آنالیز برداری

« فصل اول »

کمیت های فیزیکی : — اسکالر (نرده ای) : تنها با اندازه مشخص می شوند

برداری : اندازه و جهت

نحوه نمایش کمیت های اسکالر و برداری :

Bold

برداری : $\bar{E}$ or $\mathbf{E}$ or $\vec{E}$

Bold

اسکالر : E or $|\bar{E}|$ or $|\mathbf{E}|$

مباحث این فصل :

- مروری از آنالیز برداری
- قواعد ساده برداری
- دستگاه های مختصات
- انتگرال کمیت های برداری
- مشتقات برداری

قواعد ساده برداری

تساوی دو بردار:

$\bar{A} = \bar{B}$ → اندازه برابر یکسان
→ جهت یکسان

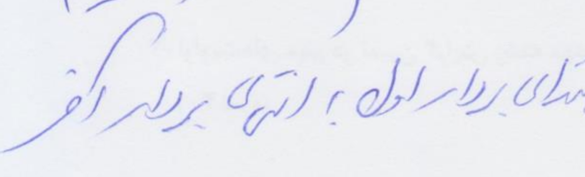
نکته: نقطه اثر بردارها ربطی به تساوی بردارها ندارد.

$\bar{A} = -\bar{B}$ → اندازه برابر
→ مختلف الجهت

جمع بردارها:

استفاده از روش چندضلعی: از انتهای بردار اول، برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم برداری مساوی بردار سوم و ... رسم می‌کنیم.

بردار حاصل جمع از اتصال ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر بدست می‌آید.



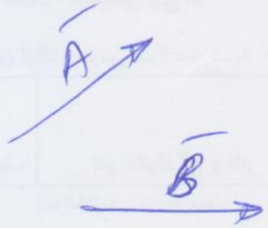
$$\bar{D} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

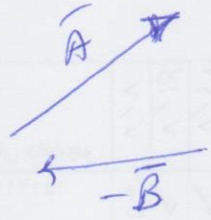
خاصیت جابجایی: $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$ ✓

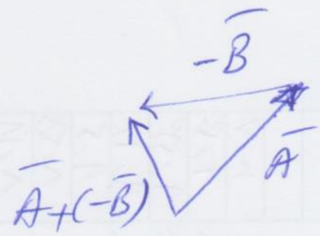
خاصیت شرکت‌پذیری: $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})$ ✓

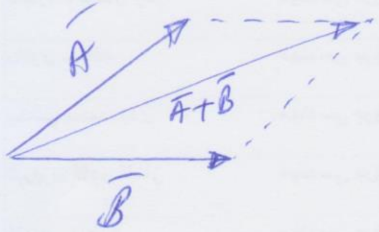
تفریق دو بردار

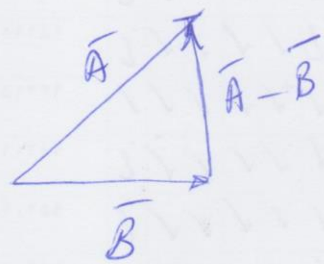
$$\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$$











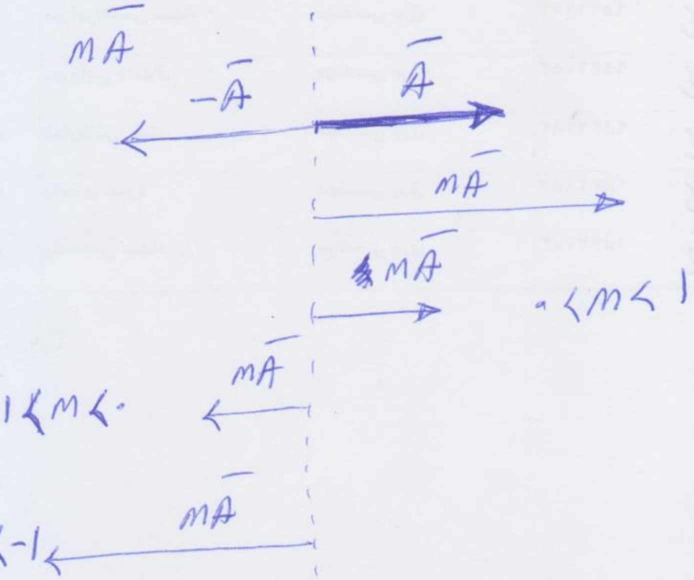
ضرب برداری که :

