

جواب

دیستلیٹ خندی؟

مثل سوالات سیوطی سری کی تو اُنہوں

مکانیکی تجزیے

تبلور وحدت

$$1) F(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad (\text{سری مکملون})$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots \rightarrow 1z|<1 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| < 1 \rightarrow 1z|<1 \quad \text{مکملون}$$

$$\frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \rightarrow 1z|<1$$

$$2) F(z) = \operatorname{Arctan}(z) \quad (\text{سری مکملون})$$

$$F'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, 1z|<1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n z^{2n+1}) / (2n+1) \rightarrow 1z|<1$$

$$3) F(z) = \cos z \quad (\text{سری مکملون})$$

$$\cos^2 z = \frac{(1+\cos 2z)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, 1z|<\infty$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\rightarrow 1z|<1 \quad \text{لیکن جستجو کرو} \quad F(z) = \ln(1+z)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$\int \frac{1}{1+z} dz = \int (1-z+z^2-z^3+\dots) dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz \quad \text{اوچھی نسلگ} \\ \text{ہی سیری}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6-3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

٥) اسی اورتت تابع $F(z) = z^2 e^{1/z}$ داھول نفڑھے $z=0$ بینو۔

$$z^2 e^{1/z} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots\right) = z^2 + \frac{z}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

اسی اورتت تابع $F(z) = \frac{z^2}{z}$ داھول $z=0$ بینو۔

$$\frac{e^{-z}}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \dots \right] = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2 1!} + \frac{1}{z 2!} - \frac{1}{3!} - \frac{z}{5!} + \dots$$

اسی اورتت تابع $F(z) = \frac{e^{-z}}{z}$ داھول نفڑھے $z=0$ بینو۔

$$c_{2n} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$c_{2n} z = 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{c_{2n} z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{2!} - \frac{2z^2}{4!} - \frac{2^6 z^4}{6!} + \dots$$

اسی اورتت تابع $F(z) = \frac{1}{1-z}$ داھول $z=1$ بینو۔ ابیز
 \downarrow
 $(z-1)=0 \checkmark$

$$F(z) = \frac{-1}{z^2-1} = \frac{-1}{(z-1)(z+1)} = \frac{-1}{(z-1)} \left[\frac{1}{z+1} \right] = \frac{-1}{(z-1)} \left[\frac{1}{(z-1)+2} \right] = \frac{-1}{(z-1)} \left[\frac{1}{2(1+\frac{(z-1)}{2})} \right] =$$

$$\frac{-1}{2(z-1)} \left[\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{2}} \right] = \frac{-1}{2(z-1)} \left[\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-1)}{2}\right)} \right] = \frac{-1}{2(z-1)} \left[1 + \left(-\frac{(z-1)}{2}\right) + \left(\frac{(z-1)}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

$$- \left(\frac{(z-1)^3}{2} + \dots \right) = \frac{-1/2}{(z-1)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \dots$$

پریستہ $z=1$ نفڑھے $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ باہمی انتہا تابع

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \times \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$F(z) = \frac{4-3z}{z^2-2}$$

باہمی انتہا تابع طبی رامیابی؟

$$z^2 - z = 0 \Rightarrow z(z-1) = 0 \quad \begin{matrix} z \rightarrow z \neq 0 \\ z=1 \end{matrix}$$

$$F(z) = \frac{4-3z}{z(z-1)}$$

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{4-3z}{z(z-1)} =$$

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \times \frac{4-3z}{z(z-1)} =$$

حياته الاباعية ملخص

$$\text{Res } P(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$$

$$\text{Res } P(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{-1}{(i-2)(2i)} = \frac{-1}{-2-4i} = \frac{1}{2+4i} = \frac{2-4i}{4+16}$$

$$\frac{1-2i}{10}$$

$$\text{رس } P(z) = \frac{P(z)}{q(z)} \rightarrow P(a) + 0 \cdot q'(a) + 0 \cdot q''(a) = 0$$

$$\text{Res } P(z) = \text{Res } \frac{P(z)}{z-a} = \frac{P(a)}{q'(a)} = \frac{i^2}{4i^2 - 4i + 1} = \frac{1-2i}{10} \checkmark$$

