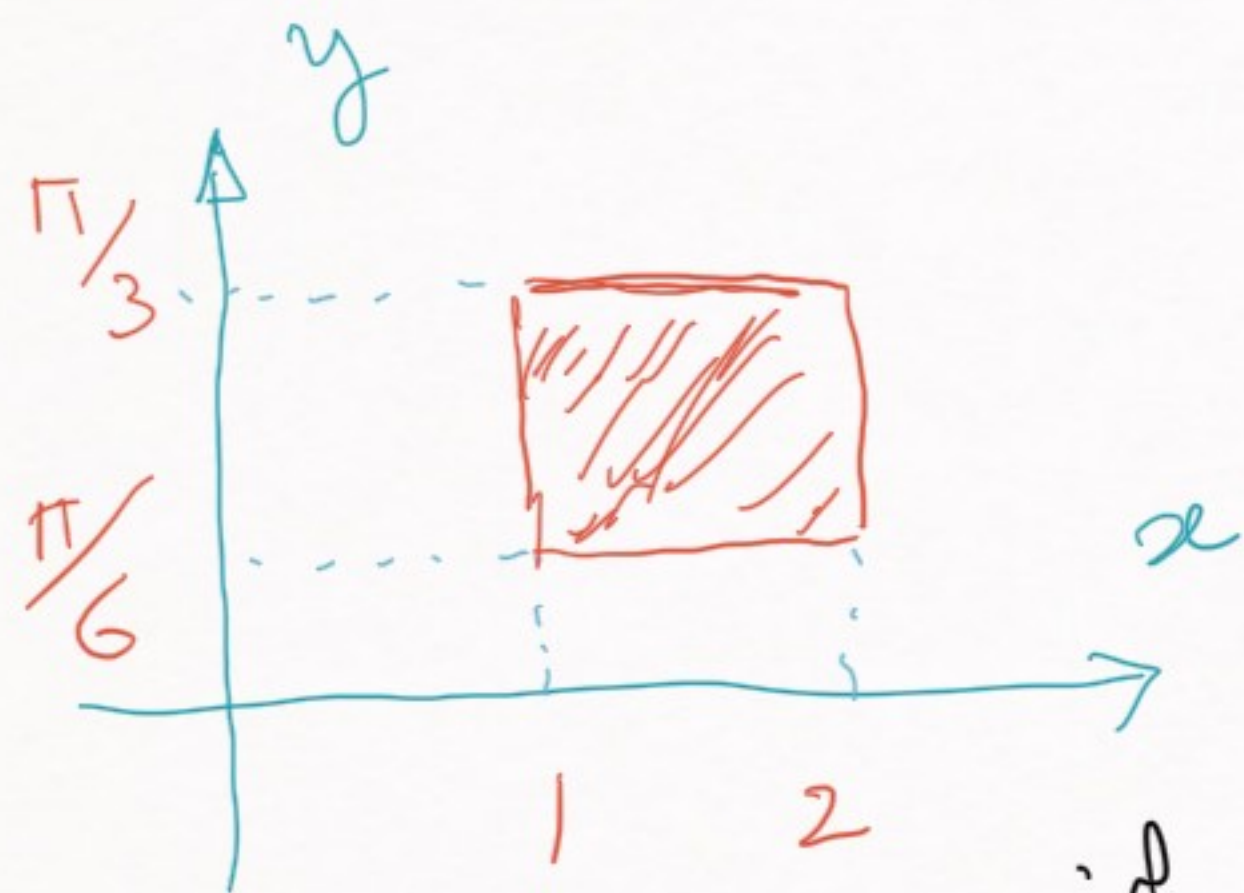
$$w = e^z$$

$$w = e^z \rightarrow e^{(x + jy)} = w = \rho (C_1 \varphi + j S_1 \varphi) \Rightarrow$$

