خواص تبدیل فوریه:

۱- خطی بودن:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X_1(\omega) \text{ یا } X(j\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{FT} X_2(\omega)$$

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{FT} a X_1(\omega) + b X_2(\omega)$$

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Longrightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (a x_1(t) + b x_2(t)) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = a X_1(\omega) + b X_2(\omega)$$

۲- انتقال در حوزه زمان:

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$x_1(t) = x(t-t_0) \Longrightarrow X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\overbrace{t-t_0}^{t_1}) e^{-j\omega t} dt$$

$$t = t_0 + t_1$$

$$dt = dt_1$$

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) e^{-j\omega(t_0+t_1)} dt_1 = e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1}_{X(\omega)} = \boxed{e^{-j\omega t_0} X(j\omega)}$$

مثال ۱- تبدیل $x(t)=\delta(t-4)$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} f(t)=\delta(t) \longleftrightarrow F(\omega)=1 \\ x(t)=\delta(t-4) \longleftrightarrow X(\omega)=e^{-j\omega 4}\times 1 \end{cases}$$

مثال ۲- $x(t)=e^{-3(t-2)}u(t-2)$ را پیدا کنید.

$$e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{3+j\omega}$$

$$e^{-3(t-2)}u(t-2) \longleftrightarrow \frac{e^{-j2\omega}}{3+j\omega}$$

۳- خاصیت انتقال در حوزه فرکانس:

$$\underbrace{e^{+j\omega_0 t}x(t)}_{x_1(t)} \longleftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

$$X_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{+j\omega_0 t}x(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt=X(\omega-\omega_0)$$

$$x(t) = e^{-3jt} e^{-4|t|} \longleftrightarrow X(\omega) = ?$$

-حل

می‌دانیم $e^{-4|t|} \longleftrightarrow \dfrac{8}{\omega^2+16} \Longrightarrow e^{-3jt} e^{-4|t|} \longleftrightarrow \dfrac{8}{(\omega+3)^2+16}$

۴- خاصیت فشردگی یا گسترش :

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \Longrightarrow f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\omega/a)$$

$$f_1(t) = f(at) \Longrightarrow F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) e^{-j\frac{\omega}{a} t_1} dt_1$$

$$t_1 \to t = t_1/a$$

$$dt = 1/a \, dt_1$$

$$a > 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$a < 0 \Longrightarrow \int_{\infty}^{-\infty}$$

۵- خاصیت تقارن (دوالیتی):

$$\begin{cases} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha + j\omega} \\ \dfrac{1}{\alpha + jt} \longleftrightarrow 2\pi e^{+\alpha\omega} u(-\omega) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} \delta(t) \longleftrightarrow 1 \\ 1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega) \end{cases}$$

۶- خاصیت مشتق‌گیری در حوزه زمان:

$$\begin{cases} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ \dfrac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega) \end{cases}$$

بطور کلی $\quad f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

اثبات -

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

تبدیل معکوس

مثال -

مشتق ضربه

$$\begin{cases} \delta(t) \longleftrightarrow 1 \\ \delta'(t) \longleftrightarrow j\omega \end{cases}$$

۷- مشتق‌گیری در حوزه فرکانس :

$$\begin{cases} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ -jt\,f(t) \longleftrightarrow \dfrac{dF(\omega)}{d\omega} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \implies \underbrace{\frac{dF(\omega)}{d\omega}}_{} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-jt\,f(t)}_{}\,e^{-j\omega t}\,dt$$

۸- قضیه کانولوشن :

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega)$$

تعریف کانولوشن

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

نمونه جالب کانولوشن -

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$= x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau}_{1} = x(t)$$

کانولوشن هر تابع با تابع ضربه، خودش شد.

$$x(t) * \delta(t-a) = ?$$

مثال ۴ با کانولوشن -

نشان بالا.

$$\tau = t - a$$

$$x(t) * \delta(t-a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-a-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a)\,\delta(t-a-\tau)\,d\tau$$

$$= x(t-a)\int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{1}{\delta(t-a-\tau)\,d\tau} = \boxed{x(t-a)}$$

حل م-۳ با کانولوشن -

$$x(t) = e^{-3t}u(t)\ ,\ h(t) = e^{-2t}u(t) \Longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = ?$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}\,u(\tau)\,e^{-2(t-\tau)}\,u(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-3\tau}\,e^{-2(t-\tau)}\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = e^{-2t}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\,u(t-\tau)\,d\tau = e^{-2t}\int_{0}^{t} e^{-\tau}\,d\tau = \boxed{(e^{-2t} - e^{-3t})\,u(t)}$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

تمرین ۴- حاصل کانولوشن $x(t)$, $h(t)$ تمرین قبل را به کمک تبدیل فوریه محاسبه نمایید.

$$y(t) = e^{-2t} * e^{-3t} = ?$$

جواب- تبدیل فوریه هر کدام را پیدا کرده سپس در هم ضرب کرده و از حاصل تبدیل معکوس فوریه پیدا می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} e^{-2t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{2+j\omega} \\ e^{-3t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{3+j\omega} \end{array}\right\} \Longrightarrow Y(j\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+3}$$

مقادیر A و B از تجزیه به کسرهای جزئی به دست می‌آیند:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+3} \longrightarrow \boxed{y(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)}$$

تمرین ۵- حاصل کانولوشن $x(t) * \delta(t)$ را به کمک تبدیل فوریه.