ضرب بردار در یک عددی

ضرب داخلی دو بردار

ضرب خارجی دو بردار

ضرب بردار در یک عددی :

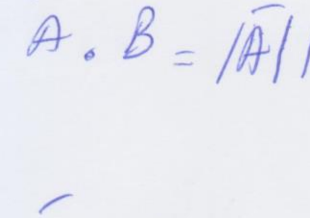


ضرب داخلی دو بردار (.)

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\alpha$$

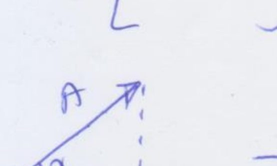
ورودی دو بردار، خروجی اسکالر

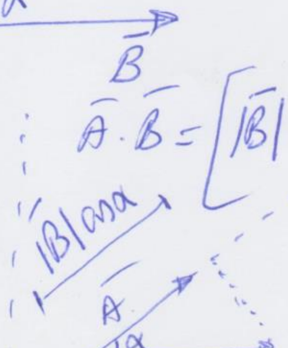
n چه مقدار بردار $\bar{A}$ در راستای بردار $\bar{B}$ مولفه دارد و برعکس ؟



$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \left[|\bar{A}|\cos\alpha\right] |\bar{B}|$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \left[|\bar{B}|\cos\alpha\right] |\bar{A}|$$





5

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\alpha$$

if $\alpha = 90^\circ \rightarrow \bar{A}\cdot\bar{B} = 0$ دو بردار بر هم عمودند

هیچ مولفه‌ای در راستای هم ندارند.

if $\alpha = 0 \rightarrow \bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{A}|\cdot|\bar{B}|}$$

خاصیت جابجایی: $\checkmark\ \bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\bar{A}$

خاصیت توزیع پذیری: $\checkmark\ \bar{A}\cdot(\bar{B}+\bar{C}) = \bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot\bar{C}$

خاصیت شرکت پذیری: $\times\ \bar{A}(\bar{B}\cdot\bar{C}) \neq (\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$

ضرب خارجی دو بردار (X) :

$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{C}$ → اندازه، جهت

ورودی بردار، خروجی بردار

جهت : قانون دست راست

اندازه : $|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}||\bar{B}| \sin\alpha$

خاصیت جابجایی : $\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A} \neq \bar{B} \times \bar{A}$ X

خاصیت شرکت پذیری : $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) \neq (\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C}$ X

خاصیت توزیع پذیری : $\bar{A} \times (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \bar{C}$

- بردار واحد یکه : $\bar{A}$

برداری است هم جهت با بردار اصلی و با اندازه 1 .

$$\hat{a}_A = \frac{1}{|\bar{A}|}\bar{A} = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|}$$

دستگاه‌های مختصات:

- کمیت‌های میدان الکتریکی عموماً تابع مکان و زمان هستند
لذا باید برای بیان تغییرات کمیت‌های فیزیکی نسبت به مکان
به شیوه مناسبی نقاط فضا را مشخص نماییم.

- برای این کار از ۳ صفحه دو بدو عمود بر هم بهره می‌گیریم.
تلاقی این سه صفحه، نقطه مورد نظر را بما می‌دهد.

- در صورت از این صفحات یکی از مختصه‌های مکانی ثابت می‌باشند.

u_1, u_2, u_3

معادله صفحه $f(u_1, u_2, u_3) = cte$

- سطوح f_1 ، f_2 و f_3 متعامدند.

