درس ۱
بیست و یکم

ریاضیات مهندسی:

حل سوالات مربوط به سری های توانی:

سری های توانی
تیلور و مک لورن

1) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ (سری مک لورن؟)

می دانیم: $\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots\ ;\ |z|<1 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{z^{n+1}}{z^n}\right| < 1 \Rightarrow |z|<1$ شرط همگرایی

$$\frac{1}{1-[-z^2]} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\ ,\ |z|<1$$

2) $f(z) = \operatorname{Arctan}(z)$ (سری مک لورن؟)

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\ ,\ |z|<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n z^{2n+1}\right)/(2n+1)\ ,\ |z|<1$$

3) $f(z) = \cos^2 z$ (سری تیلور حول نقطه $(z=0)$)

$$\cos^2 z = (1+\cos 2z)/2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2z$$

$$\cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + z^8/8! - \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ ,\ |z|<\infty$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

۴) با استفاده از حل سوال اول با تیلور، $f(z) = \ln(1+z)$ با $|z|<1$ را بدست آورید؟

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

از طرفین انتگرال می گیریم: $\displaystyle\int \frac{1}{1+z}\,dz = \int (1-z+z^2-z^3+\dots)\,dz = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\,dz$

$$\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + \dots\ ,\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{6-3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

s.a.m

تمرین ۱۲

سری لوران

۵) سری لورنت تابع $f(z)=z^2e^{1/z}$ را حول نقطه $z=0$ بنویسید؟

$$z^2e^{1/z}=z^2\left(1+\frac{1}{z1!}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\dots\right)=z^2+z/1!+\frac{1}{2!}+\frac{1}{z3!}+\dots$$

۶) سری لورنت تابع $f(z)=e^{-z}/z^3$ را حول $z=0$ بنویسید؟

$$\frac{e^{-z}}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left[1-z/1!+z^2/2!-z^3/3!+z^4/4!-z^5/5!+\dots\right]=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2!}+\frac{1}{z2!}-\frac{1}{3!}-z/5!+\dots$$

۷) سری لورنت تابع $f(z)=\cos 2z/z^2$ را حول نقطه $z=0$ بنویسید؟

$$\cos z=1-z^2/2!+z^4/4!-z^6/6!+\dots$$

$$\cos 2z=1-\frac{2^2z^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-(2z)^6/6!+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos 2z/z^2=\frac{1}{z^2}-2^2/2!-\frac{2^4z^2}{4!}-2^6z^4/6!+\dots$$

۸) سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ را حول $z=1$ بیابید

$(z-1)=0$ ✓

$$f(z)=\frac{-1}{z^2-1}=\frac{-1}{(z-1)(z+1)}=\frac{-1}{(z-1)}\left[\frac{1}{z+1}\right]=\frac{-1}{(z-1)}\left[\frac{1}{(z-1)+2}\right]=\frac{-1}{(z-1)}\left[\frac{+1}{2(1+\frac{(z-1)}{2})}\right]=$$

$$\frac{-1}{2(z-1)}\left[\frac{1}{1+(z-1)/2}\right]=\frac{-1}{2(z-1)}\left[\frac{1}{1-(-(z-1)/2)}\right]=\frac{-1}{2(z-1)}\left[1+(-(z-1)/2)+((z-1)/2)^2+\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\dots\right]=\frac{-1/2}{(z-1)}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(z-1)+\dots$$

باقیمانده

۹) باقیمانده تابع $f(z)=z/(z-1)(z+1)^2$ حول نقطه $z=1$ برابر است با:

$$\underset{z\to1}{\text{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to1}\cancel{(z-1)}\times\frac{z}{\cancel{(z-1)}(z+1)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

۱۰) باقیمانده تابع حول قطب هایش را بیابید؟ $f(z)=\frac{4-3z}{z^2-z}$

$$z^2-z=0\Rightarrow z(z-1)=0\begin{cases}z=0\\z=1\end{cases}$$

$$f(z)=\frac{4-3z}{z(z-1)}\Rightarrow\underset{z\to0}{\text{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to0}z\,\frac{4-3z}{z(z-1)}=-$$

$$\underset{z\to1}{\text{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to1}\cancel{(z-1)}\times\frac{4-3z}{z\cancel{(z-1)}}=1$$

ص ۲

جلسه ۱۱) باقیمانده تابع $F(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ در نقطه i برابر است با

$$\operatorname*{Res}_{z=i} F(z) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{z^2}{(z-2)\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{-1}{(i-2)(2i)} = \frac{-1}{-2-4i} = \frac{1}{2+4i} = \frac{2-4i}{4+16} =$$

$$\frac{1-2i}{10}$$

روش دوم $F(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ ، $p(a)\neq 0$ و $q'(a)\neq 0$ و $q(a)=0$

$$\operatorname*{Res}_{z=a} F(z) = \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)} = \frac{i^2}{3i^2-4i+1} = \frac{1-2i}{10}$$ ✓