$$\rho = e^x, \varphi = y$$

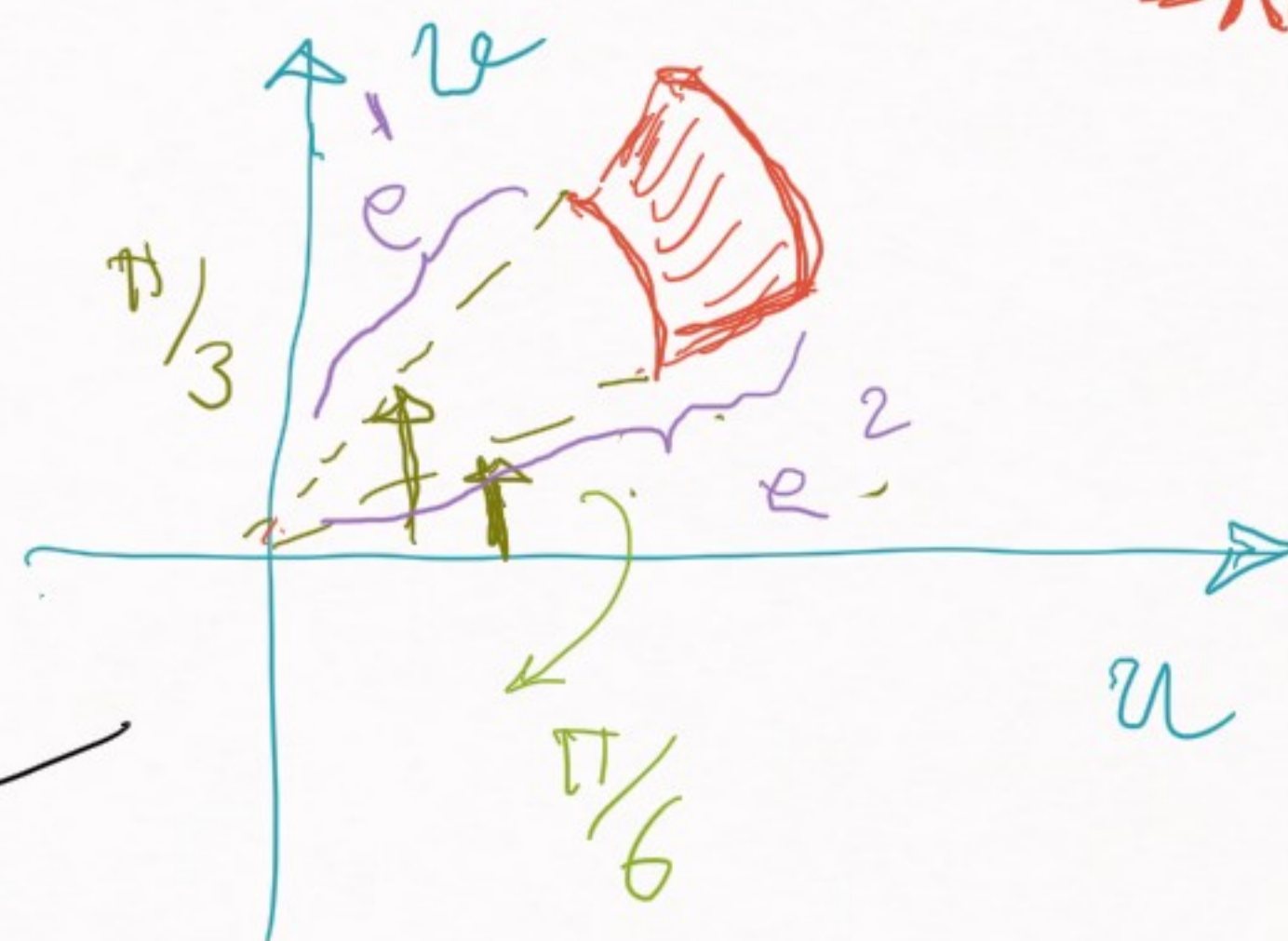
$$1 < x < 2 \Rightarrow e < \rho = e^x < e^2$$

