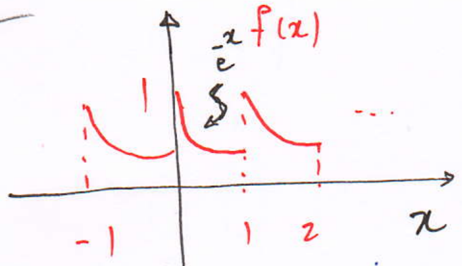
مثال - ضرایب سری فوریه نمایی شکل مقابل:



$T=1 \quad , \quad \omega_0 = 2\pi$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \int_0^1 e^{-x} e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \int_0^1 e^{-x} e^{-jn2\pi x}\, dx$$

$$c_n = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi n)x}\, dx = \frac{1}{-(1+j2\pi n)} e^{-(1+j2\pi n)x}\Big|_0^1$$

$$c_n = \frac{-1}{1+j2\pi n}\left[e^{-(1+j2\pi n)} - 1\right]$$

$$c_n = \frac{-1}{1+j2\pi n}\left[e^{-1} e^{j2\pi n} - 1\right] = \frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi n} = \boxed{\frac{(1-e^{-1})(1-j2\pi n)}{1+4\pi^2 n^2}}$$

«جلسه دوم»

رابطه بین ضرایب سری فوریه نمایی و مثلثاتی:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\left[\cos n\omega_0 x - j\sin n\omega_0 x\right] dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\, dx}_{a_n/2} - j\,\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega_0 x\, dx}_{b_n/2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}} \quad ①$$

همچنین می‌دانیم که:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\, dx = \frac{\cancel{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\left[\frac{e^{jn\omega_0 x} + e^{-jn\omega_0 x}}{\cancel{2}}\right] dx$$

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{+jn\omega_0 x}}_{c_{-n}}\, dx + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}}_{c_n}\, dx$$

$$\Longrightarrow$$

ادامه رابطه بین ...

$$\Rightarrow \boxed{a_n = c_{-n} + c_n} \quad ②$$

همچنین به صورت می‌توان نشان داد :

$$\boxed{b_n = j\left[c_n - c_{-n}\right]} \quad ③$$

ملاحظات : ۱- با توجه به فرمول ① اگر $f(x)$ تابع زوج باشد آنگاه c_n حقیقی خواهد بود. مثال -

2- اگر $f(x)$ تابع فرد باشد آنگاه c_n موهومی خواهد بود. مثال

3- اگر $f(x)$ نه فرد و نه زوج باشد آنگاه c_n یک عدد مختلط خواهد شد. (یعنی هم بخش حقیقی و هم بخش موهومی دارد) مثال -

نمایش دیگر از سری فوریه مثلثاتی :

می‌توان سری فوریه $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$ را به صورت زیر نمایش داد :

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 x + \theta_n)$$

که در آن :

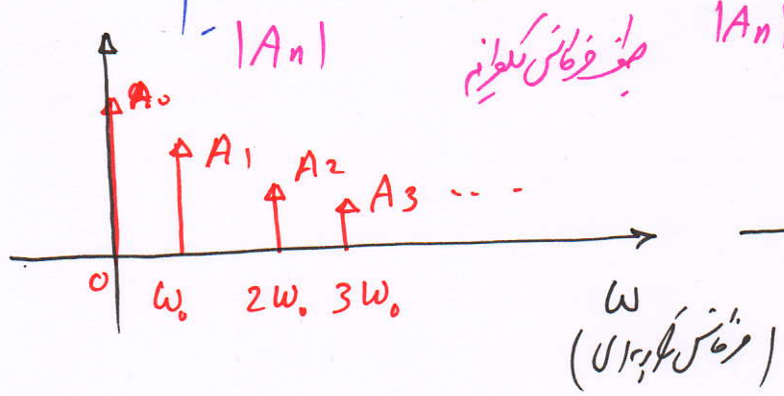
$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

