مدولاسیون زاویه ای

سیگنال میانگذر زیر را در نظر بگیرید

$$x_c(t) = A(t)\cos(\omega_c t + \varphi(t))$$

$A(t) \geq 0 \longrightarrow$ دامنه لحظه ای
پوش سیگنال

$\theta(t) = \omega_c t + \varphi(t)$ زاویه لحظه ای

$\varphi(t) \longleftarrow$ فاز لحظه ای

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$ فرکانس لحظه ای

حال فرض کنید سیگنال با دامنه ثابت زیر

$$x_c(t) = A_c\cos(\omega_c t + \varphi(t)) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j\theta(t)}\} = A_c\cos\theta(t)$$

اطلاعات پیام در $\theta(t)$ نهفته باشد $\Leftarrow$ مدولاسیون نمایی یا زاویه ای

$$x(t) \longrightarrow \boxed{MOD} \longrightarrow x_c(t) = A_c\cos\theta(t)$$

مدولاسیون فاز PM

اطلاعات پیام در فاز لحظه ای قرار گرفته است

$\varphi(t) = \varphi_\Delta x(t)$

φ_Δ ضریب مدولاسیون $0 \leq \varphi_\Delta \leq 180$
انحراف فاز

$$x_c(t) = A_c\cos(\omega_c t + \varphi_\Delta x(t))$$

مدولاسیون فرکانس FM

اطلاعات پیام در فرکانس لحظه ای نهفته است

$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

f_Δ ضریب مدولاسیون $f_\Delta \ll f_c$
انحراف فرکانس

$\varphi(t) = 2\pi\int^t f_\Delta x(\lambda)\,d\lambda$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c\cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta\int^t x(\lambda)\,d\lambda\right)$$

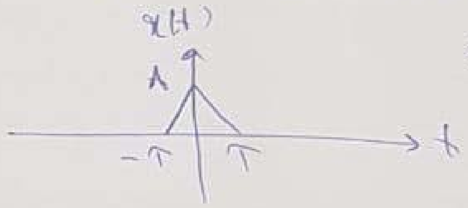
$S_T = \frac{1}{2} A_c$

توان ارسالی: دامنه ثابت است

	فاز لحظه‌ای $\varphi(t)$	فرکانس لحظه‌ای $f(t)$
PM	$\varphi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\varphi_\Delta \frac{dx(t)}{dt}$
FM	$2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\,d\lambda$	$f_c + f_\Delta x(t)$

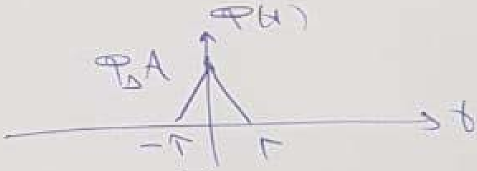
مثال: برای سیگنال پیام زیر در مدولاسیون های PM و FM فاز و فرکانس لحظه‌ای را بدست آورید و رسم کنید

$$x(t) = A\,\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

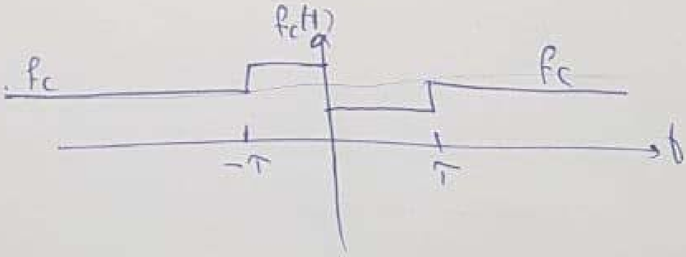


PM

$$\varphi(t) = \varphi_\Delta x(t)$$

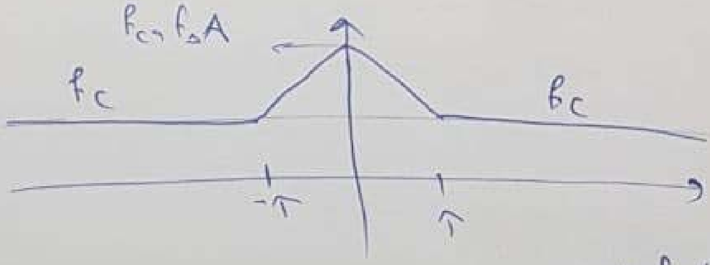


$$f_c(t) = f_c + \underbrace{\frac{\varphi_\Delta}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}}_{\pm \frac{\varphi_\Delta A}{2\pi\tau}}$$

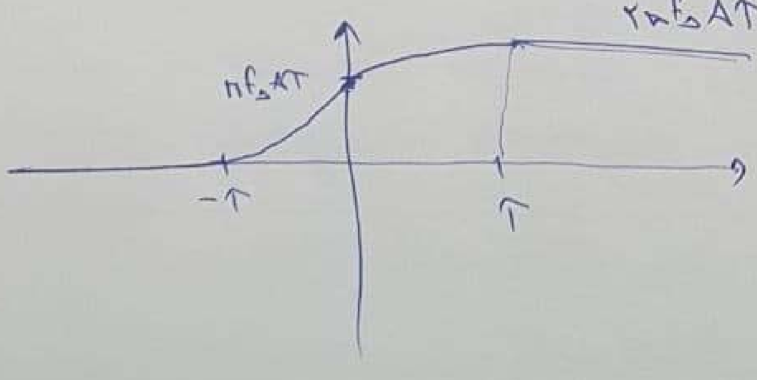


FM

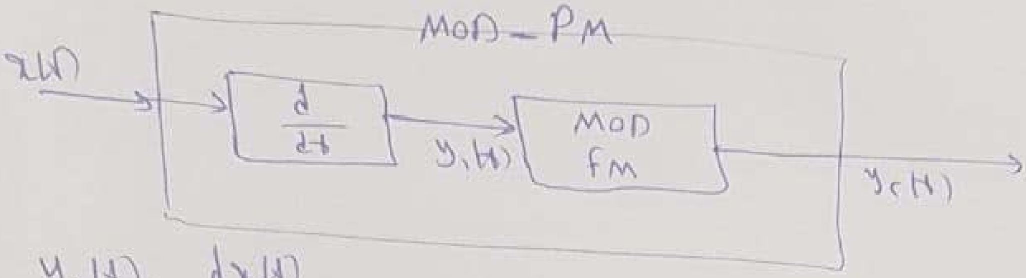
$$f_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$



$$\varphi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$$



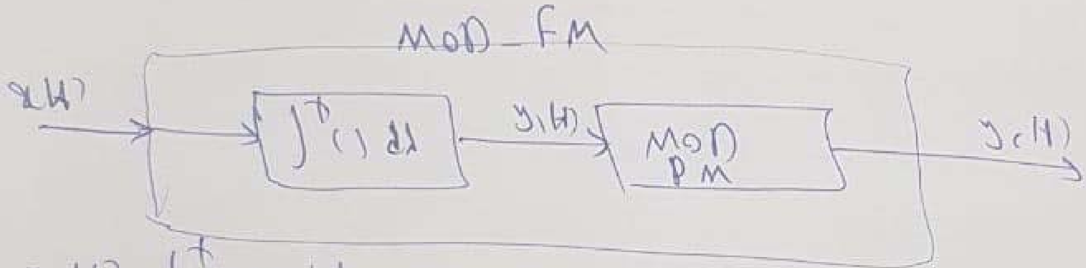
با استفاده از مشتق گیر و انتگرال گیر می توان سیگنال های FM و PM را به هم تبدیل کرد



سیگنال PM

$$y_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$y_c(t) = A_c\cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^t y_1(\lambda)\,d\lambda\right) = A_c\cos\left(\omega_c t + \underbrace{2\pi f_\Delta}_{\varphi_\Delta} x(t)\right)$$

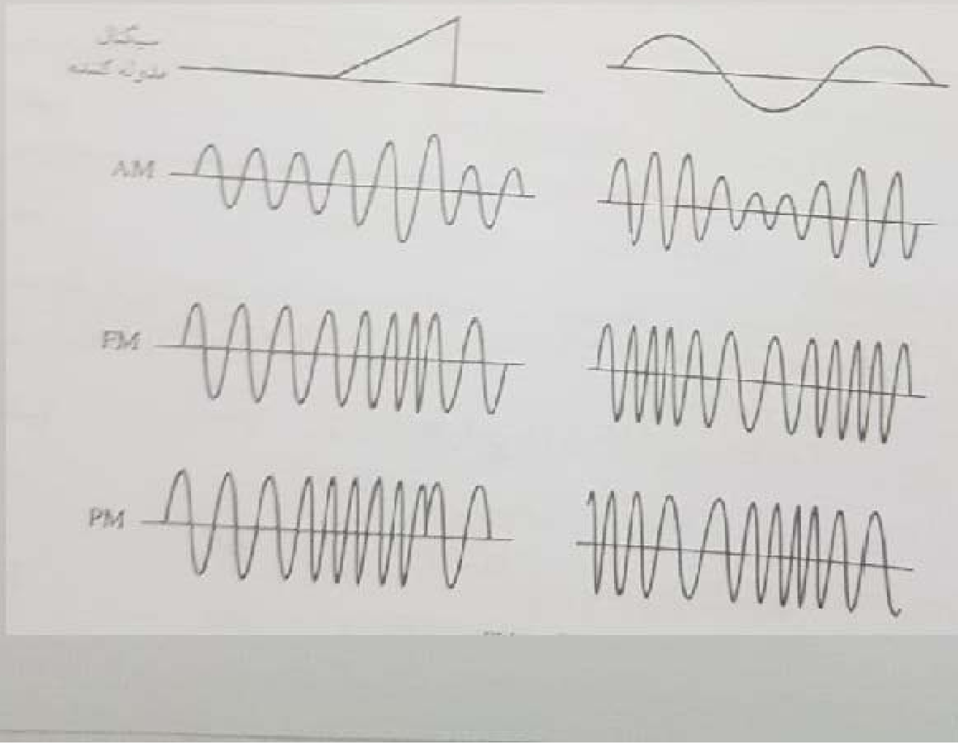


سیگنال FM

$$y_1(t) = \int^t x(\lambda)\,d\lambda$$

$$y_c(t) = A_c\cos\left(\omega_c t + \varphi_\Delta y_1(t)\right) = A_c\cos\left(\omega_c t + \underbrace{\varphi_\Delta}_{f_\Delta = \frac{\varphi_\Delta}{2\pi}} \int^t x(\lambda)\,d\lambda\right)$$

رسم سیگنال ها:



PM و FM باند باریک

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) = x_{ci}(t)\cos\omega_c t - x_{cq}(t)\sin\omega_c t$$

$$x_{ci}(t) = A_c \cos\phi(t) = A_c\left\{1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \cdots\right\}$$

$$x_{cq}(t) = A_c \sin\phi(t) = A_c\left\{\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \cdots\right\}$$

فرض کنیم $\phi(t) \ll 1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{ci}(t) \cong A_c \\ x_{cq}(t) \cong A_c\phi(t) \end{cases}$$

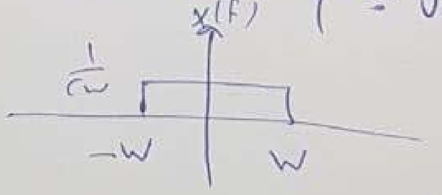
$$X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\{\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\} + \frac{jA_c}{2}\{\Phi(f-f_c) - \Phi(f+f_c)\}$$

