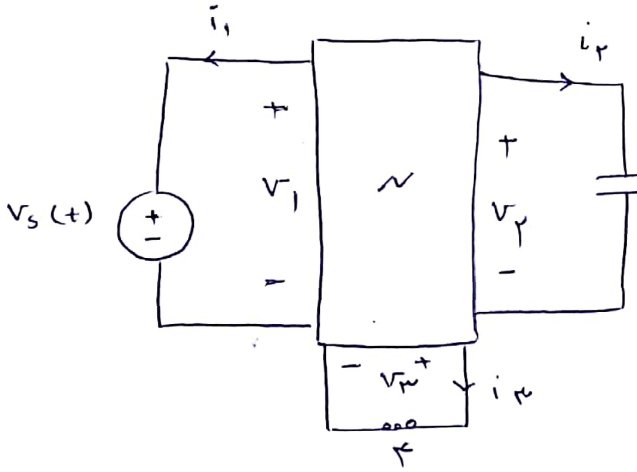
تمرین تحویلی: در مدار شکل زیر شبکه ی N تفاوتی است که با معادلات زیر توصیف می شود، معادلات حالت را برای این مدار بنویسید.



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

فرکانس طبیعی :

فرکانس های طبیعی در تحلیل شبکه های الکتریکی دارای اهمیت زیادی می باشد و برای تحلیل رفتار شبکه بسیار مناسب اند.

فرکانس طبیعی به اجزای مدار بستگی دارد و تحت شرایط ورودی صفر تعیین می شود.

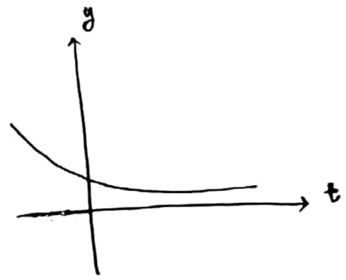
فرکانس طبیعی به منابع ورودی وابسته نیست، پاسخ کلی مدار را می توان از روی فرکانس طبیعی تشخیص داد و به کمک شرایط اولیه می توان بعضی از فرکانس های طبیعی را از مدار حذف نمود.

– جلسه شانزدهم –

کمک فرکانس‌های طبیعی در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان می‌توان پاسخ طبیعی شبکه را بازای ورودی صفر تعیین کرد.

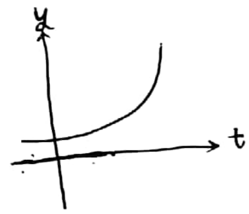
مثلاً فرض کنیم فرکانس‌های طبیعی یک مدار s_1 و s_2 باشد ← پاسخ خروجی ؟

$$\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \end{cases} \rightarrow y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}$$



★ اگر فرکانس‌های طبیعی سمت چپ محور موهومی باشند، مدار پایدار است.

$$\begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = -1 \end{cases} \rightarrow y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-t}$$



★ اگر یکی از ریشه‌ها در سمت راست محور موهومی باشد، مدار ناپایدار است.

★ اگر ریشه‌ها روی محور موهومی باشند، مدار نوسانی است.

پاسخ مدار

$$y(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t} + k_3 + k_4 e^{-t} \cos(t + \phi) + k_5 \sin 2t$$

فرکانس‌های طبیعی

$s_1 = -3 \quad s_2 = -2 \quad s_3 = 0 \quad s_{4,5} = -1 \pm j \quad s_{6,7} = \pm 2j$

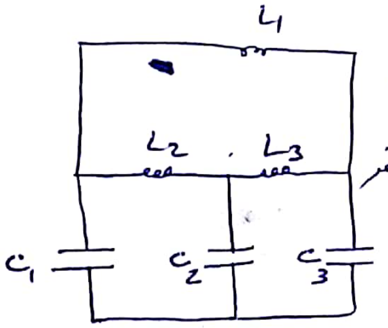
نکته: فرکانس های طبیعی هر شبکه‌ی خطی تغییرناپذیر با زمان برابر ریشه های دترمینان هر ماتریس متناظر با روش تحلیل آن شبکه می باشند.

نکته: دترمینان ماتریس روش های چهارگانه تحلیل، ریشه های غیرصفر فرکانس های طبیعی غیرصفر را به ما می دهد.

نکته: به ازای هر حلقه‌ی سلفی و یا هر کات ست خازنی یک فرکانس طبیعی صفر داریم.

نکته: فرکانس های طبیعی غیرصفر یک مدار برابر است با مجموع عناصر ذخیره کننده انرژی منهای کات ست های خازنی منهای حلقه های سلفی منهای حلقه‌های خازنی منهای کات‌ست های سلفی.

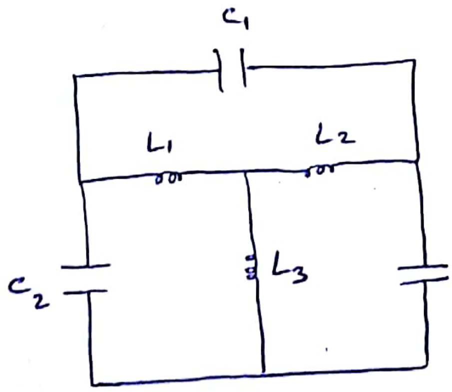
تعداد فرکانس های طبیعی = مجموع تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی − تعداد حلقه‌ها‌ی خازنی − تعداد کات ست های سلفی



