طریقه محاسبه گرافیکی کانولوشن:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

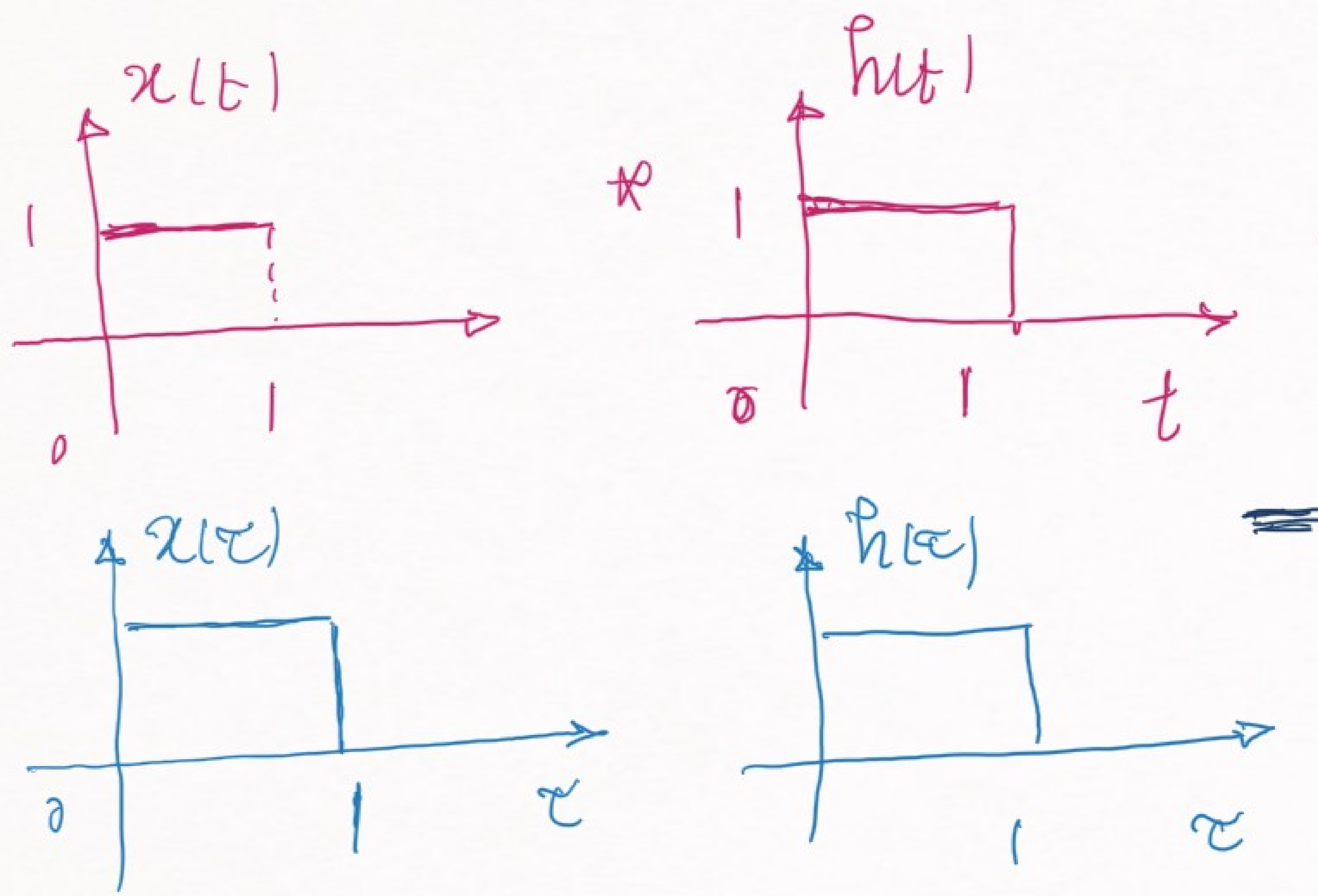
1- $x(\tau)$ و $h(\tau)$ را رسم می‌کنیم.