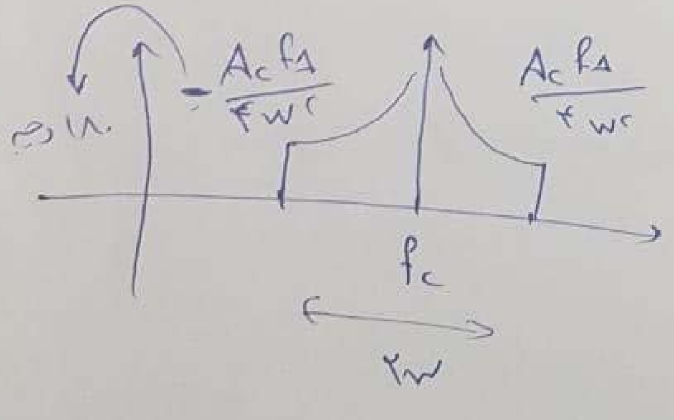
$$\Phi(f) = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & PM \\ -j f_\Delta \dfrac{X(f)}{f} & FM \end{cases} \Rightarrow \boxed{B_T = 2W}$$

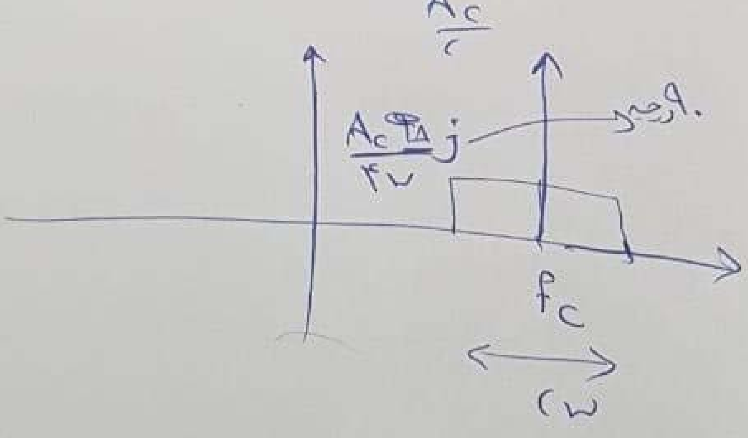
رسم طیف؟ خیلی سخت است و به تابع X(f) ربط دارد

مثال برای سیگنال پیام) $x(t) = \text{sinc}\,2Wt$ طیف‌ها را رسم کنید

$$X(f) = \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$







مدولاسیون تک آهنگ

برای هر دو نوع FM و PM یک روش استفاده می‌شود چون فقط سیگنال مدوله کننده را ۹۰ درجه تغییر فاز بدهیم.

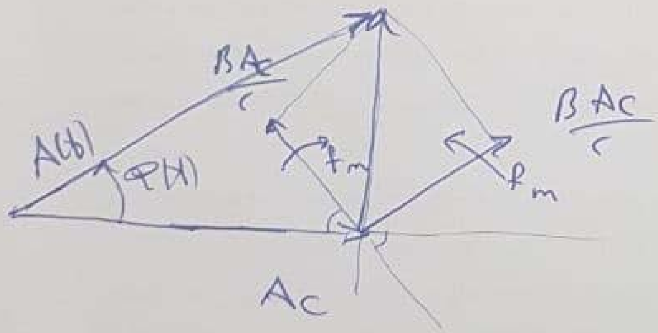
$$x(t) = \begin{cases} A_m \sin \omega_m t & PM \\ A_m \cos \omega_m t & FM \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) = \beta \sin \omega_m t$$

$$\text{شاخص مدولاسیون} \Leftarrow \beta = \begin{cases} A_m \varphi_\Delta & PM \\ \dfrac{A_m}{f_m} f_\Delta & FM \end{cases}$$

برای باند باریک بودن $\beta << 1$

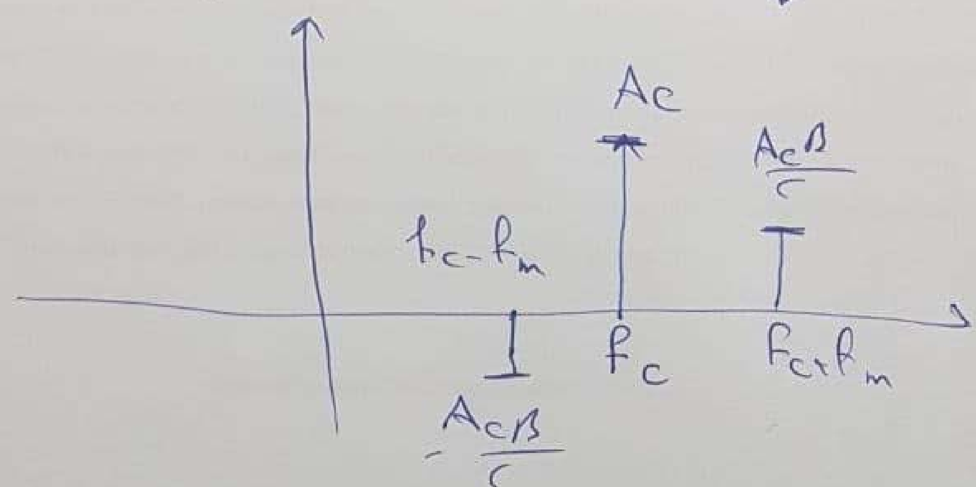
$$x_c(t) = A_c \cos \omega_c t - A_c \beta \sin \omega_m t \sin \omega_c t$$
$$= A_c \cos \omega_c t - \frac{A_c \beta}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c \beta}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t$$

نمایش فازوری ←



طیف خطی

↓



در حالت کلی

$$x_c(t) = A_c \{ \cos\phi(t) \cos\omega_c t - \sin\phi(t) \sin\omega_c t \}$$

$$= A_c \{ \cos(\beta \sin\omega_m t) \cos\omega_c t - \sin(\beta \sin\omega_m t) \sin\omega_c t \}$$

متناوب با $T = \frac{1}{f_m}$

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin\omega_m t) = A\,\mathrm{Re}\{ e^{j\omega_c t} e^{j\beta \sin\omega_m t} \}$$

$$e^{j\beta \sin\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_m t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T e^{j\beta \sin\omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt$$

با تعریف $T = \frac{2\pi}{\omega_m}$ و $\omega_m t = \theta$

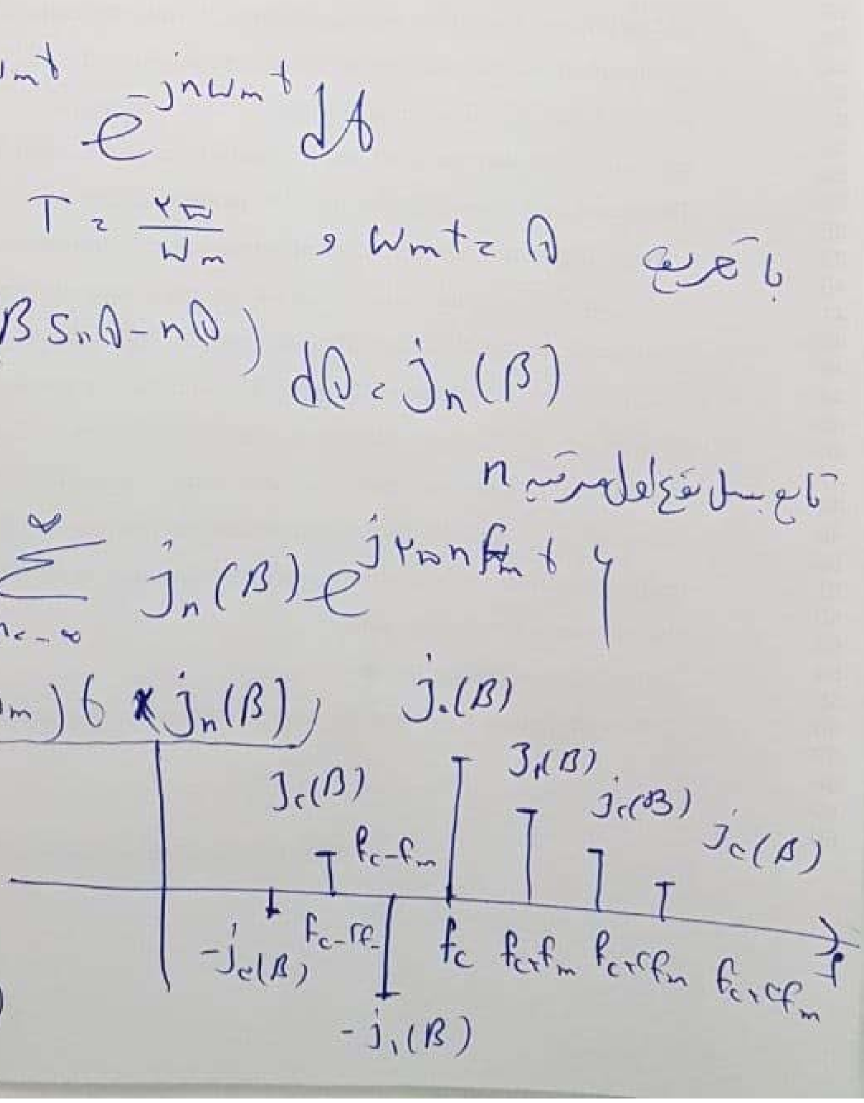
$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin\theta - n\theta)} d\theta = J_n(\beta)$$

تابع بسل نوع اول مرتبه n

$$x_c(t) = A_c\,\mathrm{Re}\{ e^{j\omega_c t} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t} \}$$

$$= \underbrace{A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c + n\omega_m)t \times J_n(\beta)}$$

