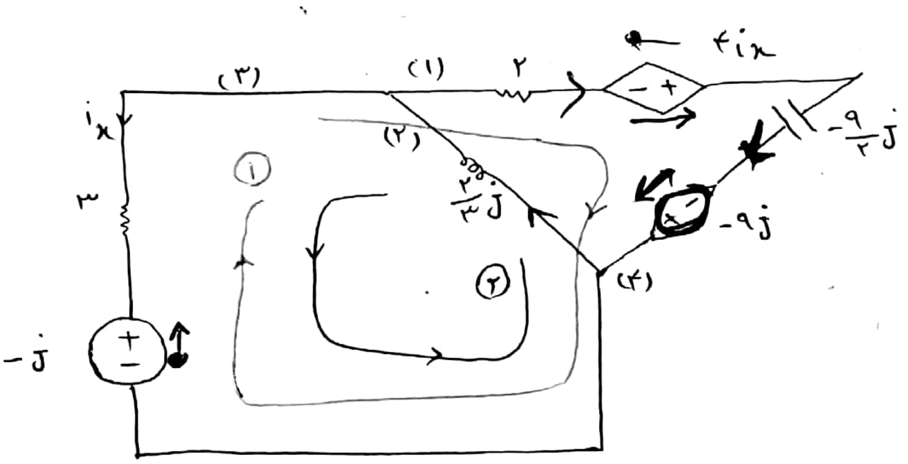
حل: یعنی مدار را به حوزه‌ی فرکانس ببریم

$A\sin\omega t \longleftrightarrow -Aj$

$A\cos\omega t \longleftrightarrow A$

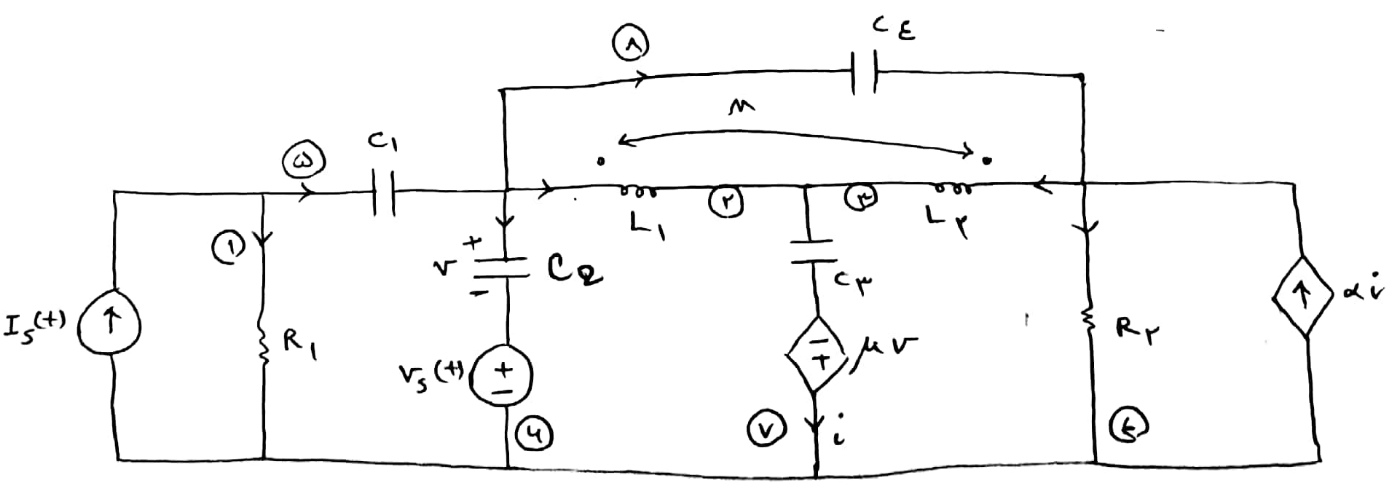


$i_x = I_2 - I_1$

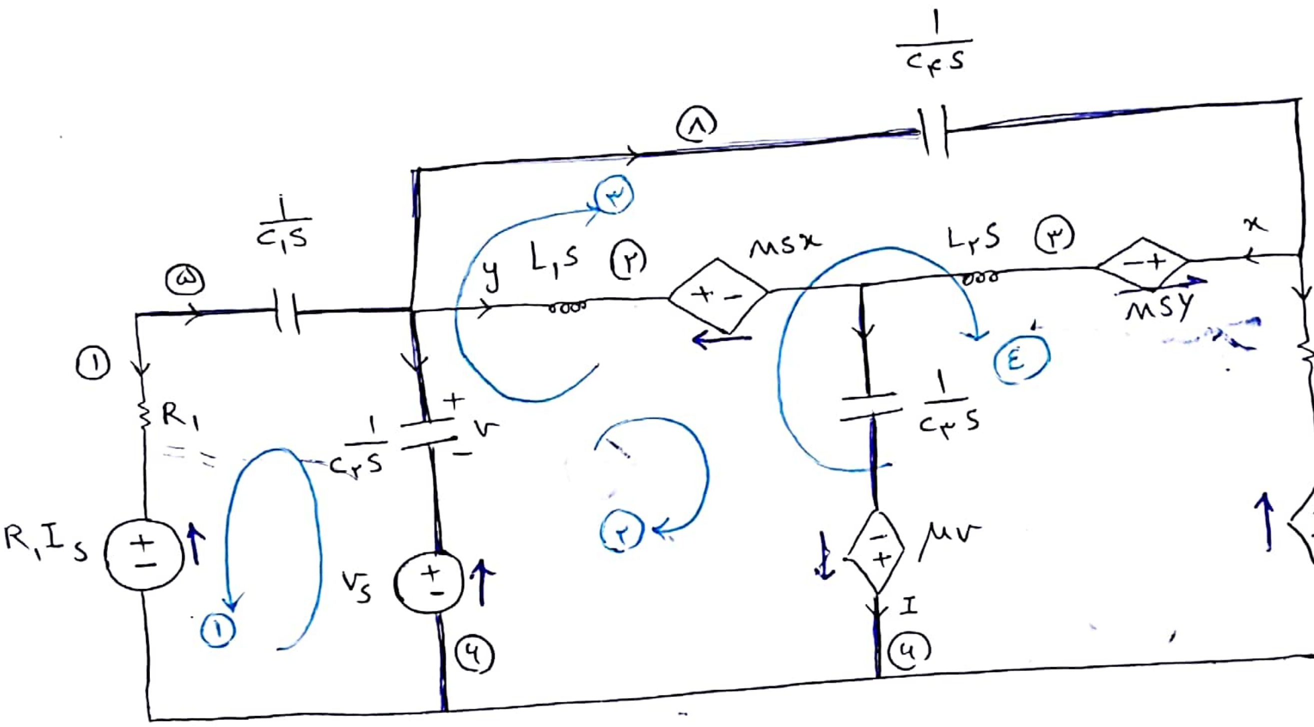
$$Z_L = \begin{bmatrix} 2-\frac{9}{2}j+3 & -3 \\ -3 & 3+\frac{2}{3}j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j-9j+4i_x \\ j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-9/2\,j+3+4 & -3-4 \\ -3 & 2/3\,j+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j-9j \\ j \end{bmatrix}$$

مثال: در مدار شکل زیر با در نظر گرفتن ۴ خازن C_1 و C_2 و C_3 و C_4 به عنوان شاخه‌های درخت، ماتریس B را نوشته و معادلات حلقه را بدست آورید.



حل:



$$
\begin{array}{cc}
 & \text{شاخه} \\
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\text{حلقه} & \\
B_{ij} = \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

