# اصول سیستم های مخابراتی

مباحث:

۱- مقدمه: سیستم مخابراتی، پیام و سیگنال

۲- تحلیل فوریه

۳- انتقال سیگنال، فیلترینگ، اعوجاج، تلفات

۴- مدولاسیون خطی: AM و DSB و SSB

۵- مدولاسیون نمایی: PM و FM

۶- آنالیز آماری

۷- مدولاسیون در حضور نویز

ارزیابی:

۱- تمرین: ۳ نمره

۲- کوییز: سه عدد هرکدام یک نمره

۳- پروژه با متلب: ۴ عدد هرکدام ۲ نمره

۴- پایان ترم: ۶ نمره

مراجع

۱- سیستم های مخابراتی: کارلسون

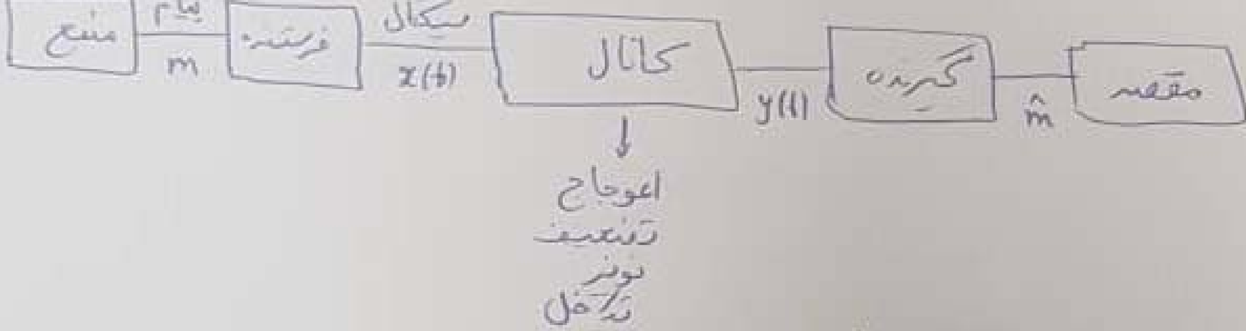
۲- مخابرات دیجیتال و آنالوگ: شان موگان

۳- مهندسی سیستم های مخابراتی: پروکیس

پیام: ← آنالوگ: پیوسته مانند ولتاژ لحظه‌ای
← دیجیتال: گسسته مانند حروف و اعداد

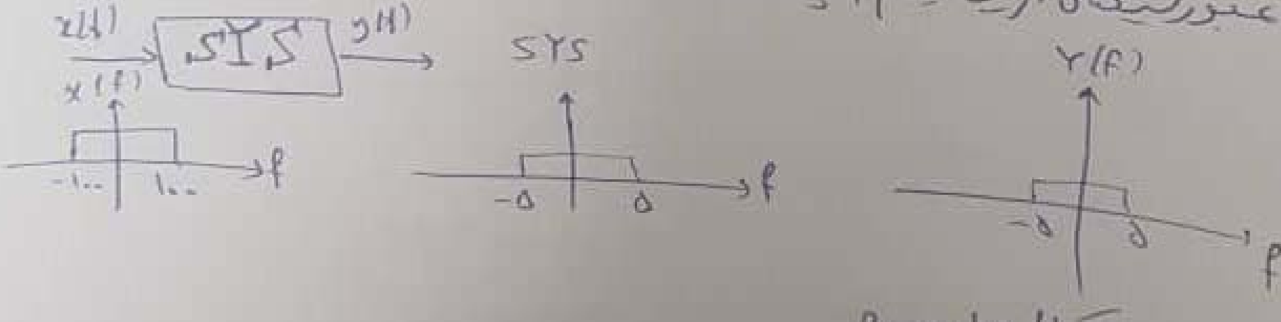
سیگنال ← تجسم الکتریکی پیام

یک سیستم مخابراتی




تبادل اطلاعات ← یک طرفه
← نیمه دوطرفه
← تمام دوطرفه

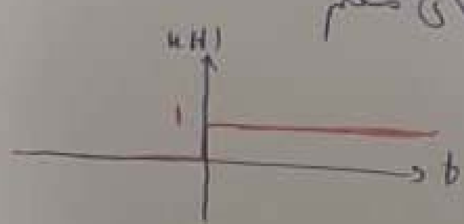
عبور سیگنال از یک سیستم: پهنای باند سیستم بیشتر از سیگنال




معرفی سیگنال‌های مهم

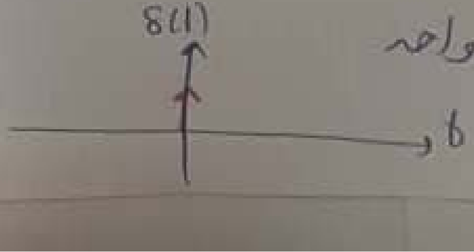
۱- تابع پله واحد

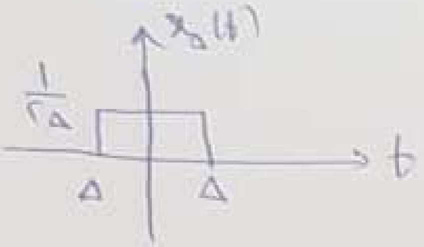
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

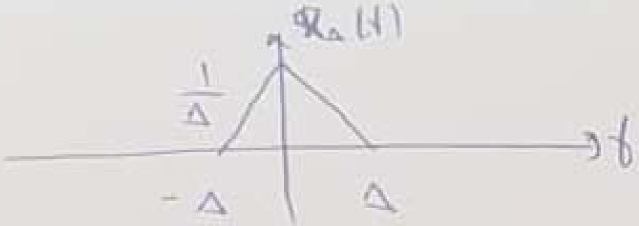



۲- تابع ضربه واحد

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{ویژه} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$