تعداد فرکانس ها‌ی طبیعی = ۶ − ۰ − ۰

تعداد فرکانس ها‌ی طبیعی صفر = ۱ + ۱

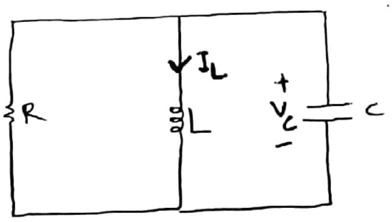
تعداد فرکانس ها‌ی غیرصفر = ۶ − ۲ = ۴



تعداد فرکانس های طبیعی = ۶ − ۱ − ۱

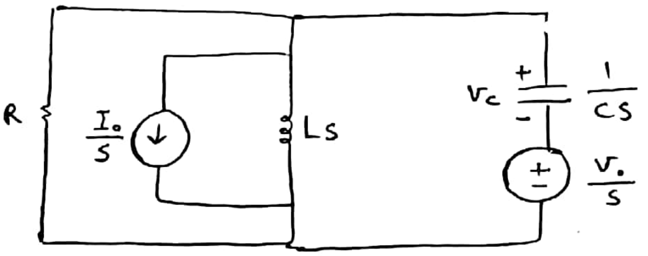
تعداد فرکانس ها‌ی صفر = ۰ + ۰

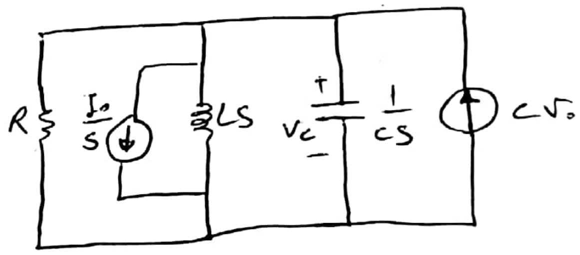
مثال: فرکانس طبیعی ولتاژ خازن را در مدار شکل زیر پیدا کنید.



(منابع وابسته در حوزه‌ی لاپلاس تغییری نمی‌کنند - منابع مستقل در محاسبه‌ی فرکانس طبیعی تأثیری ندارند - شرایط اولیه هم در مقدار فرکانس طبیعی تأثیری ندارد)

حل:





$$v_c\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Ls}+cs\right)=cv_0-\frac{I_0}{s} \Rightarrow v_c=\frac{cv_0-\frac{I_0}{s}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{Ls}+cs}$$

ریشه‌های پاسخ در حوزه‌ی لاپلاس، فرکانس طبیعی را به ما می‌دهد.

فرض: $R=\frac{1}{4},\ L=\frac{1}{25},\ c=1$ $\qquad v_c=\frac{sv_0-I_0}{s^2+4s+25}$

$$s_{1,2}=-3\pm 4j \qquad v_c(t)=ke^{-3t}\cos(4t+\varphi)$$

$R=\frac{1}{4},\ L=\frac{1}{9},\ c=1$ $\qquad v_c=\frac{sv_0-I_0}{s^2+6s+9}$

$$s_{1,2}=-3 \qquad v_c(t)=k_1e^{-3t}+k_2te^{-3t}$$

$$\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{Ls}+cs\right]\left[v_c\right]=\left[cv_0-\frac{I_0}{s}\right]$$

نکته: ریشه های معادله ی دیفرانسیل پتانسیل همان فرکانس های طبیعی مدار می باشد.

صورت کلی یک معادله ی دیفرانسیل به صورت روبرو است: $Q(D)x = 0$

مثال: معادله دیفرانسیل یک متغیر مدار به صورت

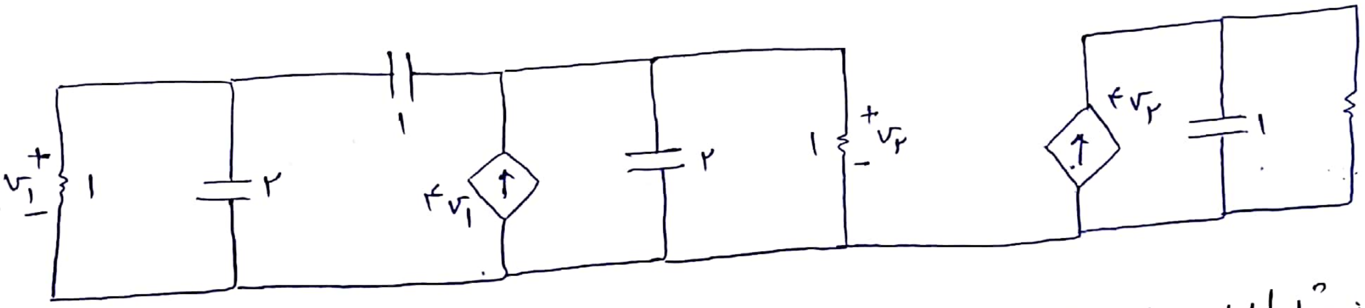
$$\frac{d^5v}{dt^5} + 2\frac{d^4v}{dt^4} + 2\frac{d^3v}{dt^3} + 2\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} = 0$$