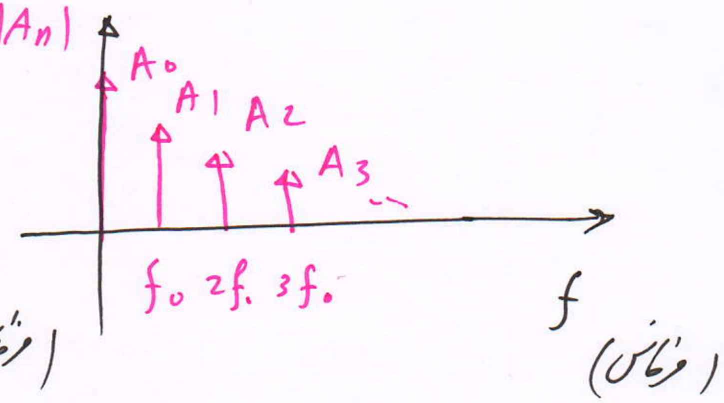
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

تمرین : روابط فوق را ثابت نمائید. (θ_n , A_n توجه)

طیف فرکانسی سیگنال‌ها پریودیک:

نمودار $|A_n|$ بر حسب n (یا $n\omega_0$ یا nf_0) را طیف فرکانسی دامنه می‌گوییم

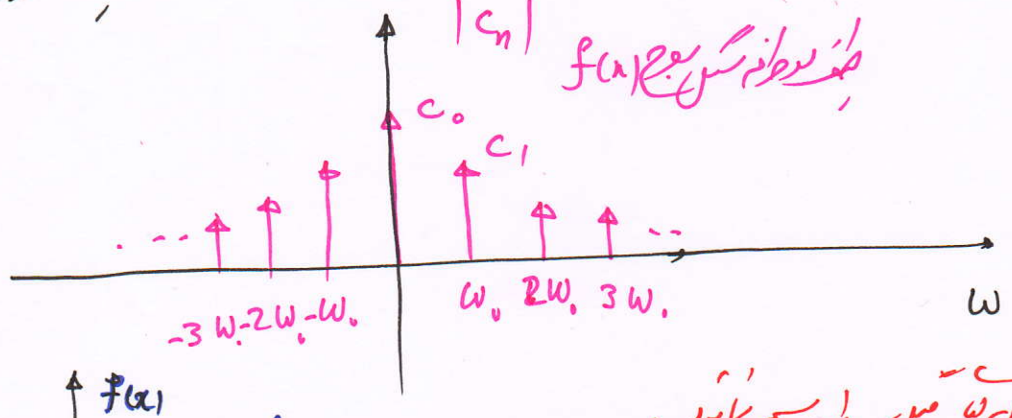




* در واقع طیف فرکانسی همین فرکانس‌ها موجود و دامنه آنها در یک شکل موج پریودیک است. طیف فوق را طیف یکطرفه می‌گوییم. (اما برای سیگنال‌ها حقیقی) ω_0 فرکانس اصلی شکل موج $\omega_0 = 2\pi f_0$

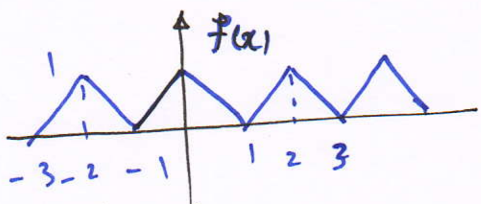
$f_0 = \frac{1}{T}$

* در صورتی که نمودار $|C_n|$ را رسم نماییم شامل فرکانس‌های منفی هم خواهد شد که به آن طیف دوطرفه گویند.



تمرین- طیف فرکانسی مثال‌ها قبل را رسم نمایید.

مثال- رسم طیف فرکانسی یکطرفه و دوطرفه شکل موج مثلثی مثال‌های گذشته.