$$\pi/6 < y < \pi/3 \Rightarrow \pi/6 < \varphi < \pi/3$$



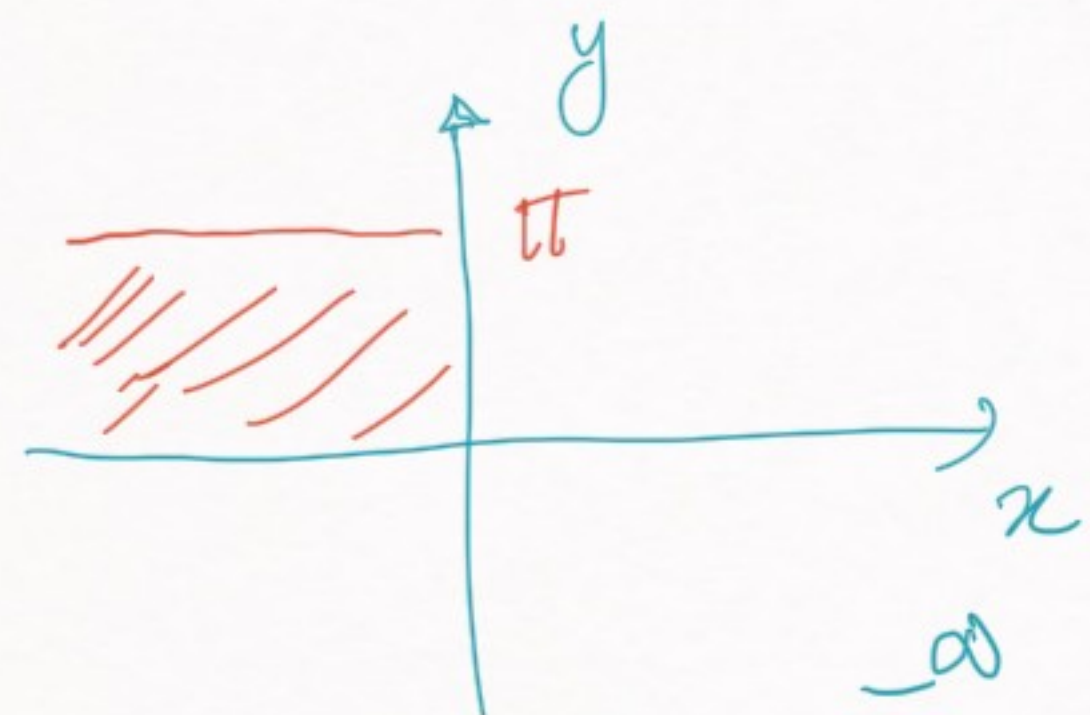
$(r, \theta)$  و  $y$

$(\rho, \varphi)$  و  $x$

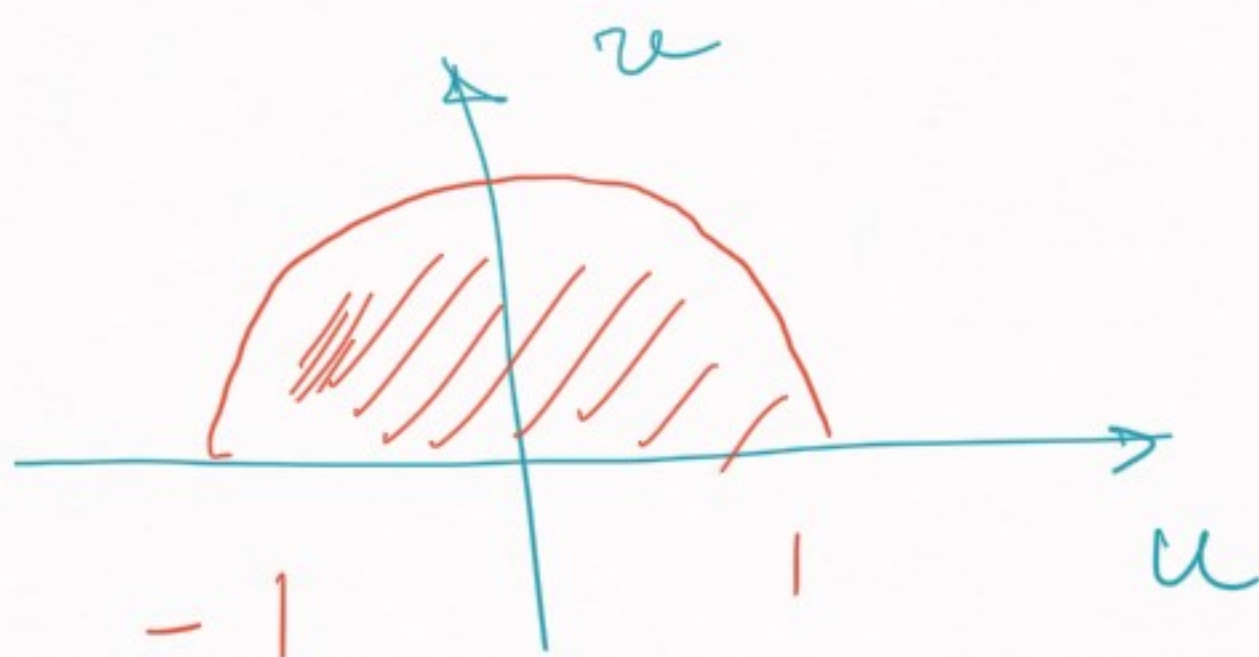


نکات -





$$w = e^z \Rightarrow$$



شماره ۹

$$\begin{cases} -\infty < x < 0 \Rightarrow e < \rho = e^x < e^0 \Rightarrow 0 < \rho < 1 \\ 0 < y < \pi \Rightarrow 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

