توابع عمدتاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

① توابعی که در تمام نقاط صفحه تحلیلی هستند همانند $(z^2, \cos z, \sin z, e^z)$

② توابعی که در تمام صفحه تحلیلی نیستند $(\bar{z}, |z|, \arg(z), Re\{z\}, Im\{z\})$

③ توابعی که فقط در نقاطی تحلیلی نیستند $(\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z^2-1}, \dots)$

نکته: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد در آن صورت $u(x,y)$ و $v(x,y)$ هر دو در معادله لاپلاس صدق می‌کنند

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad v_{xx}+v_{yy}=0$$

اثبات ⇐

$$u_x+iv_x=-iu_y+v_y$$

$$u_x=v_y \to u_{xx}=v_{yx}$$

$$v_x=-u_y \to u_{yy}=-v_{xy}$$

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0 \checkmark$$

نکته: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد به همین شکل رابطه $v_{xx}+v_{yy}=0$ هم اثبات می‌شود.

تعریف ۱: تابعی که در معادله لاپلاس صدق کند را تابع همساز می‌نامیم.

تعریف ۲: v را همساز مزدوج u می‌نامند.

مثال ۱: بررسی کنید که تابع مختلط z^2، u و v همساز هم هستند

$$f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$$

$$u=x^2-y^2 \Rightarrow u_{xx}=2,\ u_{yy}=-2 \to u_{xx}+u_{yy}=0 \checkmark$$

$$v=2xy \Rightarrow v_{xx}=0,\ v_{yy}=0 \to v_{xx}+v_{yy}=0 \checkmark$$

مزدوج همساز هستند

مثال ۲: اولاً ثابت کنید $u(x,y)=x^2-y^2$ همساز است و ثانیاً همساز مزدوج آن را بیابید.

$$u_{xx}=2,\ u_{yy}=-2,\ u_{xx}+u_{yy}=2-2=0 \checkmark$$ همساز است

$$u_x=v_y \to 2x=v_y \to v=2xy+g(x)$$

$$u_y=-v_x \to -2y=-v_x \to v=2xy+h(y)$$

$$\Rightarrow v=2xy+c$$

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(2xy+c)$$

s.a.m

تشخیص کوشی ریمان در فضای قطبی:

$$z = re^{i\theta}$$

$$dz = e^{i\theta}dr + ire^{i\theta}d\theta$$

$$f(z) = u+iv = \frac{du}{e^{i\theta}dr} + i\frac{dv}{e^{i\theta}dr} = \frac{du}{ire^{i\theta}d\theta} + i\frac{dv}{ire^{i\theta}d\theta}$$

$$du/dr + i\, dv/dr = -i\frac{1}{r}du/d\theta + \frac{1}{r}dv/d\theta$$

$$du/dr = \frac{1}{r}dv/d\theta \quad , \quad dv/dr = -\frac{1}{r}\partial u/\partial\theta$$

$$f(z) = z^2 = r^2e^{i2\theta} = r^2[\cos 2\theta + i\sin 2\theta] = r^2\cos 2\theta + ir^2\sin 2\theta$$

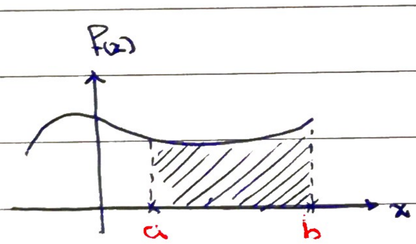
$$u = r^2\cos 2\theta \quad , \quad du/dr = 2r\cos 2\theta \quad , \quad du/d\theta = -2r^2\sin 2\theta$$

$$v = r^2\sin 2\theta \quad , \quad dv/dr = 2r\sin 2\theta \quad , \quad dv/d\theta = 2r^2\cos 2\theta$$

$$\left(du/dr = 1/r\, dv/d\theta\right) \quad , \quad \left(dv/dr = -\frac{1}{r}\partial u/\partial\theta\right)$$

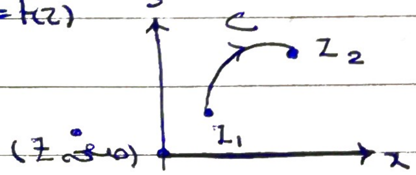
انتگرال توابع مختلط:

یادآوری انتگرال توابع حقیقی:



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x_i)\Delta x$$

$w = f(z)$



در اینجا نقاط به جای محور x صفحه z داریم

در حالت کلی انتگرال تابع $f(z)$ از نقطه z_1 تا نقطه z_2 به مسیر انتگرال‌گیری بستگی دارد.

s.a.m

$\int_c f(z)\,dz$ در بخش انتگرال توابع مختلط روی یک منحنی خاص تعریف خواهد شد

نکته: هر منحنی در صفحه z به صورت $z(t)$ قابل نمایش است.