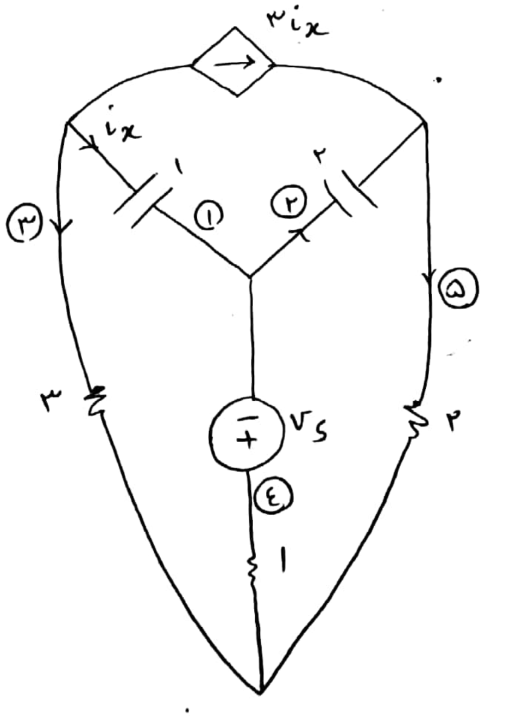
$$
\begin{bmatrix}
R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} \\
\frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + L_1 s + \frac{1}{C_3 s} & \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_3 s} & \frac{1}{C_2 s} \\
\frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_3 s} & \frac{1}{C_4 s} + L_2 s + \frac{1}{C_3 s} + \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_4 s} + \frac{1}{C_2 s} \\
\frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_4 s} + \frac{1}{C_2 s} & R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_4 s}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix}
-R_1 I_s + V_s \\
-MSx + \mu v + V_s \\
-MSy + \mu v + V_s \\
-R_2 \alpha I + V_s
\end{bmatrix}
$$

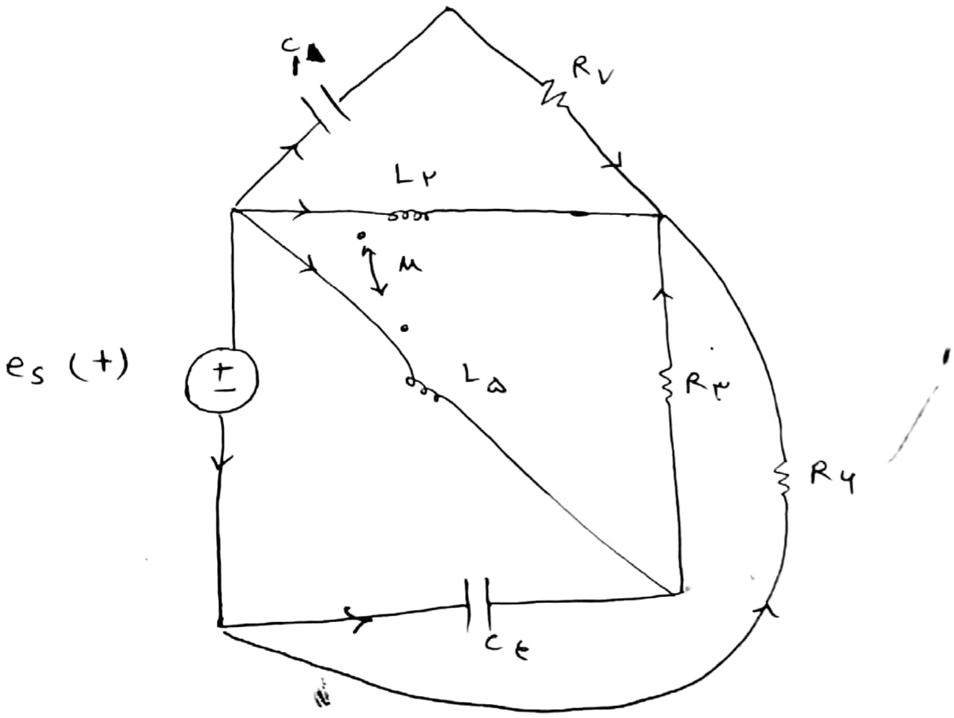
$x = I_3 \qquad y = I_2 \qquad v = \frac{-1}{C_2 s}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \qquad I = I_2 + I_3$

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} \\ \frac{1}{C_2 s} + \frac{\mu}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + L_1 s + \frac{1}{C_3 s} + \frac{\mu}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_3 s} + Ms + \frac{\mu}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + \frac{\mu}{C_2 s} \\ \frac{1}{C_2 s} + \frac{\mu}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_3 s} + Ms + \frac{\mu}{C_2 s} & \frac{1}{C_4 s} + L_2 s + \frac{1}{C_3 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\mu}{C_2 s} & \frac{1}{C_4 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\mu}{C_2 s} \\ \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} + \alpha R_2 & \frac{1}{C_4 s} + \frac{1}{C_2 s} + \alpha R_2 & R_2 + \frac{1}{C_3 s} + \frac{1}{C_4 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 I_s + V_s \\ V_s \\ V_s \\ V_s \end{bmatrix}$$