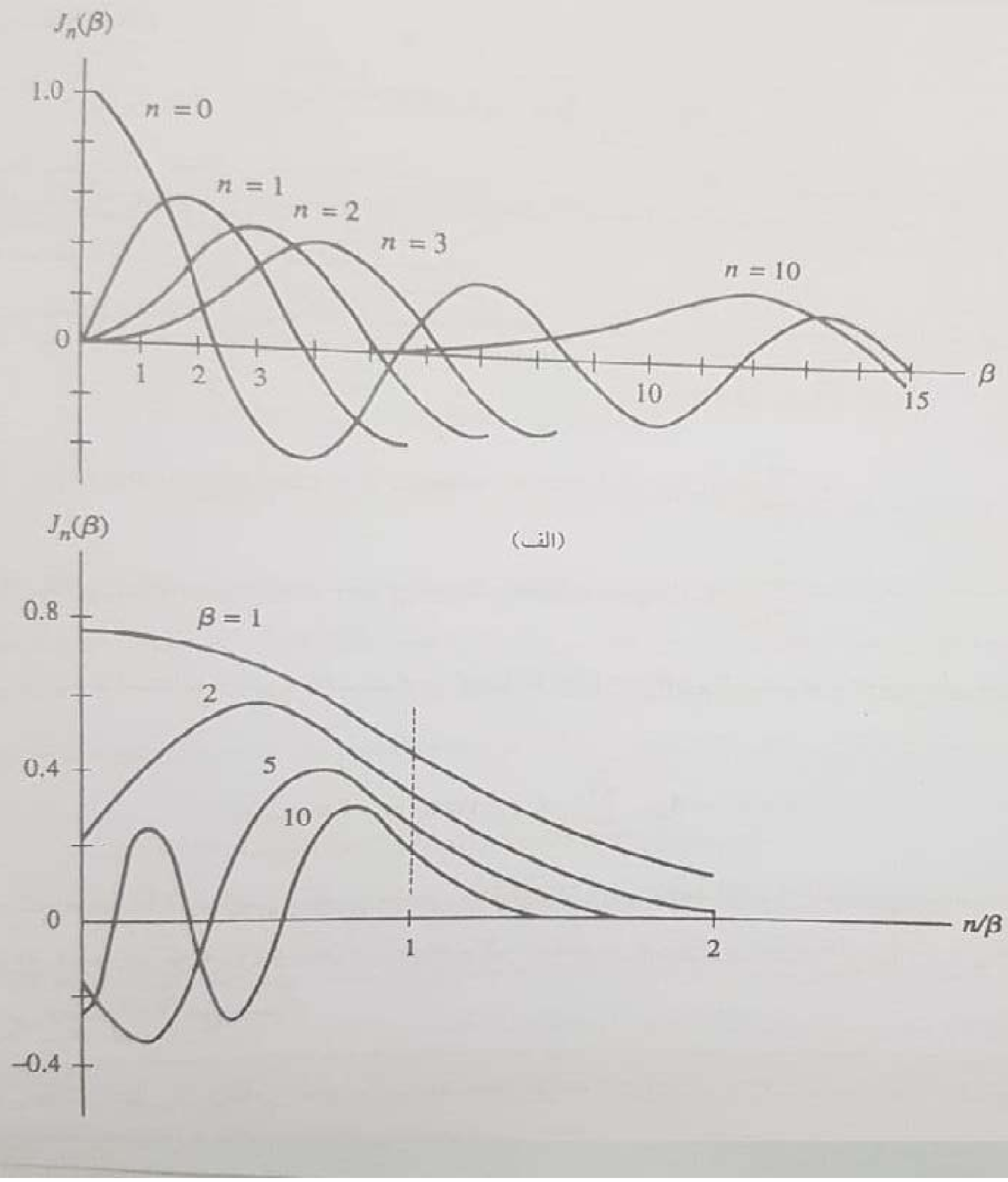
$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \\ J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \end{cases}$$



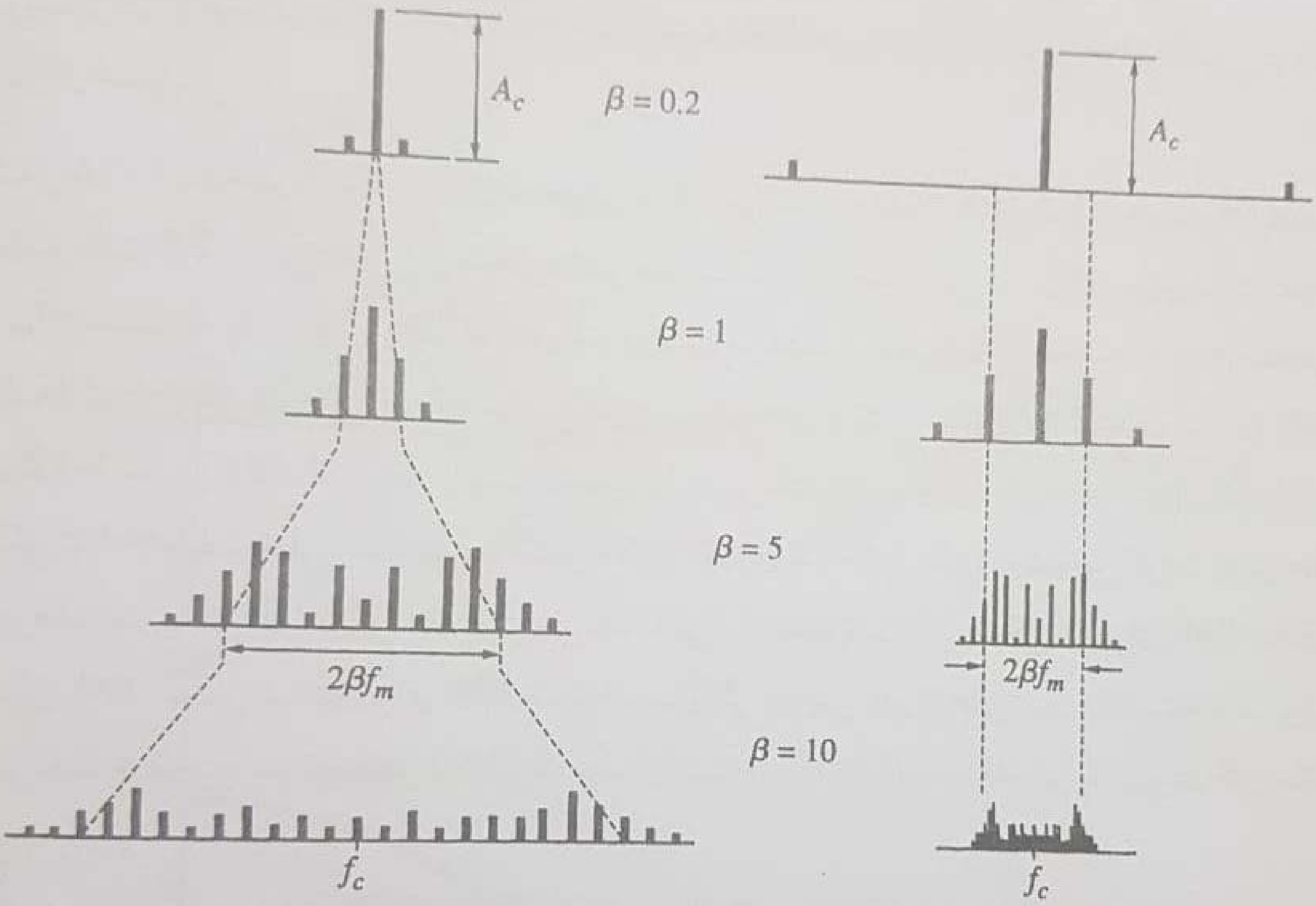
۱- دامنه $J_0(\beta)$ به شاخص مدولاسیون و در نتیجه به سیگنال مدوله کننده بستگی دارد
حامل بخشی از اطلاعات پیام را دارا است ← برخلاف طیف های AM که اینگونه نیست

۲- تعداد خطوط کناری باندی دارای دامنه قابل ملاحظه به β بستگی دارد
برای $\beta << 1$ فقط J_0 و J_1 مهم هستند ← $B_T \approx 2 f_m$

۳- به ازای $\frac{n}{\beta} > 1$ مقادیر $J_n(\beta)$ کاهش می یابد. اگر $|\frac{n}{\beta}| >> 1$ ← $J_n(\beta) << 1$
$B_T \simeq 2\beta f_m$



n	J_n(۰٫۱)	J_n(۰٫۲)	J_n(۰٫۵)	J_n(۱٫۰)	J_n(۲٫۰)	J_n(۵٫۰)	J_n(۱۰)	n
۰	۱٫۰۰	۰٫۹۹	۰٫۹۴	۰٫۷۷	۰٫۲۲	−۰٫۱۸	−۰٫۲۵	۰
۱	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۲۴	۰٫۴۴	۰٫۵۸	−۰٫۳۳	۰٫۰۴	۱
۲			۰٫۰۳	۰٫۱۱	۰٫۳۵	۰٫۰۵	۰٫۲۵	۲
۳				۰٫۰۲	۰٫۱۳	۰٫۳۶	۰٫۰۶	۳
۴					۰٫۰۳	۰٫۳۹	−۰٫۲۲	۴
۵						۰٫۲۶	−۰٫۲۳	۵
۶						۰٫۱۳	−۰٫۰۱	۶
۷						۰٫۰۵	۰٫۲۲	۷
۸						۰٫۰۲	۰٫۳۲	۸
۹							۰٫۲۹	۹
۱۰							۰٫۲۱	۱۰
۱۱							۰٫۱۲	۱۱
۱۲							۰٫۰۶	۱۲
۱۳							۰٫۰۳	۱۳
۱۴							۰٫۰۱	۱۴



$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c + n\omega_m)t = A_c \cos(\omega_c t + \varphi(t))$$

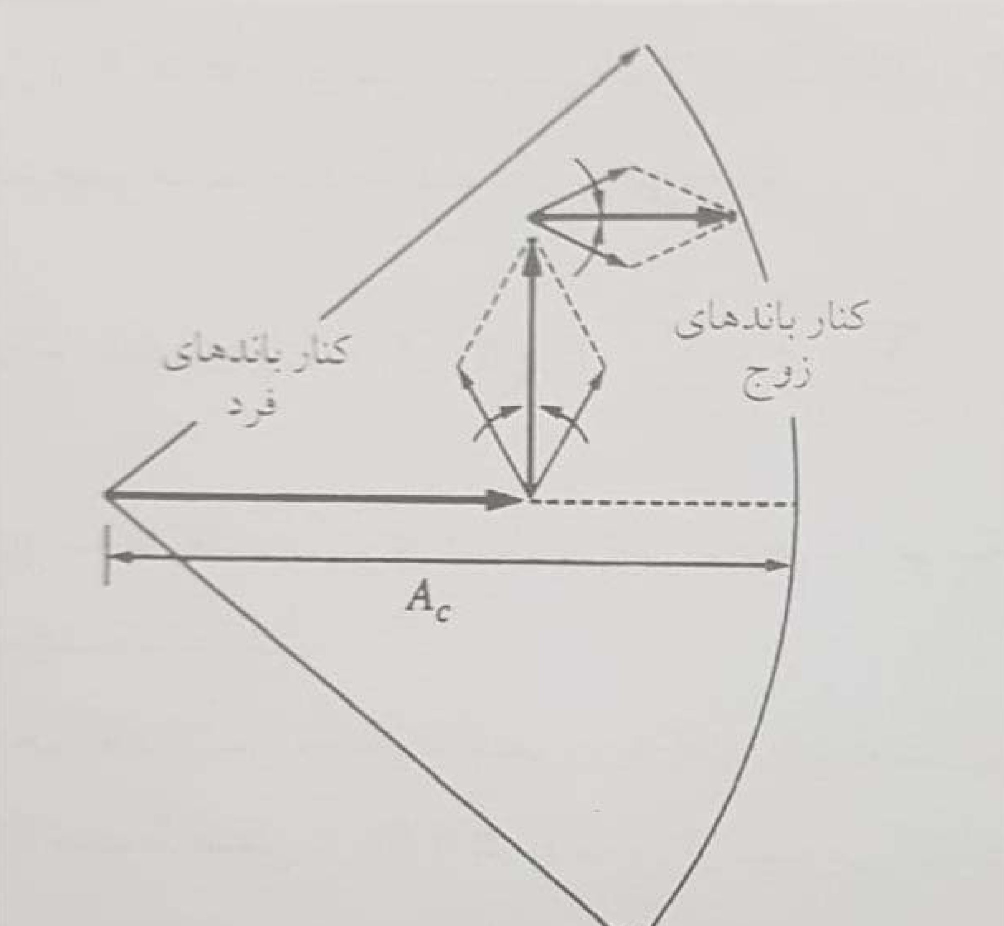
$\Leftarrow J_1$ و J_0

$$A(t) = \sqrt{A_c^2 + \left(2\,\frac{\beta}{2}\,A_c \sin\omega_m t\right)^2} \cong A_c\left(1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4}\cos 2\omega_m t\right)$$

$$\varphi(t) = tg^{-1}\left(\frac{2\left(\frac{\beta}{2}\right)A_c \sin\omega_m t}{A_c}\right) = \beta \sin\omega_m t$$

