فصل سوم: انتقال سیگنال و فیلترینگ

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$a\,x(t) \longrightarrow a\,y(t) \quad \& \quad x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$$

پاسخ ضربه و کانولوشن

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\lambda) \longrightarrow h(t-\lambda)$$

$$a\,\delta(t) \longrightarrow a\,h(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda$$

خاصیت مشتق کانولوشن

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,y(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,y'(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda$$

$$= x(t) * y'(t) = x'(t) * y(t)$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = x(t) * y''(t) = x'(t) * y'(t) = x''(t) * y(t)$$

تابع تبدیل و پاسخ فرکانسی

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$H(f) \longrightarrow |H(f)|$ اندازه پاسخ فرکانسی

$H(f) \longrightarrow \angle H(f)$ فاز پاسخ فرکانسی

پاسخ به ورودی نمایی مختلط

$$x(t) = A_x\, e^{j\phi_x}\, e^{j2\pi f_0 t} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 (t-\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, e^{-j2\pi f_0 \lambda}\, d\lambda\right) A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$= H(f_0)\, A_x e^{j\phi_x}\, e^{j2\pi f_0 t} = A_y\, e^{j\phi_y}\, e^{j2\pi f_0 t}$$

$$A_y = |H(f_0)|\, A_x \qquad \phi_y = \angle H(f_0) + \phi_x$$

$$\frac{x + x^*}{2} \longrightarrow \frac{y + y^*}{2}$$

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \phi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(2\pi f_0 t + \phi_y)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow Y(f) = X(f) \times H(f)$$

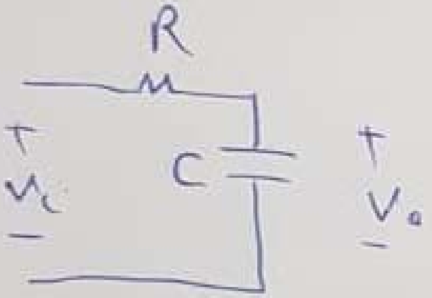
حاصل ضرب طیف ورودی در پاسخ ضربه

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

مثال: پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه؟



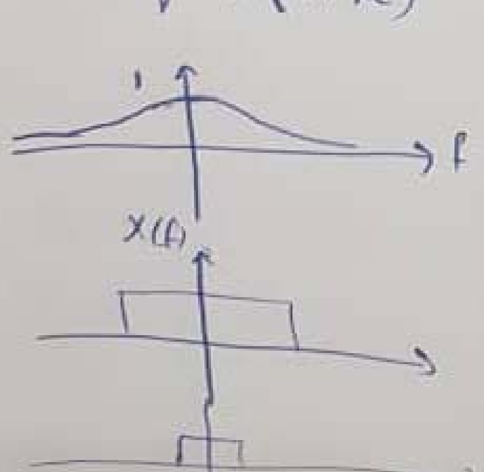
تقسیم امپدانسی

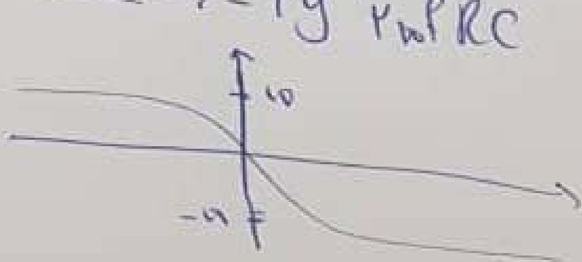
$$\frac{V_o}{V_i} = H(f) = \frac{\frac{1}{jC2\pi f}}{\frac{1}{jC2\pi f} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f RC}\right\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1+(2\pi f RC)^2}}$$

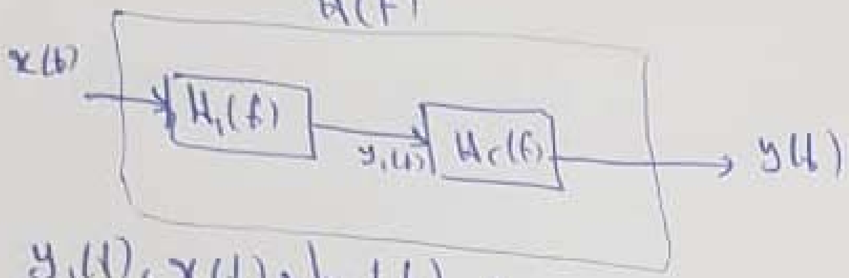
$$\angle H(f) = -tg^{-1} 2\pi f RC$$





تحلیل با نمودار بلوکی

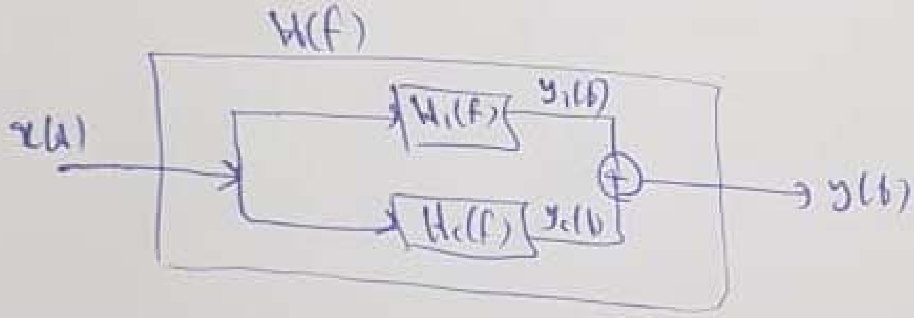
۱- اتصال سری



$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$
$$y(t) = y_1(t) * h_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * h(t)$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$
$$H(f) = H_1(f)\, H_2(f)$$

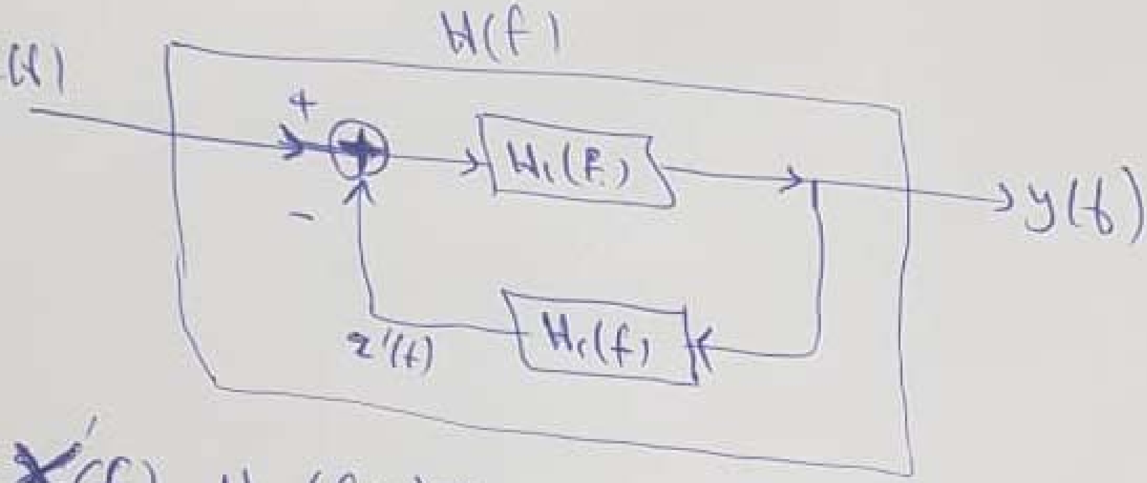
۲- اتصال موازی



$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$
$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h(t)$$
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

۲- اتصال فیدبک



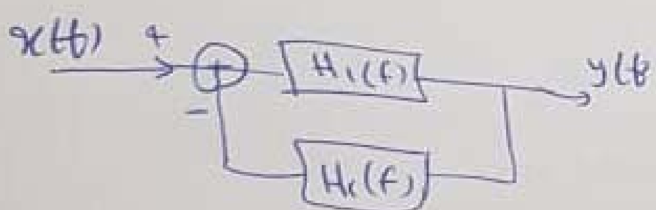
$$X'(f) = H_2(f)\,Y(f)$$

$$Y(f) = H_1(f)X(f) - H_1(f)X'(f) = H_1(f)X(f) - H_1(f)H_2(f)Y(f)$$

$$Y(f)\{1 + H_1(f)H_2(f)\} = H_1(f)X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

مثال: برای سیستم زیر پاسخ ضربه و فرکانس را بیابید



$$H_1(f) = j2\pi f$$
$$H_2(f) = k$$

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi kf} = \frac{1}{k} \times j2\pi f \times \frac{1}{\frac{1}{k} + j2\pi f}$$

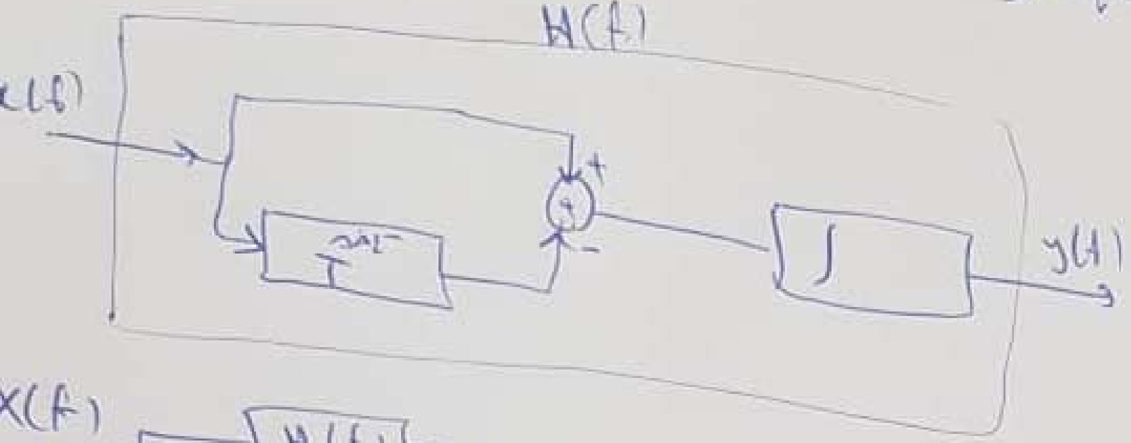
$$\frac{1}{a + j\omega} \to e^{-at}u(t) \Rightarrow \frac{1}{k} e^{-\frac{t}{k}} u(t)$$