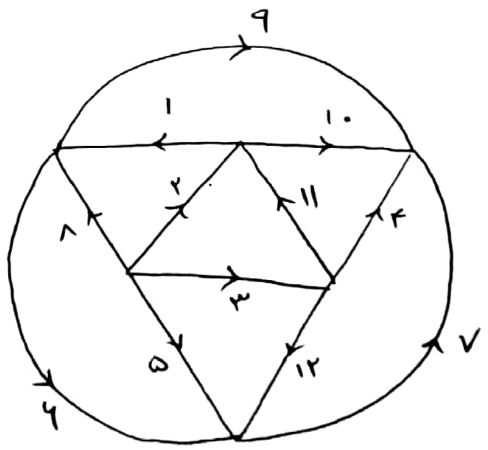
تمرین کلاسی: معادلات حلقه را برای مدار شکل زیر با فرض شاخه‌های درختی ۳ و ۴ و ۵ بنویسید.



تمرین تحویلی : معادلات حلقه را برای مدار شکل زیر با در نظر گرفتن شاخه های L۵ ، R۶ و R۷ به عنوان شاخه های درخت بنویسید.



تمامی حلقه های اساسی گراف شکل زیر و ماتریس B را بنویسید.



۴- تجزیه و تحلیل کات ست:

در این روش شاخه‌های درختی را انتخاب می‌کنیم و سپس شاخه‌های لینکی را از ۱ تا n_L شماره گذاری می‌کنیم و شاخه‌های درختی را از n_L+1 تا b شماره گذاری می‌کنیم. پس متناظر با هر شاخه‌ی درختی یک کات ست اساسی می‌زنیم و معادلات مربوطه را می‌نویسیم. جهت کات ست هم جهت با جهت شاخه‌ی درختی می‌باشد. متغیرهای مستقل در این روش ولتاژ شاخه‌ای درختی است و هدف نوشتن دستگاه معادلات زیر جهت محاسبه‌ی متغیرها می‌باشد.

$$Y_q E = I_s$$

← ماتریس ادمیتانس کات ست

بردار ولتاژ شاخه‌های درختی

ماتریس اشتراک شاخه و کات ست:

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- اگر جهت شاخه‌ی j ام هم جهت با جهت کات ست i ام باشد.} \\ -1 & \text{- اگر جهت شاخه‌ی j ام خلاف جهت با جهت کات ست i ام باشد.} \\ 0 & \text{- اگر شاخه‌ی j ام در کات ست i ام نباشد.} \end{cases}$$

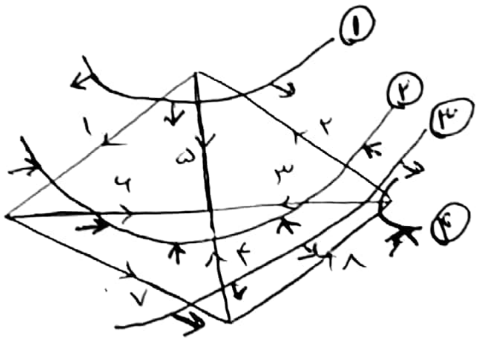
نکته: رابطه‌ی زیر بین جریان شاخه‌ها و ماتریس Q برقرار است:

$$QJ = 0$$

نکته: رابطه‌ی روبرو بین ولتاژ شاخه‌ها و ولتاژ کات ست و ماتریس Q برقرار است:

$$V = Q^T E$$

مثال: برای گراف شکل زیر ماتریس Q را بنویسید و درستی روابط $QJ=0$ و $V=Q^TE$ را بررسی کنید.



حل: در شماره‌گذاری ابتدا شاخه‌های لینک و سپس شاخه‌های درختی را شماره‌گذاری می‌کنیم.