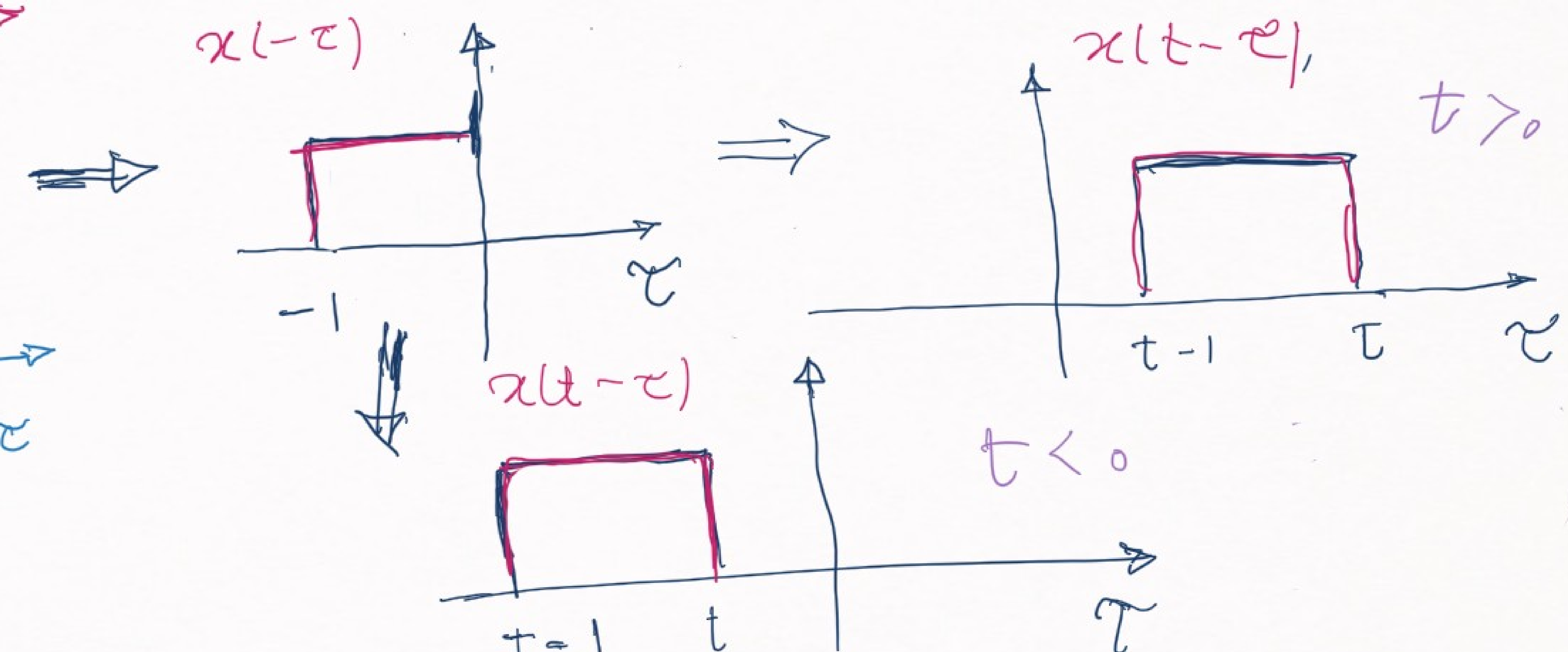
2- $x(-\tau)$ یا $h(-\tau)$ و سپس $x(t-\tau)$ یا $h(t-\tau)$ را بدست می‌آوریم.

