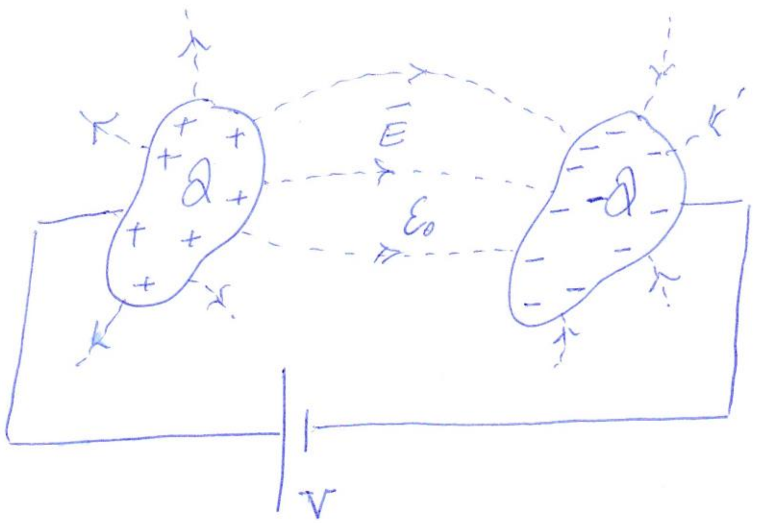
خازن



$$V = \int_{+}^{-} \bar{E} \cdot \bar{dl}$$

مسیر دلخواه

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \longrightarrow \rho_s = D_n \quad (\bar{D} = \varepsilon \bar{E})$$

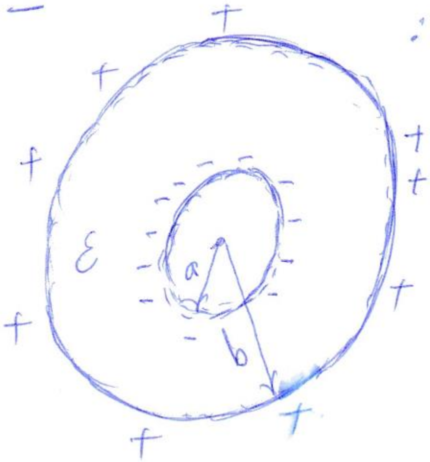
$$Q = \int_S \rho_s \, ds = \int_S \bar{D} \cdot \bar{ds}$$

S: سطح هر کدام از هادی‌ها (یا هادی مثبت یا منفی)

$$C \triangleq \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{\int_S \bar{D} \cdot \bar{ds}}{\int_{+}^{-} \bar{E} \cdot \bar{dl}} = \frac{\int_S \varepsilon \bar{E} \cdot \bar{ds}}{\int_{+}^{-} \bar{E} \cdot \bar{dl}}$$

مثال: محاسبه ظرفیت خازن کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b :



بار $+Q$ روی سطح $r=b$ و بار $-Q$ روی سطح $r=a$

$$\bar{E}=\begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$$

$$V=\int_{+} \bar{E}\cdot\bar{dl}\ ,\quad \bar{dl}=\bar{dl}_r+\bar{dl}_\varphi+\bar{dl}_\theta$$

$$\bar{E}\cdot\bar{dl}=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r\cdot dr\,\hat{a}_r=\frac{-Q\,dr}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$V=\int_{r=b}^{r=a}\frac{-Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\right|_{r=b}^{r=a}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

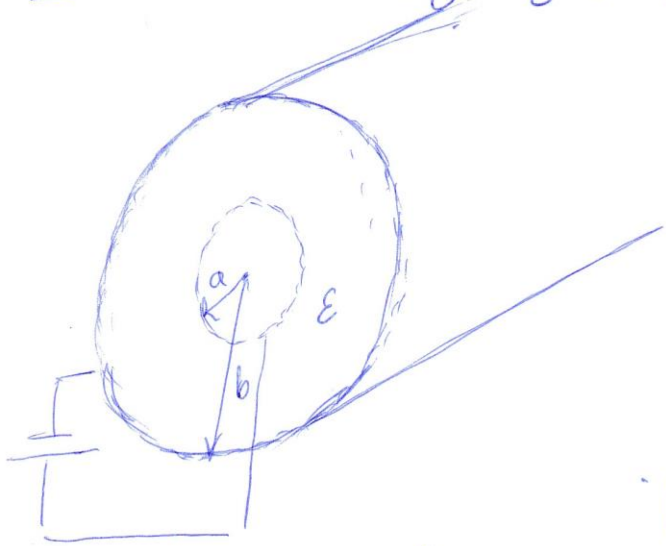
$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

if $b\to\infty$ ظرفیت یک کره تنها با شعاع a

$$C=4\pi\varepsilon a$$

مثال: ظرفیت یک کابل هم محور با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b