تعداد شاخه‌های درختی $۵ - ۱ = ۴$ شاخه‌های لینک

۵، ۶، ۷، ۸   ۱، ۲، ۳، ۴

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{array} \\
\text{کات } ۱،۵،۲ \leftarrow ۵ & & \\
۱،۶،۴،۳،۲ \leftarrow ۶ & Q= & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
۷،۴،۳،۲ \leftarrow ۷ & & \\
۸،۳،۲ \leftarrow ۸ & &
\end{array}
$$

بردار جریان شاخه‌ها: $J_1 , \dots , J_8$

بردار ولتاژ مستقل: E_5 , E_6 , E_7 , E_8
(ولتاژ شاخه‌های درختی)

کات‌ست ۵: $J_1 + J_5 - J_2 = 0$ کات‌ست ۷: $-J_2 - J_3 - J_4 + J_7 = 0$

کات‌ست ۶: $-J_1 + J_6 + J_4 + J_3 + J_2 = 0$ کات‌ست ۸: $-J_2 - J_3 + J_8 = 0$

- جمع جبری جریان کات‌ها برابر صفر است

$$
Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_8 \end{bmatrix}
$$

$V_1 = E_5 - E_6$

$V_2 + E_5 + E_7 - E_6 + E_8 = 0$

$V_3 - E_6 + E_7 + E_8 = 0$

$V_4 - E_6 + E_7 = 0$

$E_5 = V_5$ $V_6 = E_7$ $V_7 = E_7$

$V_8 = E_8$

نکته: روابط زیر بین ماتریس B و Q برقرار است:

$$QB^T = 0 \qquad E = -F^T$$

$$BQ^T = 0 \qquad F = -E^T$$

نکته:

$$B = [\, I \mid E \,] \qquad Q = [\, F \mid I \,]$$

ابعاد به تعداد شاخه های لینکی $(I_{n_L \times n_L})$ ابعاد به تعداد شاخه های درختی $(I_{n \times n})$

عناصر ماتریس Y_q بصورت زیر مشخص می شود:

$$Y_{q_{ij}} = \begin{cases} \text{مجموع ادمیتانس ها موجود در کات ست i ام} & i = j \\ \text{مثبت یا منفی مجموع ادمیتانس های مشترک بین کات ست i ام و کات ست j ام} & i \neq j \end{cases}$$

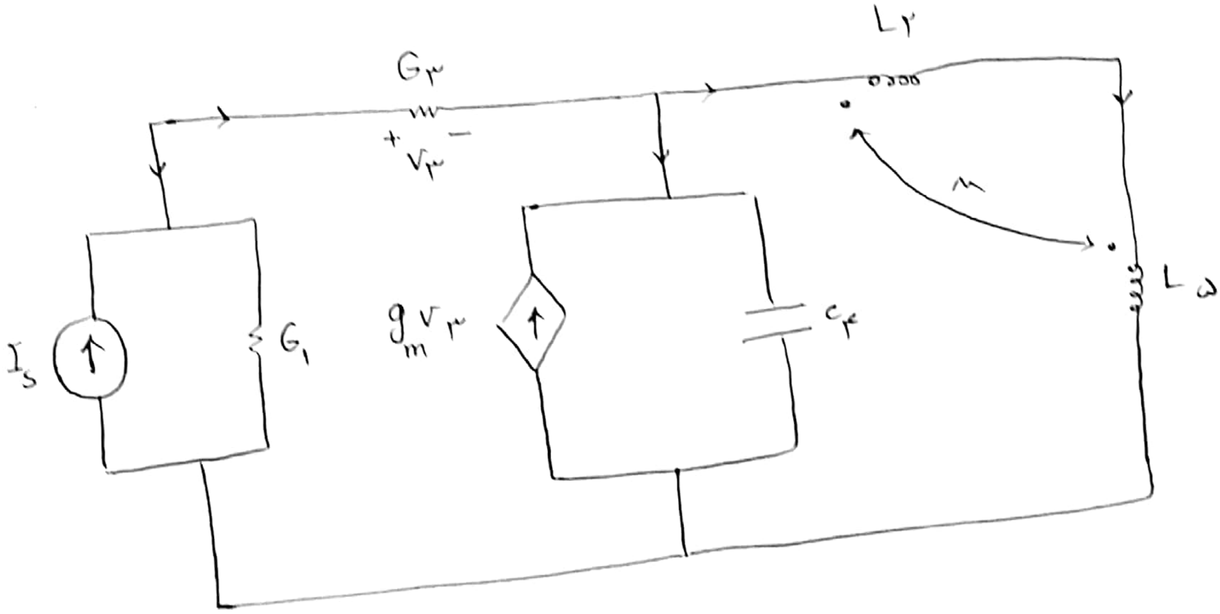
نکته: در صورتی که در شاخه ی مشترک جهت کات ست ها یکسان باشد علامت مثبت را در نظر می گیریم و در صورتی که در شاخه ی مشترک جهت کات ست ها یکی نباشد علامت منفی را در نظر می گیریم.