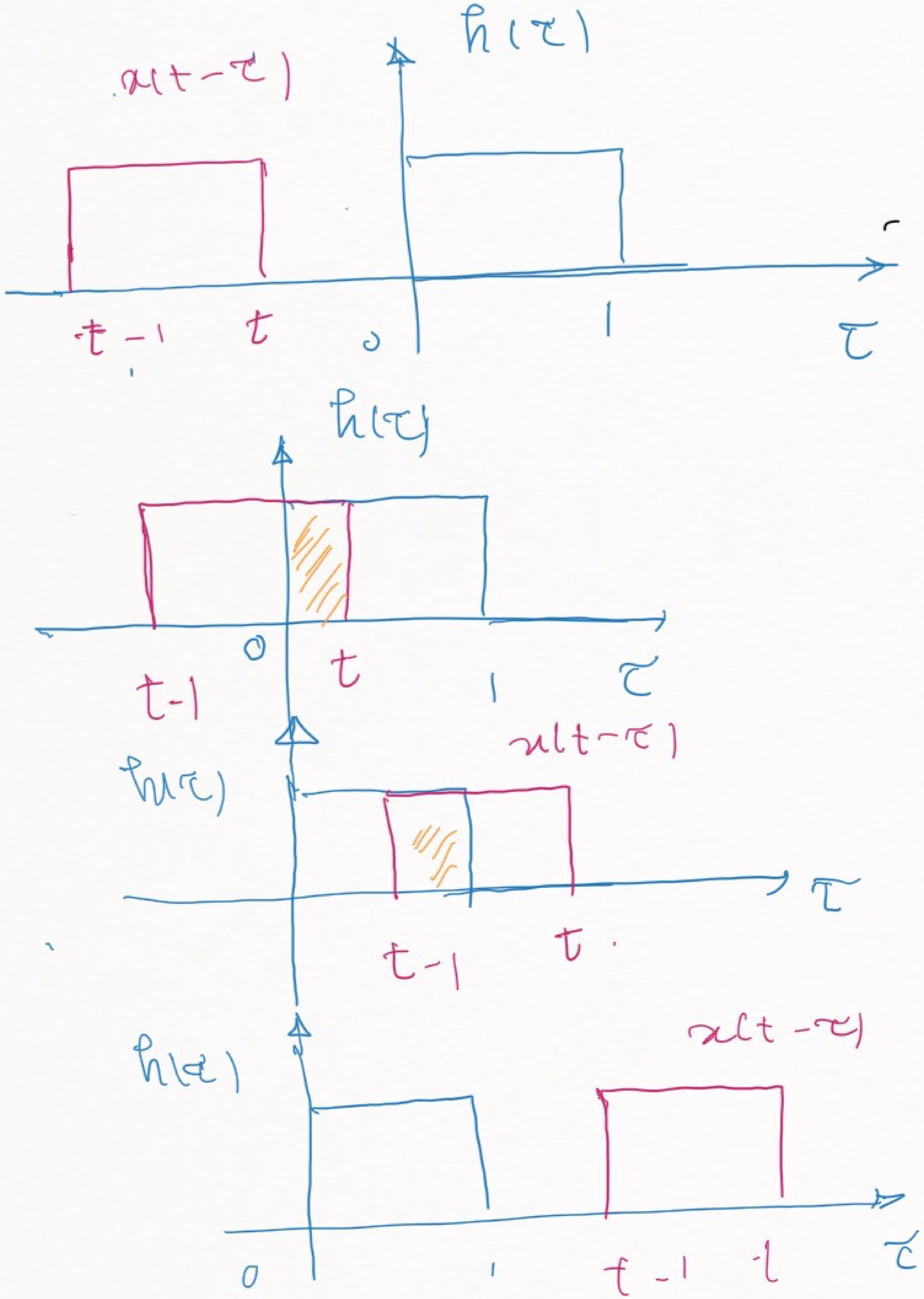
3- حاصل انتگرال $x(t-\tau)\,h(-\tau)$ یا انتگرال $x(\tau)\,h(t-\tau)$ به ازاء مقادیر مختلف t در بازه‌ها و روابط درست می‌کنیم.

مثال 1-

$$y(t)=x(t)*h(t)=?$$







① for $t<0 \Longrightarrow y(t)=0$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

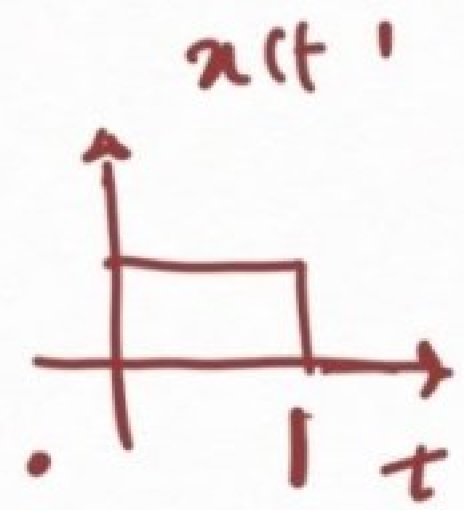
② $0\leq t\leq 1 \Rightarrow y(t)=\int_{0}^{t} 1\times 1\, d\tau = t$

③ $1\leq t\leq 2 \Rightarrow y(t)=\int_{t-1}^{t} 1\times 1\, d\tau = t-1$

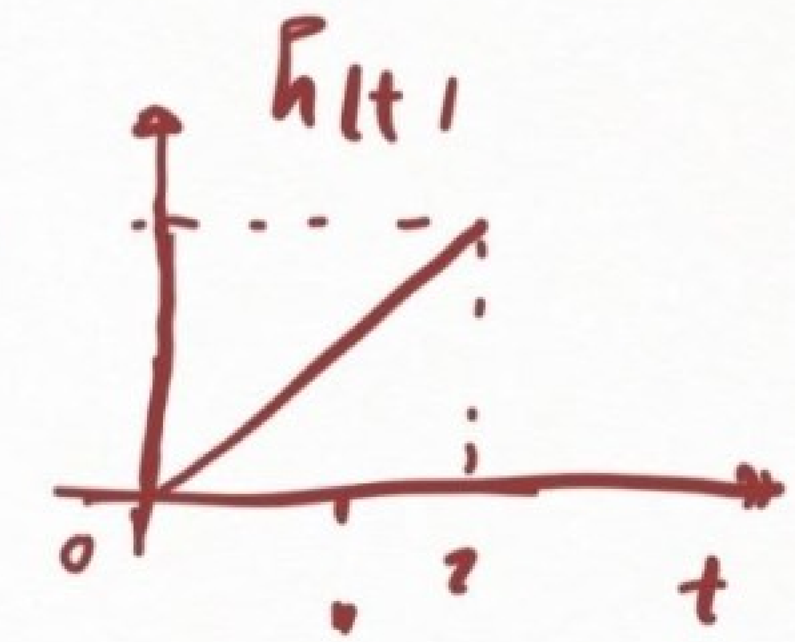
④ $t\geq 2 \Rightarrow y(t)=0$

مثال ۲-

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < t < 1 \\ 0 & , \ \text{other} \end{cases}$$

