تعریف متغیرهای حالت : به اعضای مجموعه ی حالت متغیرهای حالت می گوییم به عنوان مثال ولتاژ خازن و یا بار خازن ، جریان سلف یا شار سلف می توانند به عنوان متغیرهای حالت باشند.

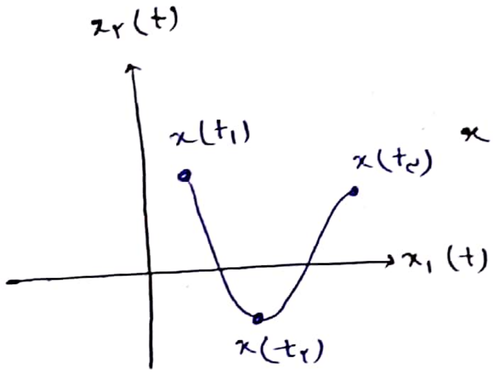
$$\begin{pmatrix} I_L \\ v_C \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \varphi_L \\ q_C \end{pmatrix}$$

تعریف بردار حالت : اگر برای توصیف یک شبکه، n متغیر حالت نیاز باشد، به برداری که شامل n متغیر حالت باشد بردار حالت می گوییم.

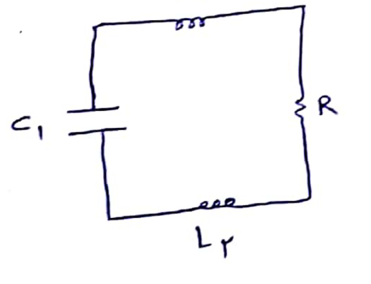
تعریف فضای حالت : یک فضای n بعدی که متغیرهای حالت در آن قرار می گیرند را فضای حالت می گوییم.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مثلاً}} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} \qquad x(t_2) = \begin{bmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \end{bmatrix} \qquad x(t_3) = \begin{bmatrix} x_1(t_3) \\ x_2(t_3) \end{bmatrix}$$

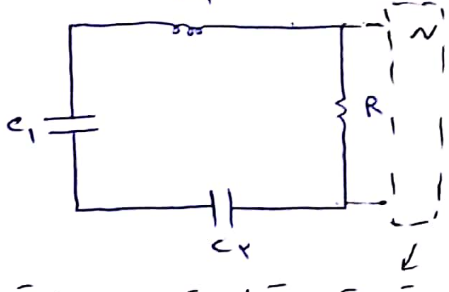


نکته : تعداد متغیرهای حالت برابر مرتبه ی مدار است.



$$\begin{pmatrix} i_{L_1} \\ v_{C_1} \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} i_{L_2} \\ v_{C_1} \end{pmatrix}$$

مدار مرتبه ی دو



$$\begin{pmatrix} i_{L_1} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{pmatrix}$$

مدار مرتبه ی سه

مقاومت به تعداد متغیرهای حالت اضافه نمی کند.

تعریف دستگاه معادلات حالت: دستگاهی که شامل دو دسته معادله می باشد که عبارت اند از معادله‌ی حالت و معادله‌ی خروجی.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\,(x(t),\ w(t),\ t) \\ y(t) = g\,(x(t),\ w(t),\ t) \end{cases}$$

خروجی — بردار متغیرهای حالت — ورودی

نکته: در شبکه‌ی خطی وابسته به زمان دستگاه معادله‌ی فوق بصورت زیر بدست می آید:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,w(t)$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,w(t)$$

نکته: در شبکه‌ی خطی مستقل از زمان دستگاه معادله‌ی فوق بصورت زیر بدست می آید:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,w(t)$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,w(t)$$

$$\xrightarrow{\text{حوزه‌ی لاپلاس}} \quad SX(s) - x(0) = AX(s) + BW(s) \Rightarrow (SI - A)X(s) = x(0) + BW(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DW(s) \Rightarrow X(s) = (SI-A)^{-1}x(0) + (SI-A)^{-1}BW(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(SI-A)^{-1}x(0)}_{\text{پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{\left[C(SI-A)^{-1}B + D\right]W(s)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}$$

تابع شبکه $H(s) = \left.\dfrac{Y(s)}{W(s)}\right|_{x(0)=0} = C(SI-A)^{-1}B + D$

تمرین تحویلی: فرض کنید در یک شبکه‌ی خطی مستقل از زمان مفروضات زیر را داریم، بردار حالت و تابع شبکه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad D=0 \quad x(0^-)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$w_1(t)=u(t) \qquad w_2(t)=e^{-t}u(t)$$

نوشتن معادلات حالت:

برای نوشتن معادلات حالت ابتدا درخت مناسب را که دارای شرایط زیر باشد، انتخاب می‌کنیم:

۱- تمامی گره‌ها را شامل شود و هیچ مسیر بسته‌ای تشکیل ندهد و پیوسته باشد.

۲- شاخه‌های درخت تمامی خازن‌ها را در بر بگیرد.