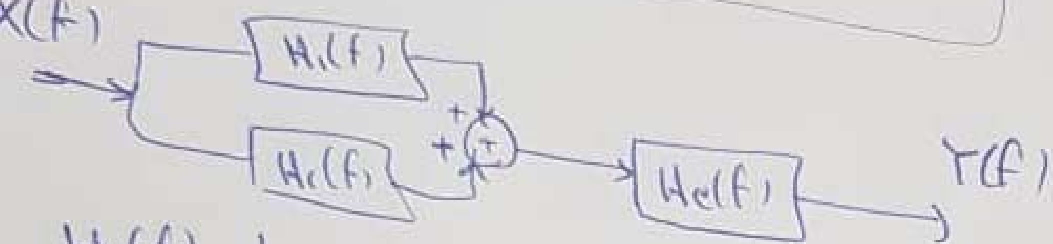
$$\frac{dx(t)}{dt} \to j2\pi f X(f) \to \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{k} e^{-\frac{t}{k}} u(t)\right\} = h(t)$$

$$h(t) = -\frac{1}{k^2} e^{-\frac{t}{k}} u(t) + \underbrace{\frac{1}{k} e^{-\frac{t}{k}} \delta(t)}_{\frac{1}{k}\delta(t)}$$

1
$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

مثال: نگهدارنده مرتبه صفر



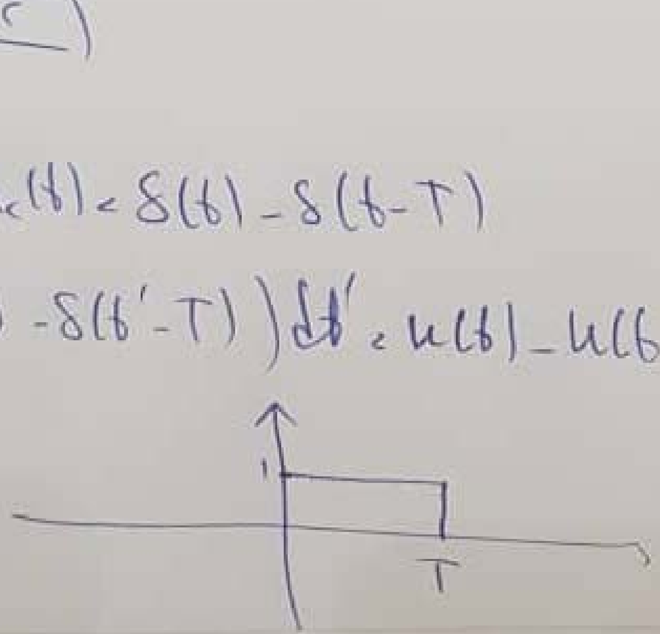


$$H_1(f)=1$$
$$H_2(f)=-e^{-j2\pi fT}$$
$$H_3(f)=\frac{1}{j2\pi f}$$

$$H(f)=H_3(f)\{H_1(f)+H_2(f)\}$$
$$=(1-e^{-j2\pi fT})\times\frac{1}{j2\pi f}$$
$$=e^{-j\pi fT}\left\{\frac{e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{j2\pi f}\right\}$$
$$=e^{-j\pi fT}\frac{\sin\pi fT}{\pi f}=T\,e^{-j\pi fT}\,\mathrm{sinc}\, fT$$

$$h(t)=\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$\hat{h}(t)=h_1(t)+h_2(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$$
$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(\delta(t')-\delta(t'-T)\right)dt'=u(t)-u(t-T)$$



مثال برای ورودی $x = A\{\delta(t+t_d) - \delta(t-t_d)\}$ خروجی سیستم با پاسخ ضربه $h(t)$ و طیف آن را بیابید

$$y(t) = h(t) * x(t) = A\, h(t) * \delta(t+t_d) - A\, h(t) * \delta(t-t_d)$$
$$= A\, h(t+t_d) - A\, h(t-t_d)$$
$$Y(f) = A\, H(f) \{ e^{j2\pi f t_d} - e^{-j2\pi f t_d} \}$$
$$= 2Aj\, H(f) \sin 2\pi f t_d$$

اعوجاج سیگنال در انتقال

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{کانال}} \xrightarrow{\;y(t)\;}$$

انتقال بدون اعوجاج: فقط دامنه سیگنال تغییر کند و یا اینکه تاخیر به سیگنال اعمال شود

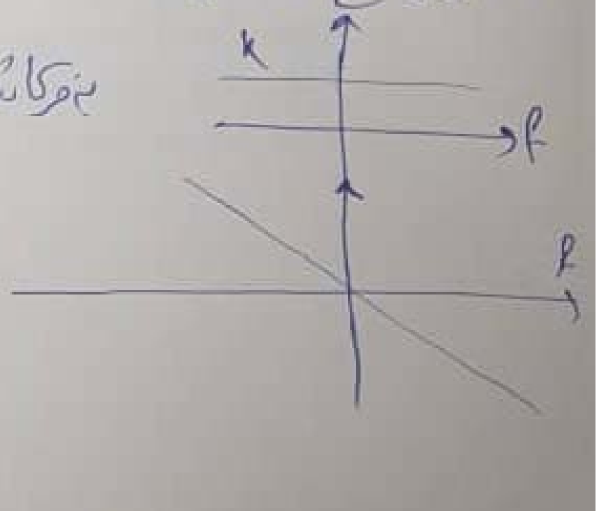
$$y(t) = k\, x(t-t_d)$$

$$Y(f) = k\, X(f)\, e^{-j2\pi f t_d}$$
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = k\, e^{-j2\pi f t_d}$$

سیستم بدون اعوجاج

اندازه پاسخ فرکانسی ثابت و فاز خطی

$$\begin{cases} |H(f)| = |k| & \longleftarrow \text{به فرکانس ربط ندارد} \\ \angle H(f) = -2\pi f t_d \pm m\pi \end{cases}$$



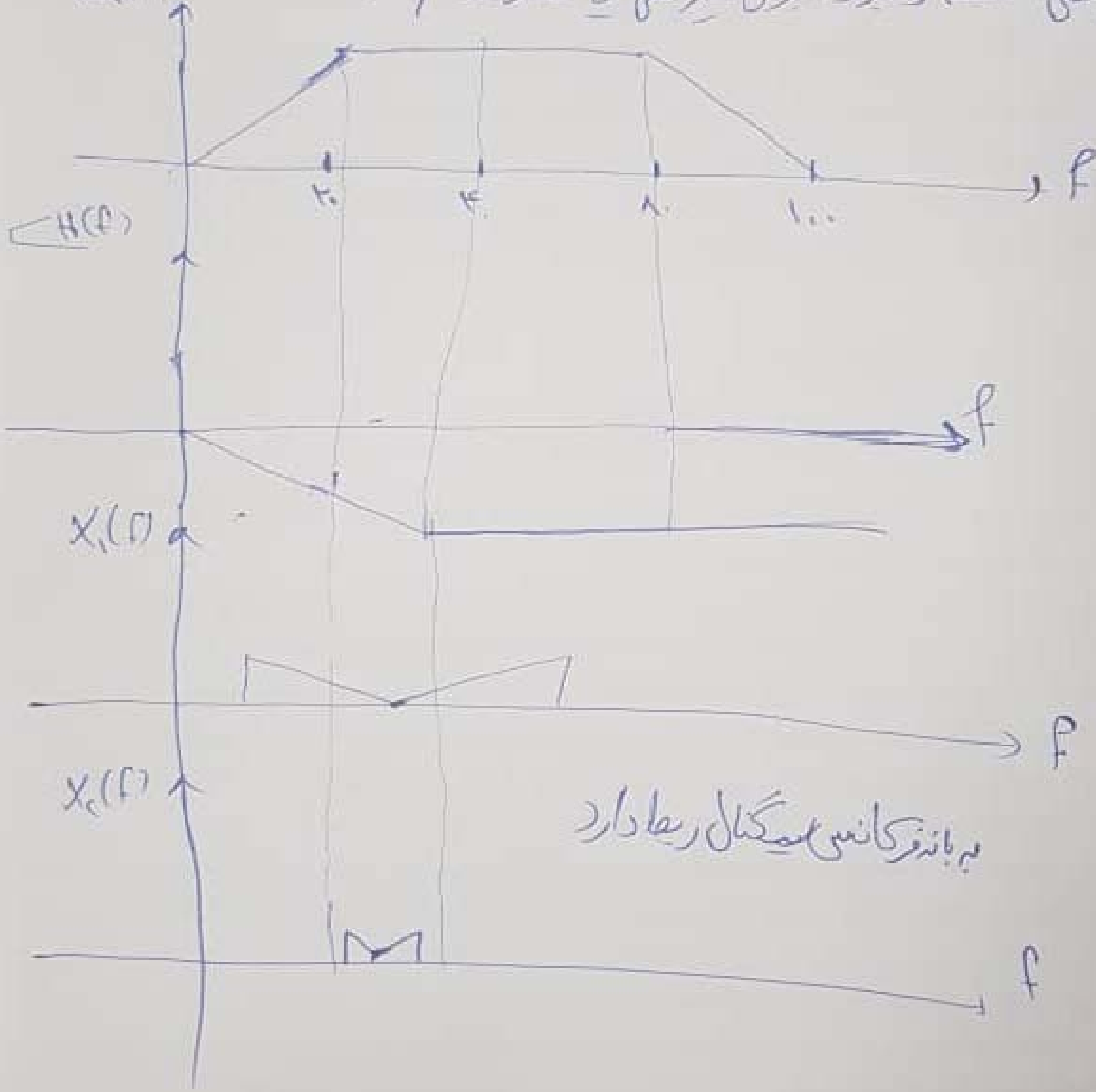
انواع اعوجاج

۱- اعوجاج دامنه $|H(f)| \neq |K|$

۲- اعوجاج فاز $\angle H(f) \neq -2\pi f t_d \pm m\pi$

} اعوجاج خطی

۳- اعوجاج غیرخطی ← وجود اجزای غیرخطی یا عملکرد سیستم در نواحی غیرخطی |H(f)|



د:

$$x(t) = \cos\omega_0 t + \cos \text{۲}\omega_0 t + \cos \text{۳}\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow |H(f_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(f))$$

$$H(f) = k e^{-j\text{۲}\pi f t_d} \longrightarrow \angle H(f) = -\text{۲}\pi f t_d$$

$$|H(f_0)| \cos(\omega_0 t - \underbrace{\text{۲}\pi f_0}_{\omega_0} t_d) = k \cos\omega_0 (t - t_d)$$

$$|H(\text{۲}f_0)| \cos(\text{۲}\omega_0 t - \text{۲}\pi f_0 \times \text{۲} t_d) = k \cos \text{۲}\omega_0 (t - t_d)$$

$$|H(\text{۳}f_0)| \cos(\text{۳}\omega_0 t - \text{۲}\pi f_0\, \text{۳} t_d) = k \cos \text{۳}\omega_0 (t - t_d)$$

$$\Longrightarrow y(t) = k\, x(t - t_d)$$

$$\angle H(f) = -tg^{-1} f$$

$$k \cos(\omega_0 t - tg^{-1} f_0) = k \cos\omega_0 \left(t - \frac{tg^{-1} f_0}{\omega_0}\right)$$

$$k \cos(\text{۲}\omega_0 t - tg^{-1} \text{۲}f_0) = k \cos \text{۲}\omega_0 \left(t - \frac{tg^{-1} \text{۲}f_0}{\text{۲}\omega_0}\right)$$

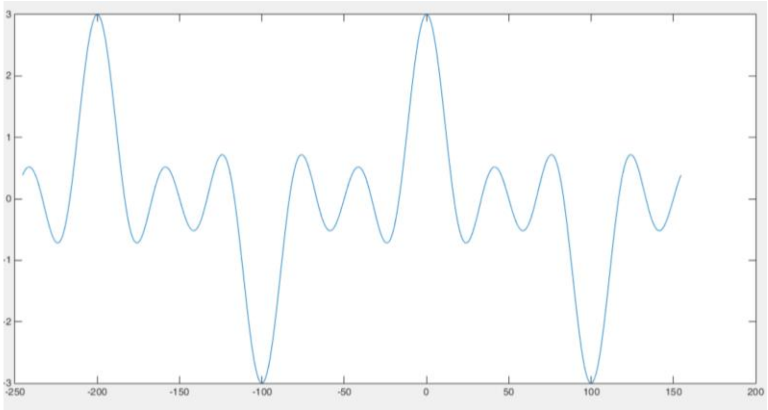
$$k \cos(\text{۳}\omega_0 t - tg^{-1} \text{۳}f_0) = k \cos \text{۳}\omega_0 \left(t - \frac{tg^{-1} \text{۳}f_0}{\text{۳}\omega_0}\right)$$

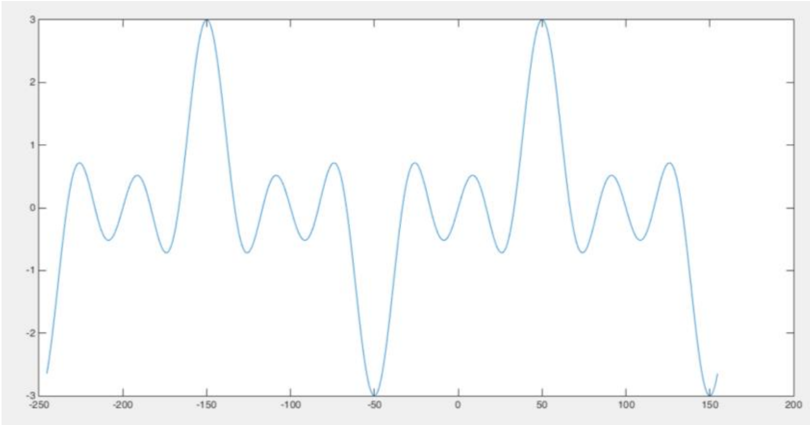
$$\Sigma \qquad \neq k\, x(t - t_d)$$

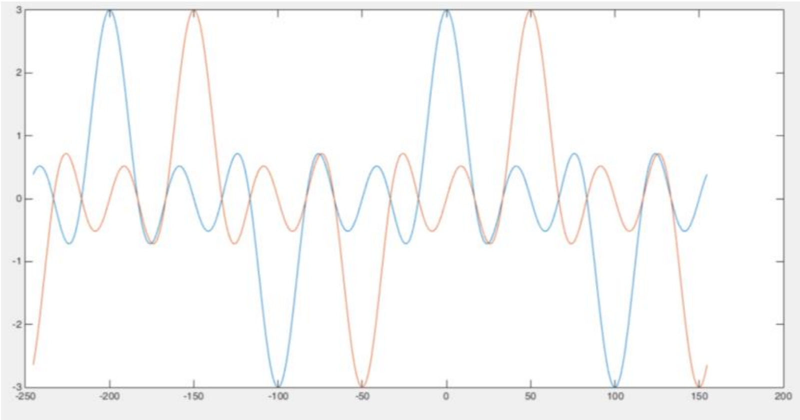
$w = 2\pi \times 0.005 \quad x(t) = \cos(wt) + \cos(3wt) + \cos(5wt)$

$\left|\mathrm{H(f)}\right| = 1 \qquad \prec H(f) = -100\pi f$

$$y(t) = \cos(wt - 100\pi \times 0.005) + \cos(3wt - 300\pi \times 0.005) + \cos(5wt - 500\pi \times 0.005)$$
$$= \cos(w(t-50)) + \cos(3w(t-50)) + \cos(5w(t-50))$$





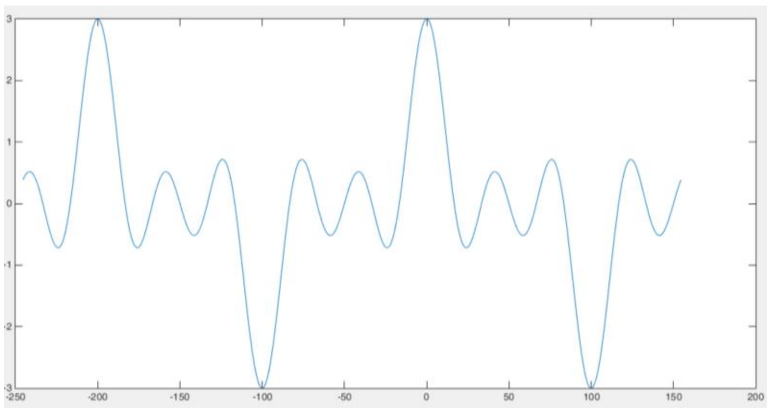


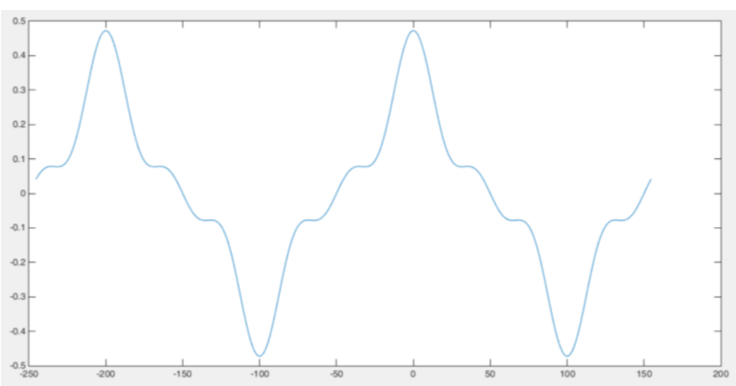
$$w = 2\pi \times 0.005 \quad x(t) = \cos(wt) + \cos(3wt) + \cos(5wt)$$

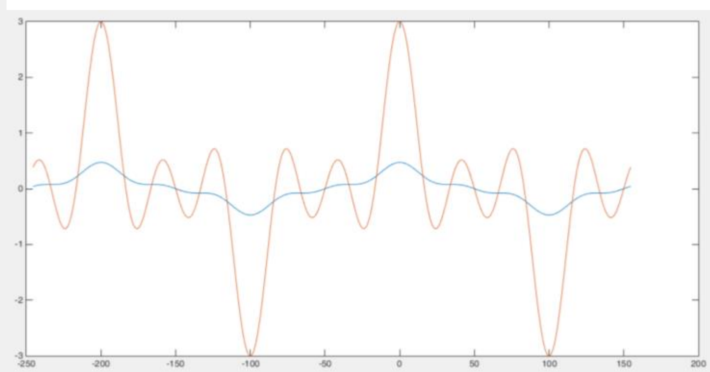
$$|\mathrm{H(f)}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (100 \times 2\pi f)^2}} \qquad \angle H(f) = \begin{cases} 20\pi \times 0.005 & f = 0.005 \\ 84\pi \times 0.005 & f = 0.015 \\ 300\pi \times 0.005 & f = 0.025 \end{cases}$$