نکته: در روش تحلیل کات ست کلیه منابع باید از جنس جریان باشند، اگر جهت منبع جریان هم جهت با جهت کات ست باشد آنگاه با علامت منفی لحاظ می گردد و در صورتی که جهت منبع جریان خلاف جهت کات ست باشد با علامت مثبت در بردار منابع لحاظ می شود.

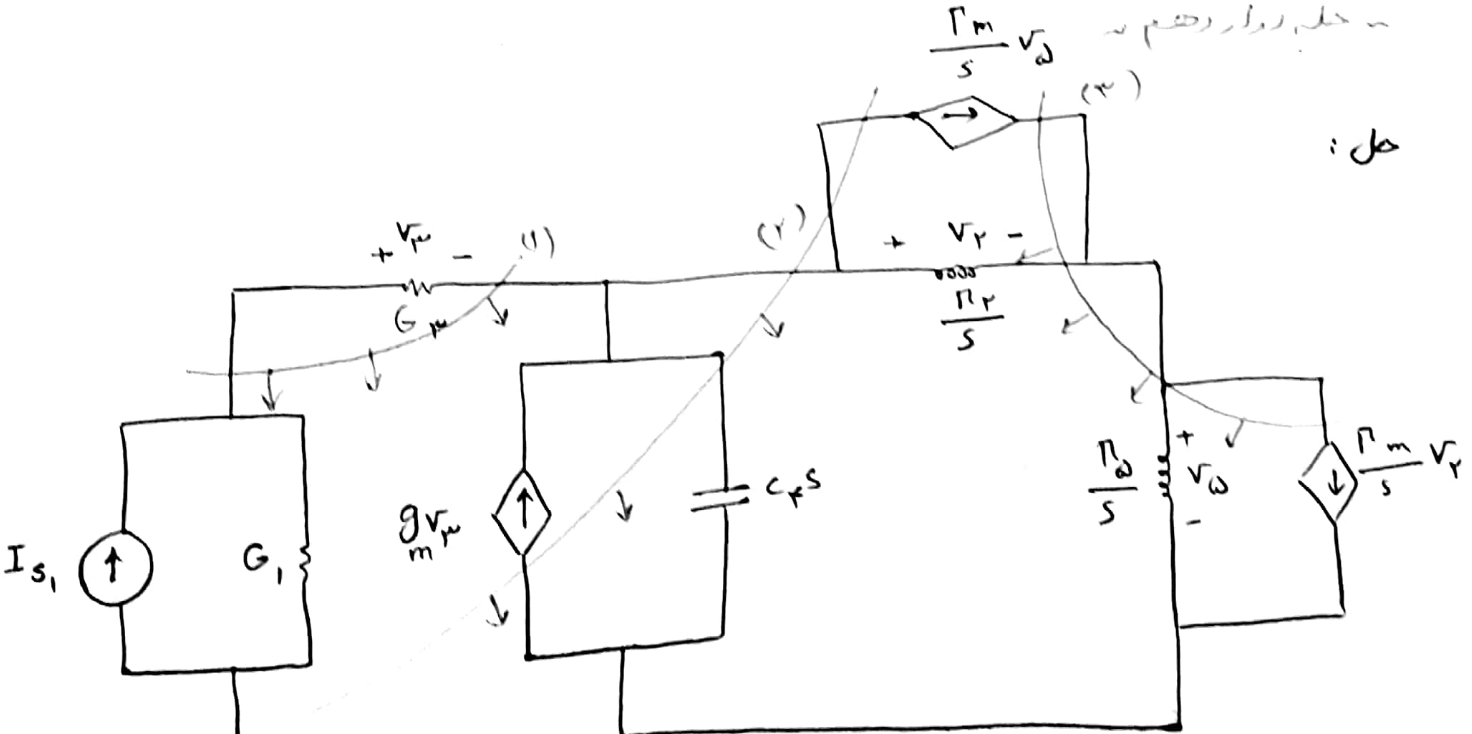
نکته: در صورت وجود منابع وابسته در ابتدا آنرا بصورت منابع مستقل فرض نموده و معادلات مربوطه را می نویسیم و بین عبارت هایی در سمت راست معادله براساس متغیرهای مستقل می باشند به سمت چپ انتقال می دهیم.