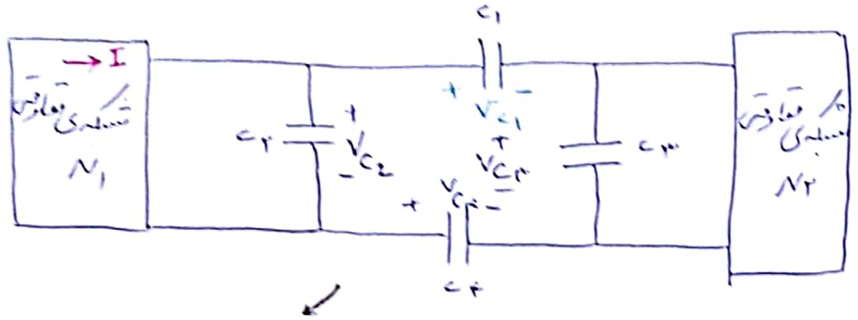
۳- هیچ سلفی در شاخه‌ی درخت نباشد.

نکته: در صورتی که خازن‌ها تشکیل حلقه‌ی خازنی بدهند، یک خازن را از شاخه‌ی درخت خارج می‌کنیم.

نکته: در صورتی که سلف‌ها تشکیل کات ست سلفی بدهند، آنگاه یک سلف باید جزء شاخه‌ی درخت باشد.

نکته: مرتبه‌ی یک مدار = تعداد عناصر ذخیره کننده‌ی انرژی مستقل - تعداد حلقه‌ها خازنی - تعداد کات‌ها سلفی

مثلاً:

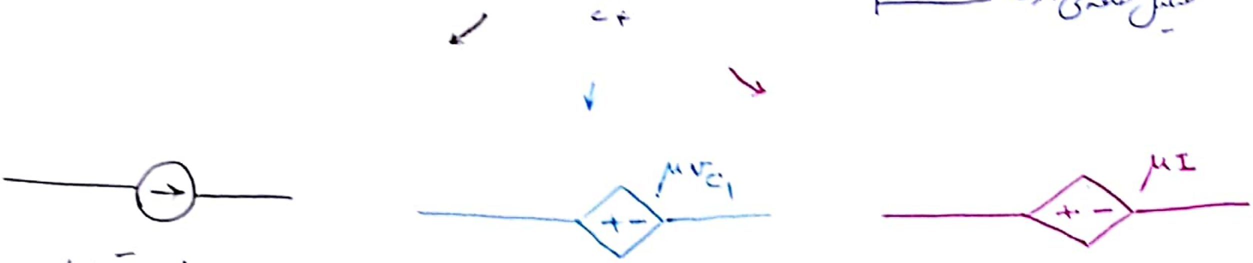


مدار مرتبه‌ی سه

$۴ - (۱) = ۳$

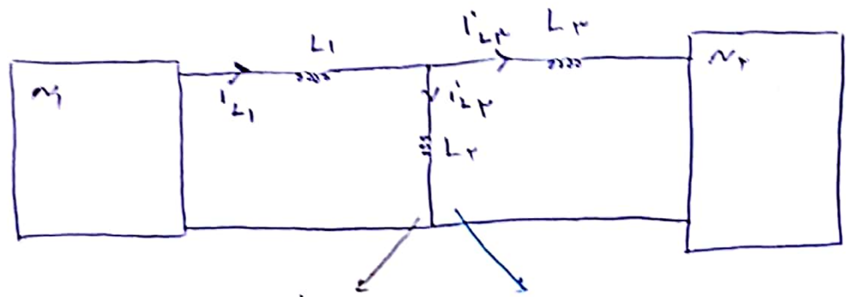
تشکیل حلقه‌ی خازنی

$$\begin{pmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ V_{C_3} \end{pmatrix}$$



مدار مرتبه‌ی سه — مدار مرتبه‌ی دو — مدار مرتبه‌ی سه

مثلاً:



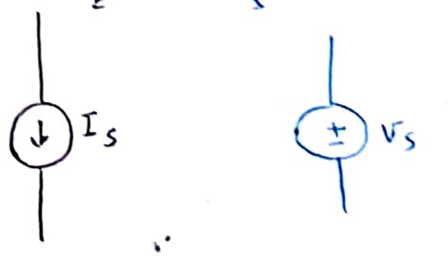
مدار مرتبه‌ی دو

$۳ - (۱) = ۲$

تشکیل کات سلفی

مدار مرتبه‌ی یک

$۲ - ۱ = ۱$

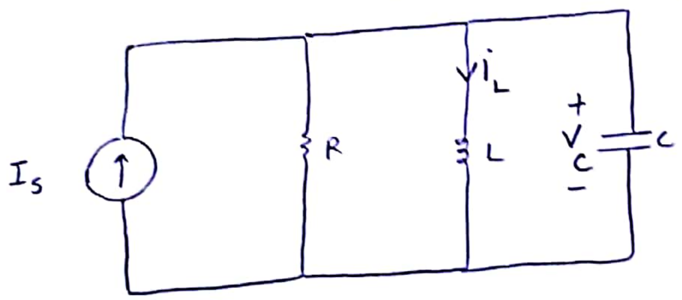


مدار مرتبه‌ی دو

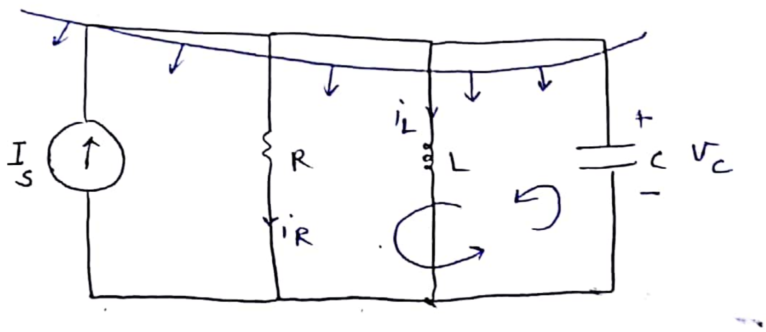
★ مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل = مرتبه‌ی مدار = تعداد متغیرهای حالت

نکته: روشی برای تحلیل مدار مناسب‌تر است که تعداد متغیرهای ~~مستقل~~ مستقل آن کمتر باشد.

مثال: معادلات حالت مدار شکل زیر را بنویسید.



حل :



$$x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

کات‌ست اساسی ⟶ درخت ⟶ معادله‌ی مربوط به v_C

$$L\frac{di_L}{dt} - v_C = 0 \longrightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L}$$

$$-I_s + i_R + i_L + C\frac{dv_C}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{-i_L}{C} - \frac{i_R}{C} + \frac{I_s}{C}$$

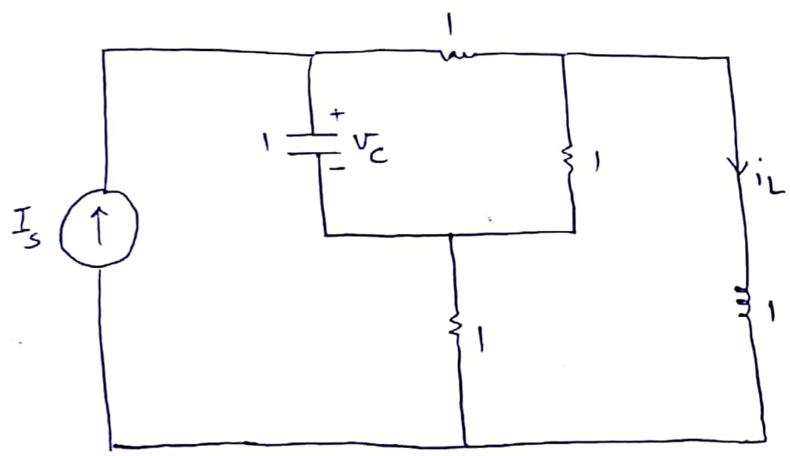
$$\longrightarrow R\,i_R - v_C = 0 \longrightarrow i_R = \frac{v_C}{R} \longrightarrow -\frac{v_C}{RC} - \frac{i_L}{C} + \frac{I_s}{C}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix}$$

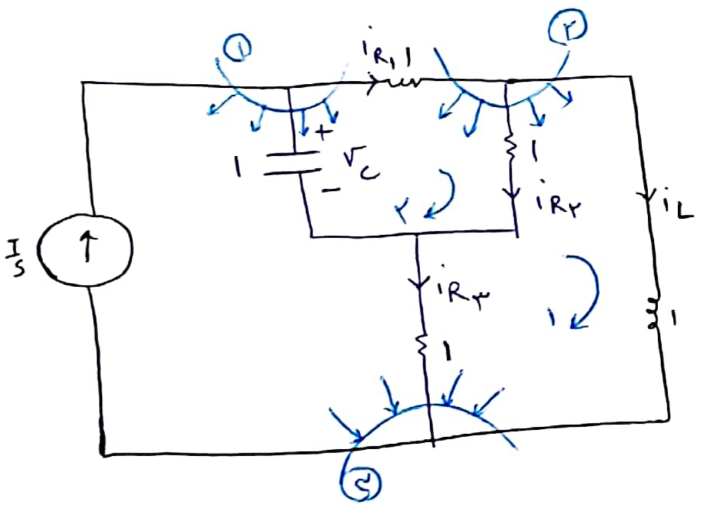
$$\begin{bmatrix} i_R \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix}$$

- جلسه چهاردهم -

مثال: معادلات حالت مدار شکل زیر را بنویسید.



