توابع مقدماتی مختلط :

۱- تابع نمایی : e^z ، $e^{w(z)}$

$$z = x+iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$u(x,y) = e^x\cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x\sin y$$

- تابع e^z در تمام نقاط تحلیلی (کامل) است. در شرایط کوشی ریمان صدق میکند و توابع u و v پیوسته می باشند.

- تابع $e^{w(z)}$ در هر جا که $w(z)$ تحلیلی باشد تحلیلی است. مثلا $e^{\frac{1}{z-4}}$ در $z=4$ تحلیلی نیست.

$$\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \quad , \quad \frac{de^z}{dz} = e^z \quad ; \quad e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad ; \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

و سایر خواص اکثر را دارا می باشد.

حل معادلات شامل e^{z} :

$e^{z} = \overset{\text{معلوم}}{w} \Longrightarrow z = ?$ با فرض $z = x + jy$

$e^{x}(\cos y + j\sin y) = \overbrace{\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)}^{w} \Longrightarrow \begin{cases} e^{x} = \rho \longrightarrow x = \ln\rho \\ \cos y = \cos\varphi \longrightarrow y = \varphi \pm 2k\pi \end{cases}$

مثال -

$e^{2z} + 3j\,e^{z} = 0 \Longrightarrow z = ?$

$e^{z}(e^{z} + 3j) = 0 \Longrightarrow e^{z} \neq 0 \;,\; e^{z} + 3j = 0 \Longrightarrow e^{z} = 3(\cos\pi/2 - j\sin\pi/2)$

$e^{z} = 3[\cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2)]$

$\Longrightarrow \begin{cases} e^{z} = 3 \\ \cos y = \cos\pi/2 \longrightarrow y = \pi/2 \pm 2k\pi \end{cases}$

تذکر - تابع e^{z} متناوب با دوره $2\pi j$ می باشد

$e^{z} = e^{(z+2\pi j)} = e^{z} \cdot e^{2\pi j} = e^{z} \cdot e^{2\pi j} = e^{z} e^{0}(\cos 2\pi + j\sin 2\pi) = e^{z}$

۲- توابع مثلثاتی :

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

- توابع $\sin z$ و $\cos z$ در همه جا مشتق پذیر می باشند (چون e^z مشتق پذیر است) و تحلیلی هم می باشند.

- توابع $\sin(W(z))$ و $\cos(W(z))$ نیز هر جا $W(z)$ تحلیلی باشد تحلیلی هستند.

-

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad , \quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

- نشان دهید که :

$$\sin z = \sin(x+jy) = \underbrace{\sin x \cosh y}_{u(x,y)} + j\underbrace{\cos x \sinh y}_{v(x,y)}$$

$$\begin{cases} \sin(jy) = j\sinh y \\ \cos(jy) = \cosh y \end{cases}$$

یادآوری :

$$\begin{cases} \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

حل معادله مثلثاتی ساده :

$$\sin z = 0 \Longrightarrow \sin x \cosh y + j\cos x \sinh y = 0$$

$$\Longrightarrow \sin x \cosh y = 0\ ,\quad \cos x \sinh y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0\ ,\ \cosh y \neq 0 \Longrightarrow x = n\pi \\ \sinh y = 0\ ,\ (\cos n\pi) \Longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z = n\pi}$$

مثال - (این معادله در اعداد حقیقی جواب ندارد)

$$\sin z = 4 \Longrightarrow z = ?$$

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 4 \Longrightarrow \cosh y = 4 \Longrightarrow y = \cosh^{-1} 4 \Longrightarrow \boxed{z = x + jy = \frac{\pi}{2} + j\cosh^{-1} 4} \\ \cos x \sinh y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Longrightarrow x = \pi/2 \quad \text{جواب اصلی} \\ \text{یا} \\ \sinh y = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow \cancel{\sin x = 4} \Longrightarrow x = \text{جواب ندارد} \end{cases} \end{cases}$$

روش دوم : روش کلی حل معادله فوق .

$$\sin z = 4 \Rightarrow \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = 4 \Longrightarrow e^{j2z} - 1 = 8je^{jz} \Longrightarrow e^{+j2z} - 8je^{jz} - 1 = 0\ ;\quad \underline{e^{jz} = u}$$

$$u^2 - 8ju - 1 = 0 \Longrightarrow u \ \text{محاسبه} \Longrightarrow z \ \text{محاسبه شود}$$

* اتحادهای مثلثاتی:

$$\begin{cases} \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \end{cases}$$

توجه ۱- توابع $\sin z$ و $\cos z$ پریودیک با پریود 2π می باشند.