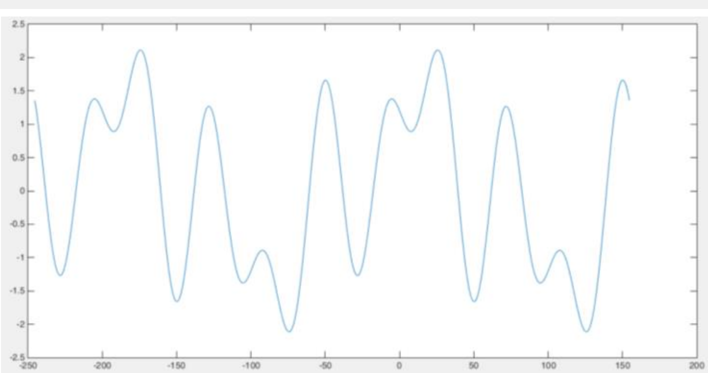
$$y(t) = |\mathrm{H}(0.005)|\cos(wt) + |\mathrm{H}(0.015)|\cos(3wt) + |\mathrm{H}(0.025)|\cos(5wt)$$

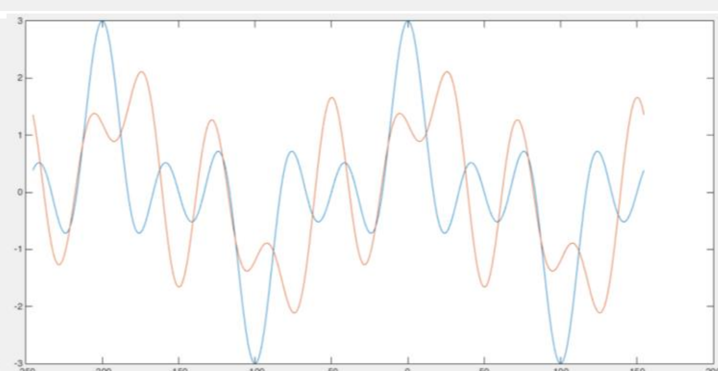
$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(wt - 20\pi \times 0.005) + \cos(3wt - 84\pi \times 0.005) + \cos(5wt - 300\pi \times 0.005) \\ &= \cos(w(t-10)) + \cos(3w(t-14)) + \cos(5w(t-30)) \end{aligned}$$











تأخیر فاز

تأخیر زمانی ناشی از تغییر فاز

$$t_d(f) = -\frac{\angle H(f)}{2\pi f} \Leftarrow H(f) = |H(f)|\, e^{j\angle H(f)}$$

تغییر فاز ثابت $\neq$ تأخیر زمانی ثابت

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \omega_0 \left(t - \frac{\varphi}{\omega_0}\right)$$

$$\cos(2\omega_0 t + \varphi) = \cos 2\omega_0 \left(t - \frac{\varphi}{2\omega_0}\right)$$

تأخیر پوش یا تأخیر گروه

$$H(f) = A e^{j(-2\pi f t_g + \varphi_0)}$$

$$\angle H(f) = -2\pi f t_g + \varphi_0 \longrightarrow t_d(f) = t_g - \frac{\varphi_0}{2\pi f}$$

ورودی $\longleftarrow$

$$x(t) = x_1(t) \cos \omega_c t - x_2(t) \sin \omega_c t$$

$$y(t) = x_1(t - t_g) \cos(\omega_c(t - t_g) + \varphi_0) - x_2(t - t_g) \sin(\omega_c(t - t_g) + \varphi_0)$$

$$= \underbrace{x_1(t - t_g)}_{\text{تأخیر } t_g} \cos \omega_c(t - t_d) - x_2(t - t_g) \underbrace{\sin \omega_c(t - t_d)}_{\text{تأخیر } t_d}$$

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\angle H(f)}{df}$$

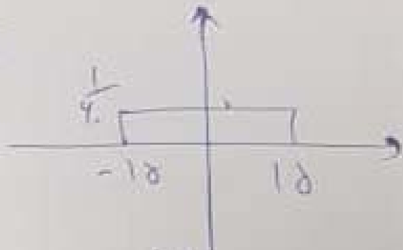
۲۸

مثال: تابع تبدیل یک کانال به صورت زیر است. تأخیر فاز و گروه را محاسبه کنید

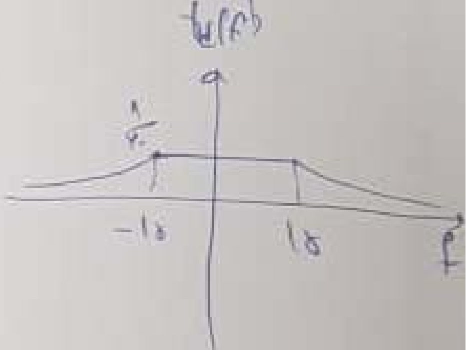
$$H(f)=\begin{cases}4\,\Pi\left(\frac{f}{40}\right)e^{-j\frac{\pi}{20}f} & |f|<15\\ 4\,\Pi\left(\frac{f}{40}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}} & |f|>15\end{cases}$$

$$\angle H(f)=\begin{cases}-\frac{\pi}{20}f & |f|<15\\ -\frac{\pi}{2} & |f|>15\end{cases}$$

$$t_g(f)=-\frac{1}{2\pi}\frac{d\angle H(f)}{df}=\begin{cases}\frac{1}{40} & |f|<15\\ 0 & |f|>15\end{cases}$$



$$t_d(f)=-\frac{\angle H(f)}{2\pi f}=\begin{cases}\frac{1}{40} & |f|<15\\ \frac{1}{4f} & |f|>15\end{cases}$$



$$t_g(f)=t_d(f)\quad \text{for}\quad |f|<15$$

مثال: سیگنال زیر به سیستمی با تابع تبدیل $H(\omega)=5e^{-j5\omega}$ اعمال شده است. خروجی را بیابید

$$x(t)=10\cos\frac{\pi}{2}(t-2)+10\cos\frac{\pi}{4}(t-2)$$

$$H(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2}}=5e^{-j\frac{5\pi}{2}}=5\angle-\frac{5\pi}{2}$$

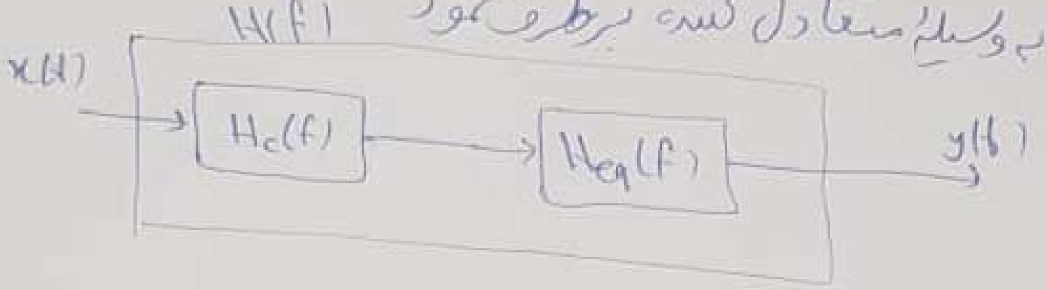
$$H(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{4}}=5e^{-j\frac{5\pi}{4}}=5\angle-\frac{5\pi}{4}$$

$$y(t)=5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(t-2)-\frac{5\pi}{2}\right)+5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)-\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=5\cdot\cos\frac{\pi}{2}(t-5)+5\cdot\cos\frac{\pi}{4}(t-5)$$

متعادل سازی

اعوجاج خطی را می توان به وسیله متعادل کننده برطرف نمود



$$H_c(f) \neq k e^{-j2\pi f t_c}$$

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_d} \longrightarrow H_c(f) H_{eq}(f) = k e^{-j2\pi f t_d}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}$$

مثال: کانال با پاسخ فرکانسی $H(f) = \frac{1}{1+f^2}$ داده شده است. اعوجاج کانال چیست؟

متعادل کننده چگونه خواهد بود؟

$$H(f) = \frac{1}{1+f^2} \neq k$$

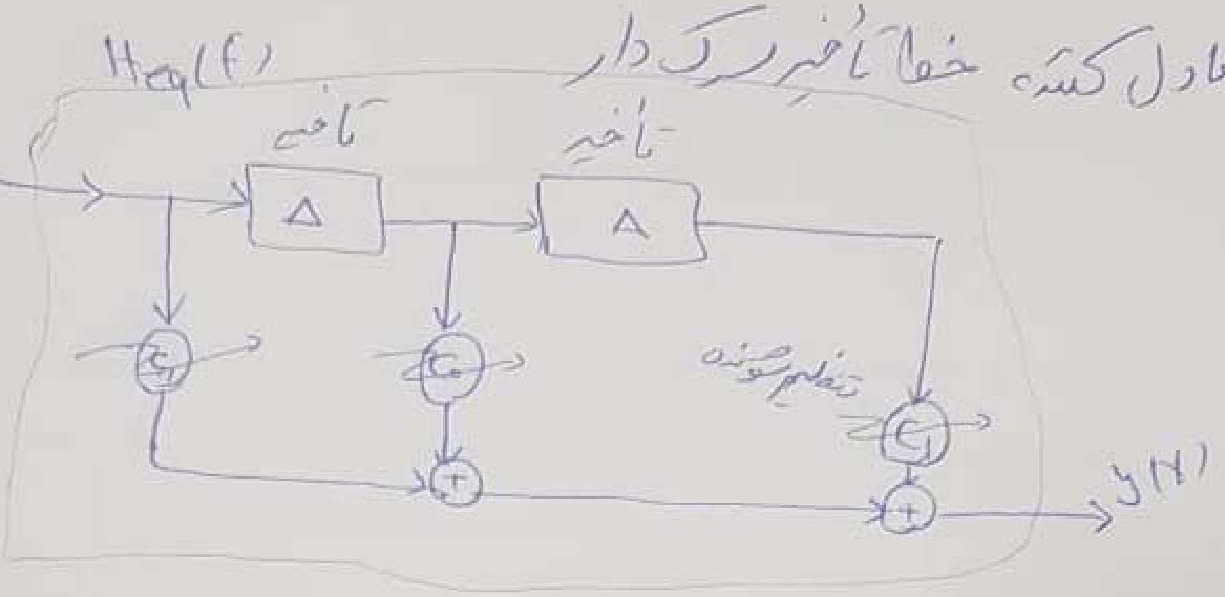
اعوجاج دامنه خطی

$$\angle H(f) = 0$$

$$H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{H(f)} = k e^{-j2\pi f t_d} + k f^2 e^{-j2\pi f t_d}$$