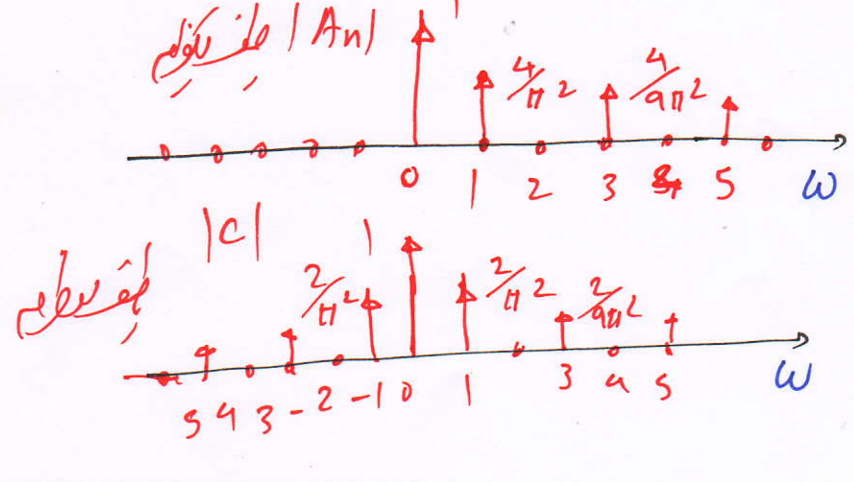
$A_0 = 1$

$A_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$, for n فرد

$C_n = \frac{2}{n^2\pi^2}$, for n فرد

$C_0 = 1$

$\Longrightarrow$



مشتق گیری از سری فوریه : • سری فوریه مثلثاتی

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{-n\omega_0 a_n}_{b_n \text{ سری فوریه مشتق اول}} \sin n\omega_0 x + \underbrace{n\omega_0 b_n}_{a_n \text{ سری فوریه مشتق اول}} \cos n\omega_0 x)$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{-n^2\omega_0^2 a_n}_{a_n \text{ سری فوریه مشتق دوم}} \cos n\omega_0 x \underbrace{- n^2\omega_0^2 b_n}_{b_n \text{ سری فوریه مشتق دوم}} \sin n\omega_0 x)$$

همین صورت به مشتق n بالاتر نیز خواهیم داشت.

• سری فوریه نمایی (مختلط) :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 x}$$

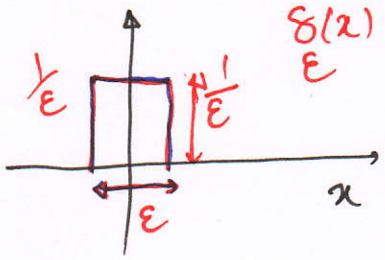
$$f'(x) = \sum (c_n jn\omega_0) e^{+jn\omega_0 x}$$

$$f''(x) = \sum (c_n jn\omega_0)^2 e^{+jn\omega_0 x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_n = (jn\omega_0)^n c_n}$$

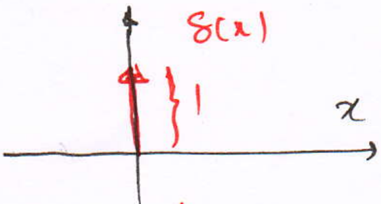
مشتق n ام

* تعریف تابع ضربه :



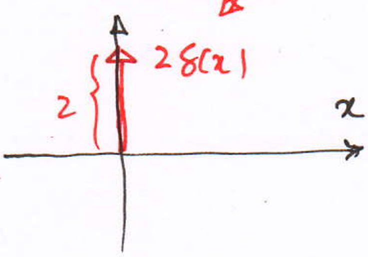
مقدار ویژه

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & ; x = 0 \\ 0 & ; x \neq 0 \end{cases}$$