$f_1(u_1, u_2, u_3) = u_1$

$f_2(u_1, u_2, u_3) = u_2$

$f_3(u_1, u_2, u_3) = u_3$

- برحسب اینکه این سطوح چطور انتخاب شوند
دستگاه مختصات مختلف ایجاد می‌شوند.

- دستگاه‌های پایه اول: ← کارتزین - مستطیلی
استوانه‌ای
کروی

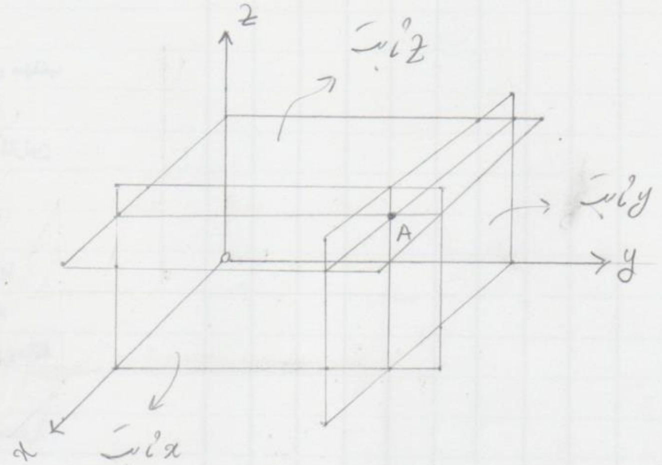
8

دستگاه مختصات کارتزین :

$$f_1(x,y,z) = x \qquad u_1 = x$$

$$f_2(x,y,z) = y \qquad u_2 = y$$

$$f_3(x,y,z) = z \qquad u_3 = z$$



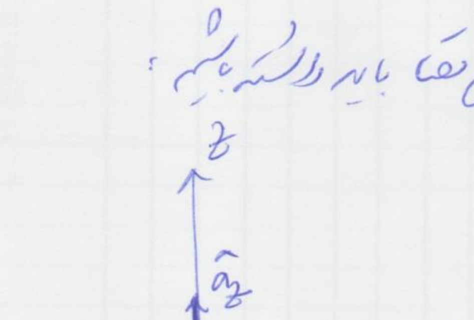
محدوده تغییرات x، y و z :

برای پوشش کل فضا باید داشته باشیم :

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < y < +\infty$$

$$-\infty < z < +\infty$$



بردارهای پایه :

در هر نقطه عمود بر سطح مختصات و در جهت افزایش مختصه مورد نظر است .

$\hat{a}_x$: عمود بر سطح x ثابت

$\hat{a}_y$: عمود بر سطح y ثابت

$\hat{a}_z$: عمود بر سطح z ثابت

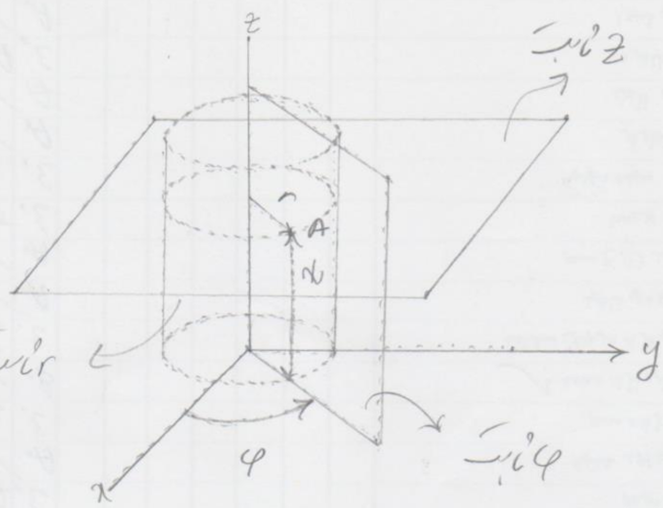
$\hat{a}_x$ ، $\hat{a}_y$ ، $\hat{a}_z$ تابع مختصات نیستند

بنابراین معمولاً به صورت ثابت از مبدا مختصات رسم می‌شوند .