$$h_{eq}(t) = k\delta(t-t_d) - \frac{k}{4\pi^2} \frac{d^2\delta(t-t_d)}{dt^2}$$

متعادل کننده خط تأخیر زنگ دار



$$y(t) = C_{-1}x(t) + C_0 x(t-\Delta) + C_1 x(t-2\Delta)$$

$$Y(f) = C_{-1}X(f) + C_0 e^{-j\omega\Delta}X(f) + C_1 e^{-j2\omega\Delta}X(f)$$

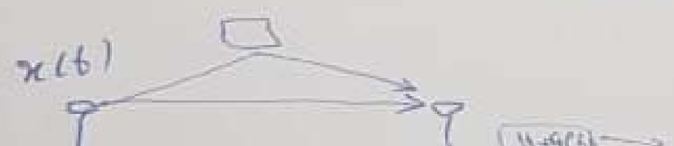
$$H_{eq}(f) = C_{-1} + C_0 e^{-j\omega\Delta} + C_1 e^{-j2\omega\Delta}$$

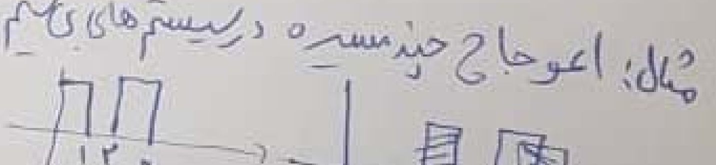
$$= e^{-j\omega\Delta}\left\{C_{-1}e^{j\omega\Delta} + C_0 + C_1 e^{-j\omega\Delta}\right\}$$

در حالت کلی با $2M$ خط تأخیر

$$H_{eq}(f) = e^{-jM\omega\Delta}\left\{\sum_{m=-M}^{M} C_m e^{-jm\omega\Delta}\right\}$$

مثال: اعوجاج چندمسیره در سیستم‌های بی‌سیم





$$y(t) = k_1 x(t-t_1) + k_2 x(t-t_2)$$

$$H_c(f) = k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} = k_1 e^{-j\omega t_1}\left[1 + k e^{-j\omega t_0}\right]$$ تداخل بین سمبلی ISI

$t_0 = t_2 - t_1 \qquad k = \frac{k_2}{k_1}$

$$H_{eq}(f) = \frac{k' e^{-j\omega t_d}}{H_c(f)} = \frac{1}{1 + k e^{-j\omega t_0}} = 1 - k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j2\omega t_0} + \cdots$$

$$k \ll 1 \rightarrow H_{eq}(f) = e^{-j\omega t_0}\left\{e^{j\omega t_0} - k + k^2 e^{-j\omega t_0}\right\}$$

مثال: یک کانال انتقال با $H_c(f)=(1+2\alpha\cos\omega T)e^{-j\omega T}$ داده شده است

$\alpha=\frac{1}{2}$, $x(t)=\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ و برای ورودی

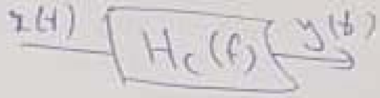
خروجی چیست. $\alpha=0.4$ برای

متعادل کننده خطا تأخیری را بیابید برای

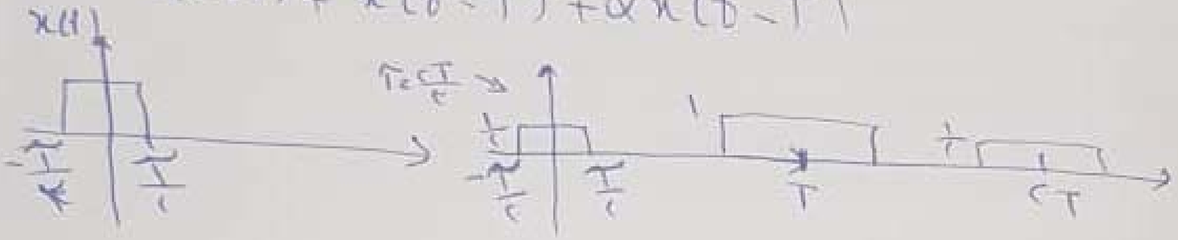
و $\frac{3T}{2}$ ، $\frac{3T}{2}=T$ خروجی را رسم کنید

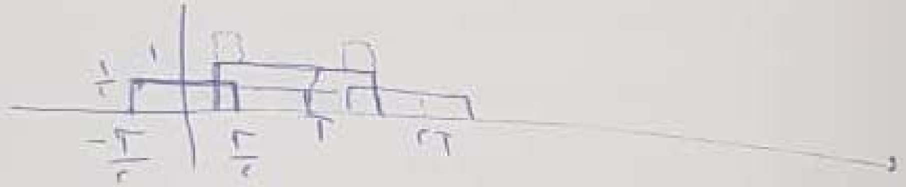
$$H_c(f)=\left\{1+\alpha e^{j\omega T}+\alpha e^{-j\omega T}\right\}e^{-j\omega T}$$

$$=\underset{\delta(t)}{\alpha}+\underset{\delta(t-T)}{e^{-j\omega T}}+\underset{\delta(t-2T)}{\alpha e^{-j\omega 2T}}$$



$$y(t)=\alpha x(t)+x(t-T)+\alpha x(t-T)$$





$$H_{eq}(f)=\frac{k e^{-j\omega(t_d-T)}}{1+0.8\cos\omega T}$$

$$\frac{1}{1+0.8\cos\omega T}=1-0.8\cos\omega T+0.64\cos^2\omega T-0.512\cos^3\omega T$$

$$\cos\omega T=\frac{1}{2}e^{j\omega T}+\frac{1}{2}e^{-j\omega T}$$

$$\cos^2\omega T=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega T}+\frac{1}{4}e^{j2\omega T}$$

$$\cos^3\omega T=\frac{3}{4}\cos\omega T+\frac{1}{4}\cos 3\omega T=\frac{3}{8}e^{j\omega T}+\frac{3}{8}e^{-j\omega T}+\frac{1}{8}e^{j3\omega T}+\frac{1}{8}e^{-j3\omega T}$$

$K=1$ $t_d=3T$

$$H_{eq}(f)=\left\{-0.064e^{j3\omega T}+0.16e^{j2\omega T}-0.59e^{j\omega T}+1.32-0.59e^{-j\omega T}+0.16e^{-j2\omega T}-0.064e^{-j3\omega T}\right\}\times e^{-j3\omega T}$$

$\Delta=T$, $M=3$ $C_{-3}=C_3=-0.064$ $C_2=C_{-2}=0.16$ $C_1=C_{-1}=-0.59$

$C_0=1.32$

اعوجاج غیرخطی

عناصر سیستم غیرخطی

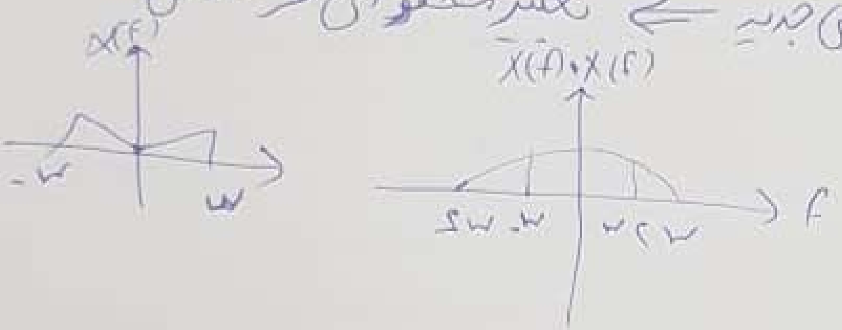
کار سیستم در منطقه غیرخطی

$y = T(x) \Rightarrow y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \text{—}$

$Y(f) = a_0 \delta(f) + a_1 \underbrace{X(f)}_{W} + a_2 \underbrace{X(f) * X(f)}_{2W} + \text{—}$

$a_0 \longrightarrow 0$

ایجاد مولفه های فرکانسی جدید $\Leftarrow$ تغییر محتوای فرکانسی



$x(t) = \cos w.t$

$y(t) = a_0 + a_1 \cos w.t + a_2 \cos^2 w.t + a_3 \cos^3 w.t + \text{—}$

$= a_0 + a_1 \cos w t + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \cos 2w t + \frac{3a_3}{4} \cos w.t + \frac{a_3}{4} \cos 3w.t + \text{—}$

$\text{اعوجاج هارمونیک } n = \frac{|\text{ضریب هارمونیک } n|}{|\text{ضریب هارمونیک ورودی}|} \times 100$