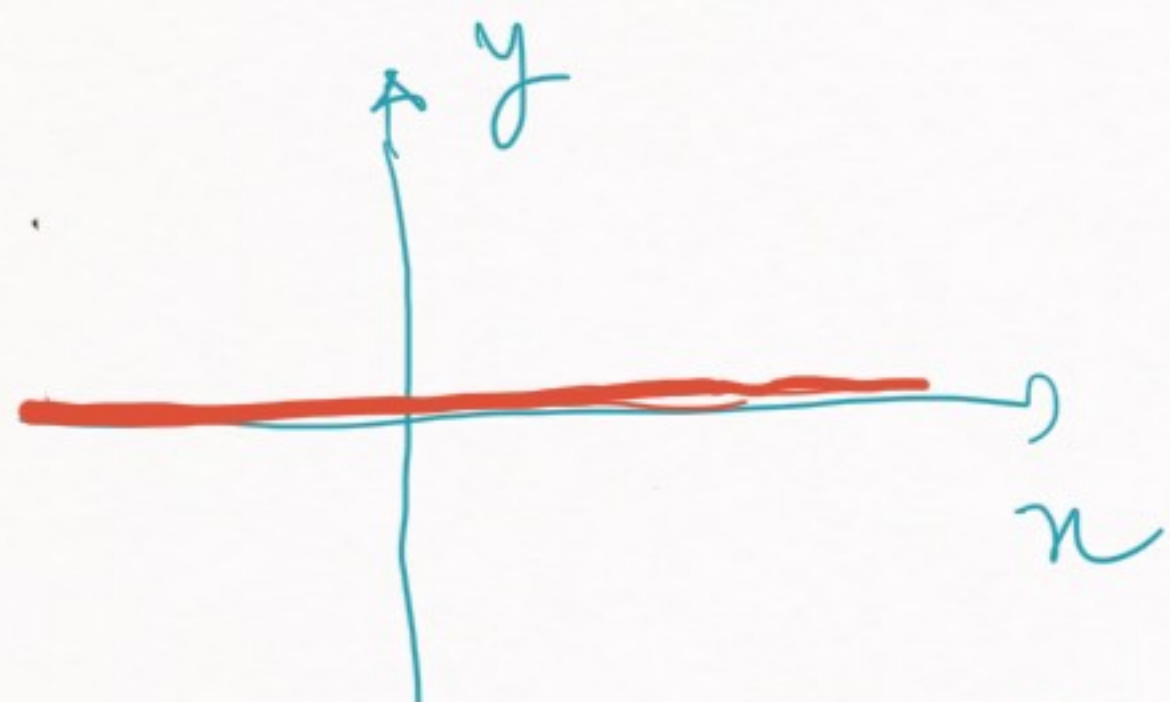
$$w = \sin z \Rightarrow w = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$$