توجه ۲- $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ و $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

توجه ۳- $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند یعنی $|\sin z|$ و $|\cos z|$ محدود

نیز بنابراین

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \neq 1$$

3- توابع هایپربولیک:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

* $\sinh z$ و $\cosh z$ تحلیلی می باشند.

* $\overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$ ، $\overline{\cosh z} = \cosh \bar{z}$

$\left.\begin{matrix} \sinh(w(z)) \\ \cosh(w(z)) \end{matrix}\right\}$ هرجا $w(z)$ تحلیلی باشد تحلیلی می باشند.

تمرین - نشان دهید که:

$$\sinh z = \sinh(x+jy) = \sinh x \cos y + j\cosh x \sin y$$

صفرهای توابع هایپربولیک:

$$\sinh z = 0 \Longrightarrow z = jn\pi \quad , \quad \cosh z = 0 \Longrightarrow z = j\frac{(2n-1)}{2}\pi$$

نکته - توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ متناوب بوده و دوره تناوب آنها $2\pi j$ می‌باشد.

تمرین - نشان دهید که:

$$\cosh z = \cosh(x+jy) = \cosh x \cos y - j\sinh x \sin y$$

توجه کنیم:

$$\cosh(jy) = \cos y \quad , \quad \sinh(jy) = j\sin y$$

توابع معکوس مثلثاتی:

$$\boxed{w = \sin^{-1} z \Longrightarrow \sin w = z}$$

$$\frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} = z \Longrightarrow e^{jw} - e^{-jw} - 2jz = 0 \longrightarrow e^{j2w} - (2jz)e^{jw} - 1 = 0 \quad , \quad e^{jw} = u$$

$$u^2 - 2jzu - 1 = 0 \rightarrow u = e^{jw} = jz + \sqrt{(jz)^2 + 1} = jz + (1-z^2)^{1/2} \Longrightarrow$$

تعمیم

$$jw = \ln[jz + (1-z^2)^{1/2}] \Longrightarrow \boxed{w = -j\ln[jz + (1-z^2)^{1/2}]}$$

تعمیم

۵- توضیح تابع لگاریتم: تابع لگاریتم به صورت $w=\ln z$ یا $w=\log z$ تعریف میشود.

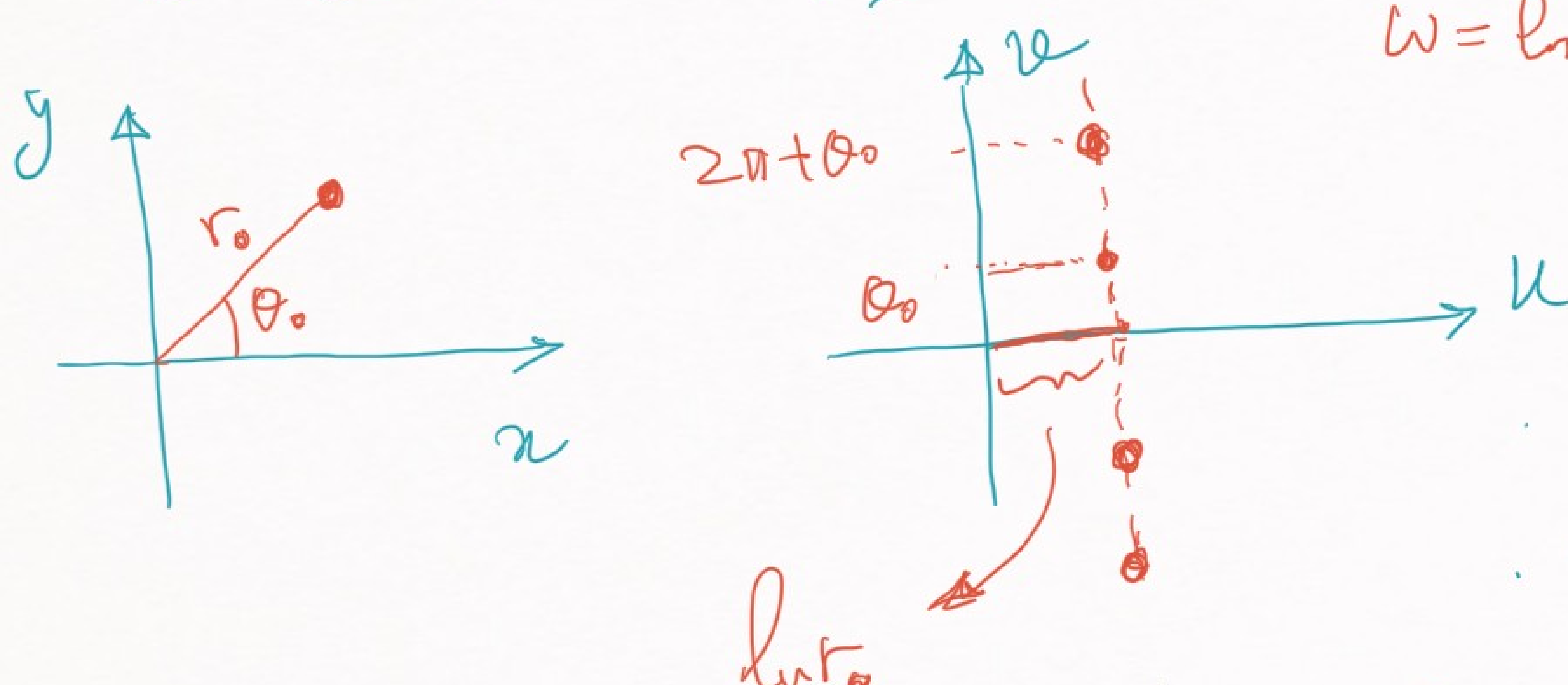
$$z=|z|e^{j\theta}=re^{j\theta} \Longrightarrow w=\ln z=\ln\left[re^{j\theta}\right] \Longrightarrow \boxed{w=\ln|z|+j\theta}$$