مثال: اعوجاج هارمونیک دوم و سوم برای سیستم $y(t) = ۲x(t) - ۳x^{۳}(t)$ و

$x(t) = A\cos\omega_0 t$ بدست آورید برای $A = ۱, ۲$

$$y(t) = ۲A\cos\omega t - ۳A^{۳}\cos^{۳}\omega t \Rightarrow \frac{۹A^{۳}}{۴}\cos\omega_0 t + \frac{۳A^{۳}}{۴}\cos ۳\omega_0 t$$

$$= \left(۲A - \frac{۹A^{۳}}{۴}\right)\cos\omega t - \frac{۳A^{۳}}{۴}\cos ۳\omega_0 t$$

اعوجاج هارمونیک دوم $= 0$

$$\text{اعوجاج هارمونیک سوم} = \frac{\left|\frac{۳A^{۳}}{۴}\right|}{\left|۲A - \frac{۹A^{۳}}{۴}\right|} \times ۱۰۰ = \begin{cases} ۳۰۰\,\% & A = ۱ \\ ۴۲\,\% & A = ۲ \end{cases}$$

توان و تلفات انتقال

تقویت

$$1 \leq g = \frac{P_o}{P_i} \rightarrow P_o = gP_i$$

بهره توان

$$g_{dB} = 10\log_{10} g \Rightarrow g = 10^{\frac{g_{dB}}{10}}$$

$0\,dB \rightarrow 1$
$10\,dB \rightarrow 10$

$$P(\text{watt}) \Rightarrow P_{dBW} = 10\log_{10}(P(\text{watt}))$$

$0\,dBW \rightarrow 1\,\text{watt}$
$10\,dBW \rightarrow 10\,\text{watt}$

$$P(\text{mwatt}) \Rightarrow P_{dBm} = 10\log_{10}(P(\text{mwatt}))$$

$0\,dBm \rightarrow 1\,\text{mwatts}$
$10\,dBm \rightarrow 10\,\text{mwatt}$

$$\Rightarrow P_o(dB) = P_i(dB) + g_{dB}$$

$$P_o(dBm) = P_i(dBm) + g_{dB}$$

$$\Rightarrow P(dBm) = P(dBW) + ۳0\,dB$$

تضعیف

$$1 \le L = \frac{1}{g} = \frac{P_i}{P_o}$$

$$\begin{cases} P_o = \dfrac{P_i}{L} \\ P_o(dB) = P_i(dB) - L(dB) \end{cases}$$

$$P_o(dB) = P_i(dB) - \sum L_i(dB) + \sum g_i(dB)$$

$$P_o = P_i \frac{\prod g_i}{\prod L_i}$$

خطوط کابلی و فیبر: $L(x) = \alpha x$

انتقال رادیویی: $L(x) = \left(\dfrac{۴\pi f x}{c}\right)^۲$ ، $c = ۳\times۱۰^۸ \frac{m}{s}$

$$g_A = \frac{۴\pi A_e f^۲}{c^۲}$$

مثال: سیستمی با طول مسیر ۴۰۰ کیلومتر از m قطعه کابل با $\alpha = ۰/۴ \frac{dB}{km}$ و m تقویت کننده با $g \le ۳۰dB$ تشکیل شده است. m و بهره تقویت کننده ها را با $P_o = ۵۰mW$, $P_i = ۲W$ تعیین کنید.

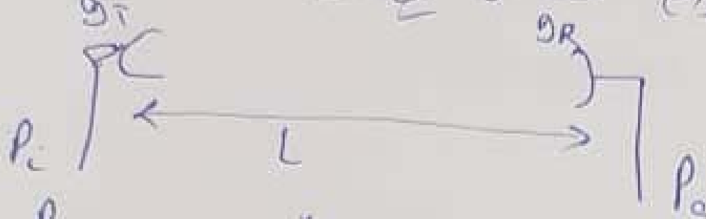
$$L = ۴۰۰ \times ۰/۴ = ۱۶۰ \, dB$$

$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{۵۰ \times ۱۰^{-۳}}{۲} = -۱۶dB \Rightarrow P_o - P_i = \sum g_i - \sum L_i \ge -۱۶dB$$

$$m \times ۳۰ - ۱۶۰ \ge -۱۶ \Rightarrow m \ge ۴/۸ \Rightarrow m = ۵$$

$$g = \frac{۱۶۰ - ۱۶}{۵} = ۲۸/۸ \, dB$$

مثال: برای سیستم رادیویی مقابل بافرض $P_i = 5W$ و $x = 40\,km$ و $f = 2\,GHz$
شعاع آنتن‌های بشقابی فرستنده و گیرنده را چگونه انتخاب کنید که $P_o = 2\mu W = 2\times10^{-6}$



$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{2\times10^{-6}}{5} = \frac{g_T g_R}{L} = \frac{g^2}{L} \Rightarrow$$

$$L = \left(\frac{4\pi \times 2\times10^{9} \times 4\times10^{4}}{2\times10^{8}}\right)^2 = 134\,dB = 25264\times10^{10}$$

$$g^2 = \frac{2\times10^{-6}}{5} \times 25264\times10^{10} \Rightarrow g = 21\times10^{5}$$

$$\frac{4\pi \times \pi r^2 \times (2\times10^{9})^2}{(2\times10^{8})^2} = 21\times10^{5}$$

$$r^2 = \frac{21\times10^{+2}}{4\pi^2} \rightarrow r = 88\,cm$$

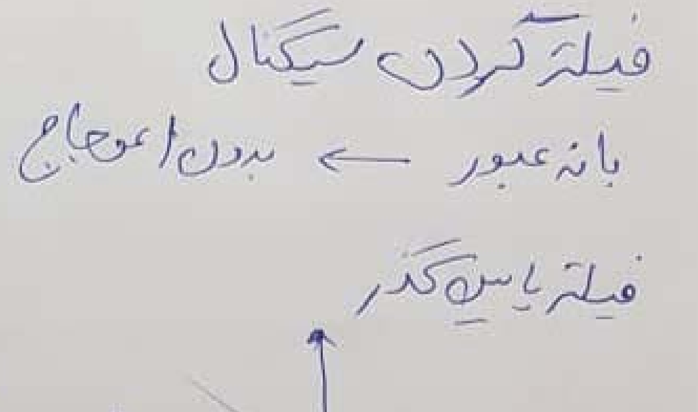
فیلتر کردن سیگنال

باند عبور ⟵ بدون اعوجاج

فیلتر پایین‌گذر

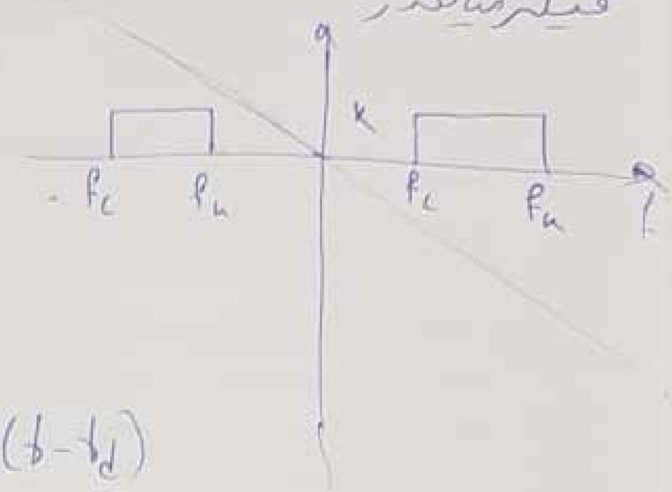
$$H(f) = \begin{cases} k e^{-j2\pi f t_d} & |f| < B \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$h(t) = 2Bk \,\mathrm{sinc}\, 2B(t - t_d)$$



فیلتر میانگذر

$$H(f)=\begin{cases} k\,e^{-j2\pi f t_d} & f_l<|f|\le f_u \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

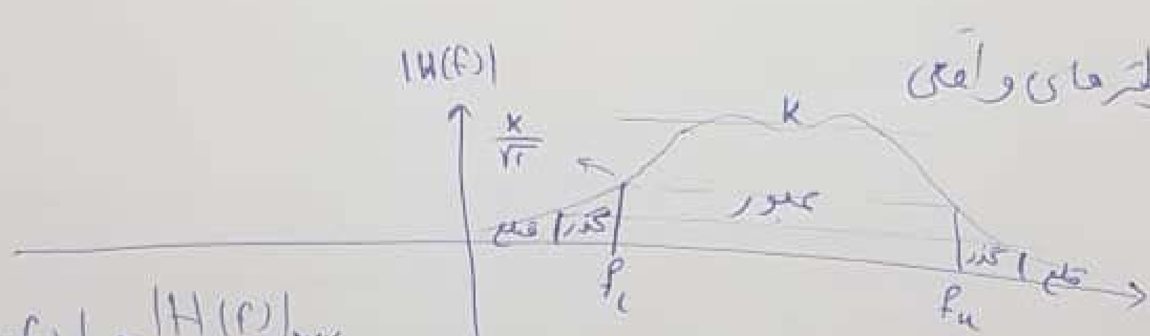


$$h(t)=2Bk\,\mathrm{sinc}\,B(t-t_d)\cos\omega_c(t-t_d)$$

$$\omega_c=\frac{2\pi(f_l+f_u)}{2}=\pi(f_l+f_u)$$

فیلترهای ایده‌آل غیرقابل ساخت ← تعداد بی‌نهایت عنصر ذخیره کننده انرژی
← پاسخ ضربه غیرعلی