است فرکانس های طبیعی این متغیر را محاسبه کنید؟

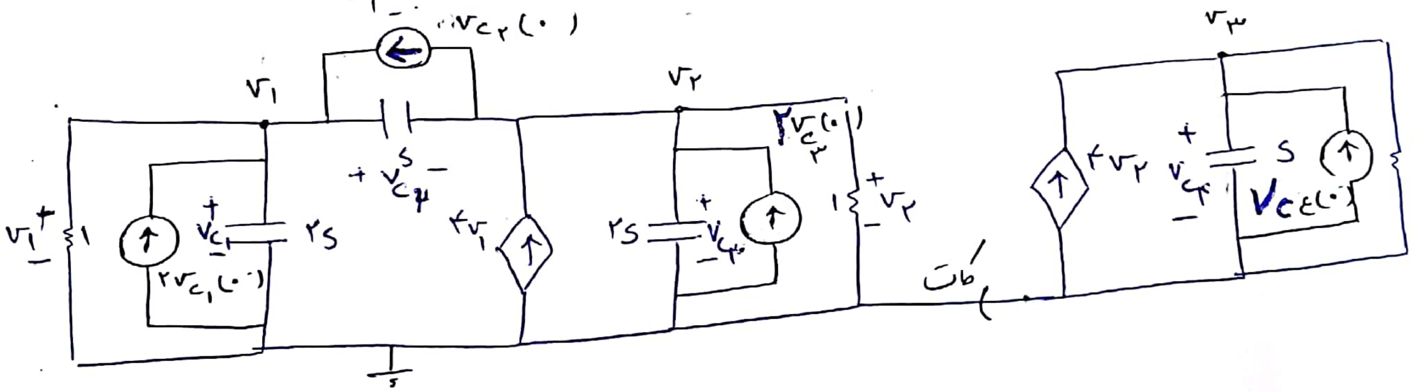
$$(s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s)v = 0$$

$$s(s+1)^2(s^2+1) = 0 \Rightarrow s = 0,\ s = \pm j,\ s = -1$$

مثال: فرکانس های طبیعی مدار شکل زیر را پیدا کنید.



حل: شرایط اولیه لحاظ می شود و مدار را به حوزه ی لاپلاس برحسب ادمیتانس می بریم



$$\begin{bmatrix} 3s+1 & -s & 0 \\ -s-4 & 3s+1 & 0 \\ 0 & 0-4 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{c_1}(0) + v_{c_2}(0) \\ \cancel{4v_1} + 2v_{c_3}(0) - v_{c_2}(0) \\ v_{c_4}(0) + \cancel{4v_2} \end{bmatrix}$$

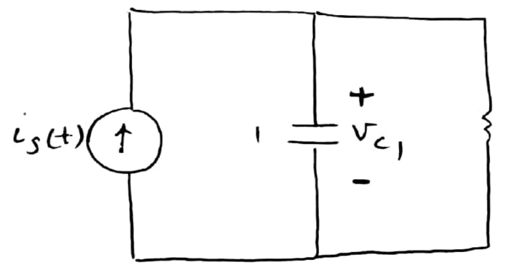
$$\det(Y_n) = 0 \rightarrow (s+1)\left((3s+1)^2 - s(s+4)\right) = 0 \rightarrow s = \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{8}$$

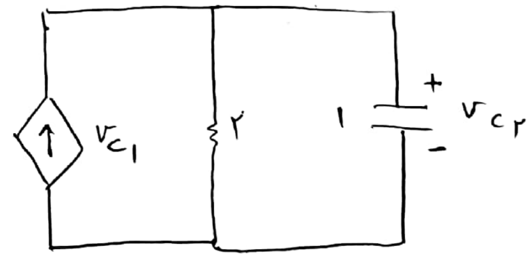
$$s = -1$$

نکته: لزوماً فرکانس های طبیعی یک مدار، فرکانس های متغیرهای یک مدار نیست یا به عبارت دیگر لزوماً تمامی فرکانس های مدار جزء فرکانس های هر متغیر مدار نیست.

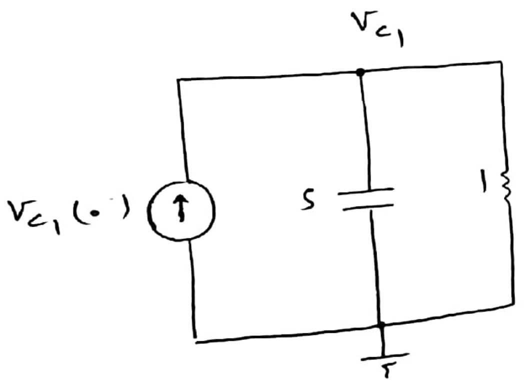
* اگر $s \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ یک شاخه باشد آنگاه $s \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان آن شاخه نیز خواهد بود و برعکس.

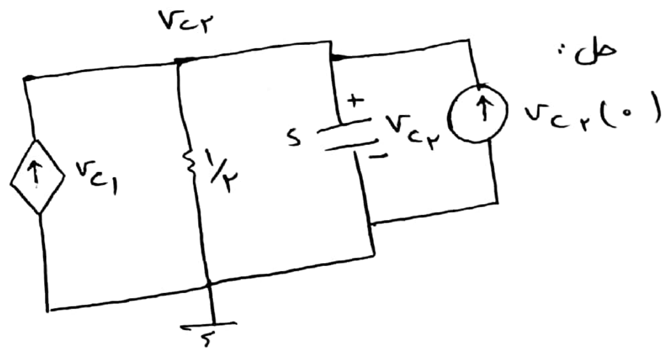
مثال: فرکانس های طبیعی v_{c_1} و v_{c_2} را برای مدار شکل زیر بیابید.