نکته: در صورت وجود سلف‌های دارای تزویج آنها را به صورت اتصال موازی سلف‌های بدون تزویج و منابع جریان وابسته تبدیل می‌کنیم و پس با استفاده حالت قبل عمل می‌کنیم.

مثال: معادلات کات‌ست را برای مدار شکل زیر بنویسید.



حل:



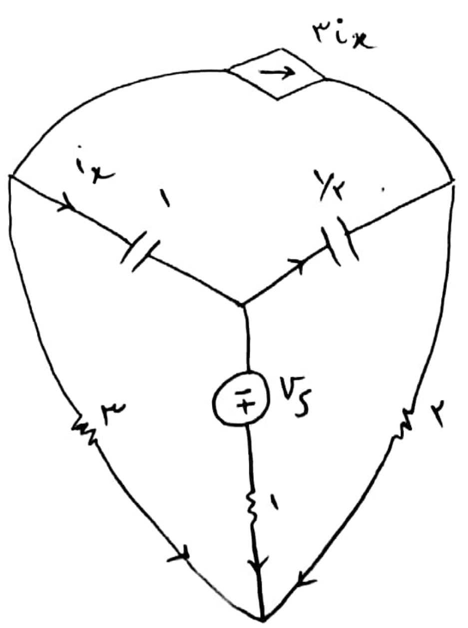
ادامه‌ی حل:

$$L = \begin{bmatrix} L_2 & M \\ M & L_5 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{L_5}{L_2 L_5 - M^2} & \frac{-M}{L_2 L_5 - M^2} \\ \frac{-M}{L_2 L_5 - M^2} & \frac{L_2}{L_2 L_5 - M^2} \end{bmatrix}$$

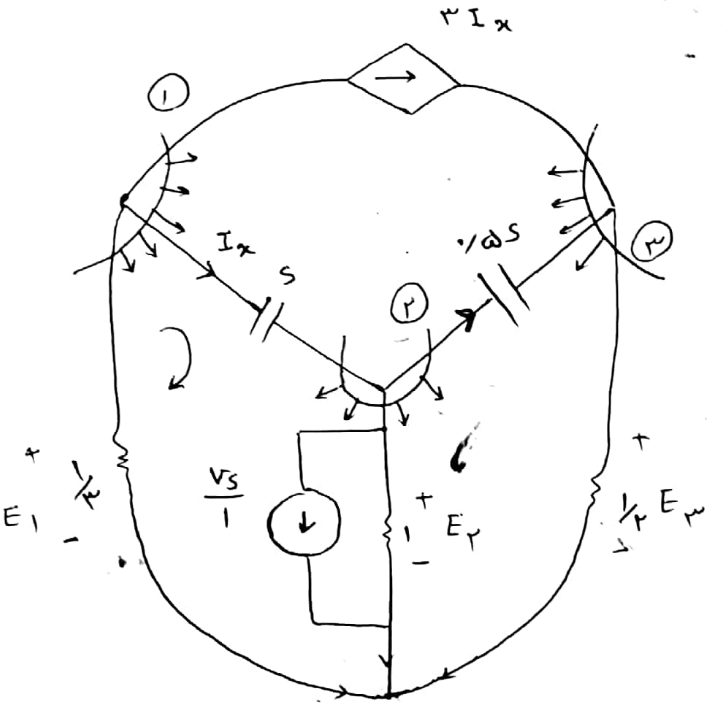
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 & G_1 & 0 \\ G_1 - g_m & G_1 + C_4 s + \frac{\Gamma_2}{s} & -\frac{\Gamma_2}{s} + \frac{\Gamma_m}{s} \\ 0 & -\frac{\Gamma_2}{s} + \frac{\Gamma_m}{s} & \frac{\Gamma_2}{s} + \frac{\Gamma_5}{s} - \frac{2\Gamma_m}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I_{s_1} \\ I_{s_1} + \cancel{g_m V_3} - \cancel{\frac{\Gamma_m}{s} V_5} \\ \cancel{\frac{\Gamma_m}{s} V_5} - \cancel{\frac{\Gamma_m}{s} V_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} V_3 &= E_3 \\ V_5 &= E_5 \\ V_2 &= E_4 - E_5 \end{aligned}$$