$$1 = z \text{ در اینجا ممکن نباشد لذا } \Rightarrow P(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \quad \text{با عینک ملخص}$$

$$\text{Res } P(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz^{m-1}} [(z-a)^m P(z)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz^{m-1}} (z-a)^m P(z)$$

$$m=2 \Rightarrow \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz^{2-1}} (z+1)^2 \times \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) =$$

$$1 \times \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 \times (z-1) - 1 \times z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(-2)^2} = \frac{-1}{4} \checkmark$$

$$8 \quad z=2 \text{ در اینجا ممکن نباشد لذا } \Rightarrow \frac{1}{z(z+2)^3} \quad \text{با عینک ملخص}$$

$$\text{Res } P(z) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d}{dz^{m-1}} (z-a)^m P(z) = \frac{1}{2!} \frac{d}{dz^2} (z+2)^2 \times \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{z^3} \Big|_{z=-2}$$

$$\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

۱۱) معادله انتگرال $I = \int_C \frac{z}{z - \frac{1}{3}} dz$ کایه می باشد پس فرضیه باقی مانند مطالعه است برای بسط این معادله انتگرال است.

$$I = \int_C \frac{z}{z - \frac{1}{3}} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi i \times \frac{1}{3} \checkmark$$

مجموع مانند تابع دسته
حایی همین تابع موردنظر
است.

$$\text{Res} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} (z - \frac{1}{3}) \times \frac{z}{z - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

۱۲) با از نوشت بکار گیرانه انتگرال می رویم حاصل چه کنید:

$$I = \int_{|z-i|=3} \frac{3z^2 + 2z - 4}{z^3 - 4z} dz$$

حایی دارند مجموعه

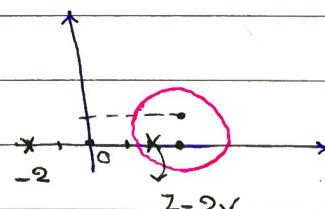
$$2\pi i (\text{Res}_{z=0} + \text{Res}_{z=2} + \text{Res}_{z=-2}) = 2\pi i \left[1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right] = 4\pi i \checkmark$$

$$\text{Res}_{z=2} = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \frac{3z^2 + 2z - 4}{z(z-2)(z+2)} = \frac{12 + 4 - 4}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \checkmark$$

$$\text{Res}_{z=-2} = \lim_{z \rightarrow -2} (z + 2) \frac{3z^2 + 2z - 4}{z(z-2)(z+2)} = \frac{-24}{-2 \times (-4)} = +\frac{1}{2} \checkmark$$

۱۳) نهادین و باید تابع مجموعه ای مل کنید:

$$\int_{|z-3-i|=2} \frac{3z^2 + 2z - 4}{3z^2 - 4z} dz$$



$$(\text{Res}_{z=2}) \times 2\pi i = 2\pi i \left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i \checkmark$$

٤٢

دستگاه مجموعه های مولایی (Cosine و Sine)

١٨) تقدیر از نوشتاری از مسئله کنید

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{z + \cos \theta} \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}}$$

حقیقی:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \leftarrow \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{z + \cos \theta} = \int_{|z|=1} \frac{dz/iz}{2 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}$$

$$z^2 + 4z + 1 = 0 \quad \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = (-4 \pm 2\sqrt{3})/2 = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$z = -2 - \sqrt{3}, m=1$$

$$z = -2 + \sqrt{3}, m=1$$

$$\frac{2}{i} \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{dz}{(z - (-2 - \sqrt{3}))(z - (-2 + \sqrt{3}))} \Rightarrow \frac{2}{i} \text{Res}_{z=-2-\sqrt{3}} \frac{1}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})} = \frac{2}{i} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

$$2\pi i \left(\frac{1}{\sqrt{3}i}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

١٩) تقدیر از نوشتاری جو در محدوده $\text{Re } z > 0$ و $0 < \arg z < \pi$ باشد

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{K + \cos \theta} \quad (K > 1)$$