حل: $\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}$



کات ست ①: $\dfrac{dv_C}{dt} + i_{R_1} - I_s = 0 \longrightarrow \dfrac{dv_C}{dt} = -i_R + I_s$

حلقه ۱: $\dfrac{di_L}{dt} - i_{R_3} - i_{R_2} = 0 \longrightarrow \dfrac{di_L}{dt} = i_{R_2} + i_{R_3}$

کات ست ②: $i_L - i_{R_1} + i_{R_2} = 0 \longrightarrow i_{R_1} - i_{R_2} = i_L$

حلقه ۲: $i_{R_1} + i_{R_2} - v_C = 0 \longrightarrow i_{R_1} + i_{R_2} = v_C \longrightarrow i_{R_2} = \dfrac{v_C - i_L}{2}\ ,\ i_{R_1} = \dfrac{v_C + i_L}{2}$

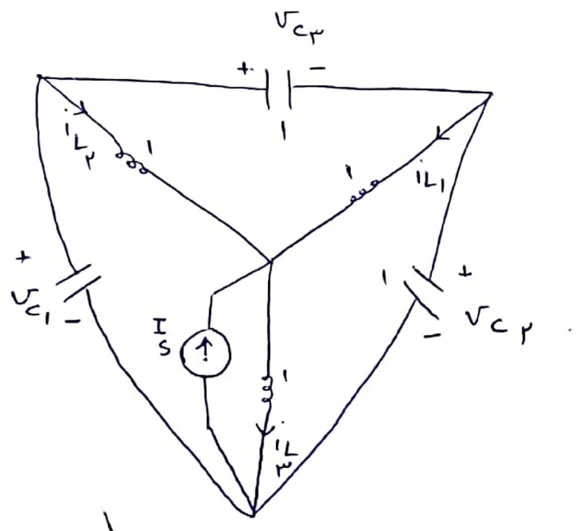
کات ست ③: $i_{R_3} + i_L - I_s = 0 \longrightarrow i_{R_3} = I_s - i_L$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -0/5\,v_C - 0/5\,i_L + I_s \\[2ex] \dfrac{di_L}{dt} = 0/5\,v_C - 1/5\,i_L + I_s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\[2ex] \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -0/5 & -0/5 \\ 0/5 & -1/5 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} [I_s]$$

$$\begin{bmatrix} i_{R_1} \\ i_{R_2} \\ i_{R_3} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{C} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{D} I_s$$

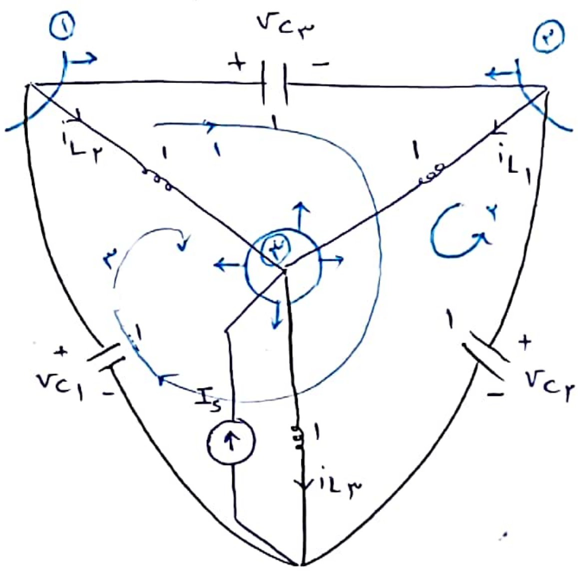
مثال: معادلات حالت مدار شکل زیر را بدست آورید.



$$\begin{pmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{pmatrix}$$

مدار مرتبه‌ی ۴

حل:



کات‌ست ۱: $\dfrac{dv_{C_1}}{dt} + i_{L_2} + \dfrac{dv_{C_3}}{dt} = 0$

کات‌ست ۲: $\dfrac{dv_{C_2}}{dt} + i_{L_1} - \dfrac{dv_{C_3}}{dt} = 0$

حلقه ۱: $v_{C_3} + v_{C_2} - v_{C_1} = 0 \rightarrow v_{C_3} = v_{C_1} - v_{C_2} \rightarrow \dfrac{dv_{C_3}}{dt} = \dfrac{dv_{C_1}}{dt} - \dfrac{dv_{C_2}}{dt}$

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{3} i_{L_1} - \frac{2}{3} i_{L_2} \quad , \quad \frac{dv_{C_2}}{dt} = -\frac{2}{3} i_{L_1} - 1/3\, i_{L_2}$$

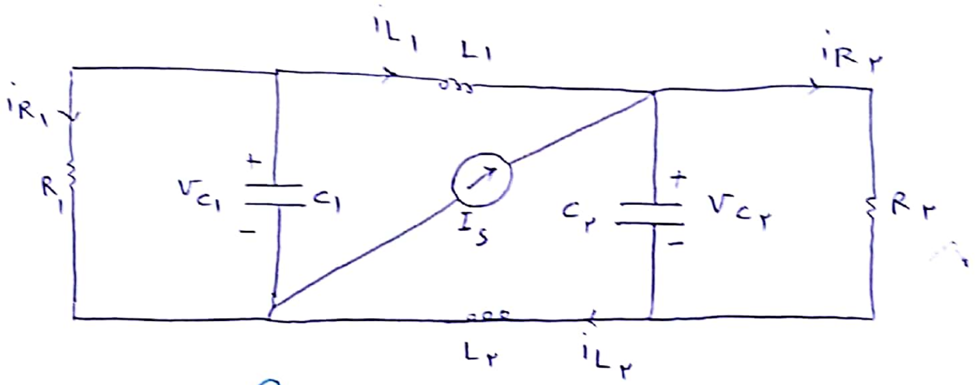
حلقه ۲: $\dfrac{di_{L_1}}{dt} + \dfrac{di_{L_3}}{dt} - v_{C_2} = 0$ حلقه ۳: $\dfrac{di_{L_2}}{dt} + \dfrac{di_{L_3}}{dt} - v_{C_1} = 0$