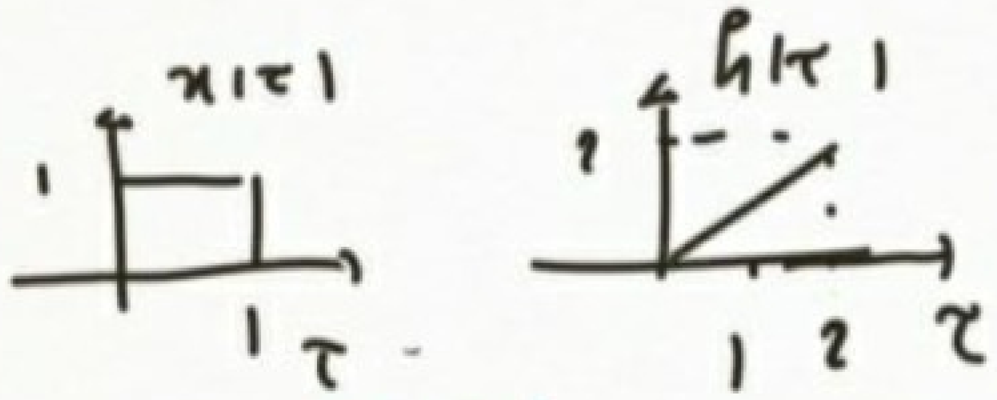


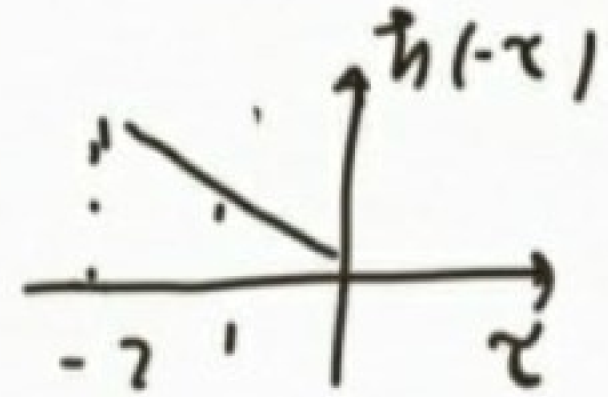
$$h(t) = \begin{cases} t & ; \ 0 < t < 2 \\ 0 & ; \ \text{other} \end{cases}$$