فاز متناسب با پیام اما دامنه تغییرات دارد

اضافه کردن دو کنار باند دیگر اثر تغییرات دامنه را بهبود می‌دهند اما کار را خراب می‌کند



مثال: فرض کنید سیگنال FM باند باریک زیر ارسال شده است. پارامترهای آن را بیابید

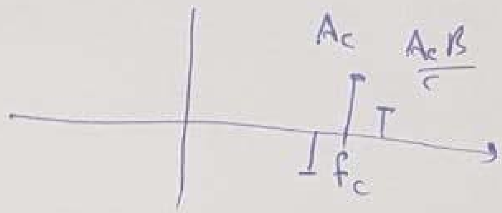
$$x_c(t) = 100\cos(2\pi\, 5000\, t + 0.5 \sin 2\pi\, 200\, t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = 5000 + 10 \cos 2\pi\, 200\, t$$

$$f_c = 5000$$

$$\begin{cases} f_\Delta = 10 \\ A_m = 1 \\ x(t) = \cos 2\pi 200 t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{A_m f_\Delta}{f_m} = 0.5 \\ \dfrac{A_c \beta}{2} = 2.5 \end{cases}$$

$$B = 400 = 2 f_m$$



$$S_T = \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{A_c\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{A_c\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(100)^2 + \frac{1}{2}(-2.5)^2 + \frac{1}{2}(2.5)^2 = 5006.25$$

$$\Longrightarrow S_T = \frac{1}{2}A_c^2 = 5000$$ ← کار باند کاهش داشته ایم؟

مدولاسیون چند آهنگی FM

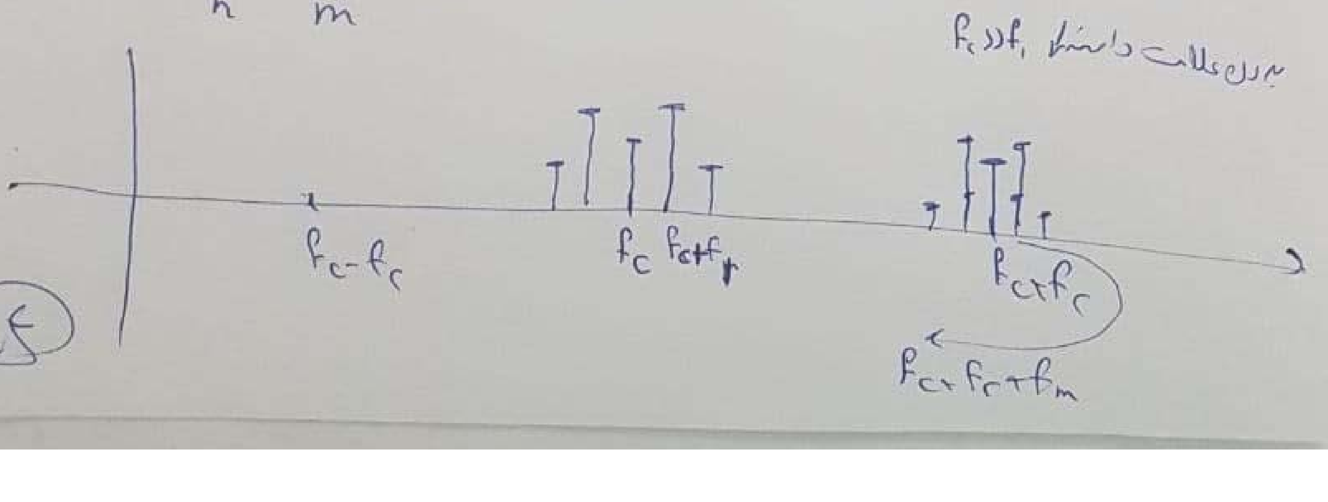
$$x(t) = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t$$

$$x_c(t) = A_c \{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\} \cos\omega_c t - A_c\{\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2\} \sin\omega_c t$$

$$\alpha_1 = \beta_1 \sin\omega_1 t \quad , \quad \beta_1 = \frac{A_1 f_\Delta}{f_1}$$

$$x_c(t) = A_c \sum_n \sum_m J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t$$

بدون علامت داشته باشیم $f_2 \gg f_1$



پهنای باند انتقال

چه مقدار از طیف موجود در سیگنال مهم است؟ به کاربرد بستگی دارد

دیده شد که برای $|\frac{n}{\beta}|>1$ مقدار $J_n(\beta)$ خیلی کوچک می‌شود

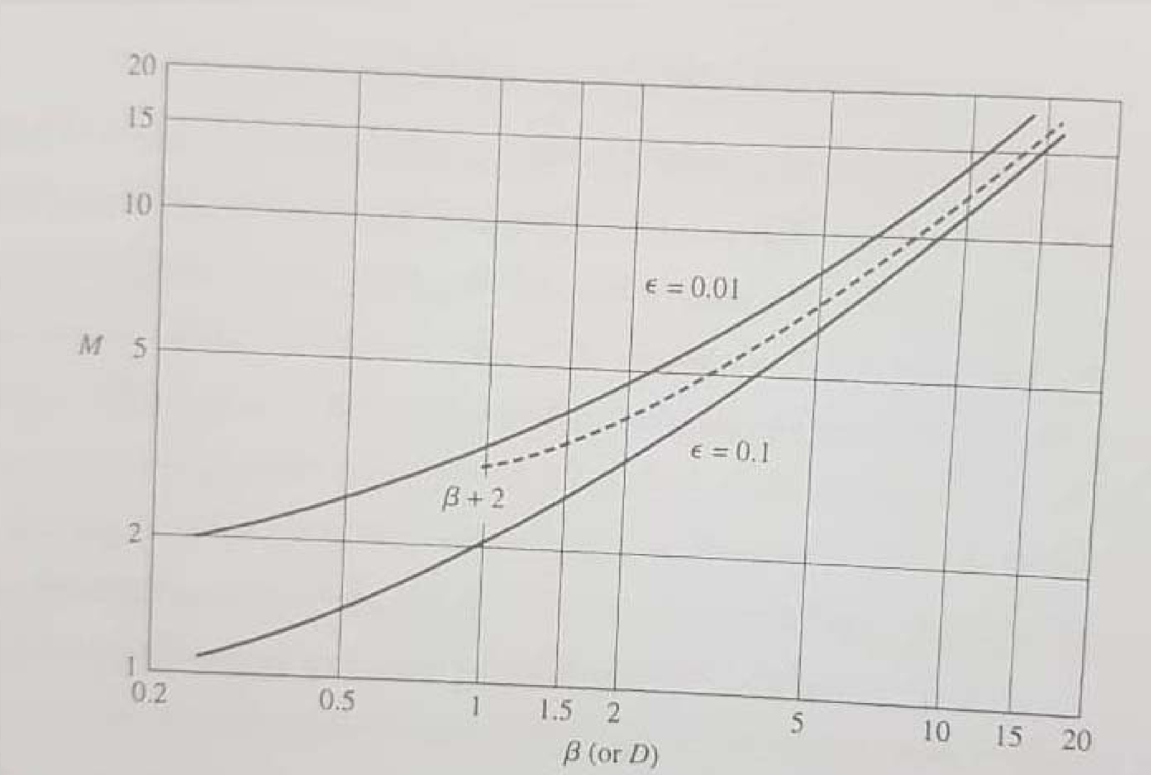
$$\left\{\begin{array}{l} |J_n(\beta)| \\ |n|<\beta = \dfrac{A_m f_\Delta}{f_m} \end{array}\right. \Longrightarrow f_c \pm \beta f_m \Rightarrow 2\beta f_m$$

کنار باندهای مهم؟ ϵ که $|J_n(\beta)|>\epsilon$ ، $\epsilon \in (0.01, 0.1)$

اگر $|J_M(\beta)|>\epsilon$ باشد و $|J_{M+1}(\beta)|<\epsilon$ آنگاه M زوج کنار باند مهم وجود دارد

پهنای باند ← تشخیص سوال است

$$B_T = 2M(\beta) f_m$$



۸۵

اما برای یک سیگنال کلی با پهنای باند W

$$M(\beta) = \beta + 2$$

$$B_T = 2(\beta+2) f_m = 2\left(\frac{A_m f_\Delta}{f_m} + 2\right) f_m = 2(A_m f_\Delta + 2 f_m)$$

$$B_T^{max} = 2(f_\Delta + 2W)$$

برای سیگنال $|x(t)| \leq 1$

$$D = \frac{f_\Delta}{W} \Rightarrow B_T = 2M(D)W$$

نسبت انحراف

$$B_T = \begin{cases} 2DW & D \gg 1 \\ 2W & D \ll 1 \end{cases}$$

قاعده کارسون

$$B_T = \begin{cases} 2(D+1)W & D \ll 2 \\ 2(D+2)W & D > 2 \end{cases}$$

برای PM

$$B_T = 2M(\varphi_\Delta)W \qquad M(\varphi_\Delta) \geq 1$$

$$B_T = 2(\varphi_\Delta + 1)W$$

مثال: برای FM با فرض $f_\Delta = 75\,kHz$, $W = 15\,kHz$ پهنای باند انتقال را بیابید

$$D = \frac{f_\Delta}{W} = \frac{75\,kHz}{15\,kHz} = 5 \rightarrow B_T = 2(D+2)W = 210\,kHz$$

مثال: برای FM با فرض $W =$ [illegible] kHz, $B_T = 40\,kHz$ ماکزیمم انحراف فرکانسی چقدر است؟

$$B_T = 2(D+2)W = 40\,kHz \rightarrow D = 4 = \frac{f_\Delta}{W} \rightarrow f_\Delta = 9\,kHz$$