فیلترهای واقعی



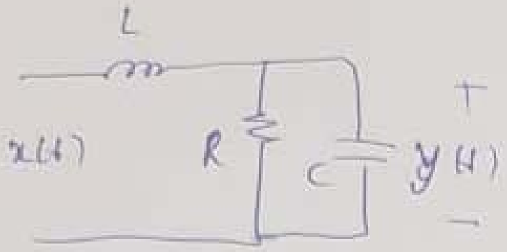
$$|H(f)|=\frac{|H(f)|_{max}}{\sqrt{2}} \rightarrow 3dB$$

فیلتر باترورث مرتبه n

$$H(f)=\frac{1}{P_n\left(j\frac{f}{B}\right)}$$ پهنای باند 3dB

n	P_n
1	$1+p$
2	$1+\sqrt{2}\,p+p^2$

مثال:



$$H(f)=\frac{Z_{RC}}{Z_{RC}+Z_L}=\frac{1}{1+j\frac{\omega L}{R}-\omega^2 LC}$$

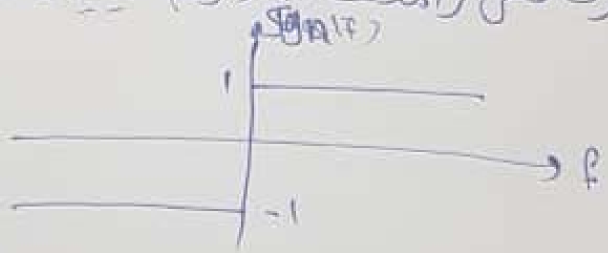
$$B=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow H(f)=\frac{1}{1+j\sqrt{2}\,\frac{f}{B}-\left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

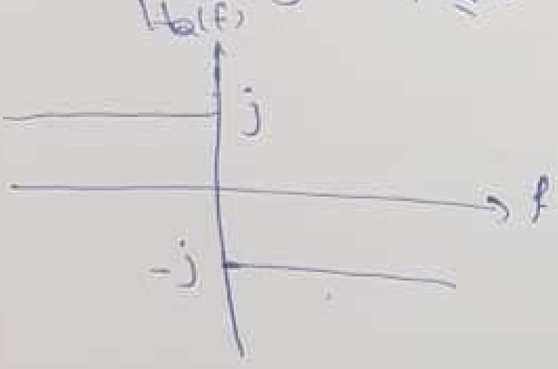
$$\frac{2\pi L}{R}=\frac{\sqrt{2}}{B} \rightarrow R=\sqrt{\frac{L}{2C}}$$

فیلترهای ربعی و تبدیل هیلبرت

فیلترهای گذری که فاز مولفه های مثبت فرکانس را ۹۰- درجه و فاز مولفه های منفی فرکانس را مثبت ۹۰ درجه تغییر دهد

$$H_Q(f)=\begin{cases}-j & f>0\\ +j & f\leq 0\end{cases}$$



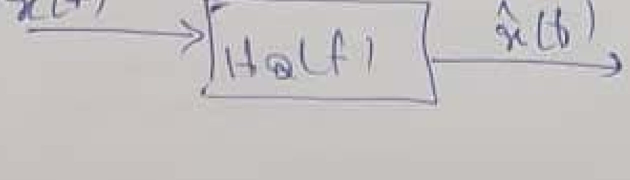


$$\Downarrow$$

$$H_Q(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}$$

تبدیل هیلبرت

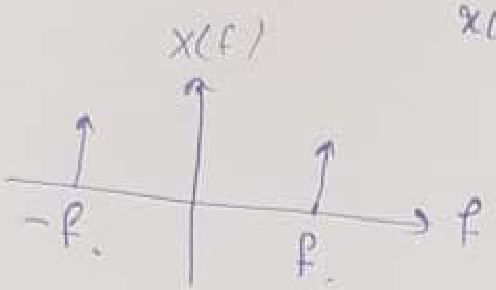


$$\hat{x}(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\lambda)}{\pi(t-\lambda)}\,d\lambda$$

$$\hat{X}(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)$$

مثال: تبدیل هیلبرت

$x(t)=A\cos\omega_0 t$



$X(f)=\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$

$\hat{X}(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)X(f)=-\frac{Aj}{2}\delta(f-f_0)+\frac{Aj}{2}\delta(f+f_0)$

$=A\left\{\frac{\delta(f-f_0)}{2j}-\frac{\delta(f+f_0)}{2j}\right\}$

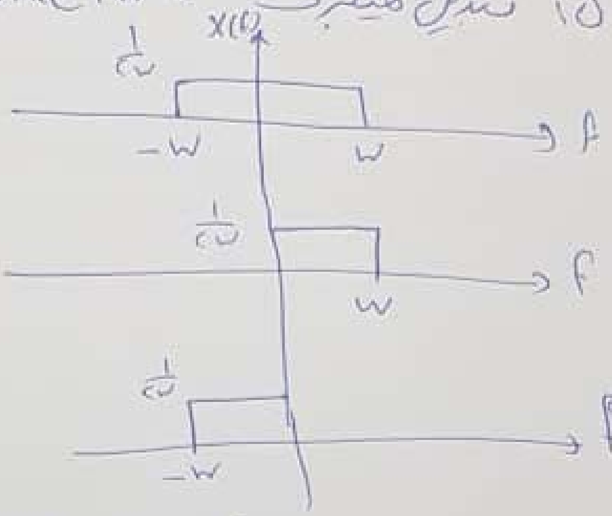
$\hat{x}(t)=A\sin\omega_0 t$

مثال: تبدیل هیلبرت $x(t)=\mathrm{sinc}\,2Wt$

$X(f)=\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$

$\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f-\frac{W}{2}}{W}\right)$

$\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f+\frac{W}{2}}{W}\right)$



$\hat{X}(f)=-\frac{j}{2W}\Pi\left(\frac{f-\frac{W}{2}}{W}\right)+\frac{j}{2W}\Pi\left(\frac{f+\frac{W}{2}}{W}\right)$

$\hat{x}(t)=\frac{j}{2}\,\mathrm{sinc}\,Wt\left\{e^{j\pi Wt}-e^{j\pi Wt}\right\}$

$=\mathrm{sinc}\,Wt\times\sin\pi Wt=\pi Wt\,\mathrm{sinc}^2 Wt$

همبستگی و چگالی طیفی

سیگنال های توان

برای سیگنال $x(t)$ میانگین زمانی را به صورت زیر تعریف کردیم

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

و توان متوسط سیگنال

$$P_x = \langle |x(t)|^2\rangle = \langle x(t)\,x^*(t)\rangle$$

که دارای خواص زیر است

۱- $\langle x(t)^*\rangle = \langle x(t)\rangle^*$

۲- $\langle x(t)\rangle = \langle x(t-t_d)\rangle$

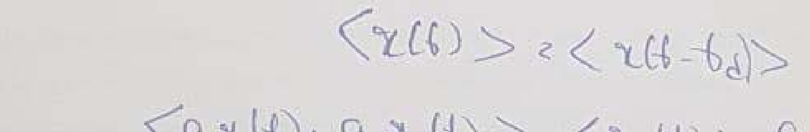
۳- $\langle a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\rangle = a_1\langle x_1(t)\rangle + a_2\langle x_2(t)\rangle$

۴- برای دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$

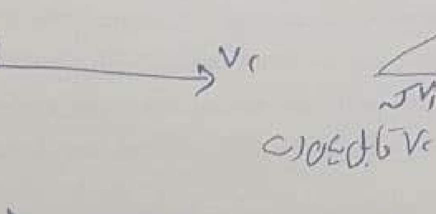
$$|\langle x(t)\,y^*(t)\rangle|^2 \le P_xP_y = \langle|x(t)|^2\rangle\langle|y(t)|^2\rangle$$

$\hookrightarrow y(t) = a\,x(t)$

$\langle x(t)\,y^*(t)\rangle$ را ضرب اسکالر گویند ← معیاری از شباهت



بخشی از v_1 که توسط v_2 قابل بیان است



$[\,\text{—}\ x(t_1)\ x(t_1+\tau)\ \text{—}\,]$

$[\,\text{—}\ y(t_1)\ y(t_1+\tau)\ \text{—}\,]$

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)$

همبستگی متقابل

برای دو سیگنال توان $x(t)$ و $y(t)$ همبستگی متقابل به صورت زیر است

$$R_{xy}(\tau) = \langle \underbrace{x(t)}_{a}\, y^*(\underbrace{t-\tau}_{b}) \rangle = \langle \underbrace{x(t+\tau)}_{a}\, y^*(\underbrace{t}_{b}) \rangle$$

$a-b$ $\qquad$ $a-b$

تاخیر

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$R_{xy}(\tau_0) = 0$ ← ناهمبسته در τ_0

$R_{xy}(\tau) = 0$ ← ناهمبسته

خواص

۱- $|R_{xy}(\tau)|^2 \le P_x P_y$

۲- $R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$

خود همبستگی

برای یک سیگنال $x(t)$ تابع خود همبستگی به صورت زیر است

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x^*(t-\tau) \rangle = \langle x(t+\tau)\, x^*(t-\tau) \rangle$$