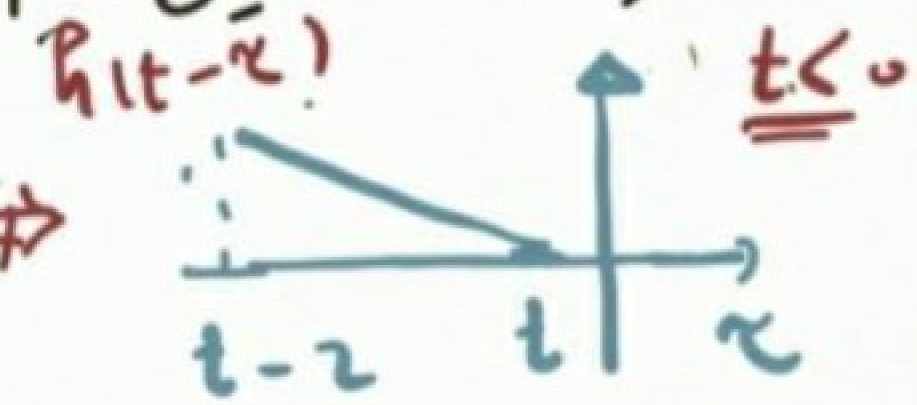


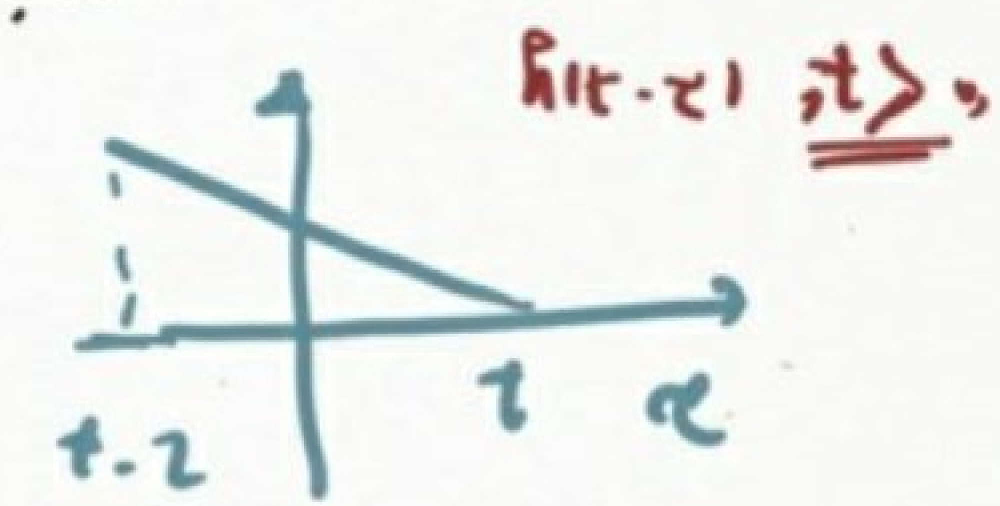
$$y(t) = x(t) * h(t) = ?$$

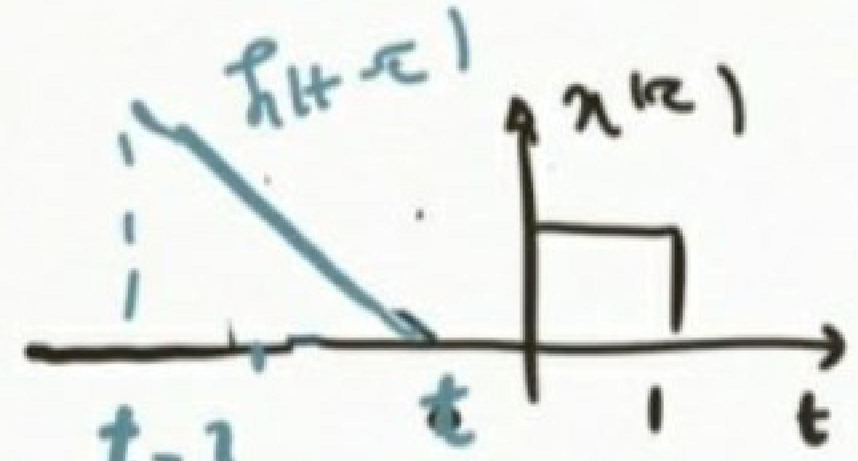
ابتدا: $h(\tau)$, $x(\tau)$ رسم می‌کنیم.



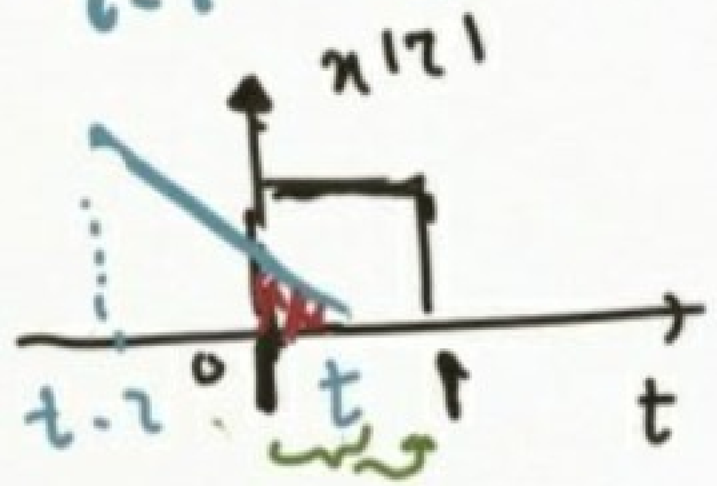




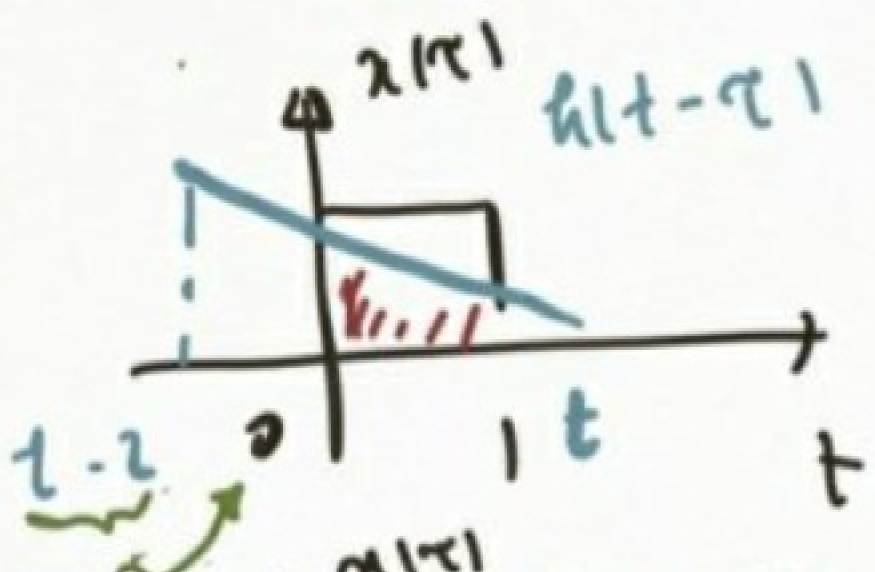


1 

$t<0 \Longrightarrow y(t)=0$

2 

$0<t<1 \longrightarrow y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int 1\times(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}t^2$