کات‌ست ۳: $i_{L_3} - I_s - i_{L_2} - i_{L_1} = 0 \rightarrow i_{L_3} = i_{L_1} + i_{L_2} + I_s$

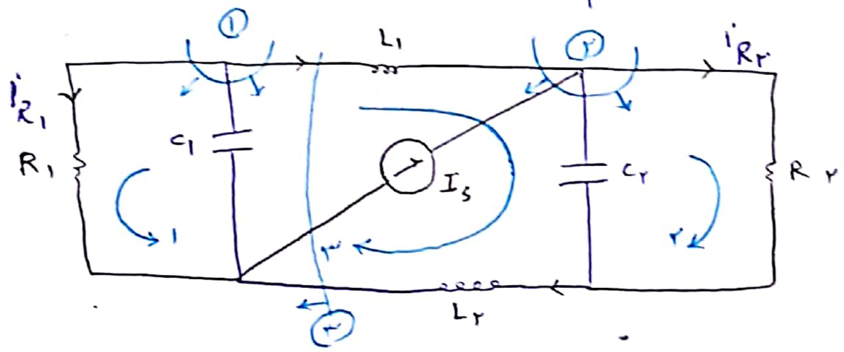
$$\rightarrow \frac{di_{L_3}}{dt} = \frac{di_{L_1}}{dt} + \frac{di_{L_2}}{dt} + \frac{dI_s}{dt}$$

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = -1/3\, v_{C_1} + 2/3\, v_{C_2} - 1/3 \frac{dI_s}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{di_{L_2}}{dt} = 2/3\, v_{C_1} - 1/3\, v_{C_2} - 1/3 \frac{dI_s}{dt}$$

مثال: معادلات حالت مدار زیر را بنویسید.



حل:



$$i_{L_1} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} = 0 \qquad -v_{C_1} + R_1 i_{R_1} = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{v_{C_1}}{R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-i_{L_1}}{C_1} - \frac{v_{C_1}}{R_1 C_1}$$

$$-i_{L_1} - I_s + C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} + i_{R_2} = 0 \;,\quad -v_{C_2} + R_2 i_{R_2} = 0 \longrightarrow i_{R_2} = \frac{v_{C_2}}{R_2}$$

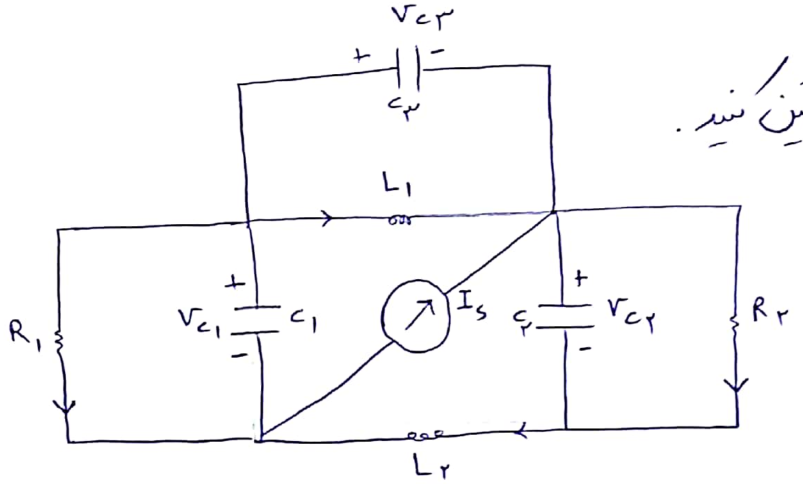
$$\Rightarrow \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{i_{L_1}}{C_2} - \frac{v_{C_2}}{R_2 C_2} + I_s$$

$$L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_2} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} - v_{C_1} = 0 \;,\quad -I_s - i_{L_1} + i_{L_2} = 0 \longrightarrow i_{L_2} = I_s + i_L$$