$(\theta+2k\pi)$

$$\Longrightarrow w=\ln(x^2+y^2)^{1/2}+j\tan^{-1}y/x \Longrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v=\tan^{-1}y/x \end{cases}$$

با توجه به: $\boxed{z=re^{j\theta}=re^{j(\theta+2k\pi)}}$ ملاحظه میشود که به ازای θ که مضارب 2π باشند تغییری نمی‌کند ولی تابع $w=\log z$

$w=\ln r+j\theta$



متفاوت خواهد بود. یعنی به ازای هر نقطه از دامنه نقاط مختلف در برد نسبت داده میشود. مقدار θ محدود به $-\pi<\theta\leq\pi$ را محدوده اصلی می‌گیریم.

$\operatorname{Ln} z=\ln r+j\theta$

مقدار اصلی تابع لگاریتم با حرف بزرگ L نشان میدهند.

1- $\ln(-1) = ?$ $\Rightarrow$ $\ln(-1) = \ln(1e^{j\pi}) = \ln 1 + j\pi = \boxed{j\pi}$ حل - (استاد رضائی)

2- $\ln(j) = ?$ $\Rightarrow$ $\ln(j) = \ln(1e^{j\pi/2}) = \ln 1 + j\pi/2 = \boxed{j\pi/2}$

3- $\ln(1+j) = ?$ $\Rightarrow$ $\ln(1+j) = \ln[\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}] = \boxed{\ln\sqrt{2} + j\pi/4}$

4- $z = j^{j} = ?$ $\Rightarrow$ $\ln z = j \ln j = j \cdot j\pi/2 = -\pi/2 \Rightarrow \boxed{z = e^{-\pi/2}}$

5- $z = j^{j^{j}} = ?$ $\Longrightarrow$ $z = \dots$ تمرین - خودتان حل نمائید.

6- $\sin z = 2 \Rightarrow z = ?$ $\rightarrow$ $\dfrac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = 2 \Longrightarrow e^{2jz} - 4j e^{jz} - 1 = 0$

$u = e^{jz}$

$\Longrightarrow u^2 - 4ju - 1 = 0 \longrightarrow u = 2j \pm \sqrt{-4+1} = j(2 \mp \sqrt{3}) \Rightarrow e^{jz} = j(2 \mp \sqrt{3})$

$jz = \ln j(2 \pm \sqrt{3}) \longrightarrow$ $z = \pi/2 - j\ln(2 \mp \sqrt{3})$ پاسخ

تذکر ۱:

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad , \quad \ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

تذکر مهم - در مورد تابع لگاریتم دیدیم که:

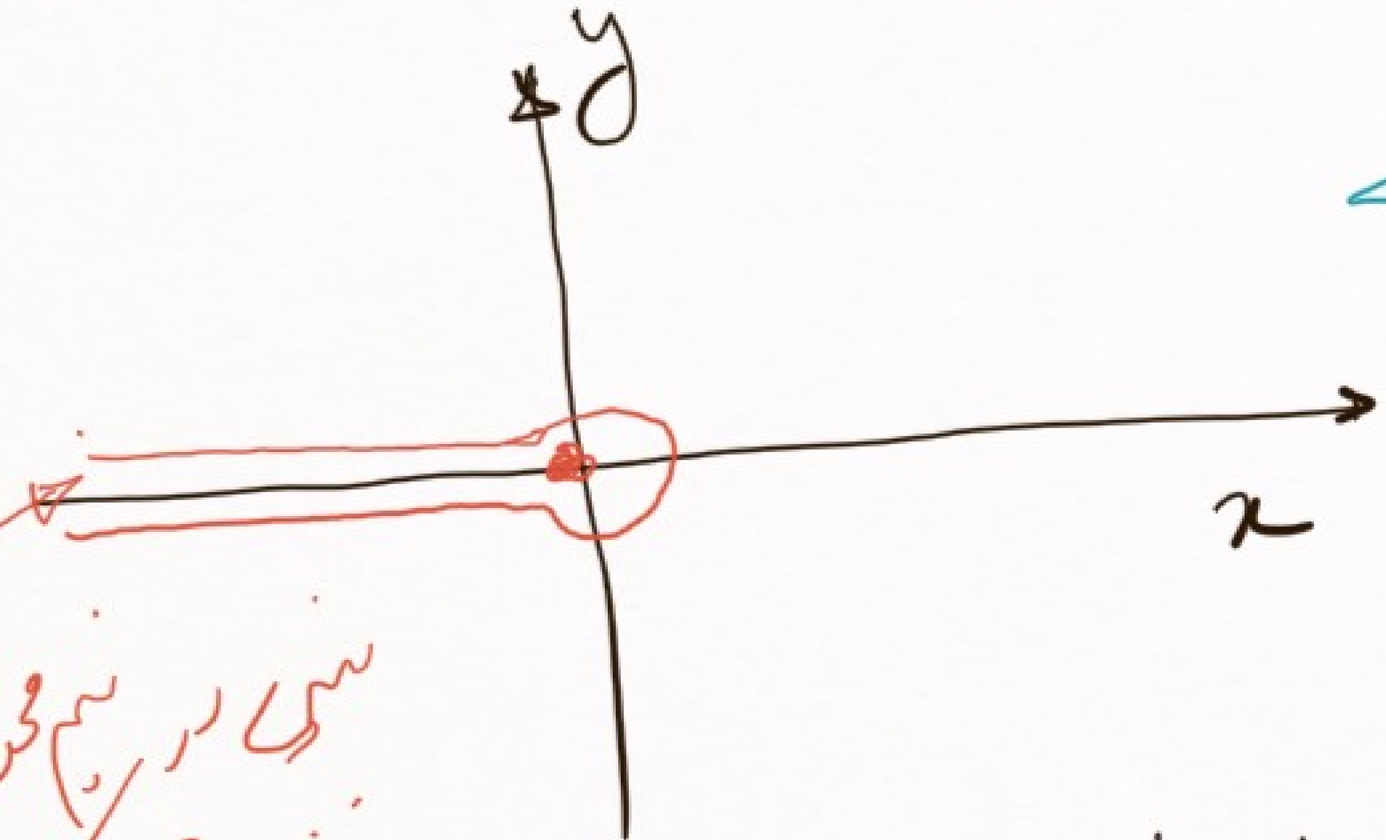
$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v(x,y) = \tan^{-1} y/x \end{cases} \xrightarrow{\text{بررسی شرایط کوشی ریمان}} u_x = \frac{x}{x^2+y^2} \ , \ v_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u_y = \frac{x}{x^2+y^2} \ , \ v_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

ملاحظه شد که شرایط در تمام نقاط بجز مبدا مختصات برقرار است. بنابراین تابع لگاریتم امکان تحلیلی بودن در کلیه نقاط بجز مبدا را خواهد داشت. اما با توجه به اینکه تابع لگاریتم در نقاط واقع بر محور حقیقی منفی ناپیوسته است بنابراین در روی محور حقیقی منفی تحلیلی نیست. (البته با فرض $-\pi < \theta \leq \pi$)