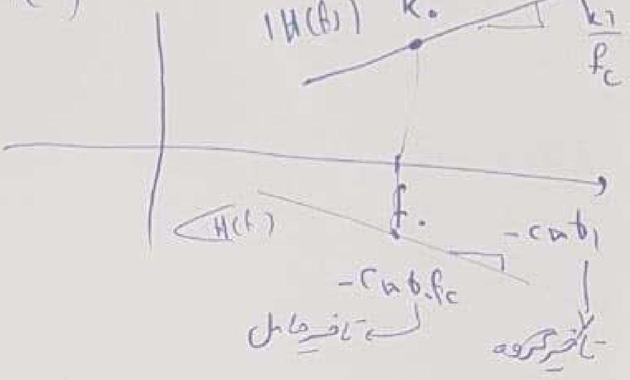
اعوجاج خطی

$$x_{Lp}(t) = A_c e^{j\Phi(t)}$$

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y_c(t)$$

$$Y_{Lp}(f) = X_{Lp}(f)\, H(f+f_c)\, u(f+f_c)$$

$$y_c(t) = Re\{ y_{Lp}(t)\, e^{j\omega_c t} \}$$



$$H_c(f+f_c)\,u(f+f_c) = \left(k_0 + \frac{k_1}{f_c} f\right) e^{-j2\pi(t_0 f_c + t_1 f)}$$

$$Y_{Lp}(f) = k_0 e^{-j\omega_c t_0}\left(X_{Lp}(f) e^{-j2\pi t_1 f} \right)$$
$$+ k_1 \frac{e^{-j\omega_c t_0}}{j\omega_c} \left\{ (j2\pi f) X_{Lp}(f) e^{-j2\pi t_1 f} \right\}$$

$$y_{Lp}(t) = k_0 e^{-j\omega_c t_0} x_{Lp}(t-t_1) + \frac{k_1}{j\omega_c} e^{-j\omega_c t_0} \dot{x}_{Lp}(t-t_1)$$

$$\dot{x}_{Lp}(t-t_1) = \frac{d}{dt}\left(A_c e^{j\varphi(t-t_1)} \right) = jA_c e^{j\varphi(t-t_1)} \dot{\varphi}(t-t_1)$$

$$\Rightarrow y_c(t) = A(t) \cos\{\omega_c(t-t_0) + \varphi(t-t_1)\}$$

$$A(t) = A_c\left\{ k_0 + \frac{k_1}{\omega_c} \dot{\varphi}(t-t_1) \right\}$$

$$\dot{\varphi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t) \Longrightarrow A(t) = A_c\underbrace{\left\{ k_0 + \frac{k_1 f_\Delta}{f_c} x(t-t_1) \right\}}_{AM}$$

فازمون تأخیر دارد که خیلی حاد نیست ⇐ خیلی مهم نیست

اما در حالت کلی اعوجاج فاز سهم است

$$y_c(t) = A_c\,|H(f_c)|\cos(\omega_c t + \arg H(f_c))$$

← پاسخ سیستم به سینوسی با فرکانس f_c

حال اگر $\omega \ll f_m$ و فرکانس لحظه‌ای خیلی کند تغییر کند می‌توان فرض کرد که سیگنال ما یک سینوسی با فرکانس لحظه‌ای $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

$$y_c(t) = A_c\,|H(f(t))|\cos(\omega_c t + \varphi(t) + \angle H(f(t)))$$

برای معتبر بودن تقریب

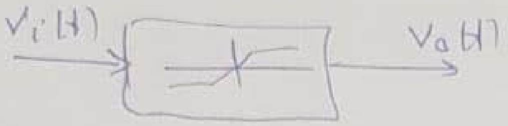
$$\left[\ddot{\varphi}(t)\right]_{max}\left[\frac{1}{|H(f)|}\frac{d^2 H(f)}{d f^2}\right]_{max} \ll 8\pi^2$$

حال فرض کنید سیستم تغییر فاز غیرخطی $\angle H(f) = \alpha f^2$ دارد

که با فرض $f(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t)$

$$\underbrace{\angle H(f) = \alpha f_c^2 + \frac{\alpha f_c}{\pi}\dot{\varphi}(t) + \frac{\alpha}{4\pi^2}\dot{\varphi}^2(t)}_{\text{اعوجاج‌های ایجاد شده}}$$

اعوجاج غیرخطی و محدودکننده



$$v_i(t) = A(t)\cos\theta_c(t)$$

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \varphi(t)$$

متناوب از θ_c با دوره 2π

$$v_o = \sum_{n=1}^{\infty} |2a_n|\cos(n\theta_c + \angle a_n)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} v_i(t)\, e^{-jn\theta_c}\, d\theta_c$$

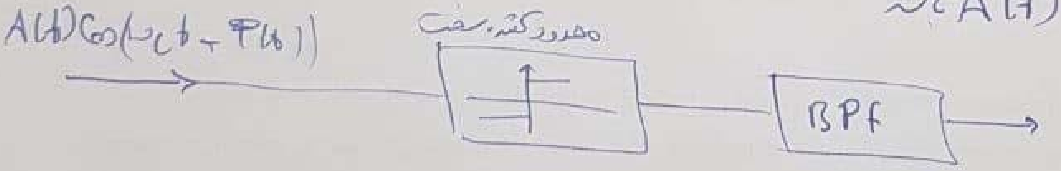
اگر سیگنال FM ورودی دامنه ثابت داشته باشد

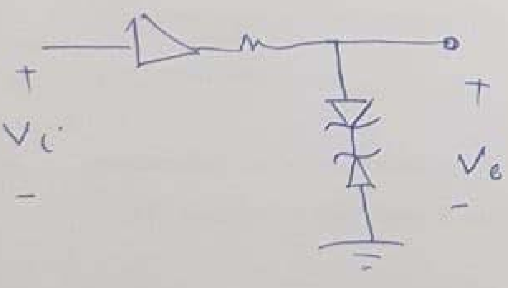
$$v_o(t) = |2a_1|\cos(\omega_c t + \varphi(t) + \angle a_1) + |2a_2|\cos(2\omega_c t + 2\varphi(t) + \angle a_2) + \_\_\_$$

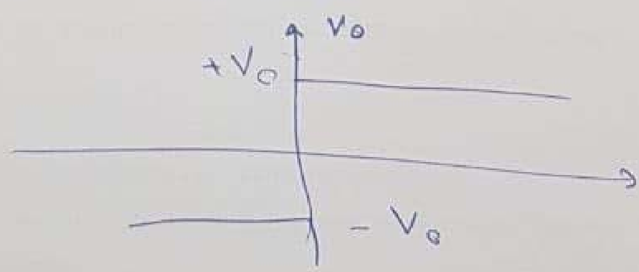
FM در فرکانس های مختلف

اگر در حوزه فرکانس همپوشانی نداشته باشند که می توان با فیلتر جدا کرد.

حال اگر دامنه $A(t)$ باشد



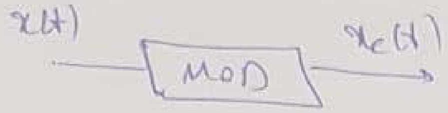




$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi} & n = 1, 5, 9, \ldots \\ \dfrac{-4V_0}{n\pi} & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$V_o(t) = \frac{4V_0}{\pi}\cos(\omega_c t + \varphi(t)) - \frac{4V_0}{3\pi}\cos(3\omega_c t + 3\varphi(t)) + \_\_\_$$

تولید FM و PM

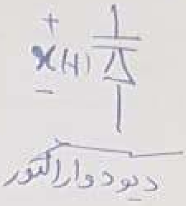


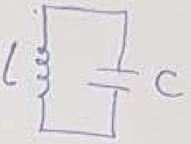
روش مستقیم FM

استفاده از نوسان ساز کنترل شده با ولتاژ (VCO)

$$W = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$C = C_0 - C_1 x(t)$$





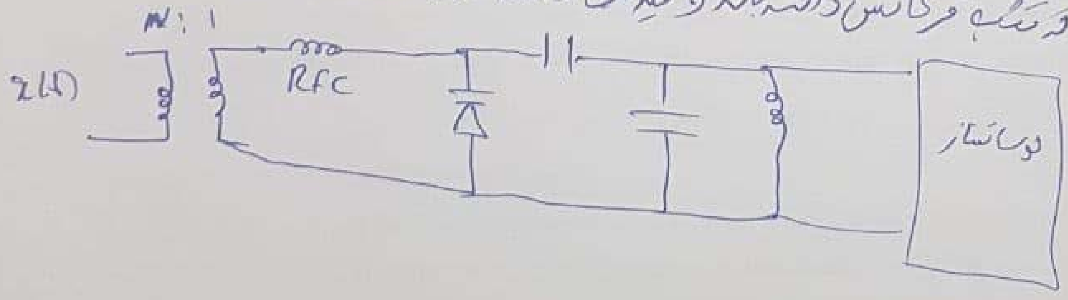
$$\Rightarrow x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$$

$$\frac{d\theta_c(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}\,\sqrt{1 - \frac{C_1}{C_0} x(t)}}$$

$$= W_c \left(1 + \frac{C_1}{2C_0} x(t)\right)$$

$$\Rightarrow \theta_c(t) = 2\pi f_c t + 2\pi \underbrace{\frac{C_1}{2C_0} f_c}_{f_\Delta} \int^t x(\lambda)\, d\lambda \qquad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$$

استفاده از مداری که تنظیم فرکانس داشته باشد و فیدبک داشته باشد سخت است

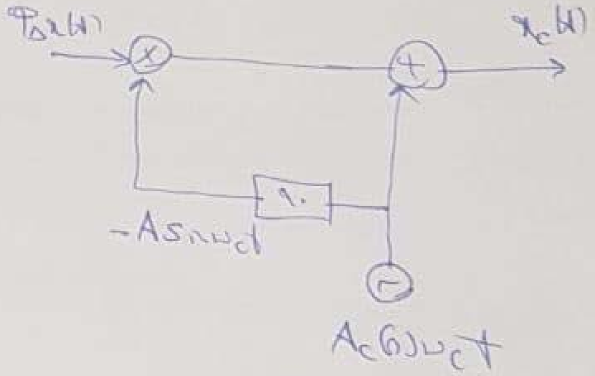


روش غیرمستقیم

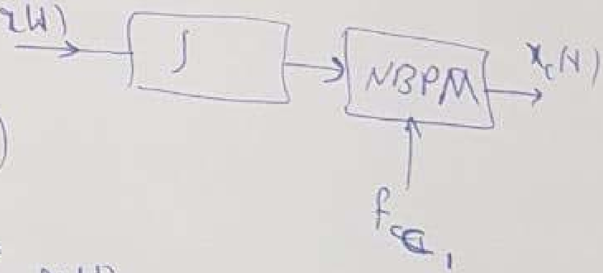
ابتدا ساخت یک سیگنال باند باریک

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_\Delta x(t))$$
$$= A_c \cos\omega_c t - A_c \phi_\Delta x(t) \sin\omega_c t$$

$$f(t) = f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$$



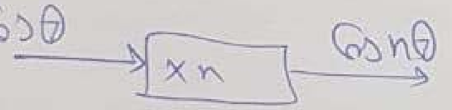
برای FM باند باریک

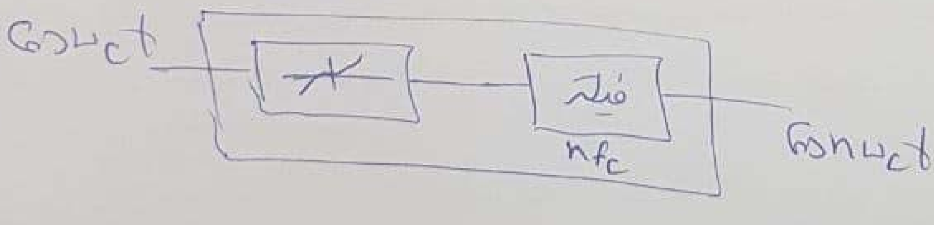


$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_{c_1} t + \phi_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda)$$

$$f_1(t) = f_{c_1} + \frac{\phi_\Delta}{2\pi} x(t) = f_{c_1} + f_{\Delta_1} x(t)$$