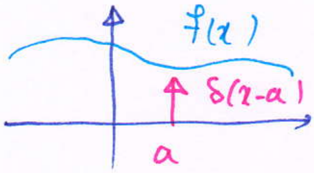


$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

(سطح زیر نمودار بوجود آورده است)



ولی مثلا $\int_2^4 \delta(x)dx = 0$, $\int_{-2}^{-1} \delta(x)dx = 0$, $\int_1^{\infty} \delta(x)dx = 0$



توجه - ضرب تابع ضربه در یک تابع :

$$\boxed{\delta(x-a) f(x) = f(a)\,\delta(x-a)}$$

$\Longrightarrow$

سایر خواص تابع ضربه :

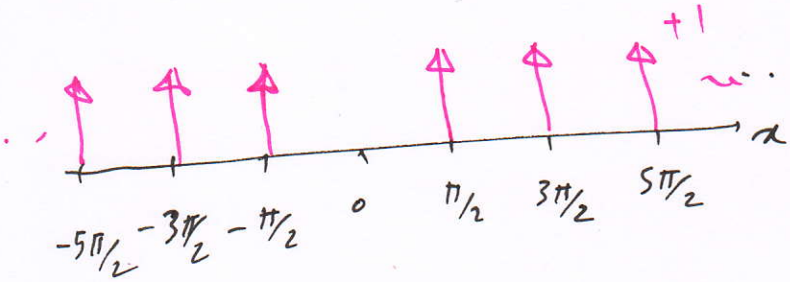
$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,\delta(x-a)\,dx$$

$$= f(a)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx}_{1} = f(a) \Longrightarrow$$

$$* \quad \boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)} \qquad \Longleftrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)}$$

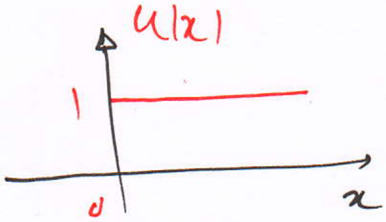
مثال - شکل تابع $g(x) = \delta(\cos x)$ را رسم کنید.

$$g(x) = \delta(\cos x) = \begin{cases} \text{نامعین } \infty \;; & \cos x = 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\pi/2 \\ 0 \;; & \cos x \neq 0 \Longrightarrow x \neq (2k+1)\pi/2 \end{cases}$$



قطار ضربه

تعریف تابع پله : $u(x)$



$$u(x) = \begin{cases} 1 \;, & x \geq 0 \\ 0 \;; & x < 0 \end{cases}$$

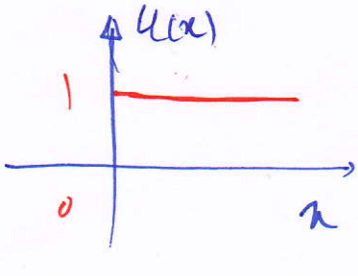
$$\frac{du(x)}{dx} = \delta(x) \qquad \text{مشتق تابع پله، تابع ضربه است}$$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(y)\,dy \qquad \text{انتگرال تابع ضربه، تابع پله است.}$$