نیم محور حقیقی منفی را یک خط شاخه‌ای تابع لگاریتم (Lnz) می‌نامند تابع لگاریتم در تمام نقاط صفحه مختلط بجز

نقاط نیم محور تحلیلی است. یعنی صفحه مختلط را در طول نیم محور حقیقی منفی بریده‌ایم



یعنی در نیم محور حقیقی منفی تحلیلی نیست

را این بخش برش زده شده است

توجه: در لگاریتم‌ها بجای $-\pi < \theta \le \pi$ فرض کنیم $\alpha < \theta \le \alpha + 2\pi$

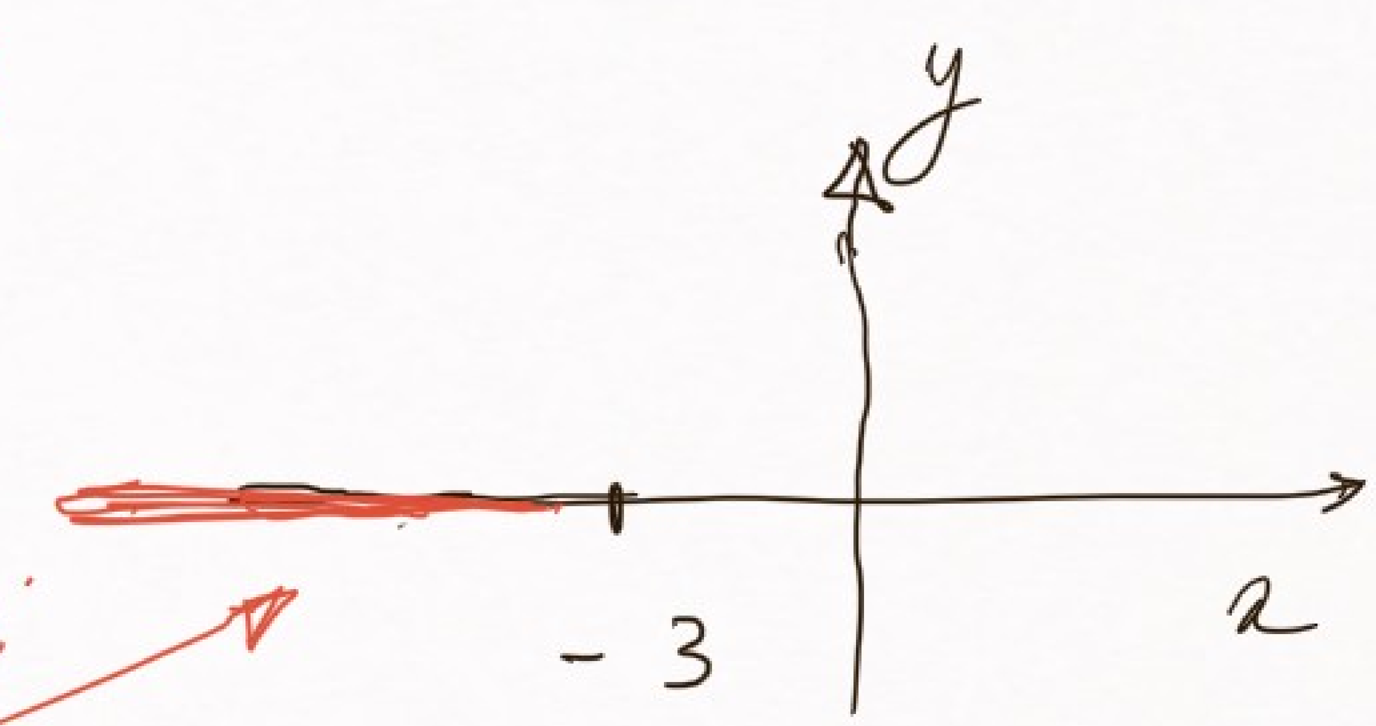
در اینگاه خط شاخه‌ای نیم خط شعاعی $\theta = \alpha$ خواهد بود و بریدگی در طول نیم خط $\theta = \alpha$

صورت می‌گیرد.

z جدید

مثال - نقاط غیر تحلیلی $w = \ln(z+3)$ (اشاره اصلی)

$$w = \ln(z+3) \rightarrow \begin{cases} \text{Real}\{z+3\} \le 0 \Rightarrow x+3<0 \Rightarrow x \le -3 \\ \text{Im}(3+z) = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$



ناحیه غیر تحلیلی

تست ۲- تعداد نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{\ln(z+3)}{(z^2+2)\sin z}$ درون مرز $|z|=2$ چند عدد است؟

الف- ۱   ب- 2   ج- 3   د- بیشمار.