حل:





$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c_1}(0) \\ v_{c_2}(0) + \cancel{v_{c_1}} \end{bmatrix}$$

$$\det(Y_n) = 0 \qquad (s+1)(s+1/2) = 0 \longrightarrow s=-1 \,,\ s=-1/2$$

$$v_{c_1} = \frac{\begin{vmatrix} v_{c_1}(0) & 0 \\ v_{c_2}(0) & s+1/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1/2 \end{vmatrix}} = \frac{(s+1/2)\, v_{c_1}(0)}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{v_{c_1}(0)}{s+1}$$

$s=-1$ فرکانس طبیعی v_{c_1}

ادامه‌ی حل:

$$V_{C_2} = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & V_{C_1}(0) \\ -1 & V_{C_2}(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = \frac{(s+1)V_{C_2}(0) + V_{C_1}(0)}{(s+1)(s+1/2)} \rightarrow \begin{cases} s=-1 \\ s=-1/2 \end{cases}$$

فرکانس های طبیعی V_{C_2}

$$V_{C_2} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-t/2}$$

هدف: حذف فرکانس طبیعی $s=-1$ از V_{C_2}

$$V_{C_2} = \frac{k(s+1)}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{k}{s+1/2} \longrightarrow V_{C_2} = k_2 e^{-t/2}$$

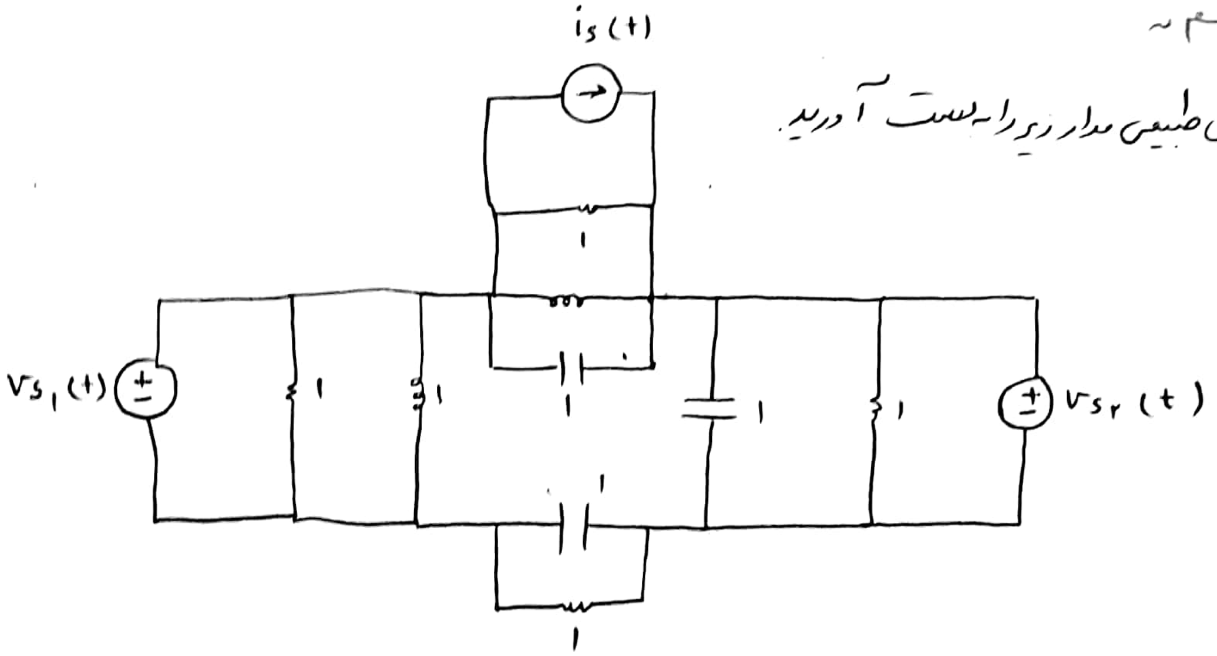
باید صورت مضربی از $(s+1)$ باشد: ($s=-1$ در صورت صدق کند)

$$s=-1 \longrightarrow 0 \times V_{C_2}(0) + V_{C_1}(0) = 0 \longrightarrow V_{C_1}(0) = 0$$

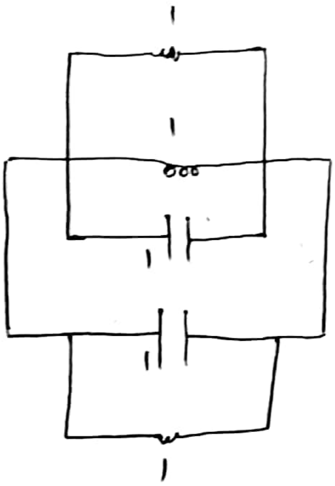
$$\begin{pmatrix} V_{C_1}(0) \\ V_{C_2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{C_2}(0) \end{pmatrix}$$

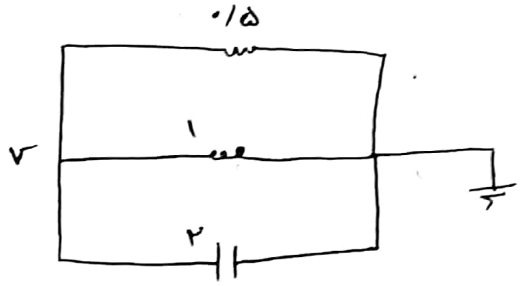
— جلسه هفدهم —

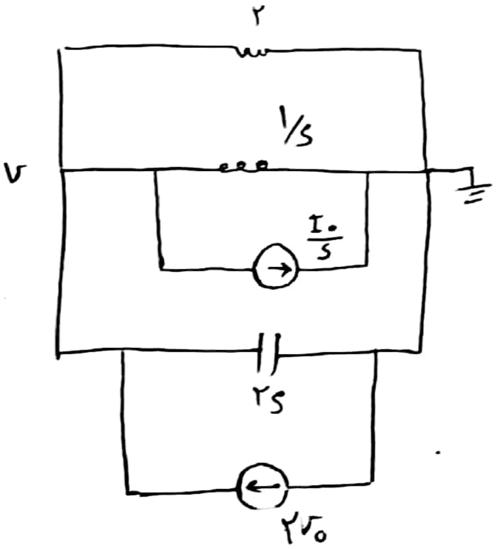
مثال: فرکانس های طبیعی مدار زیر را بدست آورید.