$$w = \sin z$$

شماره ۴

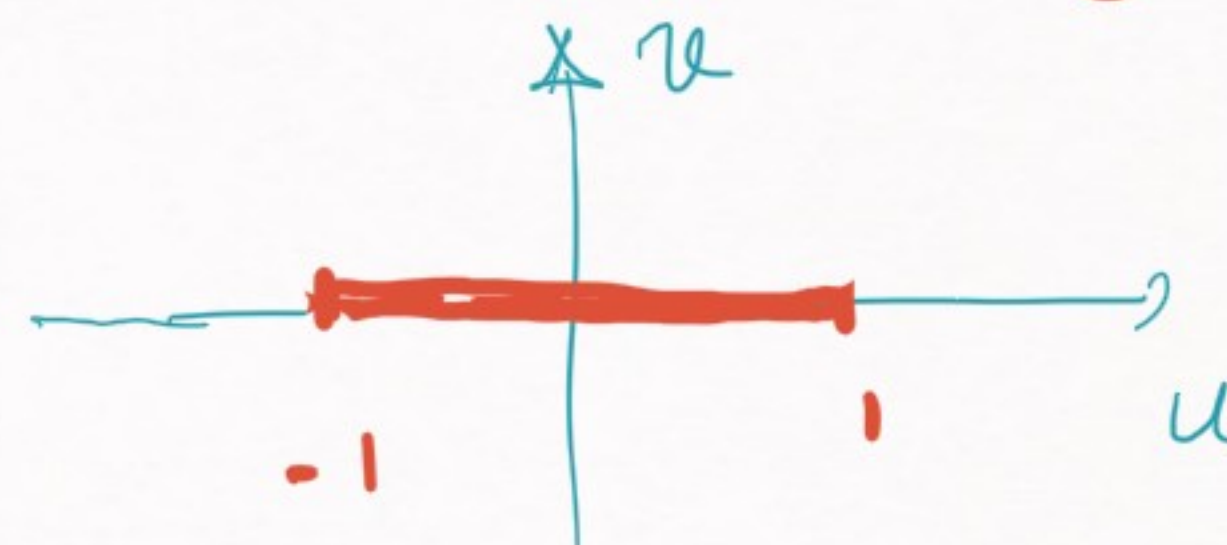
$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$$

نقاط محور x تحت تابع سینوس

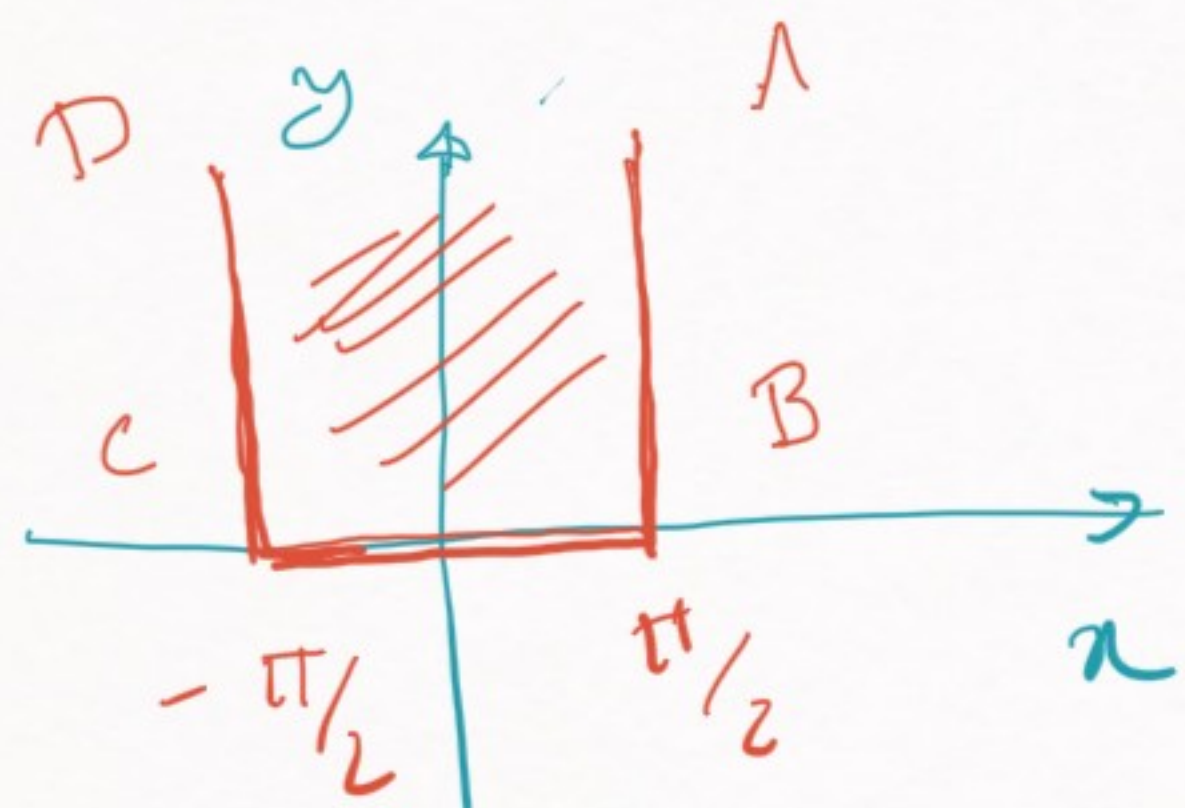


$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

شماره ۱۰







$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cosh y \sin x \end{cases}$$