(تست ارشد)

$$\begin{cases} z^2+2=0 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{2}j \Longrightarrow \text{داخل مرز (دو عدد)} \\ \sin z=0 \longrightarrow z=k\pi \Longrightarrow \text{فقط } z=0 \text{ داخل مرز} \\ \ln(z+3) \Longrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ y=0 \end{cases} \text{داخل مرز نیست.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ لذا تعداد 3 عدد داخل مرز وجود دارد.

تست ۳- جواب اصلی تابع لگاریتم در تابع $W=\ln(z^2+z)$ در چه ناحیه‌ای تحلیلی نیست؟

$$W=\ln(z^2+z) \Longrightarrow Im(z^2+z)=2xy+y=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

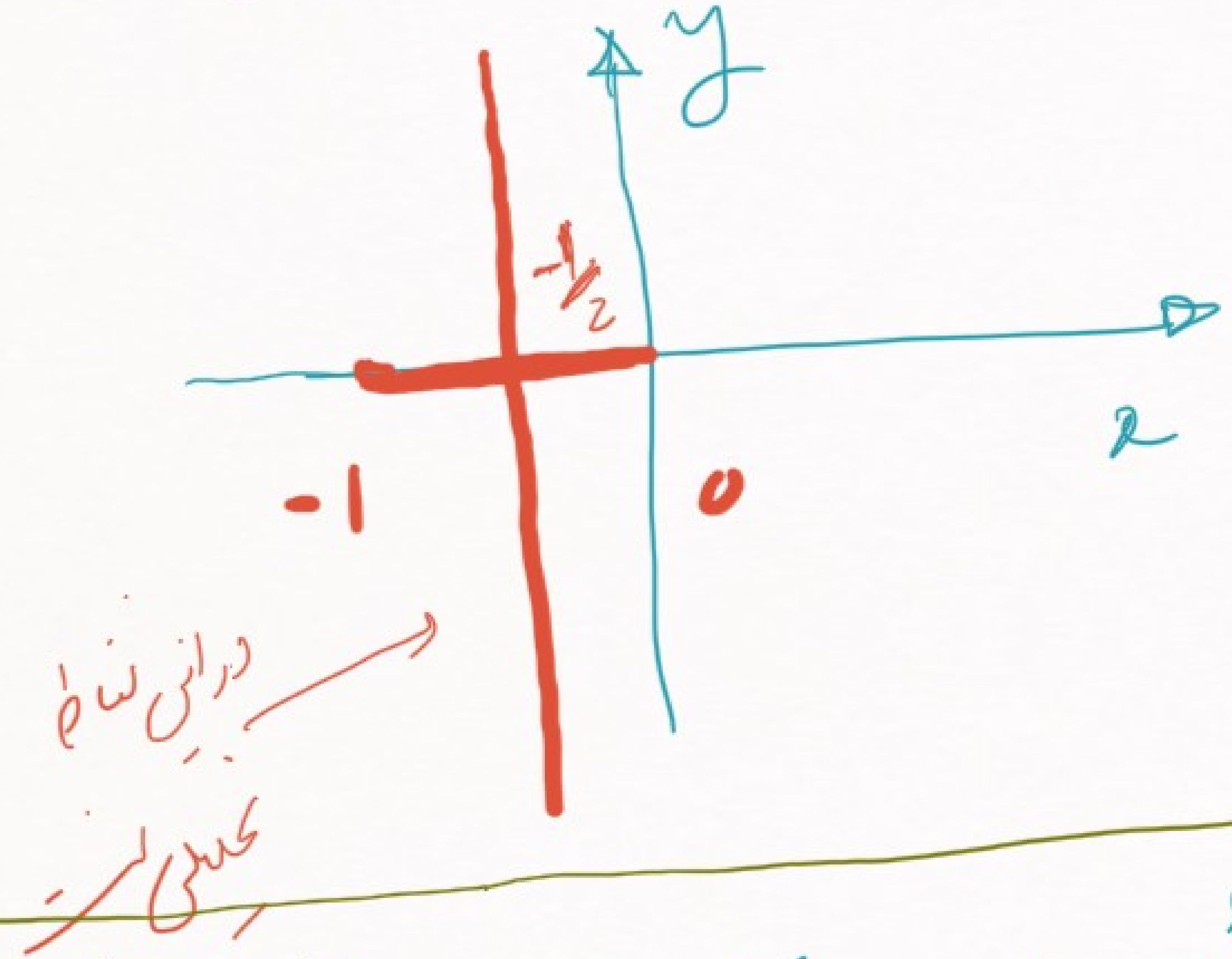
$$Real\{z^2+z\}=x^2-y^2+x\le 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{به ازای } y=0 \longrightarrow x(x+1)\le 0 \Longrightarrow -1\le x\le 0 \quad (1) \\ \text{به ازای } x=-1/2 \Longrightarrow 1/4-y^2-1/2\le 0 \Longrightarrow \end{cases}$$