حل: منابع مستقل را حذف می‌کنیم:





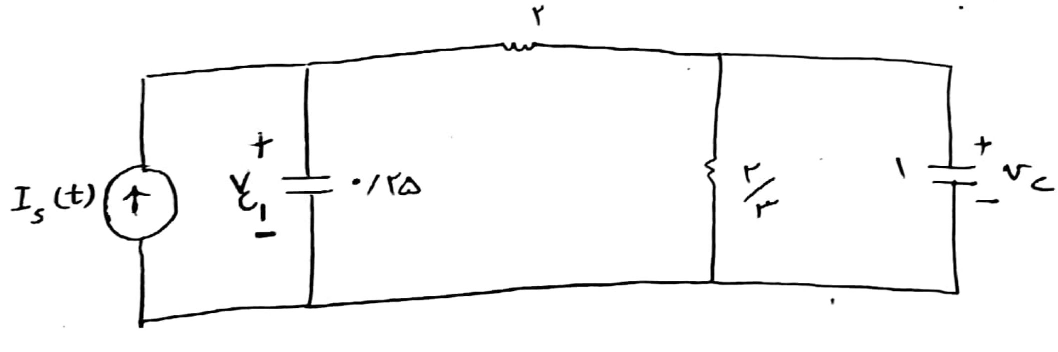


$$\left[2s + \frac{1}{s} + 2\right]\left[v\right] = \left[2v_0 - \frac{I_0}{s}\right]$$

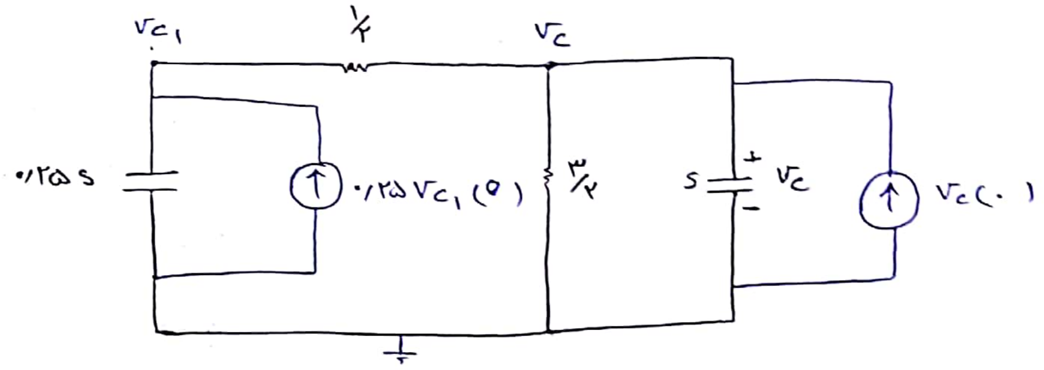
$$2s + \frac{1}{s} + 2 = 0 \rightarrow 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{j}{2}$$

مثال: فرکانس های طبیعی مدار زیر را محاسبه کنید و شرایط اولیه را به گونه‌ای تعیین کنید بطوری که v_C فرکانس طبیعی بزرگتر را داشته باشد.



حل:



$$\begin{bmatrix} 0.125s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125v_{c_1}(0) \\ v_c(0) \end{bmatrix}$$

$$\det(Y_n)=0 \rightarrow (0.125s+1/2)(s+2)-\frac{1}{4}=0 \rightarrow \begin{cases} s=-1 \\ s=-3 \end{cases}$$ فرکانس‌های طبیعی مدار

$$v_c = \frac{(0.125s+1/2)v_c(0)+1/2\times 1/4\, v_{c_1}(0)}{0.125(s+1)(s+3)}$$ $\begin{cases} s=-1 \\ s=-3 \end{cases}$ فرکانس‌های طبیعی v_c

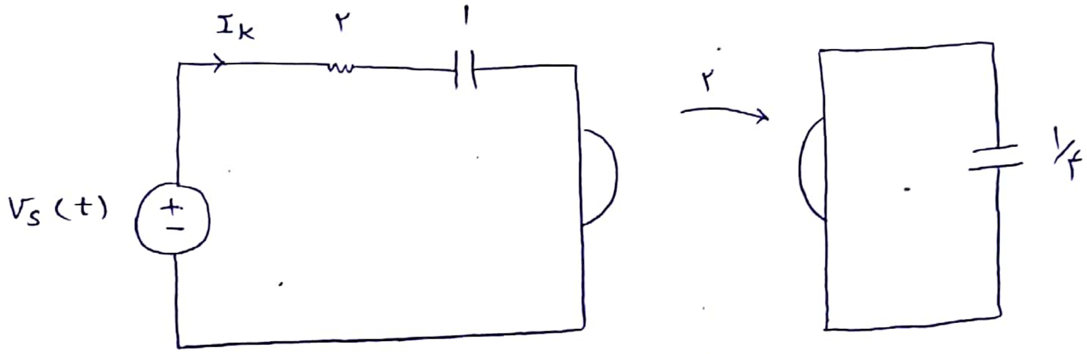
$$v_c(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-3t}$$