خواص

۱- $R_x(0) = \langle x(t)x^*(t) \rangle = \langle |x(t)|^2 \rangle = P_x$

$|R_x(\tau)| \le P_x = R_x(0)$

۲- $R_x(-\tau) = R^*_x(\tau)$

تقارن هرمیتی

۳-

مثال: تابع خود همبستگی

$$z(t) = x(t) \pm y(t)$$

$$R_z(\tau) = \langle z(t)z^*(t-\tau) \rangle = \langle (x(t)\pm y(t))(x^*(t-\tau) \pm y^*(t-\tau)) \rangle$$

$$= \langle x(t)x^*(t-\tau) + y(t)y^*(t-\tau) \pm y(t)x^*(t-\tau) \pm x(t)y^*(t-\tau) \rangle$$

$$= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm R_{yx}(\tau) \pm R_{xy}(\tau)$$

$$\overset{\text{ناهمبسته}}{=} R_x(\tau) + R_y(\tau)$$

$P_z = P_x + P_y$ ← جمع آثار برای توان های متوسط

مثال: همبستگی فازورها

$$\left.\begin{array}{l} x(t)=c_1 e^{j\omega_1 t} \\ y(t)=c_2 e^{j\omega_2 t} \end{array}\right\} R_{xy}(\tau)=\langle x(t)y^*(t-\tau)\rangle=\langle c_1 e^{j\omega_1 t} c_2^* e^{-j\omega_2(t-\tau)}\rangle$$

$$=c_1 c_2^* e^{+j\omega_2\tau}\langle e^{j(\omega_1-\omega_2)t}\rangle$$

$$\langle e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega_2 t}\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(\omega_1-\omega_2)t}\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\operatorname{sinc}\frac{(\omega_1-\omega_2)T}{2\pi}=\begin{cases}0 & \omega_2\neq\omega_1\\ 1 & \omega_2=\omega_1\end{cases}$$

$$R_{xy}(\tau)=c_1 c_2^* e^{j\omega_2\tau}\langle e^{j(\omega_1-\omega_2)t}\rangle$$

$$=\begin{cases}0 & \omega_1\neq\omega_2\\ c_1 c_2^* e^{j\omega_2\tau} & \omega_1=\omega_2\end{cases}$$

فازورها ناهمبسته هستند

مگر فرکانس یکسان داشته باشند

که آن موقع تابع خودهمبستگی

$$x(t)=c\,e^{j\omega_0 t}$$

$$R_x(\tau)=|c|^2 e^{j\omega_0\tau}$$

مثال: تابع خودهمبستگی $z(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ را بیابید

$$z(t)=\underbrace{\frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}}_{x(t)}+\underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}}_{y(t)}$$

$$R_z(\tau)=R_x(\tau)+R_y(\tau)=\frac{A^2}{4}e^{j\omega_0\tau}+\frac{A^2}{4}e^{-j\omega_0\tau}$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$R_z(\tau)=\langle z(t)z^*(t-\tau)\rangle=\langle(A\cos(\omega_0 t+\varphi))(A\cos(\omega_0(t-\tau)+\varphi))\rangle$$

$$=\langle\frac{A^2}{2}\cos(2\omega_0 t-\omega_0\tau+2\varphi)+\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\rangle$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$P_z=R_z(0)=\frac{A^2}{2}$$

سیگنال های انرژی

برای این سیگنال ها متوسط زمانی صفر است اما می توان از انرژی استفاده شود

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$$

همبستگی متقابل

برای سیگنال های انرژی $x(t)$ و $y(t)$ تابع همبستگی متقابل بصورت زیر تعریف می شود

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t)\,y^*(t-\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$$

خود همبستگی

برای سیگنال انرژی $x(t)$ تابع خود همبستگی بصورت زیر محاسبه می شود

$$R_x(\tau) = \langle x(t)\,x^*(t-\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt$$

خواص

۱- $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_x E_y$

$$R_x(0) = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$$

۲- $R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,Y^*(f)\,df$

۳-

۴- ارتباط با کانولوشن

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

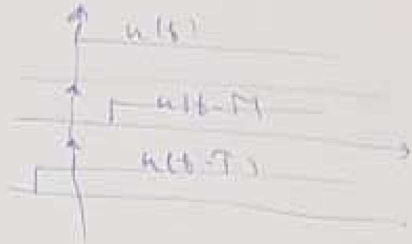
$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$\boxed{x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,y(t-\lambda)\,d\lambda}$$

مثال: خودهمبستگی $\qquad x(t)=e^{-t}u(t)$

$$R_x(\tau)=\langle x(t)\,x(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)\,e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,dt$$

$$=e^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}u(t)u(t-\tau)\,dt$$



$\tau>0$
$$=e^{\tau}\int_{\tau}^{\infty}e^{-2t}\,dt=\frac{-1}{2}e^{\tau}\,e^{-2t}\Big|_{\tau}^{\infty}=\frac{1}{2}e^{-\tau}$$

$\tau<0$
$$=e^{-\tau}\int^{\infty}e^{-2t}\,dt=\frac{-1}{2}e^{\tau}\,e^{-2t}\Big|^{\infty}=\frac{1}{2}e^{\tau}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\tau} & \tau>0\\ \frac{1}{2}e^{\tau} & \tau<0\end{cases}=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

همبستگی و سیستم‌های LTI

$$\underset{R_x(\tau)}{\xrightarrow{x(t)}}\boxed{h(t)}\underset{R_y(\tau)}{\xrightarrow{y(t)}}$$

$R_{yx}(\tau)$
$R_{xy}(\tau)$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda$$

$$R_{yx}(\tau)=\langle y(t)x^*(t-\tau)\rangle=\left\langle\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda\right)x^*(t-\tau)\right\rangle$$

$$=\left\langle\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,x^*(t-\tau)\,d\lambda\right\rangle$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\underbrace{\langle x(\underbrace{t-\lambda}_{a})\,x^*(\underbrace{t-\tau}_{b})\rangle}_{R_x(a-b)}\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

$$=h(\tau)*R_x(\tau)$$

44 $\quad R_y(\tau)=h(\tau)*h^*(-\tau)*R_x(\tau)$

چگالی طیفی

توزیع توان و انرژی را در حوزه فرکانس بیان می‌کند

خواص: برای سیگنال $x(t)$ تابع چگالی طیفی را با $G_x(f)$ نمایش می‌دهیم

۱- $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df \rightarrow P_x, \; E_x$

۲- اگر $x(t)$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی باشد

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) \Rightarrow R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_x(f)\,df \rightarrow P_y, \; E_y$$

قضیه وینر-کینشاین: تبدیل فوریه تابع خودهمبستگی همان تابع چگالی طیفی است

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{j\omega\tau} df$$

$$R_x(\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G_x(f)$$

سیگنال‌های توان متناوب

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad f_0 = \frac{1}{T}$$

$$R_x(\tau) = \sum |C_n|^2 e^{+j2\pi n f_0 \tau}$$

$$G_x(f) = \sum |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

سیگنال انرژی

$$x(t) \longrightarrow X(f)$$

$$G_x(f) = |X(f)|^2 \rightarrow R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\}$$

مثال: چگالی طیفی $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$$R_x(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau \to G_x(f)=\frac{A^2}{4}\delta(f-f_0)+\frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)$$

مثال: چگالی طیفی و خود همبستگی $x(t)=e^{-t}u(t)$

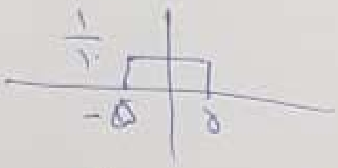
$$R_x(\tau)=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

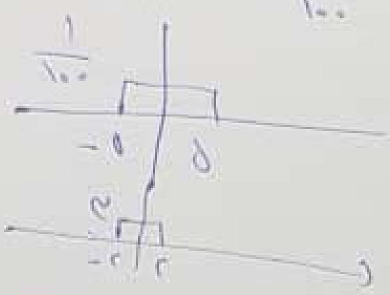
$$X(f)=\frac{1}{1+j\omega} \to |X(f)|^2=G_x(f)=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$R_x(\tau)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

مثال: سیگنال $x(t)=\mathrm{sinc}\,10t$ به ورودی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(f)=3\Pi\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j2\pi f t_0}$ اعمال شده مطلوب است چگالی طیفی ورودی و خروجی و انرژی ورودی و خروجی

$$X(f)=\frac{1}{10}\Pi\left(\frac{f}{10}\right) \to |X(f)|^2=G_x(f)=\frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$





$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}G_x(f)=\frac{1}{10}$$

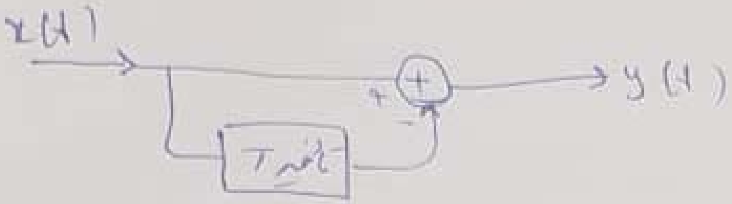
$$G_y(f)=|H(f)|^2G_x(f)=9\Pi\left(\frac{f}{4}\right)\times\frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$

$$=\frac{9}{100}\Pi\left(\frac{f}{4}\right)$$

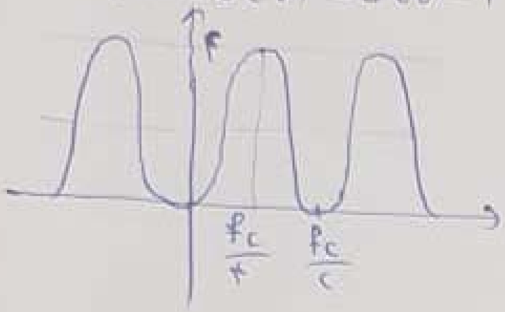
$$E_y=\int_{-\infty}^{\infty}G_y(f)\,df=\frac{9}{25}$$

$$R_y(f)=\frac{9}{25}\mathrm{sinc}\,4t$$

مثال: فیلتر شانه‌ای



$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T) \Longrightarrow H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$$



$$|H(f)|^2 = 2 - e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT}$$

$$= 4\sin^2 \pi\left(\frac{f}{f_c}\right) \qquad f_c = \frac{1}{T}$$

$$= 2 - 2\cos 2\pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = 2\delta(\tau) - \delta(t-T) - \delta(t+T)$$

$$R_y(\tau) = 2R_x(\tau) - R_x(t-T) - R_x(t+T)$$