۱۲) باقیمانده تابع $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در نقطه $z=-1$ برابر با چه مقداری خواهد بود؟

$$\operatorname*{Res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m F(z)\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m F(z)$$

$m=2 \Rightarrow \dfrac{1}{(2-1)!} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \cancel{(z+1)^2} \times \dfrac{z}{(z-1)\cancel{(z+1)^2}} = \dfrac{1}{1!} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right) =$

$$1\times \lim_{z\to 1} \frac{1\times(z-1)-1\times z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(-2)^2} = \frac{-1}{4}$$ ✓

۱۳) باقیمانده تابع $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$ در نقطه $z=-2$ برابر با چه مقداری خواهد بود؟

$m=3$

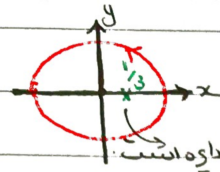
$$\operatorname*{Res}_{z=-2} F(z) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m F(z) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \cancel{(z+2)^3} \times \frac{1}{z\cancel{(z+2)^3}} = \frac{1}{2}\times \frac{2}{z^3}\Big|_{z=-2} =$$

$$\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

s.a.m

تضمینی

۱۵) مقدار انتگرال $I=\int_C \frac{3z}{(3z-1)}\,dz$ به کمک قضیه باقی‌مانده در حالتی که C دایره واحد است برابر با چه مقداری است؟



داخل دایره است ✓

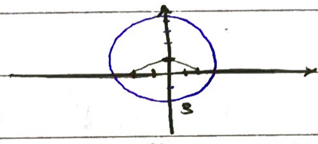
$$I=\int_C \frac{z}{z-1/3}\,dz = 2\pi i\left(1/3\right) = 2\pi i \times \frac{1}{3} \checkmark$$

مجموع مانده‌ها در نقطه‌های تکین تابع مورد نظر است.

$$\underset{z=1/3}{\mathrm{Res}} = \lim_{z\to \frac{1}{3}} \cancel{(z-1/3)} \times \frac{z}{\cancel{z-1/3}} = 1/3$$

۱۶) با استفاده از روش باقیمانده انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_{|z-i|=3} \frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z}\,dz$$



$$z(z^2-4)=0 \begin{cases} z=0 \\ z=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

همه داخل محدوده هستند

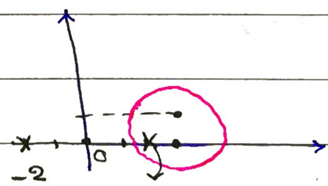
$$2\pi i\left(\underset{z=0}{\mathrm{Res}}+\underset{z=2}{\mathrm{Res}}+\underset{z=-2}{\mathrm{Res}}\right)=2\pi i\left[1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right]=4\pi i \checkmark$$ جواب انتگرال

$$\underset{z=2}{\mathrm{Res}} = \lim_{z\to 2} \cancel{(z-2)} \frac{3z^2+2z-4}{z\cancel{(z-2)}(z+2)} = \frac{12+\cancel{4}-\cancel{4}}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \checkmark$$

$$\underset{z=-2}{\mathrm{Res}} = \lim_{z\to -2} \cancel{(z+2)} \frac{3z^2+2z-4}{z(z-2)\cancel{(z+2)}} = \frac{\cancel{4}}{-2\times\cancel{(-4)}} = +\frac{1}{2} \checkmark$$

۱۷) مسئله قبل را با تعویض مسیر به صورت زیر حل کنید؟

$$\int_{|z-3-i|=2} \frac{3z^2+2z-4}{3z^2-4z}\,dz$$



$$\left(\underset{z=2}{\mathrm{Res}}\right)\times 2\pi i = 2\pi i\left(3/2\right) = 3\pi i \checkmark$$

s.a.m

۱۸) با استفاده از روش باقیمانده ثابت کنید که (انتگرال توابع گویایی از $\cos\theta$ و $\sin\theta$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad 0<\theta<2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{dz/iz}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$$z^2+4z+1=0 \qquad \frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(1)}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{12}}{2} = (-4\pm2\sqrt{3})/2 = -2\pm\sqrt{3}$$