استفاده از ضرب کننده فرکانسی



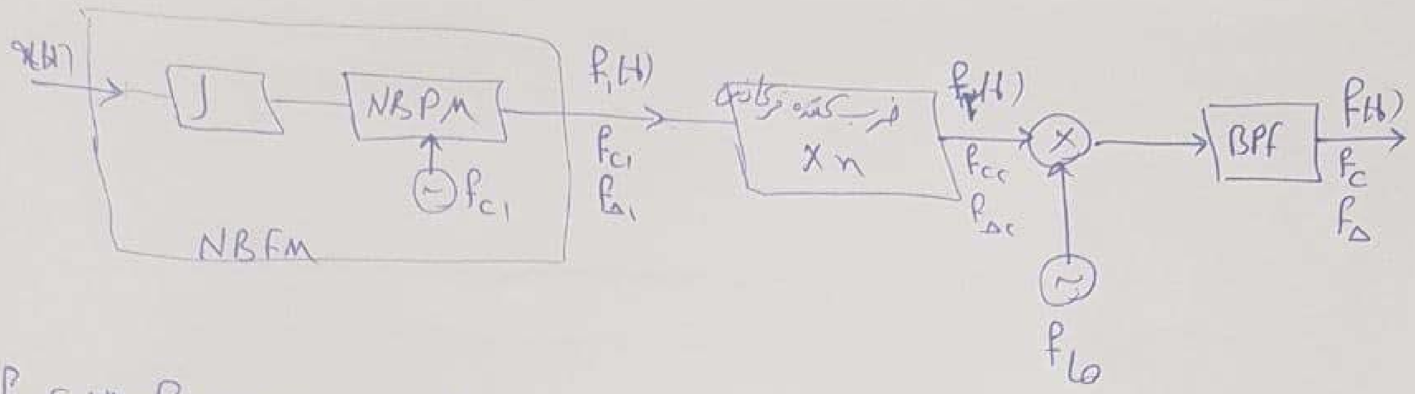


تنظیم f_Δ با استفاده از ضرب کننده

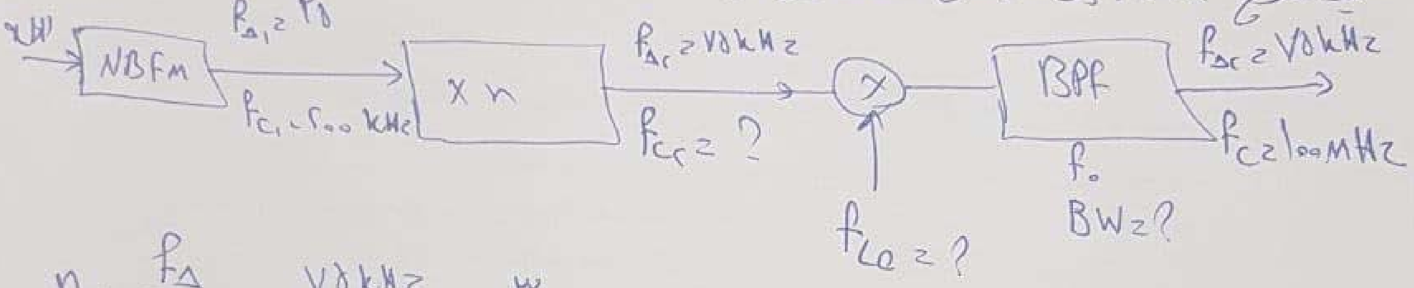
$$f_{\Delta_1} \longrightarrow f_\Delta \quad \longrightarrow n = ? \longrightarrow n = \frac{f_\Delta}{f_{\Delta_1}} \Longleftrightarrow f_\Delta = n f_{\Delta_1}$$

$$A_c \cos(\omega_{c_1} t + 2\pi f_{\Delta_1} \int^t x(\lambda)\, d\lambda) \longrightarrow A_c \cos(n\omega_{c_1} t + 2\pi n f_{\Delta_1} \int^t x(\lambda)\, d\lambda)$$

$\Rightarrow$ تنظیم f_c $\;\rightarrow f_{c_1} \longrightarrow \underbrace{n f_{c_1}}_{f_{c_1}'} \longrightarrow f_c$



مثال: بلوک دیاگرام یک سیستم FM را که از روی NBFM با مشخصات $f_\Delta = 25\ Hz$ و $f_c = 200\ kHz$ یک موج FM با پارامترهای $f_\Delta = 75\ kHz$ و $f_c = 100\ MHz$ تولید می‌کند را تعیین کنید. $W = 5\ kHz$



$$n = \frac{f_\Delta}{f_{\Delta 1}} = \frac{75\ kHz}{25\ Hz} = 3000$$

$$\Longrightarrow f_{c2} = 3000 \times 200\ kHz = 600\ MHz$$

$$f_{LO} = 700\ MHz \rightarrow \begin{cases} 1.3\ GHz \\ 100\ MHz \end{cases} \quad f_{\Delta 2} = 75\ kHz$$

$$f_{LO} = 500\ MHz \rightarrow \begin{cases} 1.1\ GHz \\ 100\ MHz \end{cases} \quad \begin{cases} f_{c2} = 1.1\ GHz \\ f_{\Delta 2} = 75\ kHz \\ f_c = 100\ MHz \end{cases}$$

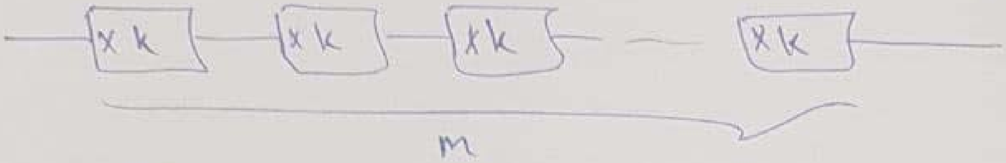
$$BPF \longrightarrow f_0 = 100\ MHz$$

$$BW = 2(D+1)W = 2\left(\frac{f_\Delta}{W} + 1\right)W = 2 \times 16 \times 5k = 160\ kHz$$

نکته: با توجه به بسط سیستم غیرخطی $y(t)=\sum a_n x^n(t)$ و آنکه $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

نمی‌توان یک دفعه یک سیستم با ضریب بالا استفاده کرد

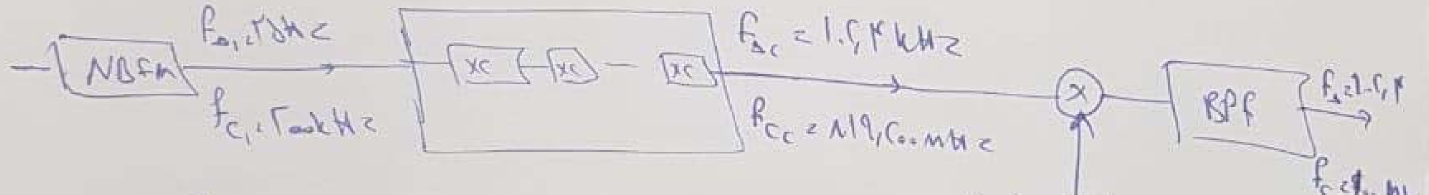
$\Longleftarrow$ استفاده از دو برابر کننده و سه برابر کننده



$$n=k^m \Longrightarrow k^m \geq n \longrightarrow m \geq \log_k n$$

مثال: برای یک سیگنال پیام با $W=5kHz$ با استفاده از روش غیرمستقیم از روی NBFM با مشخصات $f_{c_1}=200kHz$ و $f_{\Delta_1}=25Hz$ قرار است سیگنال FM با $f_\Delta=75kHz$ و $f_c=100MHz$ ساخته شود

طراحی را برای استفاده از فقط دو برابر کننده انجام دهید



$$n=\frac{f_\Delta}{f_{\Delta_1}}=3000 \longrightarrow m \geq \log_2 3000=11,5$$

$$m=12 \longrightarrow n=2^{12}=4096$$

$$f_\Delta=4096\times 25=102,400\ kHz$$

$$f_{c_1}=4096\times 200k=819,200\ MHz$$

$$f_{Lo}=719,200 \begin{cases} 1,538,400\ kHz \\ 100\ MHz \end{cases}$$

$$BPF \longrightarrow f_0=100\ MHz$$

$$BW=2(D+1)W$$

$$D=\frac{f_\Delta}{W}=\frac{102,4\ kHz}{5\ kHz}$$

موج مثلثی FM

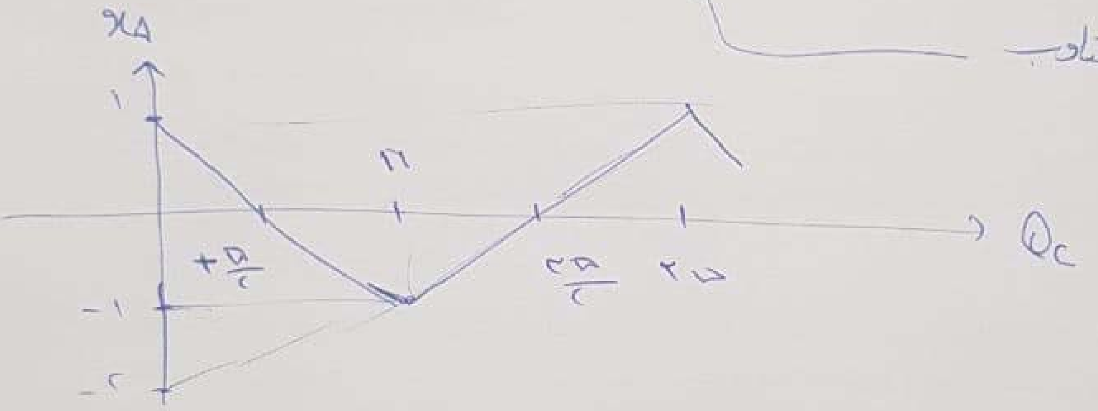
$x_c(t) = A_c \cos\theta_c(t)$

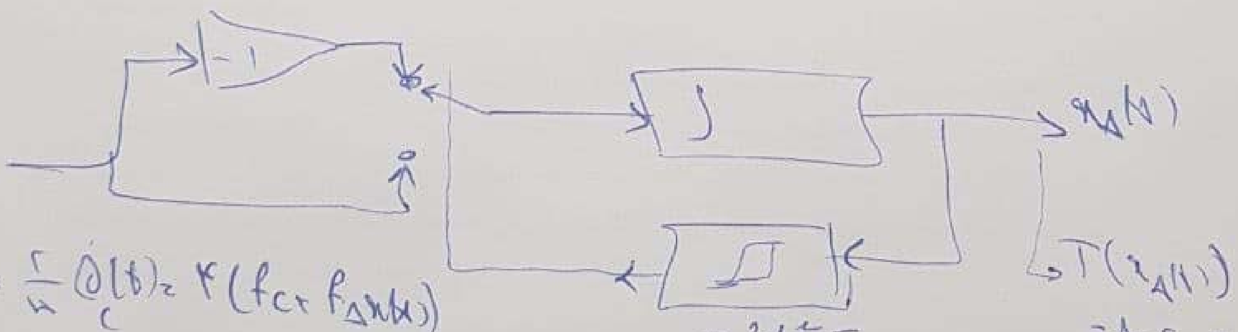
$\theta_c(t) = \omega_c t + \varphi(t) - \varphi(0)$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

$$\Rightarrow x_\Delta(t) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\cos\theta_c(t)) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi}\theta_c & 0 < \theta_c \le \pi \\ -3 + \frac{2}{\pi}\theta_c & \pi < \theta_c < 2\pi \end{cases}$$