$-y^2-1/4\le 0 \Longrightarrow$ همواره برقرار است

(2)

(1) و (2) در حالت غیر تحلیلی

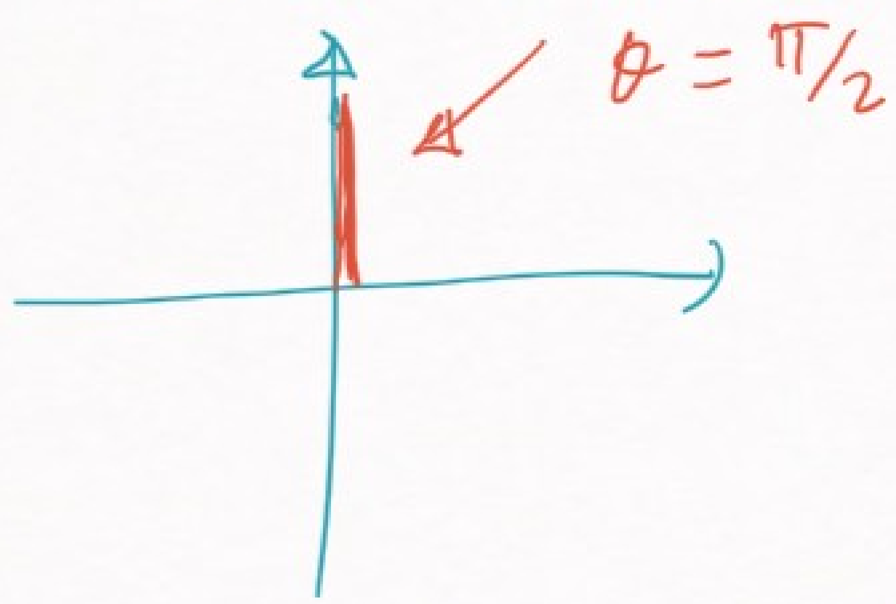
بنابراین نقاطی که تابع w در روی خط $x=-\frac{1}{2}$ و همچنین فاصله $-1<x<0$ و $y=0$ تحلیلی نیست. یعنی در شکل زیره



تمرین ۴ - اگر $\frac{\pi}{2}<\theta\leq\frac{5\pi}{2}$ و $\operatorname{Ln} z=\ln r+j\theta$ در این صورت

تابع $w=\ln(z^2-1)$ در چه نقاطی تحلیلی نیست؟

با توجه به محدوده θ داده شده، خط $\theta=\frac{\pi}{2}$ شاخه $\ln z$ می‌باشد. بنابراین بریدگی در طول این خط بوده، و این خط ناحیه غیر تحلیلی را مشخص می‌کند.



$$w=\ln\{f(z)\} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}\{f(z)\}>0 \\ \mathrm{Real}\{f(z)\}=0 \end{cases}$$