دستگاه مختصات استوانه‌ای: (r, φ, z)

$u_1 = r \ , \ u_2 = \varphi , \ u_3 = z$

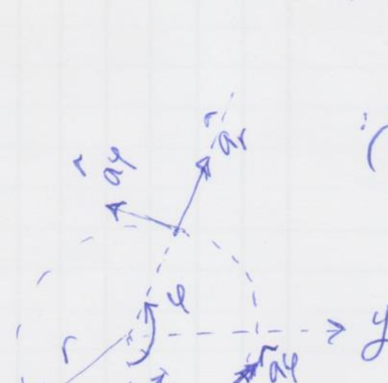
$$\begin{cases} f_1(r,\varphi,z) = r \\ f_2(r,\varphi,z) = \varphi \\ f_3(r,\varphi,z) = z \end{cases}$$



حدود تغییرات r, φ, z :

برای پوشش کامل فضا داریم:

$$\begin{cases} 0 \leqslant r < \infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$



$\hat{a}_r , \ \hat{a}_\varphi , \ \hat{a}_z$

بردارهای پایه:

در هر نقطه عمود بر صفحات مختصات است

و در جهت افزایش مختصه

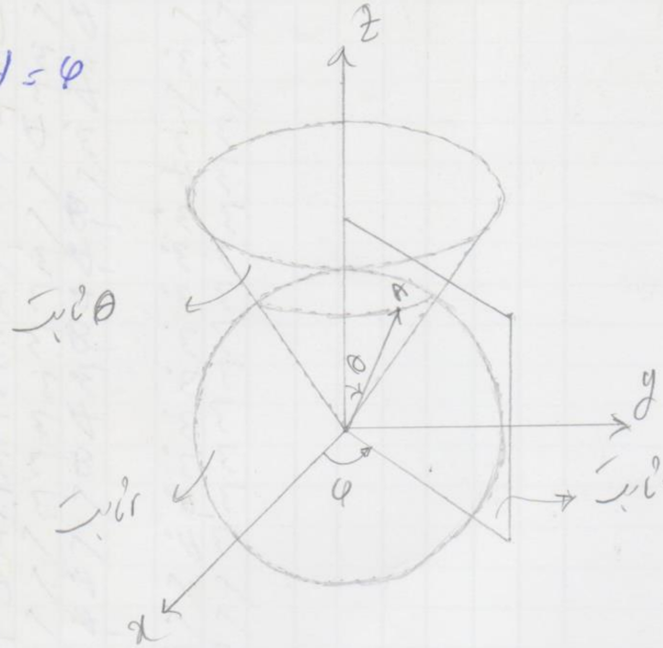
$\hat{a}_r$ ، $\hat{a}_\varphi$ تابع مختصات هستند.

و با جابجایی نقطه مورد نظر، $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_\varphi$ جهت تغییر می‌کنند.

دستگاه مختصات کروی: (r, θ, φ)

$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = z$

$$\begin{cases} f_1(r,\theta,\varphi) = r \\ f_2(r,\theta,\varphi) = \theta \\ f_3(r,\theta,\varphi) = \varphi \end{cases}$$



حدود تغییرات r, θ, φ:

برای پوشش کل فضا داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta < \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$\hat{a}_r, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\varphi$

بردارهای یکه ثابت نیست

در هر نقطه عمود بر سطح مختصات است

و در جهت افزایش مختصه

$\hat{a}_r$ ، $\hat{a}_\theta$ و $\hat{a}_\varphi$ تابع مختصات هستند

و با جابجایی نقطه مورد نظر، جهت آن تغییر می‌کند.