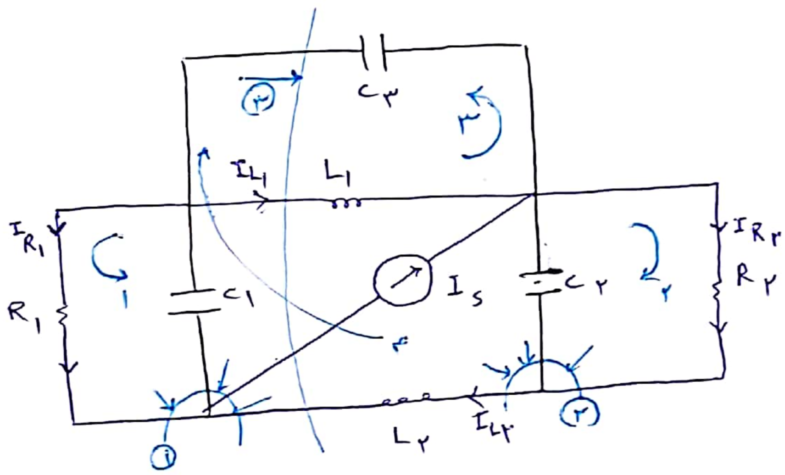
$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{di_{L_1}}{dt} + \frac{dI_s}{dt} \Rightarrow \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{v_{C_1}}{L_1 + L_2} - \frac{v_{C_2}}{L_1 + L_2} - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{dI_s}{dt}$$

~ جلسه یازدهم ~

مثال: معادلات حالت مدار شکل زیر را تعیین کنید.



حل: مدار مرتبه‌ی ۵ $\begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{pmatrix}$



$$C_1\frac{dv_{C1}}{dt} + I_{R1} + I_{L2} - I_s = 0 \ , \quad R_1 I_{R1} - v_{C1} = 0 \rightarrow I_{R1} = \frac{v_{C1}}{R_1} \Rightarrow$$

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{v_{C1}}{R_1C_1} - \frac{I_{L2}}{C_1} + \frac{I_s}{C_1}$$

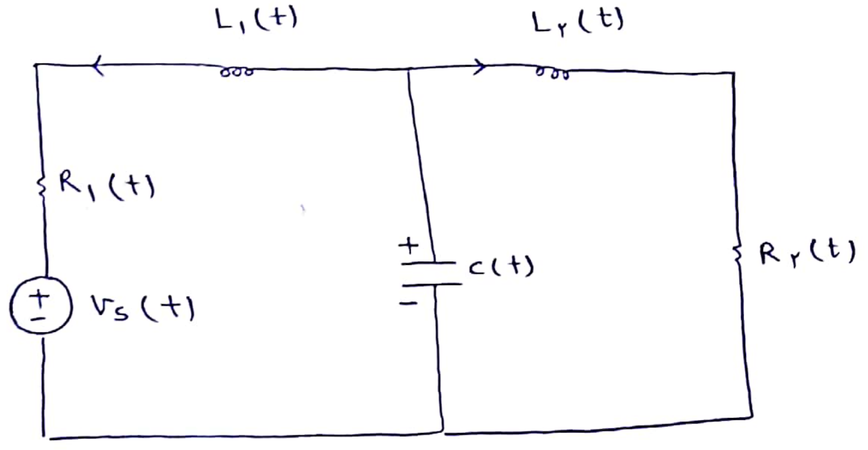
$$C_2\frac{dv_{C2}}{dt} + I_{R2} - I_{L2} = 0 \ , \quad R_2 I_{R2} - v_{C2} = 0 \rightarrow I_{R2} = \frac{v_{C2}}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{-v_{C2}}{R_2C_2} + \frac{I_{L2}}{C_2} \qquad C_3\frac{dv_{C3}}{dt} + i_{L1} - i_{L2} + I_s = 0 \rightarrow \frac{dv_{C3}}{dt} =$$

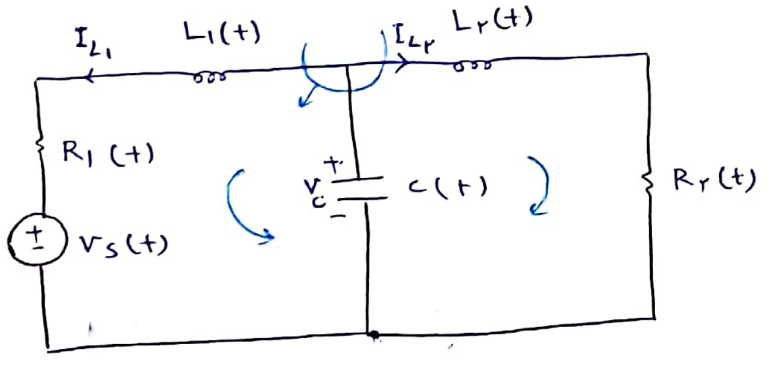
$$\frac{I_{L2}}{C_3} - \frac{I_{L1}}{C_3} - \frac{I_s}{C_3} \qquad -v_{C3} + L_1\frac{di_{L1}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_{L1}}{dt} = \frac{v_{C3}}{L_1}$$

$$L_2\frac{di_{L2}}{dt} - v_{C1} + v_{C2} + v_{C3} = 0 \rightarrow \frac{di_{L2}}{dt} = \frac{v_{C1}}{L_2} - \frac{v_{C2}}{L_2} - \frac{v_{C3}}{L_2}$$

مثال: معادلات حالت مدار شکل زیر را بنویسید.



