محاسبه ازتوان

محاسبه ضرایب سری فوریه مثلثاتی :

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x\right)}$$

۱- برای محاسبه a_0 از طرفین رابطه فوق از $-T/2$ تا $T/2$ انتگرال گیری می‌کنیم :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x\right)\right]dx \Rightarrow$$

متعامد بر هم می‌باشند .

حاصل انتگرال ۰ ، متعامد بر هم می‌باشند

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cancel{\int_{-T/2}^{T/2} 1\times\cos n\omega_0 x\,dx} + b_n \cancel{\int_{-T/2}^{T/2} 1\times\sin n\omega_0 x\,dx}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = T\left(\frac{a_0}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx}$$

$\frac{a_0}{2}$ متوسط تابع در یک پریود است . یا مقدار dc سیگنال

۲- برای محاسبه a_n طرفین را در $\cos m\omega_0 x$ ضرب و از $-T/2$ تا $T/2$ انتگرال گیری : ← $(n \neq 0)$, $m \neq 0$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos m\omega_0 x\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2}\cancel{\cos m\omega_0 x\,dx} + \sum\int_{-T/2}^{T/2}\left(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x\right)\cos m\omega_0 x\,dx$$

صفر

حاصل انتگرال ۰ ، متعامد

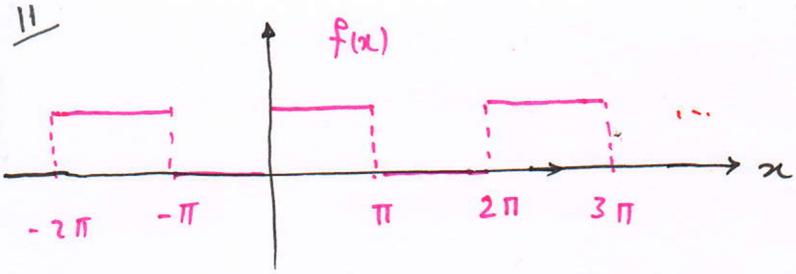
$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos m\omega_0 x\,dx = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_0 x \cos m\omega_0 x\,dx}_{\begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2; & m = n\end{cases}} + b_n \cancel{\int_{-T/2}^{T/2} \sin n\omega_0 x \cos m\omega_0 x\,dx}\right)$$

متعامد می‌باشند .

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos m\omega_0 x\,dx = a_n\left(T/2\right) \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx}$$

۳- به همین صورت برای محاسبه b_n طرفین را در $\sin m\omega_0 x$ ضرب ، انتگرال گیری کرده خواهیم داشت :

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega_0 x\,dx}$$



مثال ۱- ضرایب سری فوریه شکل مقابل:

$$f(x)=\begin{cases}1 , & 0<x<\pi \\ 0 ; & \pi<x<2\pi\end{cases}$$

پریود $; T=2\pi \quad ; \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\times dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\times dx=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\times \cos n\omega_0 x\,dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\times\cos n\omega_0 x\,dx$$

$$a_n=0+\frac{1}{n\pi}\sin n\omega_0 x\Big|_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega_0 x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\times \cancel{\sin n\omega_0 x\,dx}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\times\sin n\omega_0 x\,dx$$

$$b_n=\frac{-1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{-1}{\pi n}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\frac{2}{\pi n} ; & n \text{ فرد} \\ 0 ; & n \text{ زوج}\end{cases}$$

بنابراین می‌توان $f(x)$ را به صورت زیر نمایش داد:

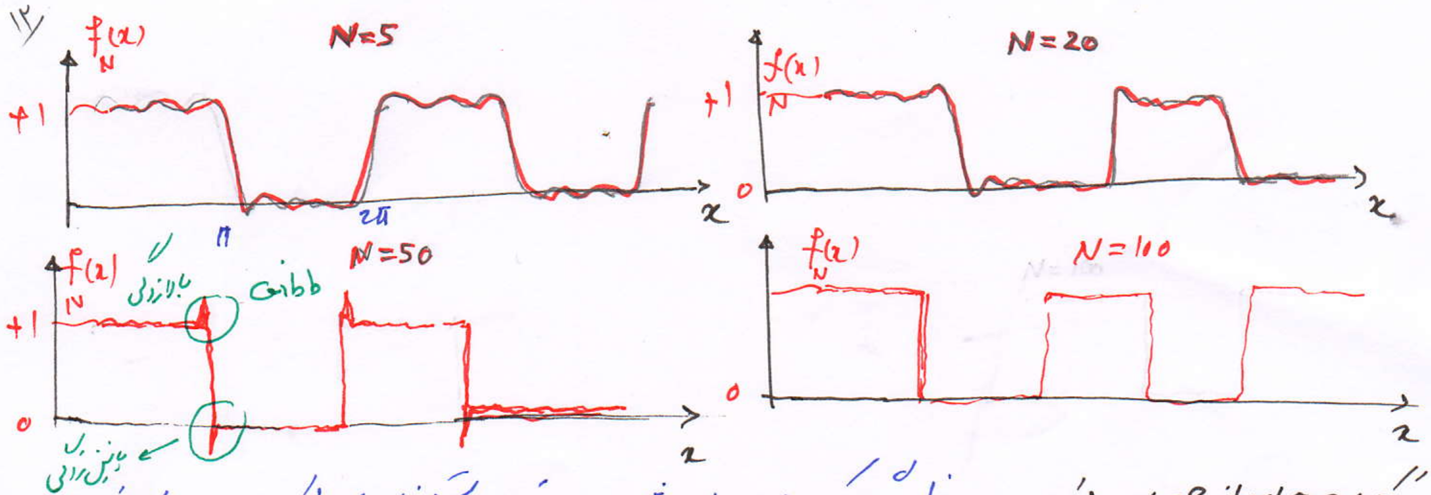
$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ \text{فرد}}}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin nx}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$$

توجه ۱- معادل سری فوریه در نقطه پیوستگی x_0، برابر $f(x_0)$ است و در نقطه ناپیوستگی x_0، برابر $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$ خواهد شد.

توجه ۲- معمولاً چون تعداد توابع سینوس و کسینوسی از لحاظ عملیاتی محدود می‌باشد لذا به جای $f(x)$ از $f_N(x)$ که N مقدار محدود است به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_N(x)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ \text{فرد}}}^{N}\frac{2}{\pi n}\sin nx$$



شکل موج حاصله از جمع سری فوریه: ملاحظه میگردد که به ازای افزایش N (تعداد جملات سری) شکل حاصل از سری فوریه به شکل اولیه نزدیک می‌شود.

مثال ۲- به کمک سری فوریه مثال قبل حاصل $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ را بدست آورید.

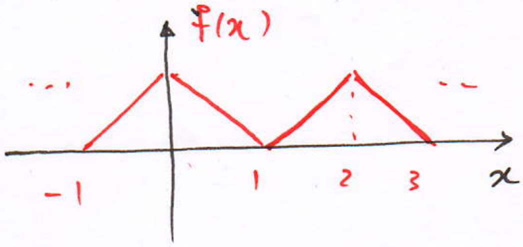
از مثال قبل داریم:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin nx$$

$f(\pi/2) = 1$ از روی نمودار $\Longrightarrow 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n(\pi/2)$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \pi/4$$

مثال ۳- ضرایب سری فوریه شکل مقابل را بدست آورید.



$$T = 2 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

محاسبه a_0:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 (-x+1)\,dx = 2(-x^2+x)\Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{سطح زیر شکل موج در یک پریود}}{\text{پریود}} = \frac{\frac{1}{2}\times 1 \times 2}{2} = \frac{1}{2}$$

همچنین می‌توان $\frac{a_0}{2}$ را از رابطه مقابل بدست آورد.

محاسبه a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_{-1}^{1} \underbrace{\overset{\text{زوج}}{f(x)}\,\overset{\text{زوج}}{\cos n\omega_0 x}}_{\text{زوج}}\,dx = 2\int_0^1 f(x)\cos n\omega_0 x\,dx$$

$$a_n = 2\int_0^1 \underbrace{(-x+1)}_{u}\,\underbrace{\cos n\omega_0 x\,dx}_{dv} = 2\left[(-x+1)\frac{1}{n\pi}\sin \pi x - (-1)\times\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_0^1$$

جزء به جزء: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

$$\Rightarrow a_n = 2\left[\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} \; ; & n \text{ فرد} \\ 0 \; ; & n \text{ زوج} \end{cases}$$

محاسبه b_n :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\overset{\text{زوج}}{f(x)}\,\overset{\text{فرد}}{\sin n\omega_0 x}}_{\text{فرد}}\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\text{تابع فرد})\,dx = 0$$