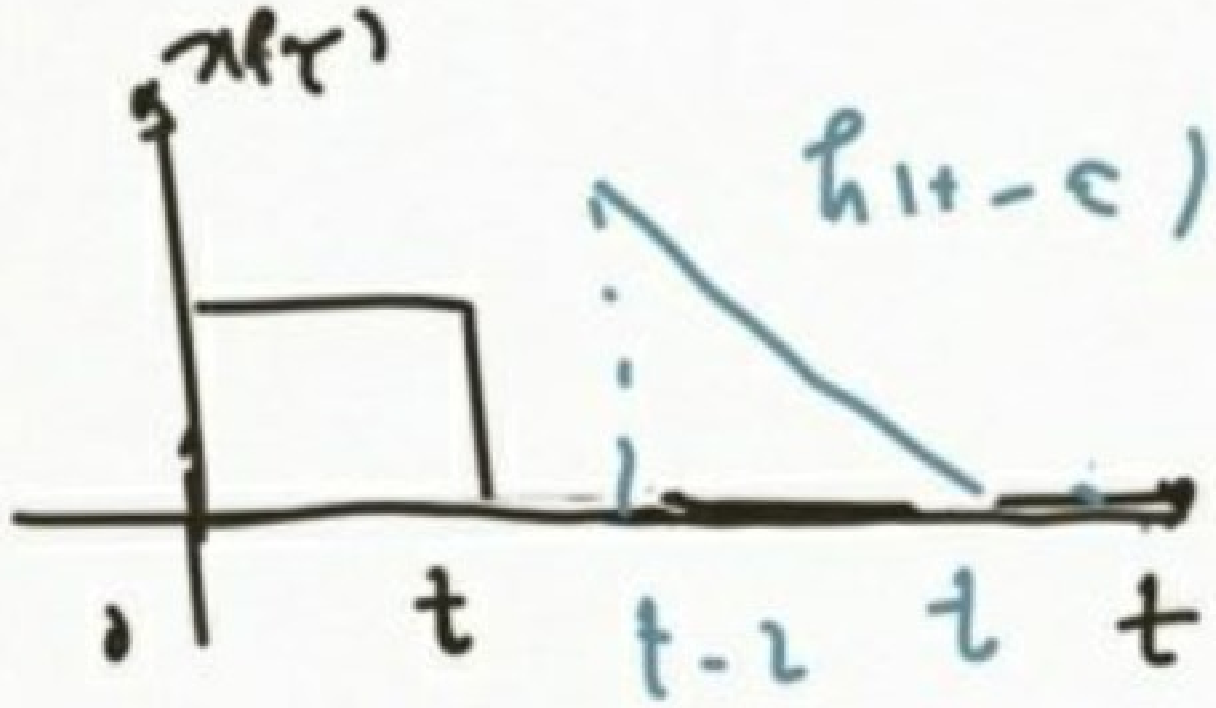
3 

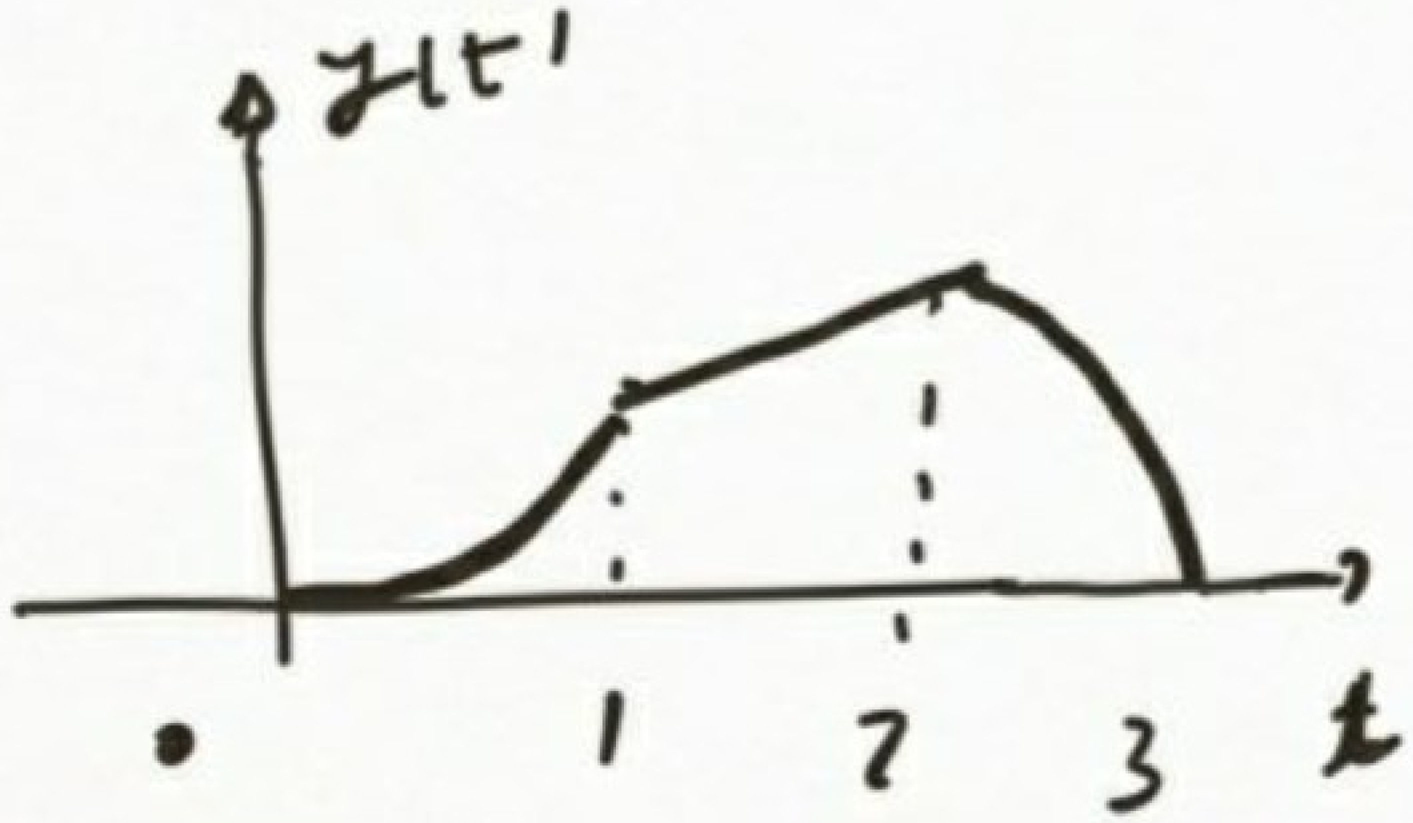
$1<t<2 \Longrightarrow y(t)=\int_0^1 1\times(t-\tau)\,d\tau = t-\frac{1}{2}$

4 

$2<t<3 \Longrightarrow y(t)=\int_{t-2}^1 1\times(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2}$

5





$t > 3 \Longrightarrow y(t) = 0$

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt & \text{تبدیل فوریه} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega . & \text{تبدیل معکوس فوریه} \end{cases}$$

تبدیل معکوس فوریه:

(توجه: در بعضی تعاریف $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ و $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ به صورت قرینه ظاهر شده است، با $\frac{1}{2\pi}$ به کار میرود)

تمرین ۱

$$F(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \longrightarrow f(t) = ?$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\underbrace{\delta(\omega-\omega_0)}_{\omega=\omega_0}\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega_0 t}\, d\omega = e^{j\omega_0 t}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega}^{1} = e^{j\omega_0 t}$$

برای محاسبه تبدیل معکوس اغلب از خواص تبدیل فوریه و تبدیلات معروف و همچنین تجزیه به کسرهای جزئی استفاده میشود.

تمرین ۲

$$F(\omega) = \frac{1}{(j\omega+\alpha)^2} \longrightarrow f(t) = ?$$

میدانیم $\quad e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{j\omega+\alpha} \Longrightarrow -jt\,e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{d}{d\omega}\left[\dfrac{1}{j\omega+\alpha}\right] = \dfrac{-j}{(\alpha+j\omega)^2}$

$$\left.\begin{aligned} &x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \\ &-jt\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \cancel{-j}t\,e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{\cancel{-j}}{(\alpha+j\omega)^2} \Longrightarrow te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$$

تمرین - تبدیل معکوس $X(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+\alpha)^n}$ را بدست آورید.

مثال ۳ -

$$X(j\omega) = -3\omega^2 + 2j\omega + 4 \longrightarrow x(t) = ?$$

$$\left\{\begin{aligned} &\delta(t) \longleftrightarrow 1 \\ &\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega \\ &\delta''(t) \longleftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2 \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow x(t) = +3\delta''(t) + 2\delta'(t) + 4\delta(t)$$

تجزیه کسرهای جزئی :

بهترین روش مناسب معکوس فوریه این باشد.