چون طول بی‌نهایت است، لذا نمی‌توان کل بار

روی هادی‌ها را حساب کرد،

لذا واحد طول را در نظر می‌گیریم و ظرفیت

را برای واحد طول کابل هم محور حساب می‌کنیم.

بار $+q$ روی واحد طول هادی درونی و بار $-q$ روی واحد طول هادی

بیرونی توزیع شده است.

طبق قانون گوس: $\bar{E} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{q}{2\pi\epsilon r}\hat{a}_r & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$

$$\bar{dl} = \bar{dl}_r + \bar{dl}_\varphi + \bar{dl}_z \ ,$$

$$\bar{E}\cdot\bar{dl} = \frac{q}{2\pi\epsilon r}\,dr$$

$$V = \int_{+}^{-} \bar{E}\cdot\bar{dl} = \int_{r=a}^{r=b} \frac{q}{2\pi\epsilon r}\,dr$$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r \Big|_{r=a}^{r=b} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln\frac{b}{a}$$

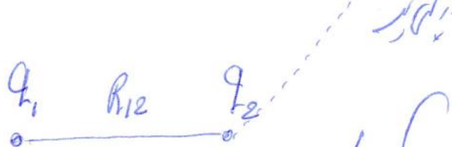
$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}}$$

انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی :

- بار الکتریکی از پتانسیل بالاتر به پتانسیل پایین تر انتقال یابد ، میدان کار انجام میدهد و انرژی سیستم کاهش می یابد ← این انرژی را سیستم چگونه تامین می کند (مقداری از انرژی ذخیره شده کم میکند)

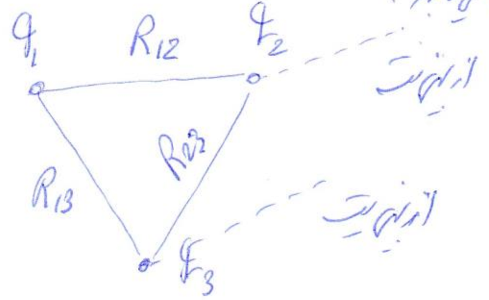
- اگر بار الکتریکی از پتانسیل پایین تر به بالاتر منتقل شود، کار توسط عامل خارجی انجام می شود.
انرژی سیستم افزایش می یابد ← این انرژی ذخیره می شود.

* محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی :



برای سیستم متشکل از دو بار :

- ابتدا فرض می شود بار q_2 از بی نهایت به مجاورت q_1 می آید.
باید کاری به اندازه $q_2 V_2'$ توسط عامل خارجی صورت گیرد
لذا انرژی سیستم به میزان $W_2 = q_2 V_2'$ افزایش می یابد.



- V_2' : پتانسیل در محل بار q_2 ناشی از بار q_1

- برای سیستم متشکل از سه بار :
- کار لازم برای انتقال q_2 و q_3 از بی نهایت به مجاورت q_1
ابتدا q_2 از بی نهایت به مجاورت q_1 می آید ؛ کار لازم در مرحله قبل حساب شده است : W_2
سپس بار q_3 از بی نهایت به مجاورت q_1 و q_2 منتقل می شود.

$$W_3 = q_3 V_3' + q_2 V_3^2$$

V_3^2 : پتانسیل در محل بار q_3 ناشی از بار q_2
V_3' : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 q_1

$$W_e = W_2 + W_3 = q_2 V_2^1 + q_3 V_3^1 + q_3 V_3^2$$

برای سیستم متشکل از N بار نقطه‌ای:

$$W_e = W_2 + W_3 + \cdots + W_N$$

$$= q_2 V_2^1 + (q_3 V_3^1 + q_3 V_3^2) + (q_4 V_4^1 + q_4 V_4^2 + q_4 V_4^3) + \cdots$$

$$(*)\quad W_e = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} q_i V_i^j$$