حل:



مدار مرتبه‌ی سه

$$\begin{bmatrix} \varphi_{L_1}(t) \\ \varphi_{L_2}(t) \\ q_c(t) \end{bmatrix}$$

$v_c(t)=\dfrac{q(t)}{c}$ $\quad q(t)=c\,v(t)$ $\quad \dot q=c\dot v$ $\qquad \varphi(t)=L\,I(t)$ $\quad \dot\varphi=L\dot I$

$q(t)=c(t)\,v(t)$ $\quad \dot q=\dot c\,v_c+\dot v_c\,c$ $\qquad \varphi(t)=L(t)\,I(t)$ $\quad \dot\varphi=\dot L I+\dot I L$

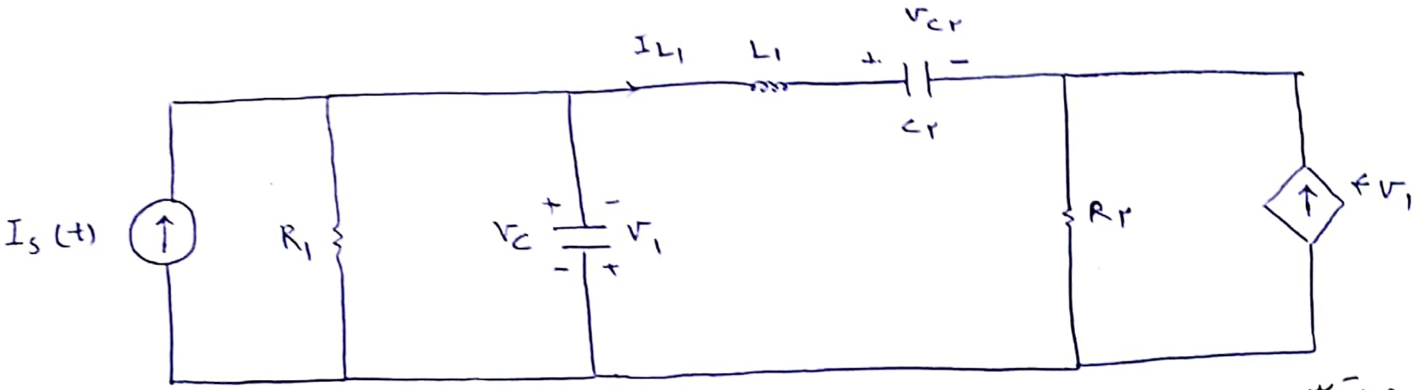
$$I_{L_1}+I_{L_2}+\dot q=0 \Longrightarrow \frac{\varphi_{L_1}(t)}{L_1(t)}+\frac{\varphi_{L_2}(t)}{L_2(t)}+\dot q=0$$

$$\dot q=-\frac{\varphi_{L_1}(t)}{L_1(t)}-\frac{\varphi_{L_2}(t)}{L_2(t)}$$

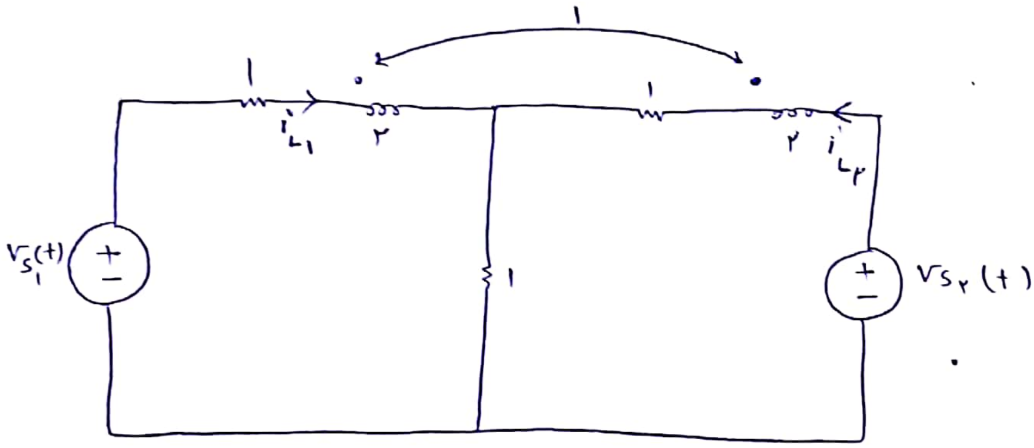
$$\frac{d\varphi_{L_1}}{dt}+R_1\frac{\varphi_{L_1}(t)}{L_1(t)}+v_s(t)-\frac{q(t)}{c(t)}=0 \rightarrow \frac{d\varphi_{L_1}}{dt}=-R_1\frac{\varphi_{L_1}(t)}{L_1(t)}+\frac{q(t)}{c(t)}-v_s(t)$$

$$\frac{d\varphi_{L_2}(t)}{dt}+R_2\frac{\varphi_{L_2}(t)}{L_2(t)}-\frac{q(t)}{c(t)}=0 \rightarrow \frac{d\varphi_{L_2}(t)}{dt}=\frac{-R_2\,\varphi_{L_2}(t)}{L_2(t)}+\frac{q(t)}{c(t)}$$