حالا باید نویسندگی چیزی تا محدوده $\text{Re } z > 0$ را بگیریم

$$\varphi = 2\theta \quad d\varphi = 2d\theta$$

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} d\varphi}{K + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{2} \int_{|z|=1}^{2\pi} \frac{dz/iz}{K + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1}^{2\pi} \frac{dz}{2Kz + z^2 + 1}$$

$$z^2 + 2Kz + 1 = 0 \quad z = -K \pm \sqrt{K^2 - 1}$$

$$z = -K + \sqrt{K^2 - 1}$$

$$z = -K - \sqrt{K^2 - 1}$$

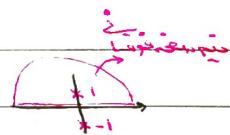
$$= \frac{\pi}{\sqrt{K^2 - 1}}$$

١٠) ينـاـ تـقـاطـلـهـرـوـشـ حـلـ بـأـقـطـعـهـ مـعـالـمـ لـتـأـ (ـ الـ زـيـرـلـبـ بـلـجـيـهـ)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

تابعـهـ قـيـ عـدـدـهـ مـقـيمـ حـلـ بـأـقـطـعـهـ مـعـالـمـ لـتـأـ
بـشـرـكـهـ وـهـ مـصـنـعـهـ هـنـهـ هـيـ مـقـيمـ خـارـجـهـ

$$P(z) = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow 1+z^2=0 \Rightarrow z=i, m=1$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

يونـ دـيـلـيـعـهـ مـقـيمـ بـالـأـخـرـجـهـ مـفـحـمـ حـلـ بـأـقـطـعـهـ مـعـالـمـ لـتـأـ
بـشـرـكـهـ وـهـ مـصـنـعـهـ هـنـهـ هـيـ مـقـيمـ خـارـجـهـ

$$P(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

$$\operatorname{Res} P(z) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{z^2}{(z-ai)(z+ai)(z-bi)(z+bi)} \times (z-ai) = \frac{-a^2}{2ai(ai-bi)(ai+bi)} = \frac{-a^2}{2ai(b^2-a^2)}$$

$$-\frac{1}{2i} \times \frac{a}{b^2-a^2} = \frac{1}{2i} \frac{a}{a^2-b^2}$$

$$\operatorname{Res} P(z) = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{z^2}{(z-ai)(z+ai)(z-bi)(z+bi)} \times (z-bi) = \frac{-b^2}{(a^2-b^2)(2bi)} = \frac{1}{2i} \frac{b}{b^2-a^2}$$

استـ الـ تـقـاطـلـهـ بـلـجـيـهـ، اـسـتـ الـ تـقـاطـلـهـ لـيـ حـصـنـيـ، كـمـ لـرـسـيـ طـبـانـسـ الـ فـورـيـهـ مـنـ يـادـنـ

$$\operatorname{Res} P(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Res} \left(\frac{\cos z}{z^2 + 1} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{\sin z}{z^2 + 1} \right)$$

أـتـرـابـعـهـ (ـ مـلـيـعـهـ لـهـيـافـنـهـ)

معـادـلـهـ 0 = 0 يـاءـ حـصـنـيـ، ثـالـثـهـ بـلـجـيـهـ، بـلـيـزـيـ، مـنـ ظـرـفـهـ سـهـلـهـ مـعـالـمـ لـتـأـ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(z) e^{izx} dx = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Res} P(z) e^{izx}$$

بـلـيـزـيـ مـنـ مـنـعـنـاطـ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(z) e^{izx} dx = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Res} P(z) e^{izx}$$

s.a.m

$$\int_{-a}^{+\infty} f(x) (\cos ax + i \sin ax) dx = 2\pi i \sum_{z=0}^{\infty} \operatorname{Res}(f(z)) e^{iaz}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx = 2\pi i \left[\operatorname{Re} \left[\sum_z \operatorname{Res}(f(z)) e^{iaz} \right] \right] + i \operatorname{Im} \left[\sum_z \operatorname{Res}(f(z)) e^{iaz} \right]$$

مثال ٢٣ انتدال زیر را حل نمایید

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

$\frac{\cos x}{1+x^2}$ تابع متعين پو فرمت
لهمه استو مختصر جزو متعين ندارد.

$$\frac{1}{1+z^2} \rightarrow 1+z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2} \rightarrow \operatorname{Res}_{z=i} (z-i) \times \frac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{iai}}{2i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

$$2\pi i = (\text{ملتفتیج دینم صحن بولی}) = \pi e^{-a}$$