V_i^j : پتانسیل ناشی از بار q_j در محل بار q_i

$$q_i V_i^j = q_i \cdot \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ji}} = q_j \cdot \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = V_j^i q_j$$

$$(R_{ij} = R_{ji})$$

$$q_i V_i^j = q_j V_j^i$$

$$\left(\begin{matrix}*\\ *\end{matrix}\right)\quad W_e = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-2} q_j V_j^i$$

$$(*) + \left(\begin{matrix}*\\ *\end{matrix}\right) : \quad 2W_e = q_1 (V_1^2 + V_1^3 + \cdots + V_1^N) +$$

$$q_2 (V_2^1 + V_2^3 + \cdots + V_2^N) + \cdots$$

$$q_N (V_N^1 + V_N^2 + \cdots + V_N^{N-1})$$

$2W_e = q_1$ (پتانسیل در محل q_1 ناشی از سایر بارها) $+ q_2$ (پتانسیل در محل q_2 ناشی از سایر بارها) $+ \cdots +$

q_N (پتانسیل در محل q_N ناشی از سایر بارها)

$$2W_e = q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots + q_N V_N$$

V_i : پتانسیل در محل بار i ام ناشی از سایر بارها

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

برای توزیع پیوسته :

توزیع پیوسته حجمی ρ_v : بار با چگالی حجمی ρ_v در حجم v

بار این مجموعه را به بارهای در حد نقطه‌ای تقسیم می‌کنیم و $dq = \rho_v \, dv$

$$W_e = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{2} \sum_i dq_i V_i = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{2} \sum_i \rho_v \Delta v V_i$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V \, dv$$

v : حجمی که بار قرار دارد

برای توزیع پیوسته سطحی

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_s V \, ds$$

S : سطحی که بار قرار دارد

ارتباط انرژی ذخیره شده با میدان الکتریکی :

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V} \rho_v \, V \, dv \quad , \quad \rho_v = \varepsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}$$

V: حجمی که بار قرار دارد

$$= \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0 \nabla \cdot E) V \, dv$$

یادآوری : $\nabla \cdot (V\bar{E}) = V \nabla \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \nabla V$

$$\therefore \quad (\nabla \cdot \bar{E}) V = \nabla \cdot (V\bar{E}) - \bar{E} \cdot \nabla V \quad , \quad \nabla V = -\bar{E}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} [\nabla \cdot (V\bar{E}) + \bar{E} \cdot \bar{E}] \, dv = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \nabla \cdot (V\bar{E}) \, dv}_{I} + \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \bar{E} \cdot \bar{E} \, dv}_{II}$$

در محلی که بار نداریم $\nabla \cdot \bar{E} = 0$

لذا انتگرال‌گیری را روی کل فضا می‌کنیم

$$I: \quad \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \nabla \cdot (V\bar{E}) \;\overset{\text{طبق قضیه دیورژانس}}{=}\; \frac{1}{2}\varepsilon_0 \oint_{\text{سطح تمام فضا}} V\bar{E} \cdot \bar{ds}$$

سطح تمام فضا: کره‌ای با شعاع بی‌نهایت

$$\bar{ds} = \bar{ds}_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{a}_r$$

at $r \to \infty$:

هر گروه بار محدود با مقدار کل بار q به صورت یک بار نقطه‌ای دیده می‌شود

$$\therefore \quad \bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \quad , \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \nabla\cdot(V\bar{E})\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \lim_{r\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \lim_{r\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0$$

بنابراین $I = 0$ برای هر توزیع باری که میدان در $r\to\infty$ با نرخ ... حداقل r^{-2}
و پتانسیل با نرخ حداقل r^{-1} کاهش یابد صادق است.

$$\therefore\; W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \bar{E}\cdot\bar{E}\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} |\bar{E}|^2\, dv$$

$$D = \varepsilon\bar{E} \qquad W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \bar{E}\cdot\bar{D}\, dv$$

$$W_e = \int_{\text{کل فضا}} w_e\, dv$$

چگالی حجمی انرژی

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\bar{E}|^2 = \frac{1}{2}\bar{E}\cdot\bar{D}$$

$$W_e = \int_{\text{حجم دلخواه فضا}} w_e\, dv$$

انرژی ذخیره شده در حجم دلخواه فضا

مثال: انرژی ذخیره شده در سیستم خازن با ظرفیت C و اختلاف پتانسیل ؟

$V = V_1 - V_2$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \rho_s V\, ds = \frac{1}{2}\int_{S_1} \rho_{S_1} V_1\, ds + \frac{1}{2}\int_{S_2} \rho_{S_2} V_2\, ds$$