چندجمله‌ای

$$X(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \Longrightarrow x(t) = ?$$

چندجمله‌ای

باید صورت از مخرج کمتر باشد در صورتی که نباشد صورت بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال ۴ -

$$X(\omega) = \frac{3+j\omega}{-\omega^2+6j\omega+8} \xrightarrow{F^{-1}} x(t) = ?$$

$$X(j\omega) = \frac{3+j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+4} \Longrightarrow x(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-4t}u(t)$$

$$A = (j\omega+2)X(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \frac{(j\omega+3)}{(j\omega+4)}\Big|_{j\omega=-2} = \frac{3-2}{-2+4} = \boxed{1/2}$$

$$B = (j\omega+3)X(j\omega)\Big|_{j\omega=-4} = \frac{(j\omega+3)}{(j\omega+2)}\Big|_{j\omega=-4} = \frac{3-4}{-4+2} = \boxed{1/2}$$

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 6}{(j\omega+3)(j\omega+2)^2} \Longrightarrow x(t) = ?$$

$$X(j\omega) = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B_1}{j\omega+2} + \frac{B_2}{(j\omega+2)^2} \Longrightarrow x(t) = \left(3e^{-3t} + 4e^{-2t} - 3te^{-2t}\right)u(t)$$

$$A = (j\omega+3)X(j\omega)\Big|_{j\omega=-3} = \frac{-3+6}{(-1)^2} \boxed{= 3}$$

$$B_2 = (j\omega+2)^2 X(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \frac{-2+6}{1} \boxed{= 4}$$

$$B_1 = \frac{d}{d(j\omega)}\left[(j\omega+2)^2 X(j\omega)\right]\Big|_{j\omega=-2} = \frac{d}{d(j\omega)}\left[\frac{j\omega+6}{j\omega+3}\right] = \dots \boxed{= -3}$$

نکته - روش دیگر برای محاسبه ضریب B_1 (به جز روش مشتق‌گیری): روش عددگذاری

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 6}{(j\omega+3)(j\omega+2)^2} = \frac{\overset{3}{A}}{j\omega+3} + \frac{\overset{?}{B_1}}{j\omega+2} + \frac{\overset{4}{B_2}}{(j\omega+2)^2}$$

$$A = (j\omega+3)X(j\omega)\Big|_{j\omega=-3} = \boxed{3}$$

$$B_2 = (j\omega+2)^2 X(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \boxed{4}$$

$B_1 = ?$ $\longrightarrow$ عددگذاری فقط به ازای $w = 0$ باید طرفین تساوی برقرار باشد.

$$\frac{0+6}{(0+3)(0+2)^2} = \frac{3}{0+3} + \frac{B_1}{0+2} + \frac{4}{(0+2)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{6}{12} = 1 + B_1/2 + 4/4$$

$$1/2 = 2 + B_1/2 \Longrightarrow 1 = 4 + B_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{B_1 = -3}$$

موارد استفاده تبدیل فوریه :

۱- محاسبه بعضی از انتگرال های ناسره   ۲- حل معادلات دیفرانسیل   ۳- تحلیل سیستم های LTI

بعضی از انتگرال ها به کمک تبدیل فوریه قابل محاسبه هستند

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \Longrightarrow F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

مثال ۱-

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{4+t^2}\,dt=?$$

$$e^{-2|t|}\longleftrightarrow\frac{4}{4+\omega^2}\xRightarrow{\text{دوگانی}}\frac{4}{4+t^2}\longleftrightarrow 2\pi e^{-2|\omega|}$$

$$\frac{2}{4+t^2}\longleftrightarrow\pi e^{-2|\omega|}\Longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{4+t^2}\,dt=F(0)=\pi e^{-2|\omega|}\Big|_{\omega=0}=\boxed{\pi}$$

مثال ۲-

$$\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{\sin\pi t}{\pi t}}_{f(t)}\,dt=?$$

$f(t)\longleftrightarrow\Pi(\omega)$ تابع دروازه

$$I=F(0)=\Pi(\omega)\Big|_{\omega=0}=\boxed{1}$$

* بعضی از انتگرال ها قابل تبدیل به تبدیل فوریه در نقطه خاصی می باشد.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{t^2+1}\, dt = ?$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{t^2+1}\, dt - \frac{1}{2} j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t^2+1}\, dt}_{0} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos \alpha t - j \sin \alpha t}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-j\alpha t}\, dt = \frac{1}{2} \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\}\Bigg|_{\omega = -\alpha} = \boxed{\frac{1}{2}\pi e^{-|\alpha|}}$$

به کمک تبدیل فوریه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt$$

تمرین ۱- حاصل شود

تمرین ۲- تبدیل فوریه ها

$x_1(t) = \cos \omega_0 t$

$x_3(t) = \sin \omega_0 t$

اگر $x_2(t) = \operatorname{sgn} t$ باشد.

تابع علامت