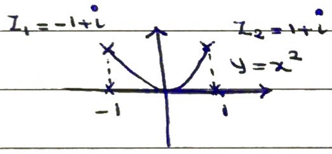
1) $z(t)=t+it$

$0<t<1$

2) $y=ax+b$, $z(t)=t+i(at+b)$ منحنی با توجه به رابطه $y=ax+b$ از رابطه روبرو بدست می‌آید

3) دایره‌ای به شعاع ρ و مرکز z_0

$z(t)=z_0+\rho e^{it}$ $\quad 0<t<2\pi$

4) 

$z(t)=t+it^2$

$0<t<1$

نکته: اگر بخواهیم خط واصل بین $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ را معادله بکشیم می‌توانیم

از رابطه زیر استفاده کنیم: $z(t)=x_1+iy_1+\left[(x_2-x_1)+i(y_2-y_1)\right]t$

قضیه

$$\int_c f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt \qquad a\le t\le b$$

$z(t)$

مروری بر اثبات فرمول

$$\int_c f(z)\,dz=\lim_{\Delta z\to 0}\sum f(z)\Delta z$$

$w=f(z)=u+iv$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$

$$\int_c f(z)\,dz=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum (u+iv)[\Delta x+i\Delta y]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum u\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\sum iv\Delta x+\lim_{\Delta y\to 0}\sum iu\Delta y+\lim_{\Delta y\to 0}\sum -v\Delta y$$

$$\int u\,dx+i\int v\,dx+i\int u\,dy+\int -v\,dy$$

s.a.m

$$\int_a^b u\dot{x}\,dt + i\int_a^b v\dot{x}\,dt + i\int_a^b u\dot{y}\,dt - \int_a^b v\dot{y}\,dt$$

$$\int_a^b (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y})\,dt = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt$$

مثال: روی دایره واحد در جهت عکس عقربه‌های ساعت $f(z)=\frac{1}{z}$ انتگرال بگیرید.

$z(t)=e^{it} \qquad 0<t<2\pi$

$f(z)=\frac{1}{z}=e^{-it}$

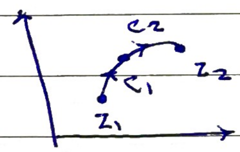
$\dot{z}(t)=ie^{it} \qquad 0<t<2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \cancel{e^{-it}}\, i\,\cancel{e^{it}}\,dt = 2\pi i$$

خواص انتگرال مختلط:

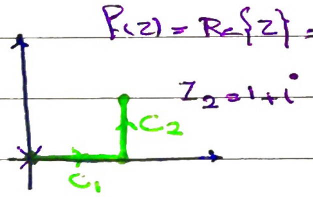
① اگر منحنی به دو منحنی یا چند پاره خط تقسیم شود (مانند c_1 و c_2 در شکل زیر) در آن صورت:

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$



مثال: از تابع $f(z)=Re\{z\}$ روی منحنی زیر انتگرال بگیرید:

$f(z)=Re\{z\}=t$

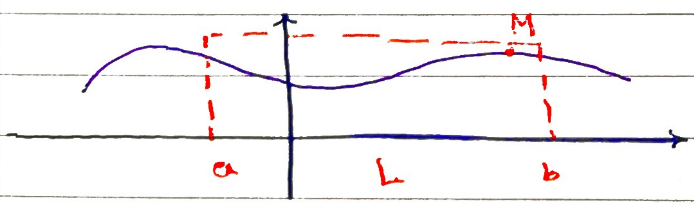


$c_1: \; z(t)=t \qquad 0<t<1 \qquad \dot{z}(t)=1$

$c_2: \; z(t)=1+ti = 1+it \qquad 0<t<1 \qquad \dot{z}(t)=i$

② $\left|\int_c f(z)dz\right| \le ML$ که در آن M حداکثر مقدار $|f(z)|$ و L طول منحنی C می‌باشد

یادآوری این رابطه برای انتگرال حقیقی:



ML (مساحت مستطیل است)

$$\left|\int_c f(z)dz\right| = \left|\lim_{\Delta z\to 0}\sum f(z)\Delta z\right| \le \lim_{\Delta z\to 0}\sum |f(z)||\Delta z| \le \lim_{\Delta z\to 0}\sum M|\Delta z|$$

$$= M\lim_{\Delta z\to 0}\sum|\Delta z| = ML$$

قضیه انتگرال کوشی:

اگر D یک حوزه همبند ساده و کراندار باشد که تابع $f(z)$ در آن حوزه تحلیلی باشد و C یک منحنی بسته درون D باشد $\int_C f(z)dz = 0$ است.