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \\ h(t) = \delta(t) \longleftrightarrow 1 \end{array}\right. \longrightarrow Y(\omega) = X(j\omega) \cdot 1 \xRightarrow{\text{تبدیل معکوس}} \underline{y(t) = x(t)}$$

۹- قضیه انتگرال در حوزه زمان :

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow Y(\omega)=\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\,\delta(\omega)$$

$$x(t)=\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \mathcal{F}\{u(t)\}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

۱۰- قضیه ضرب :

$$g(t)=x_1(t)\cdot x_2(t) \longleftrightarrow G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X_1(\omega) * X_2(\omega)\right]$$

۱۱- رابطه پارسوال :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g^*(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot G^*(\omega)\,d\omega}$$

$$\Longrightarrow f(t)=g(t) \Longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega \longrightarrow$$

مقدار انرژی یک سیگنال

تبدیل فوریه‌ی توابع پریودیک: قبلاً بیان گردید که نمایش سری فوریه برای توابع پریودیک و تبدیل فوریه برای توابع غیر پریودیک. حال خواهیم دید تبدیل فوریه‌ی توابع پریودیک چطور تعریف می‌شود.

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$$

قضیه دوگانی

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

shift در حوزه فرکانس

$$e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$c_k e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\, c_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

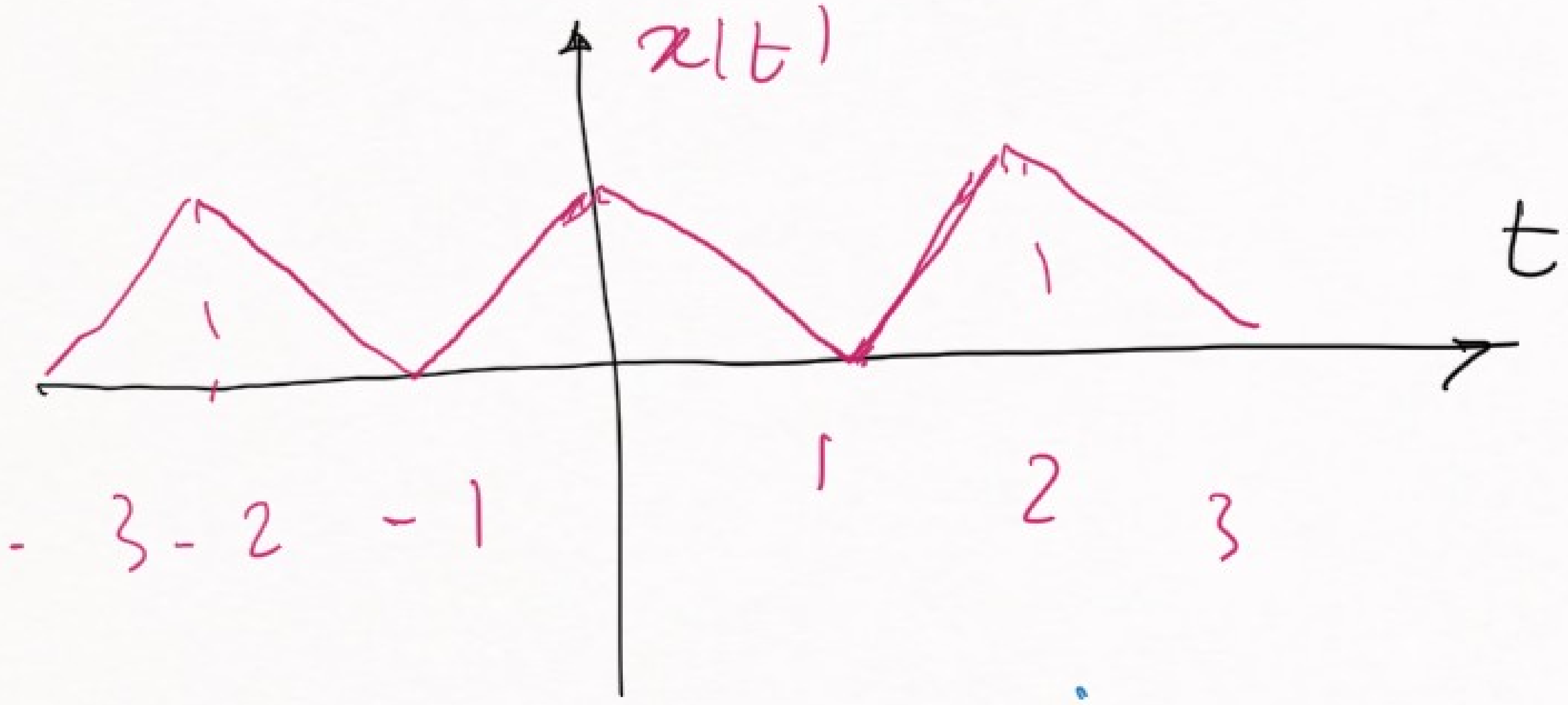
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \underline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\,\delta(\omega-k\omega_0)}$$

یعنی سری فوریه به شکل پریودیک

قطار ضربه

پس ملاحظه شد که تبدیل فوریه یک شکل پریودیک قطار ضربه شد که دامنه توابع ضربه برابر c_k بوده و محل ضربه‌ها در $\pm k\omega_0$ می‌باشد که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است.