برای حذف فرکانس طبیعی $s=-3$ باید صورت مضربی از $(s+3)$ باشد ، یعنی صورت بر $s+3$ بخش پذیر باشد
یعنی $s=-3$ در صورت صدق کند

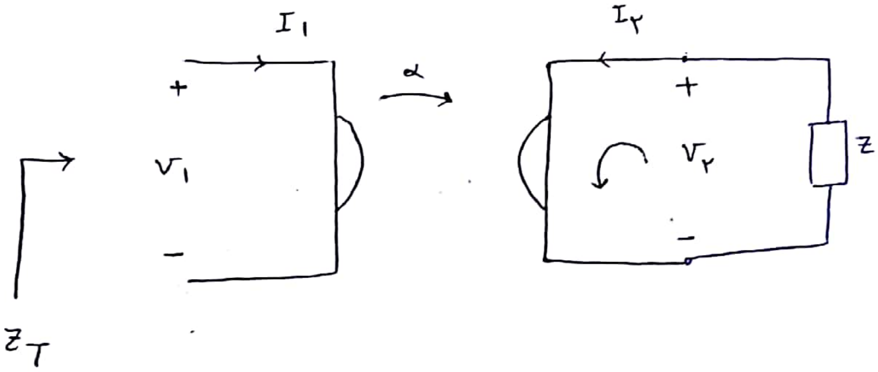
$$s=-3 \Rightarrow (0.125(-3)+1/2)\ v_c(0)+\frac{1}{8}v_{c_1}(0)=0 \rightarrow v_{c_1}(0)=2v_c(0)$$

$$\begin{pmatrix} v_{c_1}(0) \\ v_c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_c(0) \\ v_c(0) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ or} \ldots$$

مثال: فرکانس طبیعی متغیر I_k را در مدار شکل زیر بیابید.



حل:



نسبت چرخش

$$v_1 = \alpha I_2$$

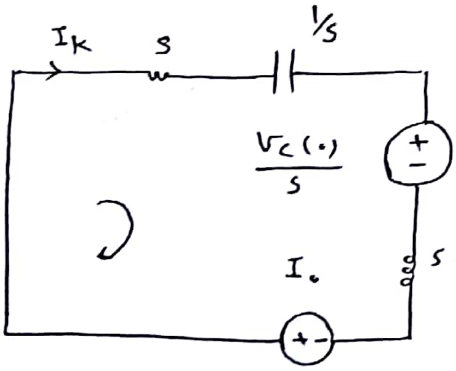
$$v_2 = -\alpha I_1$$

$$Z_T = \frac{v_1}{I_1} \qquad v_2 + Z I_2 = 0 \rightarrow v_2 = -Z I_2 \rightarrow I_2 = \frac{-v_2}{Z}$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{-\alpha}{Z} v_2 = \frac{2\alpha I_1}{Z} \longrightarrow Z_T = \frac{v_1}{I_1} = \frac{\alpha^2}{Z}$$

خازن

$$Z_C = \frac{1}{CS} = \frac{4}{S} \longrightarrow Z_T = \frac{4}{\frac{4}{S}} = S$$ سلف ← حل مثال: ژیراتور رفتار مدار را تغییر می دهد



$$(2 + \frac{1}{s} + s) I_k = I(0) - \frac{V_C(0)}{s}$$

$$s^2 + 2s + 1 = 0 \longrightarrow s = -1, -1$$

$$I_k(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-t}$$

کاربرد معادلات حالت در محاسبه‌ی فرکانس طبیعی

$$\det(SI-A)=0$$

ریشه‌های دترمینان ماتریس $(SI-A)$ همان فرکانس های طبیعی مدار می باشد.

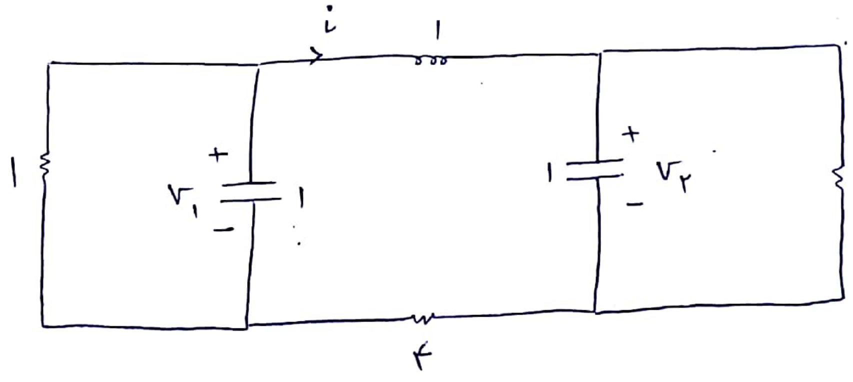
نکته: مقادیر ویژه یک ماتریس مانند A بصورت زیر بدست می آید:

$$\det(\lambda I-A)=0 \rightarrow \lambda_i=?$$

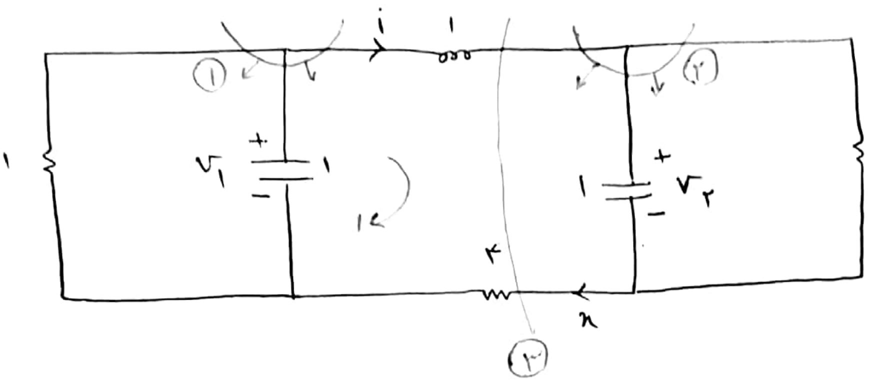
نکته: اگر شرایط اولیه مدار، در راستای بردار ویژه u_i قرار گیرد اولاً مسیر حالت در راستای بردار ویژه است دوماً تمامی متغیرهای شبکه متناسب با $e^{s_i t}$ خواهد بود که در این رابطه s_i یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A می باشد و u_i بردار ویژه‌ی متناظر با این مقدار ویژه است:

$$s_i u_i - A u_i = 0 \rightarrow (s_i I - A)u_i = 0$$

مثال: فرکانس های طبیعی مدار زیر را با استفاده از معادلات حالت تعیین نمایید و شرایط اولیه مدار را طوری تعیین کنید که متغیرهای شبکه متناسب با e^{-t} باشد.



حل:



نوشتن معادلات حالت:

$$① : \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{1} + i = 0 \longrightarrow \frac{dv_1}{dt} = -v_1 - i$$

$$② : \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{1} - i = 0 \longrightarrow \frac{dv_2}{dt} = i - v_2$$

$$1 : \frac{di}{dt} + v_2 + 4x - v_1 = 0 \longrightarrow \frac{di}{dt} = -v_2 - 4x + v_1 = v_1 - v_2 - 4i$$

$$③ : x - i = 0 \longrightarrow x = i$$

$sI - A$

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(s+1)\big((s+1)(s+4)+1\big) - 1\big(-(s+1)\big) = 0 \rightarrow s=-1,\; s=-2,\; s=-3$$

فرکانس های طبیعی مدار

$$(s_i I - A)u_i = 0 \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

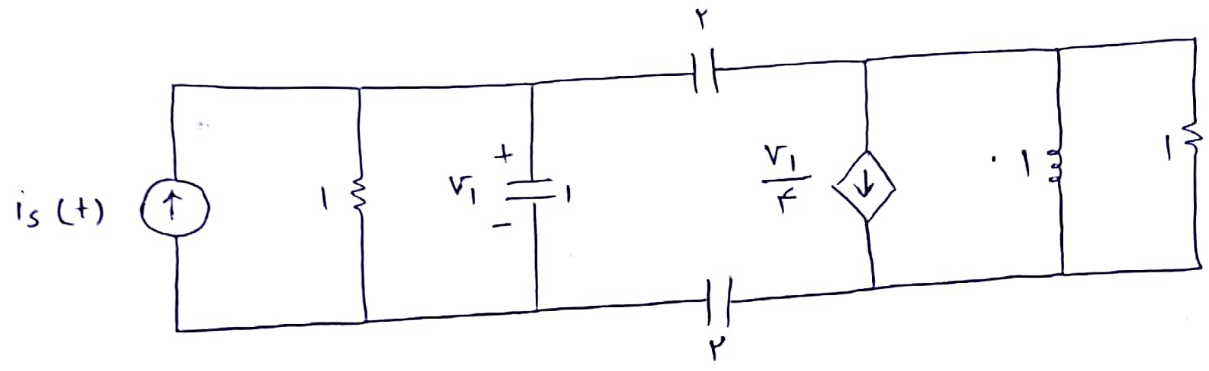
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u_3 = 0 \\ -u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 + 3u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = u_2 \\ u_3 = 0 \end{matrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_{c1}(0) \\ v_{c2}(0) \\ i_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{c1}(0) \\ v_{c1}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots$$

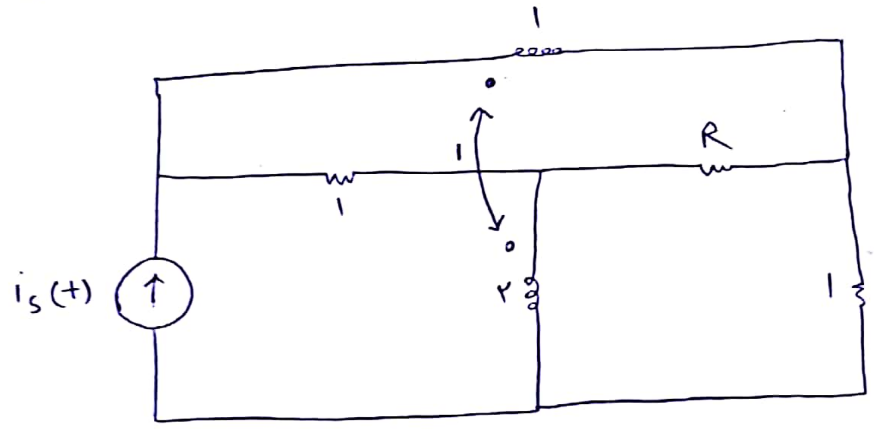
* اگر شرایط اولیه در راستای بردار ویژه باشند، تنها فرکانس طبیعی متناظر با بردار ویژه در مدار باقی می ماند.