$z=-2-\sqrt{3}$ و $m=1$ درون دایره واحد نیست

$z=-2+\sqrt{3}$ و $m=1$ درون دایره واحد است $\Rightarrow =$

$$\frac{2}{i}\int \frac{dz}{(z-(-2-\sqrt{3}))(z-(-2+\sqrt{3}))} \Rightarrow \frac{2}{i}\underset{-2+\sqrt{3}}{\text{Res}} \frac{1}{(-\cancel{2}+\sqrt{3}+\cancel{2}+\sqrt{3})} = \frac{2}{i}\times\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

$$2\pi\cancel{i}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cancel{i}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \checkmark$$

۱۹) با استفاده از شیوه باقیمانده مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{K+\cos\theta} \quad (K>1) =$$

حال باید تغییر متغیری بدهیم تا حد انتگرال بین صفر و 2π باشد.

$$\varphi = 2\theta \qquad d\varphi = 2d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}d\varphi}{K+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{2}\int_{0\,|z|=1}^{2\pi} \frac{dz/iz}{K+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{2Kz+z^2+1} =$$

$$z^2+2Kz+1=0 \qquad z=-K\pm\sqrt{K^2-1}$$

$z=-K+\sqrt{K^2-1}$ داخل C

$z=-K-\sqrt{K^2-1}$ خارج C

$$= \frac{\pi}{\sqrt{K^2-1}} \checkmark$$

s.a.m

محاسبه انتگرال توابع گویا

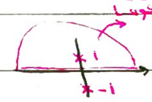
۲۰) با استفاده از روش حل با قضیه مانده ها حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

تابع حقیقی درجه مخرج دو درجه از صورت بیشتر است و همچنین مخرج ریشه حقیقی ندارد.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow 1+z^2=0 \rightarrow \begin{cases} z=i, m=1 \\ z=-i, m=1 \end{cases}$$

نیم صفحه فوقانی



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

۲۱) انتگرال زیر را محاسبه بکنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

چون در تابع حقیقی بالا درجه مخرج دو درجه از درجه صورت بزرگتر است و همچنین مخرج ریشه حقیقی ندارد

$$(z^2+a^2)(z^2+b^2)=0 \quad z=ai, m=1 ✓ \quad z=-ai, m=1 ✓ \quad z=bi, m=1 ✓ \quad z=-bi, m=1 ✓$$

در نیم صفحه فوقانی است

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \Rightarrow$$

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z) = \lim_{z\to ai} \frac{z^2}{(\cancel{z-ai})(z+ai)(z-bi)(z+bi)} \times (\cancel{z-ai}) = \frac{-a^2}{2ai(ai-bi)(ai+bi)} = \frac{-a^{\cancel{2}}}{2\cancel{a}i\,(b^2-a^2)}$$

$$-\frac{1}{2i} \times \frac{a}{b^2-a^2} = \frac{1}{2i}\,\frac{a}{a^2-b^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=bi} f(z) = \lim_{z\to bi} \frac{z^2}{(z-ai)(z+ai)(\cancel{z-bi})(z+bi)}(\cancel{z-bi}) = \frac{-b^2}{(a^2-b^2)(2bi)} = \frac{1}{2i}\,\frac{+b}{b^2-a^2}$$

انتگرال فوریه: انتگرال های حقیقی $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$ که مرتبط با انتگرال فوریه می باشند

اگر تابع حقیقی $f(x)$ تابعی گویا فرض کنیم $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ در نظر گرفته شود و درجه مخرج (حداقل) دو درجه از درجه صورت بیشتر باشد و همچنین

معادله $q(x)=0$ ریشه حقیقی نداشته باشد به این منظور ابتدا انتگرال زیر را در نظر میگیریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx \quad (a>0) \qquad e^{iaz}$$

$= 2\pi i$ (باقیمانده های تابع $f(z)e^{iaz}$ در قطب های این تابع در نیم صفحه بالایی محور)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} f(z)e^{iaz}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos ax + i\sin ax)\,dx = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} f(z)e^{iaz}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx = 2\pi i\left[\operatorname{Re}\left[\sum \operatorname{Res} f(z)e^{iaz}\right]\right] + i\operatorname{Im}\left[\sum \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz})\right]\}$$

مثال ۲۴ انتگرال زیر را حل نمایید

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$$

تابع حقیقی به فرمت $\frac{\cos ax}{1+x^2}$ درجه مخرج ۲ بوده که
از صورت بیشتر است و مخرج ریشه حقیقی ندارد.

$$\frac{1}{1+z^2} \nearrow 1+z^2=0 \Rightarrow z=\pm i$$

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,,\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\ \cancel{(z-i)}\times\frac{e^{iaz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}=\frac{e^{iai}}{2i}=\frac{e^{-a}}{2i}$$

$$2\pi i\Big(\overset{e^{-a}/2i}{\text{مانده تابع در نیم صفحه بالایی}}\Big)=\pi e^{-a}$$