بنابراین می‌توان سری فوریه را بصورت زیر نوشت:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x}$$

نکته ۱- هرگاه تابع $f(x)$ فرد باشد:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\text{فرد})\,dx = 0$$

* یعنی فقط ترم سینوسی دارد.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\overset{\text{فرد}}{f(x)}\,\overset{\text{زوج}}{\cos n\omega_0 x}}_{\text{فرد}}\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\text{تابع فرد})\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\overset{\text{فرد}}{f(x)}\,\overset{\text{فرد}}{\sin n\omega_0 x}}_{\text{زوج}}\,dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin n\omega_0 x\,dx$$

نکته ۲- هرگاه تابع $f(x)$ زوج باشد:

* یعنی فقط ترم های کسینوسی دارد.

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx \quad ; \quad b_n = 0$$

مثال ۴- با استفاده از سری مثال قبل مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$ را بدست آورید.

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

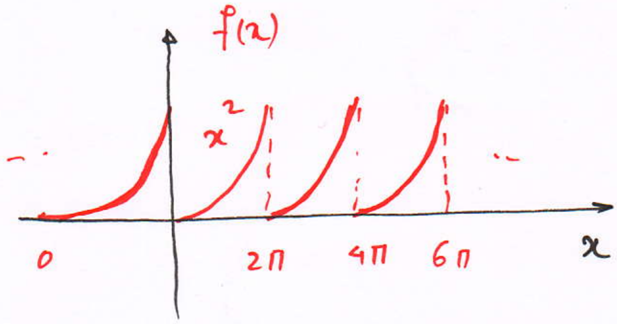
مسئله ۵- الف- تابع سری فوریه شکل موج برابر $f(x)=x^2$ ، $0<x<2\pi$ را محاسبه کنید.

ب- به کمک سری فوق ثابت نمایید که:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

حل الف-

$$T=2\pi \implies \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$$



$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{T}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos n\omega_0 x\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{T}x^2\cos n\omega_0 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos n\omega_0 x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{-\sin nx}{n}\right)'-2x\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)+2\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin n\omega_0 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{T}x^2\sin n\omega_0 x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x^2\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)-2x\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)+2\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{-4\pi}{n}$$

بنابراین سری به صورت:

$$\boxed{f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)}$$

حل ب-

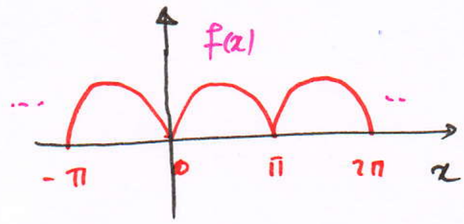
مقدار سری در نقطه ناپیوستگی $(x=0)$

$$=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{0+4\pi^2}{2}=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos n0-\frac{4\pi}{n^2}\sin n0\right)$$

$$\implies 2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\implies\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\implies \boxed{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}}$$

مثال ۶- ضرایب سری فوریه شکل موج سینوسی یکسو شده تمام موج را بدست آورید.



$$f(x) = \sin x \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

$$T = 2\pi \quad ; \quad \omega_0 = 1$$

* چون تابع زوج است بنابراین $b_n = 0$ می باشد.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos n\omega_0 x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos n\omega_0 x}_{\text{زوج}}}^{\text{زوج}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx \quad **$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos n\overset{1}{\omega_0} x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sin(x+nx)\,dx + \sin(x-nx)\right\}dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right\}$$

$$a_n = \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ فرد} \\ \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)} & ; \ n \text{ زوج} \end{cases} \quad , \quad n \neq 1$$

برای $n=1$ جداگانه a_1 محاسبه شود.

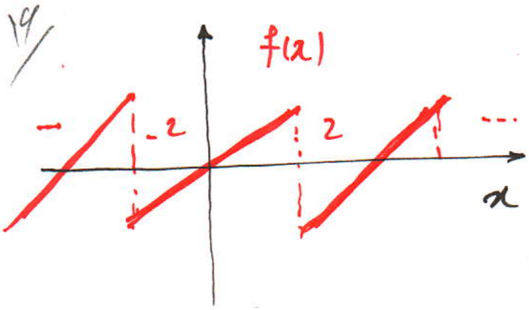
$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx = 0$$

$$n=0 \longrightarrow a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

چنانچه مشاهده شد فرمول a_n و b_n ممکن است برای تمام مقادیر n صادق نباشند که در این حالت به ازای یک مقدار خاص باید a_n و b_n بطور مستقیم پیدا کرد مثل حالت $n=1$ در این مثال