سطوح S_1 و S_2 هم پتانسیلند: چرا؟

لذا V_1 روی S_1 و V_2 روی S_2 ثابت است

$$W_e = \frac{1}{2} V_1 \int_{S_1} \rho_{S_1} ds + \frac{1}{2} V_2 \int_{S_2} \rho_{S_2} ds$$

$$= \frac{1}{2} V_1 q_1 + \frac{1}{2} V_2 q_2 = \frac{1}{2} V_1 q + \frac{1}{2} V_2 (-q)$$

$$= \frac{1}{2} q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} q V$$

$$q = CV \longrightarrow W_e = \frac{1}{2} C V^2$$

105

مثال : بار q بصورت یکنواخت روی سطح کره‌ای به شعاع A توزیع شده است (کره‌ی هادی)

انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی کره را حساب کنید.

راه حل ۱:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_s \rho_s V\, ds = \frac{1}{2} V \int_s \rho_s\, ds = \frac{1}{2} V q$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 A} \longrightarrow W_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 A}$$

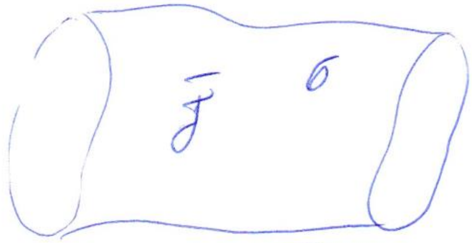
راه حل 2:

$$\bar{E} = \begin{cases} 0 & r < A \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r & r > A \end{cases}$$

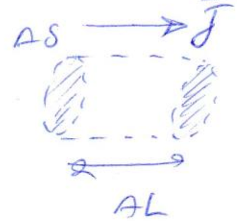
$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} |\bar{E}|^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{r=A}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$W_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 A}$$

توان تلف شده در ناحیه‌ای با رسانایی محدود



$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$



$$\Delta I = J \Delta S$$

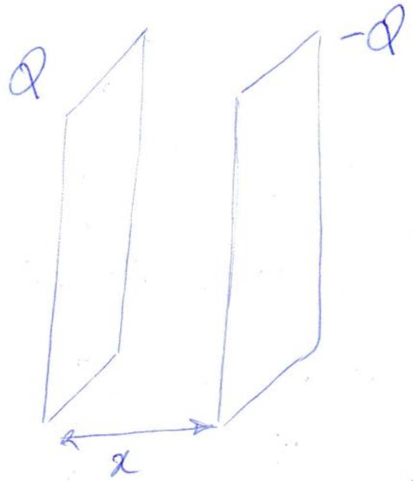
$$\Delta V = E \Delta L = \frac{J}{\sigma} \Delta L$$

$$\Delta P = \Delta V \Delta I = \sigma E^2 \Delta L \Delta S = \sigma E^2 \Delta v = \frac{J^2}{\sigma} \Delta v$$

چگالی توان تلف شده $p = \frac{\Delta P}{\Delta v} = J^2/\sigma = \sigma E^2$

$$P = \int_v p \, dv = \int_v \frac{J^2}{\sigma} dv = \int_v \sigma E^2 dv = \int_v \bar{J} \cdot \bar{E} \, dv$$

نیرو و گشتاور در سیستم های الکتریکی ساکن



توضیحاتی را بنویس :

هدف محاسبه نیروی وارده دو صفحه خازن است :

کار مجازی : اگر دو صفحه خازن مجاز به حرکت باشند ولی
از صفحات به میزان Δx از صفحه دیگر تغییر فاصله دهد

کار لازم برای این جابجایی : $\Delta W = F_x \Delta x$

که نیروی مورد نظر

اگر خازن با دنیای بیرون ارتباط نداشته باشد

انرژی لازم برای این جابجایی باید از انرژی ذخیره شده تامین شود : $\Delta W + \Delta W_e = 0$

$$F_x \Delta x = -\Delta W_e \rightarrow F_x = -\frac{dW_e}{dx}$$

در حالت کلی برای سیستم دلخواه با بار معین q ، جابجایی ΔL را در نظر میگیریم :

$$\Delta W_e = -\bar{F} \cdot \Delta \bar{L}$$

طبق تعریف گرادیان

$$\bar{F} = -\nabla W_e \Big|_{Q = \text{ثابت}}$$

- اگر سیستم با دنیای خارج ارتباط داشته باشد، این انرژی را از منبع بیرونی میگیرد.