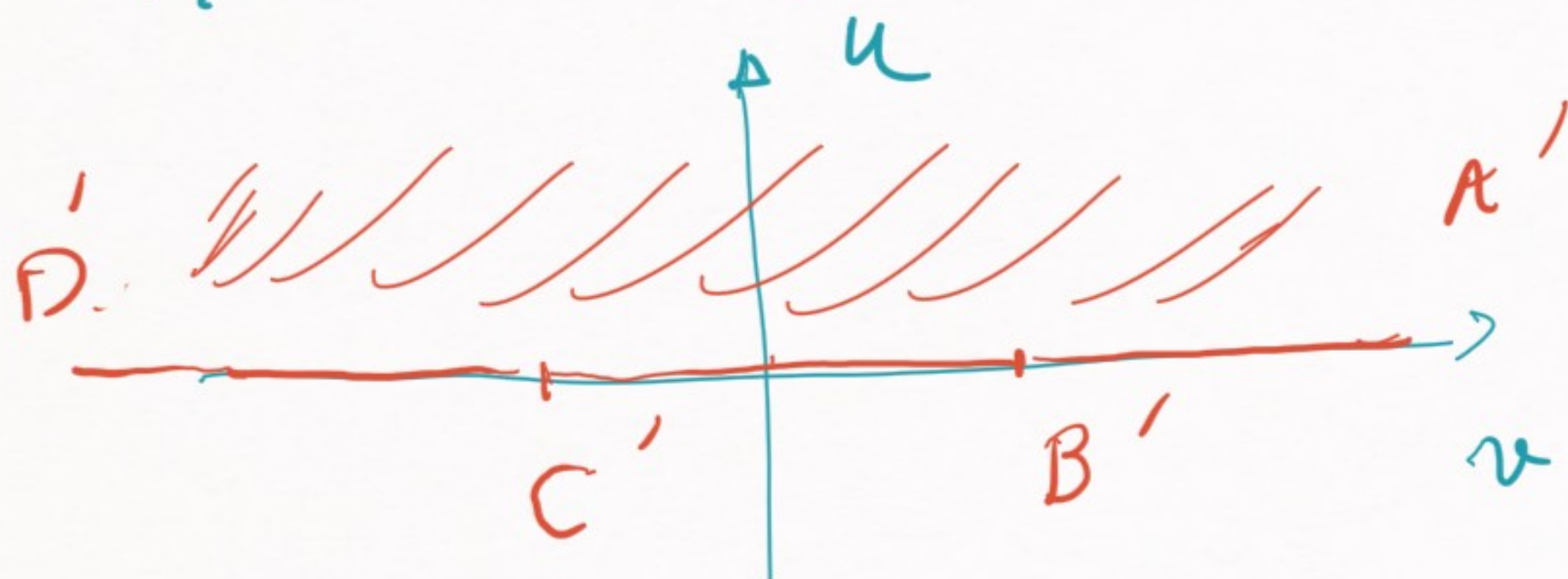
نقطه ۱۱ - ثابت نیمه تدریجی است  $w = \sin z$

در این صورت

$$x = \pi/2 \Rightarrow u = \cosh y, v = 0 \Rightarrow u = \cosh y \geq 1$$

$$x = -\pi/2 \Rightarrow u = -\cosh y, v = 0 \Rightarrow u = -\cosh y \leq -1$$

$$-\pi/2 < x < \pi/2, y = 0, -1 \leq u = \sin x \leq 1, v = 0$$





$$x=a, a \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = \sin a \cosh y \\ v = \cosh a \sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cosh y = \frac{u}{\sin a} \\ \sinh y = \frac{v}{\cosh a} \end{cases}$$

نکته ۱:  $w = \sin^2 z$  در  $\mathbb{D}$

$$\Rightarrow \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{u}{\sin a} \right)^2 - \left( \frac{v}{\cosh a} \right)^2 = 1$$

تبدیل

$$\sin a > 0$$

$$\sin a < 0$$

نمونه قبلی

$$y=a, a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin a \cosh a \\ v = \cosh a \sinh a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sinh x = \frac{u}{\cosh a} \\ \cosh x = \frac{v}{\sinh a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$$

نکته ۲:  $\mathbb{D}$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 a} + \frac{v^2}{\sinh^2 a} = 1$$

نمونه قبلی