متناوب





$v(t) = \frac{2}{\pi}\dot{\theta}_c(t) = 4(f_c + f_\Delta x(t))$

تریگر اشمیت

$= \frac{A_c \sin \frac{\pi}{2} x_\Delta(t)}{f_M}$

هرگاه $x_\Delta(t)$ به $+1$ می رسد کلید به حالت بالا می رود

هرگاه $x_\Delta(t)$ به -1 می رسد کلید به حالت پایین می رود

$t_0 = 0 \to x_\Delta(0) = +1 \xrightarrow[\text{کلید بالا}]{} x_\Delta(t) = 1 - \int_0^t v(\lambda)\,d\lambda = 1 - \frac{2}{\pi}(\theta_c(t) - \theta_c(0))$

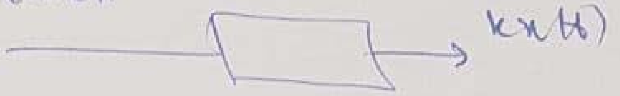
$= 1 - \frac{2}{\pi}\theta_c(t) \quad 0 < t < t_1 \Rightarrow \theta_c(t_1) = \pi$

$x_\Delta(t) = -1 + \int_{t_1}^{t} v(\lambda)\,d\lambda = -1 + \frac{2}{\pi}(\theta_c(t) - \theta_c(t_1))$

$= -3 + \frac{2}{\pi}\theta_c(t) \quad t_1 < t < t_2$

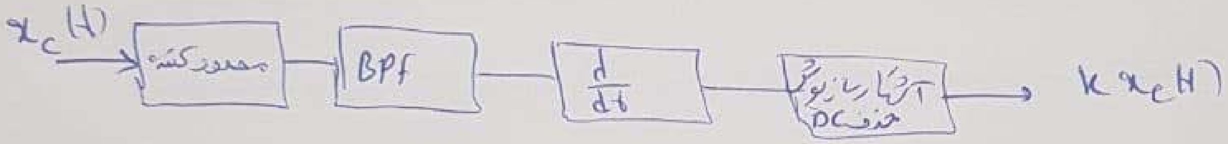
آشکارساز فرکانس

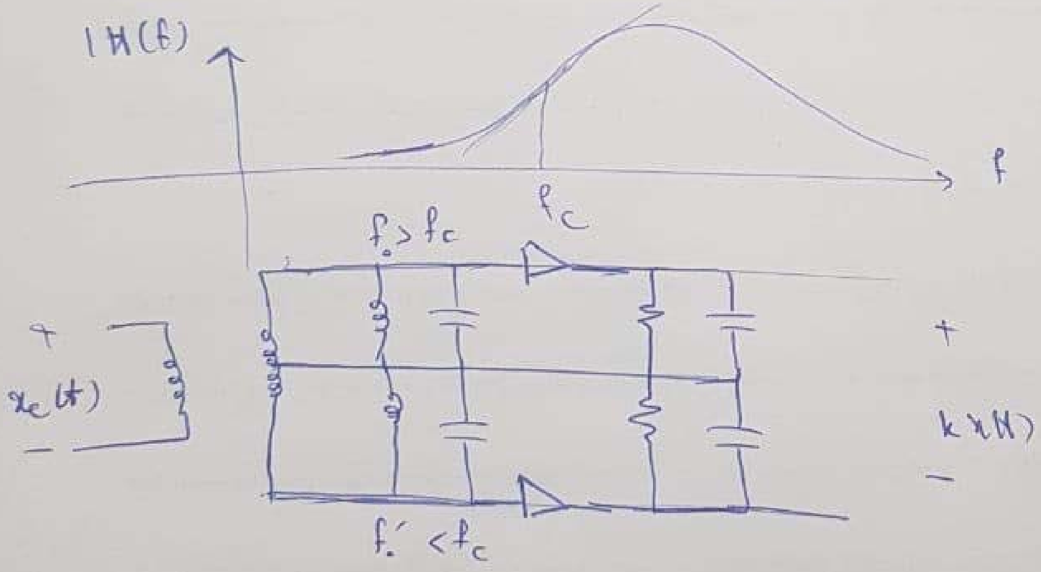
$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda\right)$$

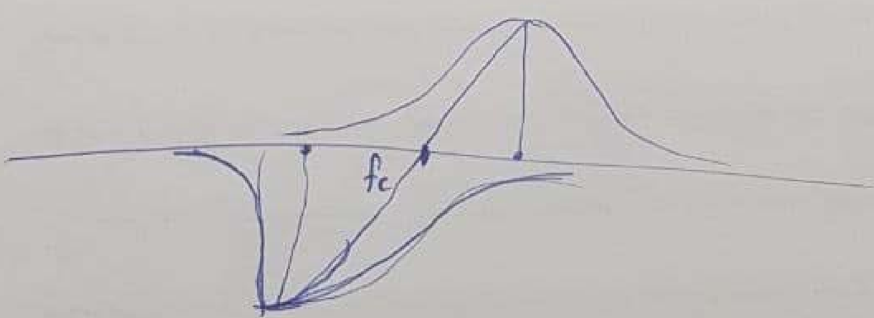


تبدیل FM به AM
استفاده از مشتق گیر

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = \underbrace{2\pi\left(f_c + f_\Delta x(t)\right)}_{\text{پوش}} \sin\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda \pm 180\right)$$





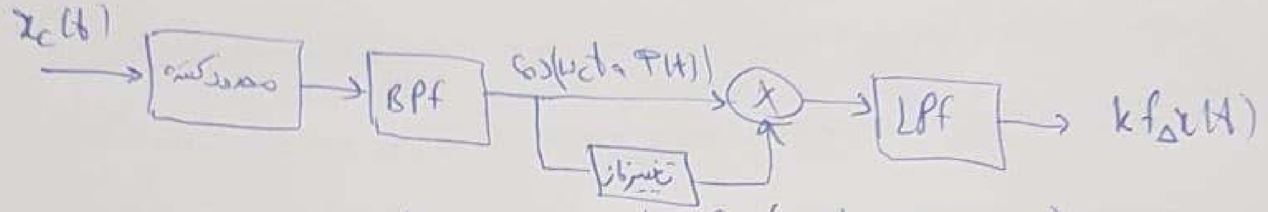


متمایز ساز تغییر فاز

اگر $v(t)$ در بازه t_1 خیلی تغییر نکند ← $\dot{v}(t) \approx \frac{1}{t_1}\{v(t)-v(t-t_1)\}$

حال برای FM ← $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$

$$\phi(t)-\phi(t-t_1) = t_1\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta t_1 x(t)$$



تاخیر گروه t_1 ←

تاخیر حامل t_0 ← $w_c t_0 = 90°$

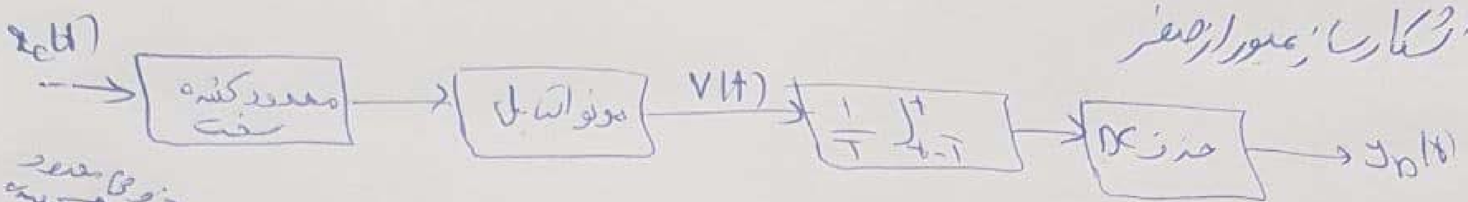
$$\cos(w_c t - 90° + \phi(t-t_1)) = \sin(w_c t + \phi(t-t_1))$$

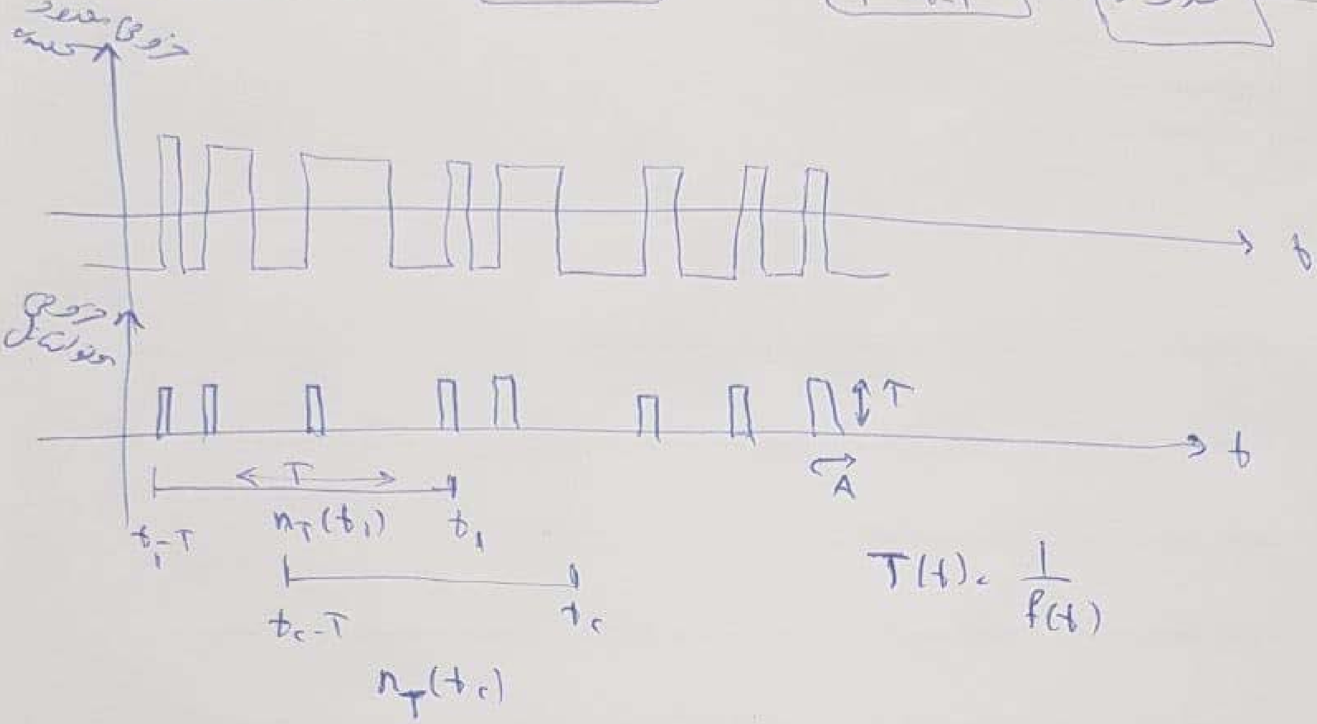
$\xrightarrow{\text{خروجی فیلتر}}$ $\sin(\phi(t)-\phi(t-t_1)) \approx \phi(t)-\phi(t-t_1)$