مثال: معادلات کات ست را برای مدار شکل زیر با فرض شاخه‌های مقاومتی به عنوان شاخه‌های درختی بنویسید



حل:



$$v = ZI \qquad \frac{I_x}{s} + E_2 - E_1 = 0$$

$$\Rightarrow I_x = s\,(E_1 - E_2)$$

$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{3}+3s & -s-3s & 0 \\ -s & s+1+0.5s & -0.5s \\ 0-3s & 0.5s+3s & 0.5s+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cancel{3I_x} \\ -V_s \\ +\cancel{3I_x} \end{bmatrix}$$

مثال: درصورتی که ماتریس B یک مدار بصورت زیر باشد، ماتریس Q آن را بدون رسم گراف مستقیماً بدست آورید:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درخت   لینک   درخت   درخت   درخت   لینک   لینک

$$B = \begin{array}{c} \text{لینک} \quad \text{درخت} \\ \begin{bmatrix} I_L \,|\, E \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} F \,|\, I_n \end{bmatrix} \\ \text{لینک} \quad \text{درخت} \end{array}$$

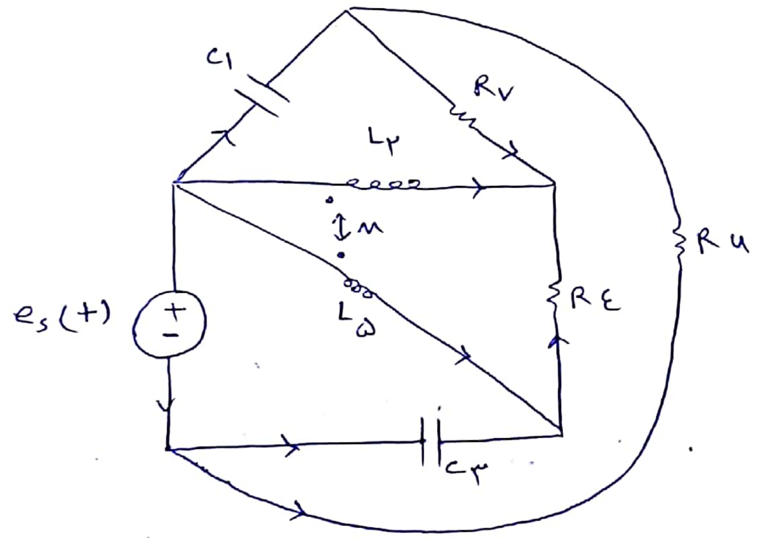
حل:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = -E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

* جلسه سیزدهم *

تمرین تحویلی: در مدار شکل زیر معادلات کات‌ست را با فرض وجود L_5 ، R_6 و R_7 در شاخه‌های درختی بنویسید و ماتریس Q آن را هم بنویسید.



تمرین تحویلی: درصورتی که ماتریس Q گراف یک مدار بصورت زیر باشد، ماتریس B آن را مستقیماً و بدون رسم گراف بدست آورید.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلات حالت (مهم‌ترین مبحث)

تعاریف اولیه :

تعریف حالت: کوچک‌ترین مجموعه‌ی ممکن از متغیرهایی که با داشتن آنها در لحظه‌ی t_0 به همراه ورودی برای زمان $t > t_0$ بتوان بطور کامل رفتار شبکه را برای کلیه‌ی زمان‌های بزرگتر از t_0 مشخص کرد.