مثال - تبدیل فوریه شکل موج پریودیک زیر را بیابید:



$T = 2$

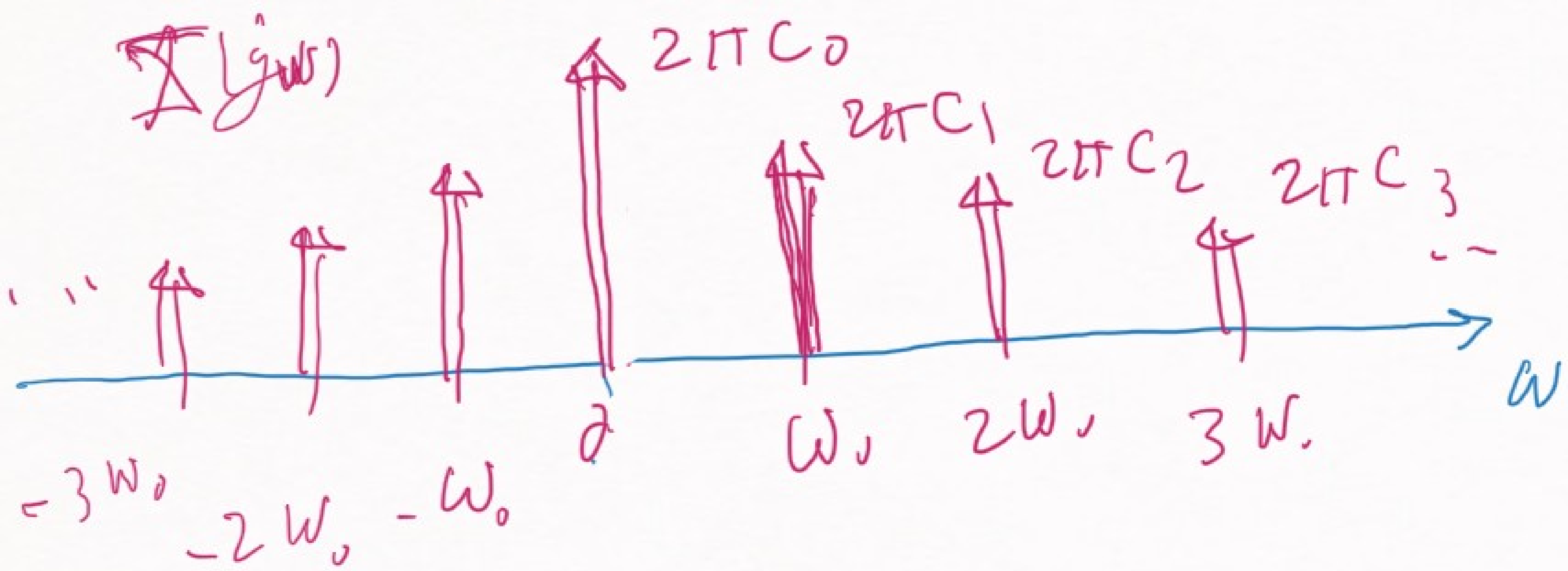
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

میدانیم

محاسبه ضرایب سری فوریه:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t) e^{-jk\pi t} dt = \dots = \begin{cases} \frac{2}{k^2\pi^2}, & \text{فرد } k \\ 0, & \text{زوج } k \end{cases}, \quad c_0 = 1$$



تبدیل فوریه شکل موج پریودیک

مشاهده میشود که در حوزه فرکانس طیف گسسته خواهد بود.

شرایط وجود تبدیل فوریه: تابع $f(t)$ وقتی دارای تبدیل فوریه است که:

الف- تعداد ناپیوستگی $f(t)$ متناهی باشد.

ب- اگر $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ موجود و محدود باشد. در این صورت تبدیل فوریه بطور مستقیم و از تعریف تبدیل قابل محاسبه است.

مثال ۱- تابع $f(t)=1$ را نمی‌توان از تعریف بطور مستقیم، آن تبدیل فوریه را محاسبه نمود چون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1\times e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt=\infty$$

* ولی می‌توان از خواص تبدیل فوریه‌ها، آن تبدیل فوریه را محاسبه نمود:

$$\begin{cases}\delta(t)\longleftrightarrow 1\\ 1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)\end{cases}$$

قضیه دوگانی

تبدیل فوریه $e^{j\omega_0 t}$ بطور مستقیم نمی‌توان محاسبه نمود ولی از قضیه دوگانی قابل محاسبه است.