اگر t_1 خیلی کوچک باشد $(\phi(t)-\phi(t-t_1)) \ll 2\pi$

$\xrightarrow{\text{خروجی فیلتر}}$ $\phi(t)-\phi(t-t_1) = k f_\Delta x(t)$

۳-۲ آشکارساز عبور از صفر





$$T(t) = \frac{1}{f(t)}$$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{n_T(t)}{T}$$

خروجی انتگرال گیر $\Longrightarrow$ $$\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} v(\lambda)\,d\lambda = \frac{n_T(t)A\tau}{T} = A\tau f(t)$$

حذف DC $\Longrightarrow$ $$y_D(t) = A\tau f_\Delta x(t)$$

تداخل

تداخل : هر سیگنال با منشأ اساسی که با سیگنال اصلی آمیخته شود
حیطه فرستنده در یک بازه فرکانسی

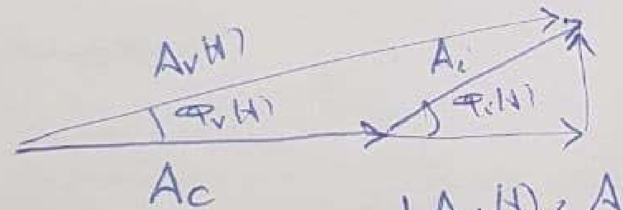
تداخل سینوسی

سیگنال دریافتی

$$v(t) = A_c \cos \omega_c t + \underbrace{A_i \cos((\omega_c + \omega_i)t + \varphi_i)}_{\text{تداخل}}$$

$$= A_v(t) \cos(\omega_c t + \varphi_v(t))$$

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{A_i}{A_c} \\ \varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_v(t) = A_c \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \varphi_i(t)} \\ \varphi_v(t) = tg^{-1} \dfrac{\rho \sin \varphi_i(t)}{1 + \rho \cos \varphi_i(t)} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \rho \ll 1 \longrightarrow \begin{cases} A_v(t) = A_c\{1 + \rho \cos(\omega_i t + \varphi_i)\} \\ \varphi_v(t) = \rho \sin(\omega_i t + \varphi_i) \end{cases}$$

مدولاسیون همزمان
فاز – دامنه

$$\Rightarrow \rho \gg 1 \longrightarrow \begin{cases} A_v(t) = A_i\{1 + \rho^{-1} \cos(\omega_i t + \varphi_i)\} \\ \varphi_v(t) = \omega_i t + \varphi_i \end{cases}$$

مدولاسیون دامنه

حال اگر سیگنال با تداخل وارد آشکارساز شود! $\rho << 1$ و $\phi_i = 0$

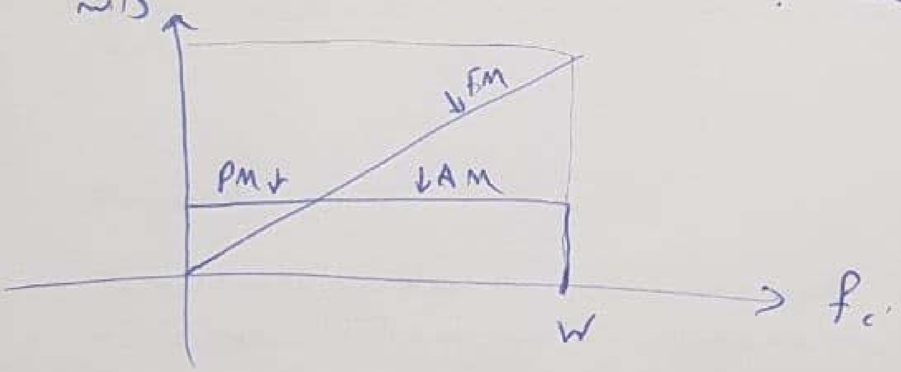
$$y_D(t) = \begin{cases} k_D(1+\rho\cos\omega_i t) & AM \\ k_D\rho\sin\omega_i t & PM \\ k_D\rho f_i\cos\omega_i t & FM \end{cases}$$

باید $f_i \geq W$ باشد وگرنه فیلتر پایین گذر آخری حذف می کند

تداخلات ρ

۱- تداخل ضعیف در مدولاسیون دامنه و فاز یک فرکانس اضافی با دامنه ثابت

۲- تداخل ضعیف در مدولاسیون فرکانس یک فرکانس اضافی تولید می کند که دامنه اش با فرکانس تولید شده متناسب است



فیلترهای پیش تاکید و واتاکید

$x(t) \rightarrow$ [پیش تاکید] $\rightarrow$ [MOD] $\rightarrow x_c(t)$

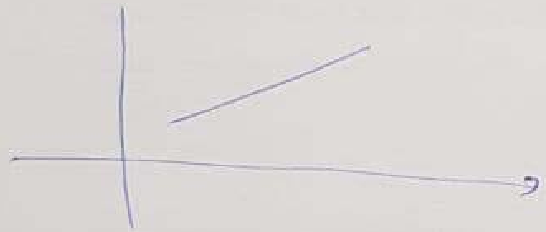
$x_c(t) \rightarrow$ [DEMOD] $\rightarrow$ [واتاکید] $\rightarrow$ [LPF] $\rightarrow$

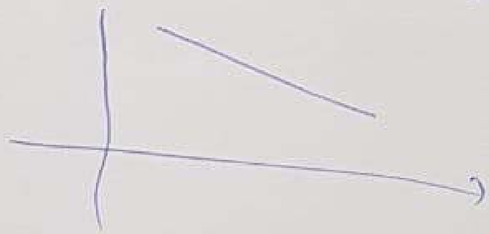
$$H_{pe}(f) = \frac{1}{H_{De}(f)} \qquad |f| \leq W$$

$$H_{De}(f) = \underbrace{\left(1 + j\left(\frac{f}{B_{De}}\right)\right)^{-1}}_{\text{فیلتر مرتبه اول}} = \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{De} \\ \dfrac{B_{De}}{jf} & |f| \gg B_{De} \end{cases}$$

↓

پهنای باند 3dB



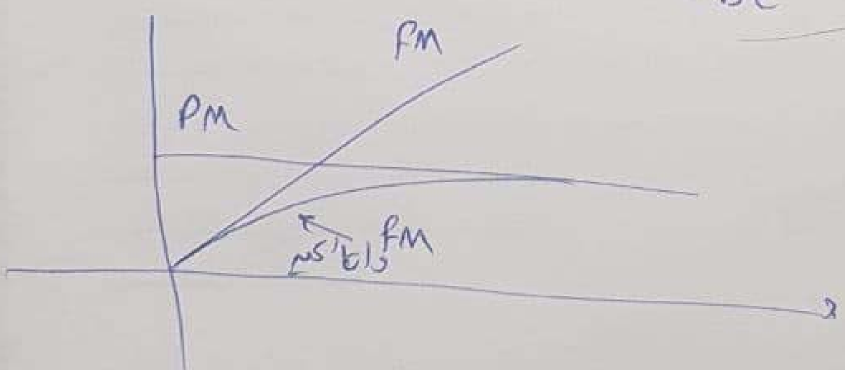


$$H_{pe}(f) = \left(1 + j\left(\frac{f}{B_{De}}\right)\right) = \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{De} \\ \dfrac{jf}{B_{De}} & |f| \gg B_{De} \end{cases}$$

مثل مشتق گیر

⇓

تبدیل به PM



تسخیر در FM

وجود دو سیگنال تقریباً هم‌زمان و هم‌دامنه در گیرنده

خروجی آشکارساز

$$\dot{\varphi}_v(t) = \frac{d}{dt}\, tg^{-1}\left\{\frac{\rho \sin\varphi_i(t)}{1+\rho\cos\varphi_i(t)}\right\}$$

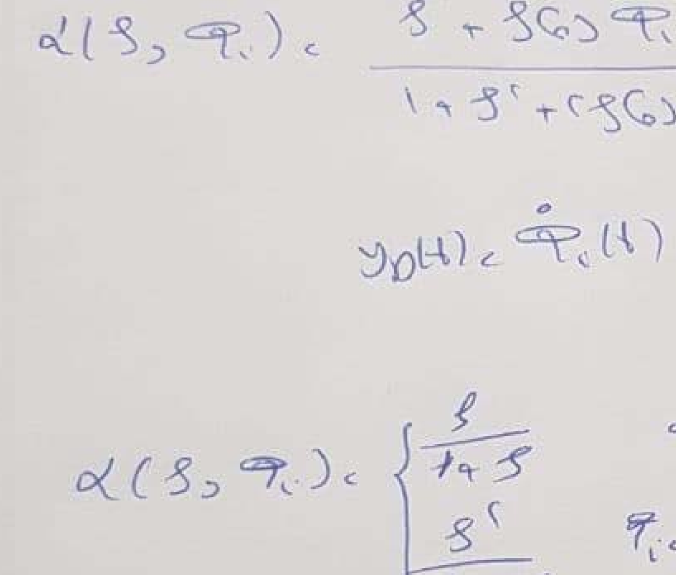
$$= \alpha(\rho,\varphi_i)\,\dot{\varphi}_i(t)$$

$$\alpha(\rho,\varphi_i) = \frac{\rho^2+\rho\cos\varphi_i}{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi_i}$$

$y_D(t) = \dot{\varphi}_i(t)$ و $\alpha(\rho,\varphi_i)=1 \Leftarrow \rho>>1$

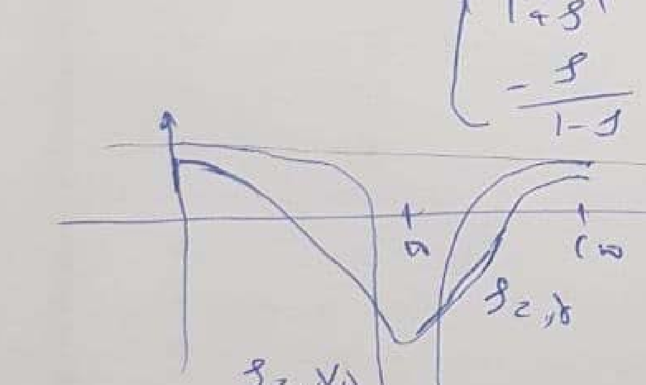
$A_c = A_i \Leftarrow \rho \simeq 1$

$$\alpha(\rho,\varphi_i) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1+\rho} & \varphi_i = 0, \pm 2\pi, \dots \\[2mm] \dfrac{\rho^2}{1+\rho^2} & \varphi_i = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \dots \\[2mm] -\dfrac{\rho}{1-\rho} & \varphi_i = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \end{cases}$$



$\rho \to 1$

$\alpha(\rho,\varphi_i) = 0.5 \Rightarrow y_D = 0.5\,\dot{\varphi}(t)$



$$\alpha_{pp} = \alpha(\rho,0) - \alpha(\rho,\pi)$$

$$= \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

$\rho < 0.7 \longrightarrow$ تداخل [illegible] مردود

$\rho > 0.7 \longrightarrow$ تداخل غالب شده و خروجی را تسخیر می‌کند