تابع پله

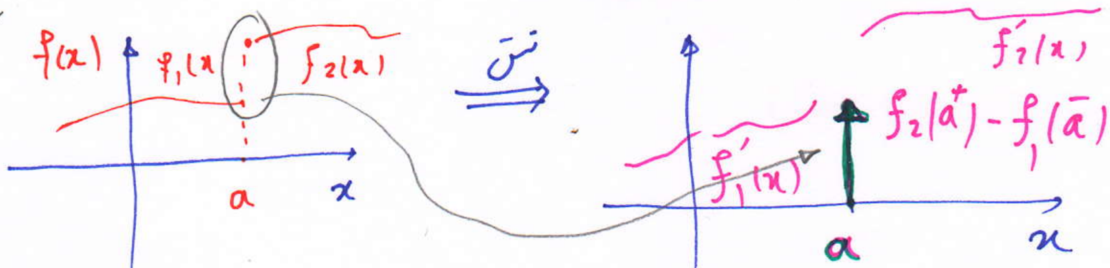
تابع ضربه

* یعنی مشتق در نقطه ناپیوستگی تابع ضربه می‌گردد



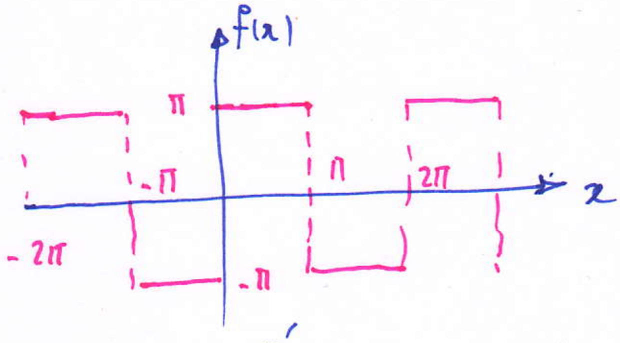
$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}$

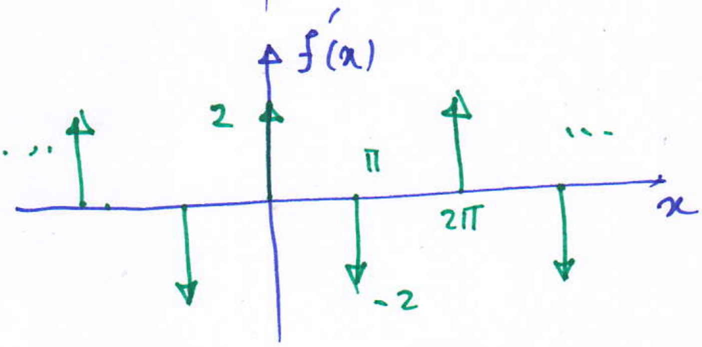
در حالت کلی :



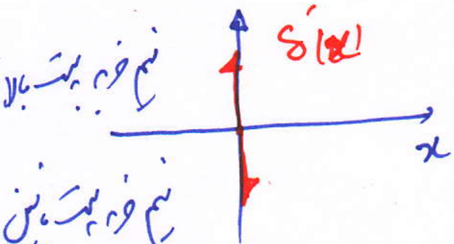
تابع ضربه در نقطه $x=a$

مثال- مشتق شکل تابع زیر :





تعریف مشتق تابع ضربه $\delta'(x)$



$$\delta'(x)=0 \quad , \quad x\neq 0$$

$\delta'(x)$ در $x=0$ ناپیوسته است.

$\delta'(x)$ تابع فرد است یعنی $\delta'(x)=-\delta'(-x)$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)dx=\int_{0^-}^{0^+}\delta'(x)dx=0$

توجه: سایر مشتقات تابع ضربه یعنی $\delta''(x)$ ، ... نیز تعریف می‌شوند.

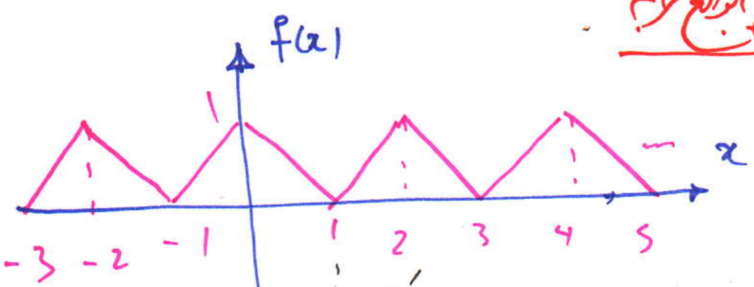
* خاصیت مهم توابع ضربه بطور کلی :