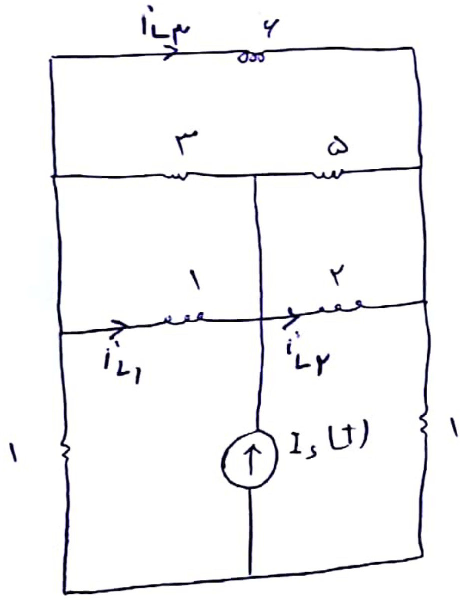
تمرین تحویلی: معادلات حالت مدارهای شکل زیر را بنویسید.



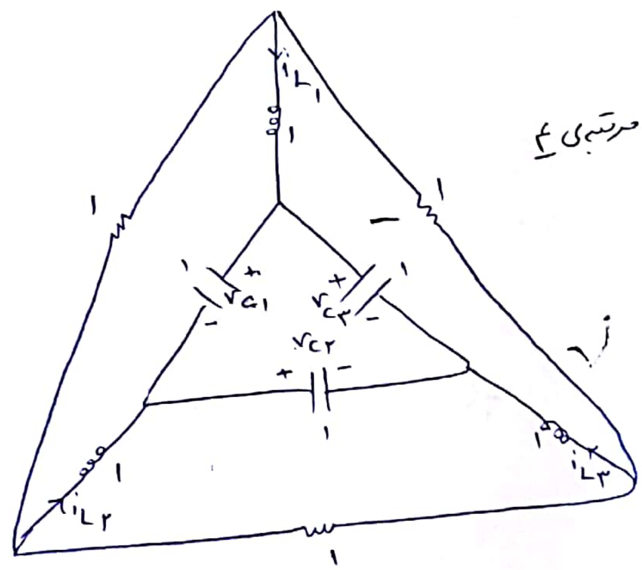
مرتبه ۳



مرتبه ۲

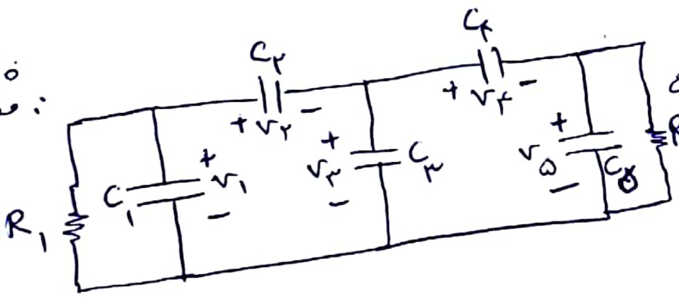


مرتبه‌ی ۳



مرتبه‌ی ۴

مثلاً :



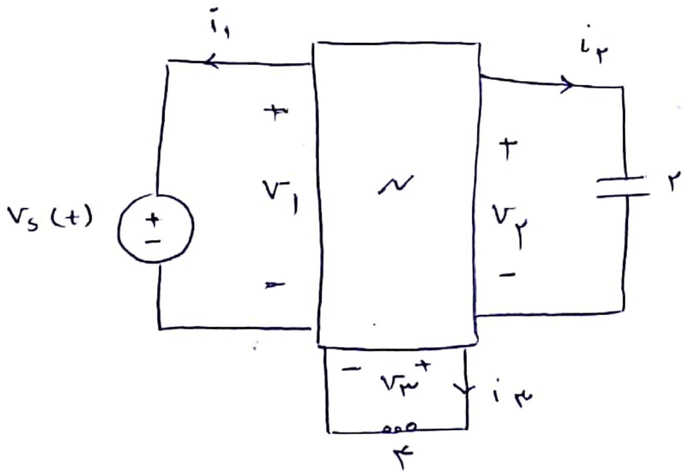
$5 - 2 = 3$

$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$

$+v_4 + v_5 - v_3 = 0$

$-v_1 + v_2 + v_4 + v_5 = 0$

تمرین تحویلی: در مدار شکل زیر شبکه ی N تفاوتی است که با معادلات زیر توصیف می شود، معادلات حالت را برای این مدار بنویسید.



$$\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}$$

فرکانس طبیعی:

فرکانس های طبیعی در تحلیل شبکه های الکتریکی دارای اهمیت زیادی می باشد و برای تحلیل رفتار شبکه بسیار مناسب اند.

فرکانس طبیعی به اجزای مدار بستگی دارد و تحت شرایط ورودی صفر تعیین می شود.

فرکانس طبیعی به منابع ورودی وابسته نیست، پاسخ کلی مدار را می توان از روی فرکانس طبیعی تشخیص داد و به کمک شرایط اولیه می توان بعضی از فرکانس های طبیعی را از مدار حذف نمود.