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=2 \\ \text{زوج}}}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n^2-1)}}$$

و در نتیجه سری فوریه



مثال ۷- سری فوریه شکل مقابل را بدست آورید.

$$f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 2 \quad , T = 4$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

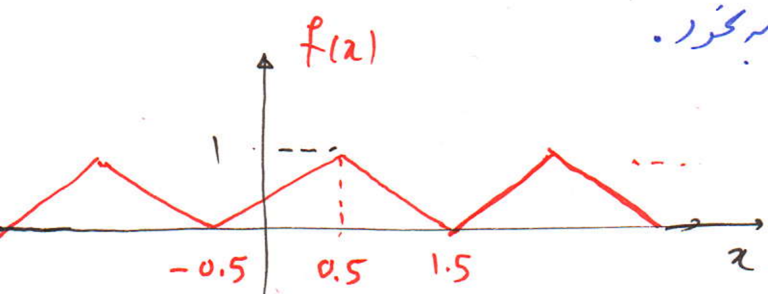
چون تابع فرد است بنابراین $a_n = 0$ می باشد.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\ \underbrace{\cos n\omega_0 x}_{\text{زوج}}}^{\text{فرد}}\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega_0 x\, dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\ \underbrace{\sin n\omega_0 x}_{\text{فرد}}}^{\text{زوج}}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x) \sin n\omega_0 x\, dx$$

$$b_n = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi}{2} x\, dx = \dots = \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

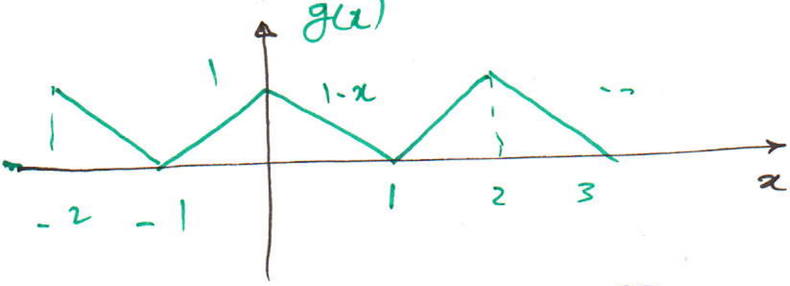
نکته مهم - برخی از توابع نه فرد و نه زوج می باشند ولی می توان با انتقال آنها را به تابع زوج یا فرد تبدیل نمود و در این صورت سری فوریه را ساده‌تر محاسبه نمود.



مثال ۸- ضرایب سری فوریه شکل مقابل:

تعریف می کنیم: $\boxed{g(x) = f(x+0.5)}$

در نتیجه $g(x)$ تابع زوج خواهد شد.



حال ضرایب $g(x)$ را پیدا می کنیم

$$a_0 = 1 \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad ; \quad T = 2$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^1 (1-x) \cos n\omega_0 x\, dx = \dots = \frac{-2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2} & ; n \text{ فرد} \\ 0 & ; n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

$$f(x) = g(x-0.5) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi (x - \frac{1}{2}) =$$

ادامه مثال ۸ -

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{4}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi}{2}}_{f(n) \text{ تابع } a_n} \cos n\pi x + \underbrace{\frac{4}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}}_{f(n) \text{ تابع } b_n} \sin n\pi x \right)$$

چند نکته: ① معمولاً a_n و b_n برحسب n توابع زوجی می باشند.

مثال ها مثل $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}$ و $b_n = \frac{-4\pi}{n}$ نیست

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n \,\&\, b_n = 0$

② معمولاً a_n برحسب n تابع زوج می باشد.

مثال $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$

③ معمولاً b_n برحسب n تابع فردی باشد.

مثال $b_n = \frac{-4\pi}{n}$

شرایط برای داشتن سری فوریه:

۱- شکل موج پریودیک باشد.

۲- اگر شکل موج ناپیوستگی دارد در هر پریود تعداد این ناپیوستگی ها محدود باشد.

۳- تعداد ماکزیمم و مینیمم ها در هر پریود محدود باشد.

۴- شکل موج در هر پریود مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی:

$$\int_0^T |f(x)|\,dx < \infty$$