مشتق n ام   مشتق n ام

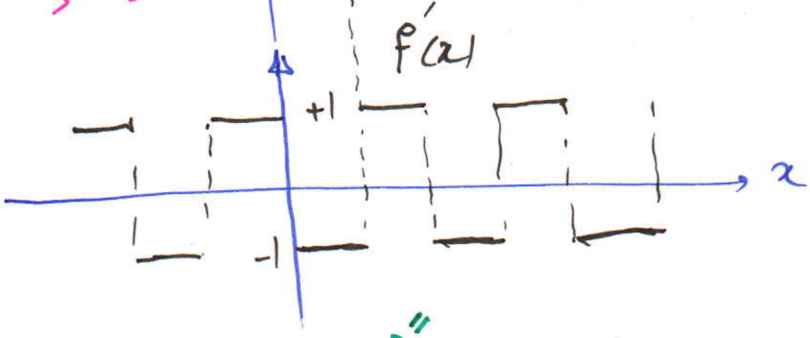
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(x-a)f(x)dx=(-1)^n f^{(n)}(a)$$

حالت خاص $n=0$ همان رابطه صفحه قبل در مورد تابع ضربه می‌باشد.

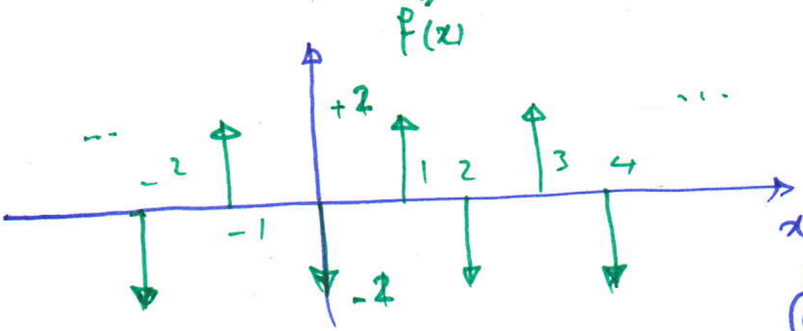
مثال- محاسبه سری فوریه با استفاده از روش مشتق گیری و تبدیل توابع خاص



$$T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$



مشتق اول :



مشتق دوم :

$$f''(x) = -2\delta(x) + 2\delta(x-1)$$

در یک پریود

حال خواهیم سری فوریه مشتق دوم تابع $f(x)$ یعنی $f''(x)$ را پیدا می‌کنیم و اسم آن را C_n'' می‌گذاریم (توجه C_n'' مشتق دوم C_n نیست)

$$C_n'' = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f''(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{0^-}^{2^-} \left[-2\delta(x) + 2\delta(x-1)\right] e^{-jn\pi x}\, dx$$

$$= \int_{0^-}^{2^-} \underbrace{-\delta(x)\, e^{-jn\pi x}}_{-1\times\delta(x)}\, dx + \int_{0^-}^{2^-} \underbrace{\delta(x-1)\, e^{-jn\pi x}}_{e^{-jn\pi}\,\delta(x-1)}\, dx$$

$$= -\int_{0^-}^{2^-} \delta(x)\, dx + e^{-jn\pi}\int_{0^-}^{2^-} \delta(x-1)\, dx = \boxed{-1 + e^{-jn\pi}}$$

$$\Rightarrow C_n'' = e^{-jn\pi} - 1 = (-1)^n - 1 = \begin{cases} -2 & ; \ n \text{ فرد} \\ 0 & ; \ n \text{ زوج} \end{cases}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که :

$$C_n'' = (jn\omega_0)^2 C_n \Longrightarrow C_n = \frac{C_n''}{(jn\omega_0)^2} = \boxed{\frac{-2}{-n^2\pi^2}, \ n \text{ فرد}}$$

$$\Rightarrow C_n = \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi^2} & ; \ n \text{ فرد} \\ \ldots & ; \ n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثالها مشابه دیگر تابع ها است که در جلسه دوم صفحه ۲۲ جلسه سوم