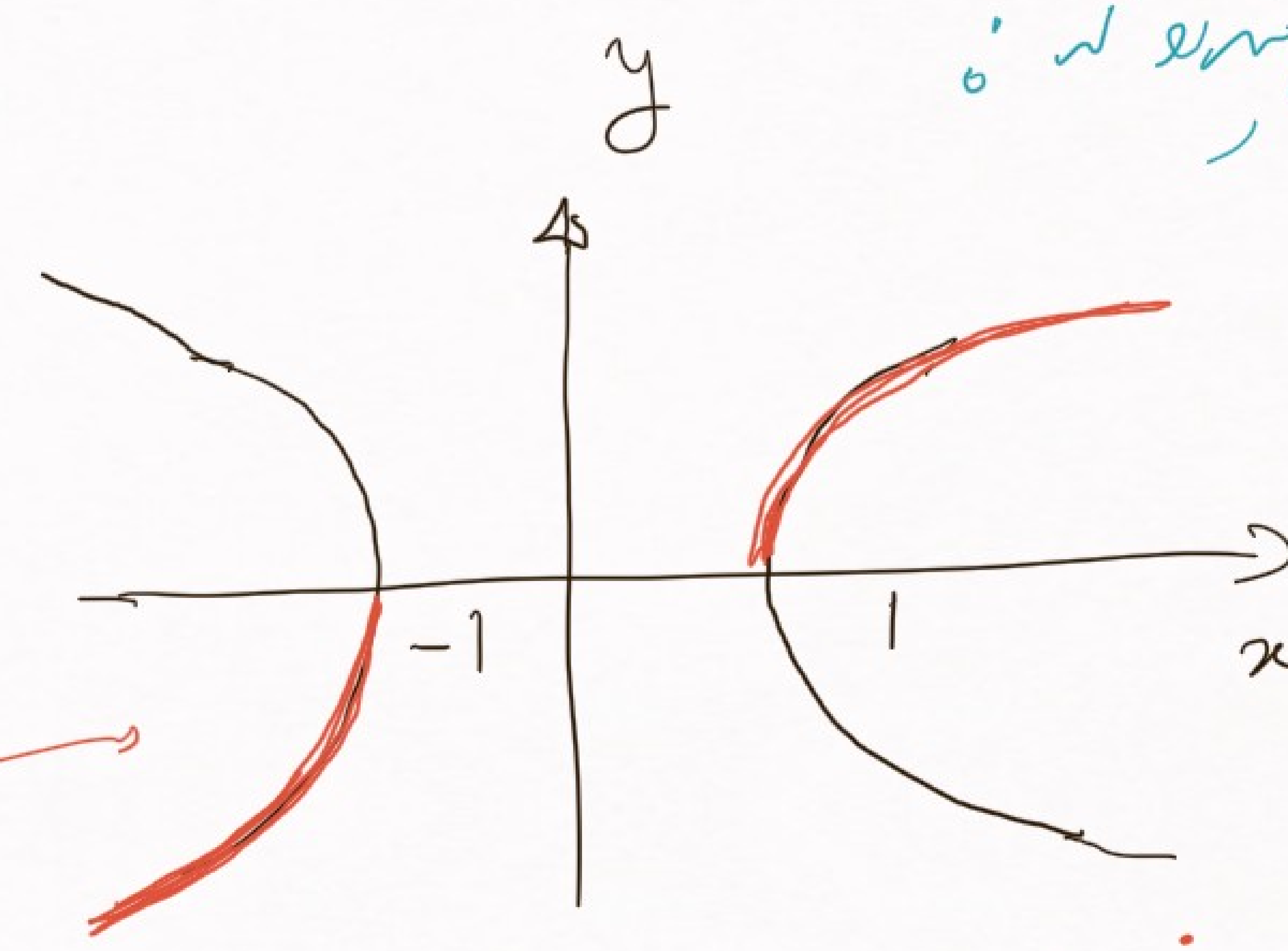
$$\mathrm{Real}\{f(z)\}=\mathrm{Re}\{z^2-1\}=x^2-y^2-1=0 \Longrightarrow x^2-y^2=1$$ و $$\mathrm{Im}(z^2-1)\geq 0 \Longrightarrow 2xy>0$$

این دو

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \longrightarrow \text{هذلولی} \\ 2xy>0 \longrightarrow \text{ناحیه اول و سوم} \end{cases}$$

یعنی x و y یا هر دو مثبت یا هر دو منفی

پس مکان هندسی که:



دارای نقاط قطبی است

توابع توانی مختلط:

$$w=z^c=\exp\{c\ln z\}=e^{c\ln z}=(e^{\ln z})^c=z^c$$

بنابراین ملاحظه شد که توان را می‌توان برحسب تابع $e^{\ln z}$ که لگاریتم z می‌باشد تعریف نمود.

$$z^c=e^{c\,\mathrm{Ln}\,z}$$

مقدار اصلی لگاریتم

چون $\ln z$ یک تابع چند مقداری نامتناهی است لذا z^n در حالت کلی چند مقداری خواهد بود. مقدار

را مقدار اصلی z^c گویند.

توان معمولی ← $c=\pm1,\pm2,\dots$

ریشه n ام که قبلاً دیدیم ← $c=1/n,\ n=2,3,\dots$

چند مقداری خواهد بود ← $c=$ مختلط

نوع حالت