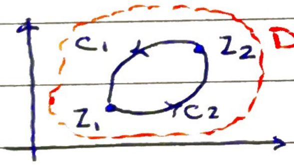
مثال: در جهت عکس عقربه‌های ساعت $C: |z|=1$ ، $\int_C e^z dz$ را بدست آورید؟

$\int_C e^z dz = 0$ (e^z تحلیلی است)

مثال: در مثال‌های زیر فرض کنید $C: |z|=1$

$$\int_C \cos z\, dz = 0 \quad , \quad \int_C (z^3+z^2)dz = 0 \quad , \quad \int_C (e^{4z}\cos z + 5z^3)dz = 0$$

نتیجه: اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 (درون حوزه D) انتگرال‌گیری کنیم مقدار این انتگرال‌گیری به مسیر بستگی نخواهد داشت. (نتیجه مستقیم انتگرال کوشی)



$$\int_C f(z)dz = 0 \rightarrow \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

جمع‌بندی:

توابع مختلط سه دسته اند:

① در تمام نقاط تحلیلی هستند ← e^z ، $\cos z$ ، ...

② در تمام نقاط تحلیلی نیستند ← $\operatorname{Re} z$ ، $\operatorname{Im} z$ ، $|z|$ ، $\arg(z)$ ، ...

③ در بعضی از نقاط تحلیلی نیستند (نقاط تکین) ← $\frac{1}{z^3+z}$ ، $\frac{1}{\cos z}$

(بحث خواهیم کرد)

اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 را انتگرال بگیریم عیناً همانند انتگرال حقیقی برخورد می‌کنیم

$$\int_0^i \cos 2z\, dz = \frac{1}{2}\sin 2z \Big|_0^i = \frac{1}{2}\sin 2i$$

اگر تابع از نوع دوم باشد راهی جز استفاده از فرمول اصلی نخواهیم داشت. (مجبور هم خواهد بود)

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\,dz$$

سری‌های مختلط:

ناحیه همگرایی سری مختلط: برای یافتن ناحیه همگرایی یک سری مختلط $\sum_{n=0}^{\infty} a(n,z)$ کافی است

شرط همگرایی این سری را بررسی کنیم که برای بررسی دو روش وجود دارد.

شرط همگرایی به روش دالامبر:
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a(n+1,z)}{a(n,z)} \right| < 1$$

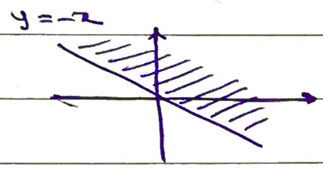
شرط همگرایی به شیوه کوشی:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n,z)|} < 1$$

توجه: اگر ناحیه همگرایی یک دایره باشد، شعاع دایره را شعاع همگرایی می‌نامیم. می‌توان ثابت کرد سری حاصل

از انتگرال‌گیری یک سری توانی و سری حاصل از مشتق‌گیری یک سری توانی دارای شعاع همگرایی سری اصلی خواهند بود.

مثال: ناحیه همگرایی سری‌های زیر را بیابید:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(z-i)^n}{(z+1)^n}\right|} < 1 \Rightarrow \left|\frac{z-i}{z+1}\right| < 1$$



$$|z-i| < |z+1| , \quad \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{1}-2y < \cancel{x^2}+\cancel{1}+2x+\cancel{y^2} , \quad -y<x \Rightarrow y>-x$$

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz^2}$$

s.a.m

بسط تیلور یک تابع مختلط: هرگاه تابع $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 تحلیلی باشد می توان این تابع را برحسب توان های صحیح نامنفی از عبارت $(z-z_0)$ که به بسط تیلور معروف است به فرم زیر بسط داد.

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = f^{(n)}(z)/n!$$

توجه: بسط تیلور حول نقطه‌ی $z_0 = 0$ را بسط مک لورن تابع گویند.

بسط مک لورن توابع زیر را به خاطر داشته باشید.

$$e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots + z^n/n! = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$$

$$\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}/(2n)!$$

$$\sinh z = z + z^3/3! + z^5/5! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cosh z = 1 + z^2/2! + z^4/4! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/(2n)!$$

$$|z|<1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ \dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \cdots + (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \end{cases}$$

توجه کنید که با توجه به بسط های فوق این امکان وجود دارد که بسط بسیاری از توابع دیگر را بدون آنکه لازم باشد قواعد بسط را به طور تفصیلی بیان کنیم به سادگی مشخص کنیم. به خصوص که می توان از بسط های فوق جمله به جمله مشتق گرفت و یا جمله به جمله انتگرال گیری نمود و بسط توابع دیگر را محاسبه نمود.

s.a.m