- جلسه هیجدهم -

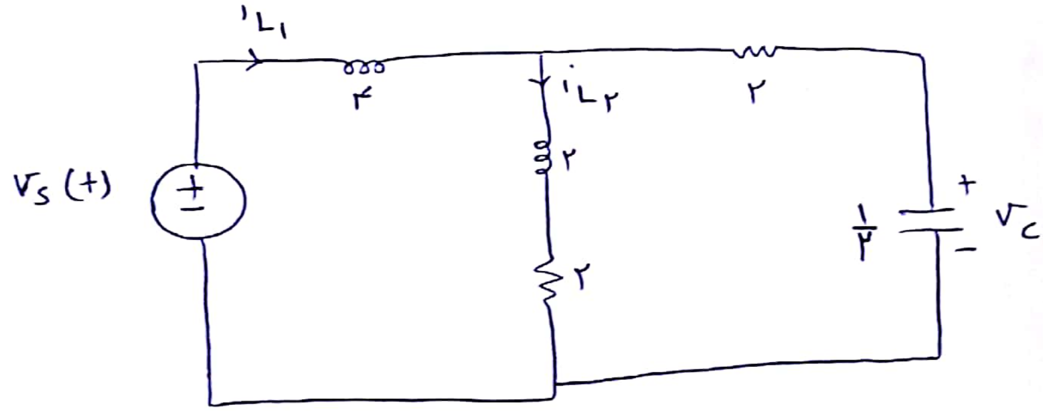
تمرین تحویلی: فرکانس‌های متغیر v_1 را در مدار زیر بدست آورید



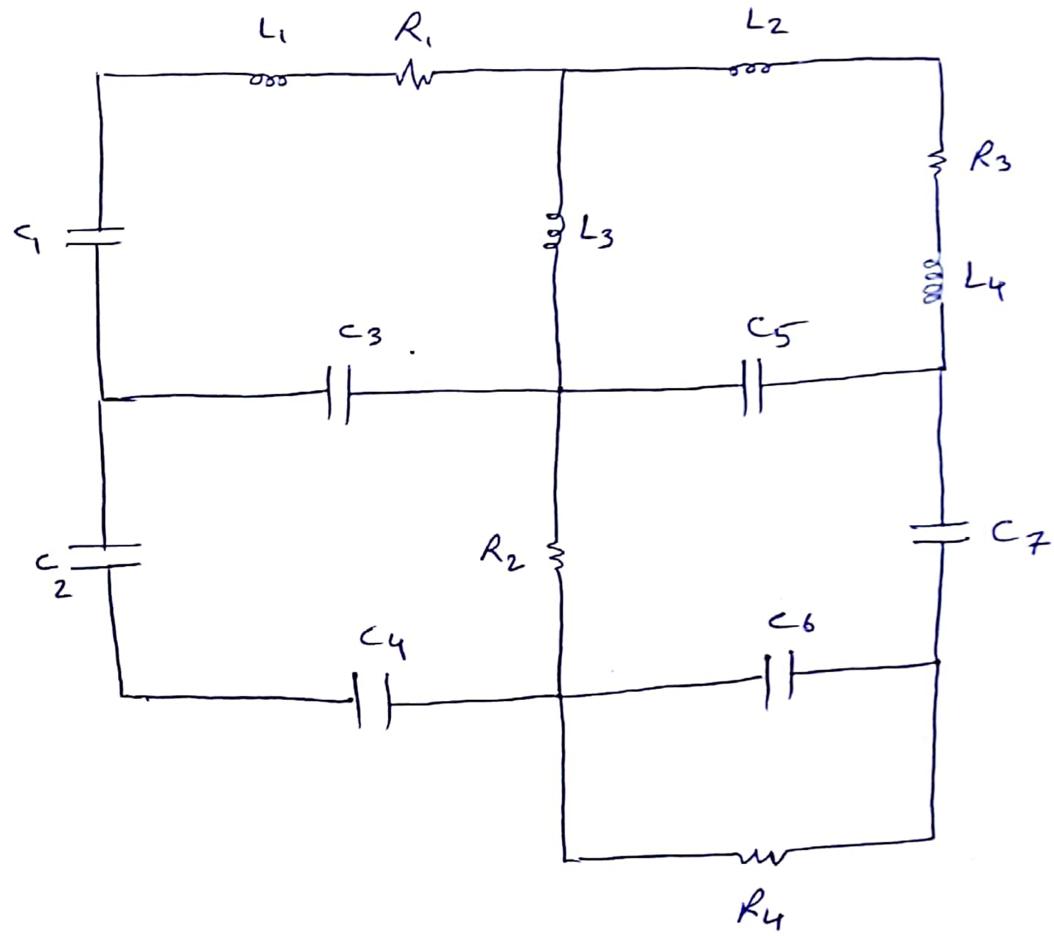
تمرین تحویلی: در مدار شکل زیر R را چنان تعیین کنید که $s=-۳$ یکی از فرکانس‌های طبیعی مدار باشد.



تمرین تحویلی: در مدار شکل زیر شرایط اولیه را طوری تعیین کنید که مدار تنها دارای کوچک‌ترین فرکانس طبیعی باشد.



تمرین تحویلی: در مدار شکل زیر مرتبه‌ی مدار، تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر را تعیین کنید. (با ذکر دلیل)



۲