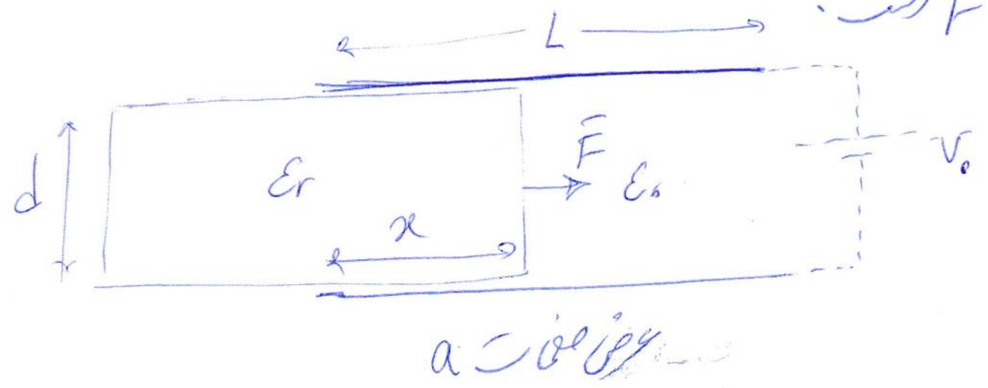
$$\bar{F} = +\Delta W_e \Big|_{V=cte}$$

- اگر سیستم قابلیت چرخش حول محور z را داشته باشد:

$$T_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \varphi}\Big|_{Q=cte}$$

$$T_z = +\frac{\partial W_e}{\partial \varphi}\Big|_{Q=cte}$$

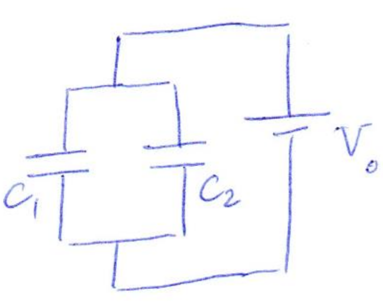
مثال: هدف محاسبه $\bar{F}$ است.



a = عرض صفحه

حل ۱: V ثابت

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x a}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 (L-x) a}{d}$$

$$W_e = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}\left[L + x(\varepsilon_r - 1)\right] V_0^2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d} a\left[\varepsilon_r x + L - x\right]$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left[L + (\varepsilon_r - 1)x\right]$$

109.

$$\bar{F} = \nabla W_e = \frac{\partial}{\partial x} W_e \, \hat{a}_x$$

$$F_x = \frac{V_0^2}{2} \frac{\varepsilon_0 a}{d} (\varepsilon_r - 1)$$

روش ۲: Q ثابت

$$\bar{F} = -\nabla W_e$$

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \frac{\varepsilon_0 a}{d} \left[L + (\varepsilon_r - 1) x \right]} = \frac{d Q^2}{2 \varepsilon_0 a} \left[L + (\varepsilon_r - 1) x \right]^{-1}$$

$$\bar{F} = -\frac{\partial}{\partial x} W_e \, \hat{a}_x$$

$$F_x = -\left[\frac{d Q^2}{2 \varepsilon_0 a} \times \frac{-(\varepsilon_r - 1)}{\left[L + (\varepsilon_r - 1) x \right]^{+2}} \right]$$

$$Q = C V$$

$$F_x = \frac{d (\varepsilon_r - 1)}{2 \varepsilon_0 a} \times \frac{(C V_0)^2}{\left[L + (\varepsilon_r - 1) x \right]^2}$$

$$F_x = \frac{V_0^2}{2} \times \frac{\varepsilon_0 a}{d} (\varepsilon_r - 1)$$