$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} x_\Delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt'$$

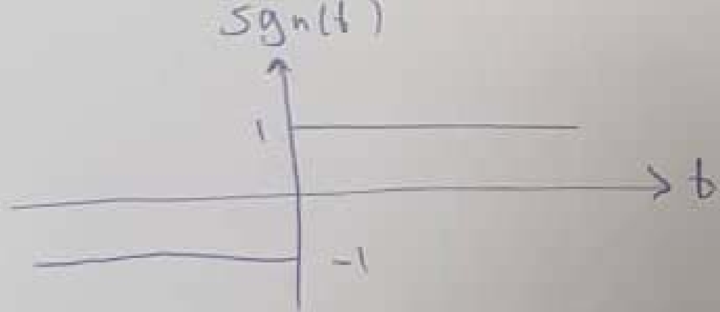
مشتق انتگرال

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(\tau)\,\delta(t-\tau) = x(t)\,\delta(t-\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

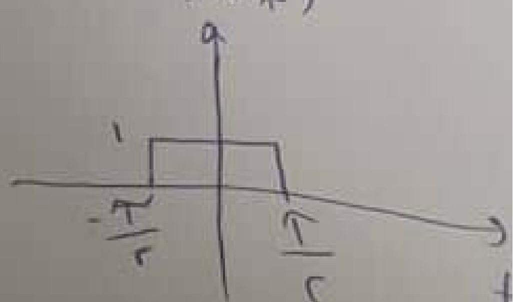
۳- تابع علامت




$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

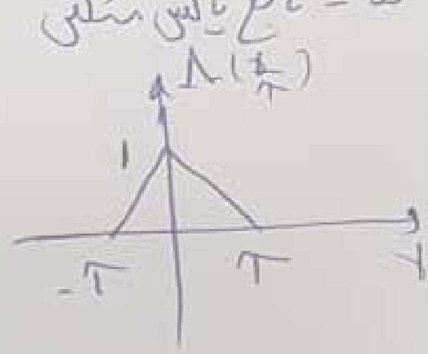
۴- تابع پالس مستطیلی

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



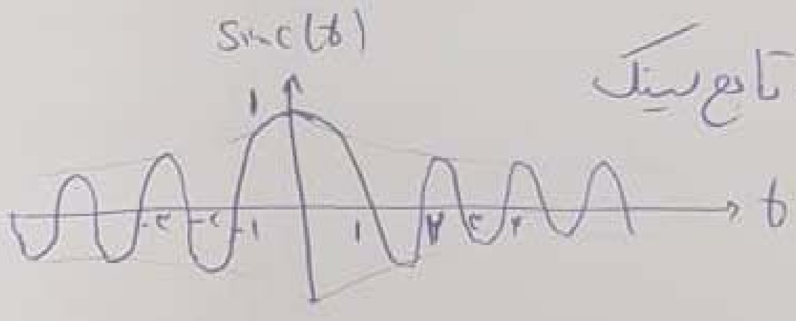
## ۵- تابع پالس مثلثی

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{\tau} & |t|<\tau \\ 0 & |t|>\tau \end{cases}$$




## ۶- تابع سینک

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$




$$\text{sinc}(t)=0 \rightarrow \sin\pi t = 0 \rightarrow \pi t = k\pi \rightarrow t=k$$

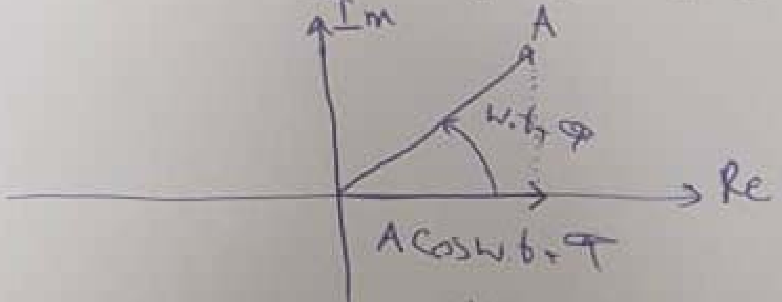
## فازور و طیف خطی

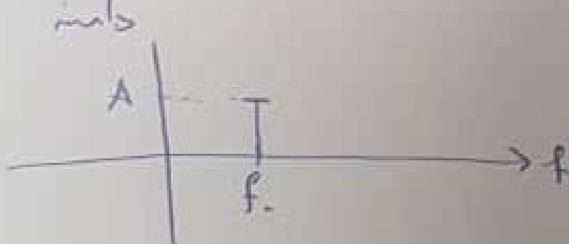
$$x(t) = \underset{\text{دامنه}}{A}\cos(\underset{\text{فرکانس}}{\omega_0} t+\underset{\text{فاز}}{\varphi}) = \text{Re}\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}\}$$

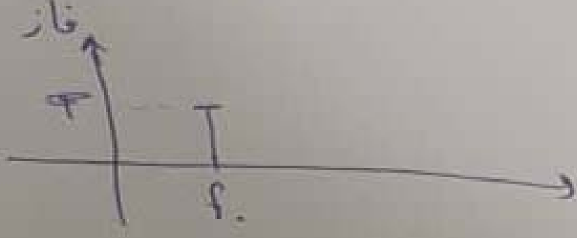
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \rightarrow \cos\theta = \text{Re}\{e^{j\theta}\}$$

نمایش یک طرفه



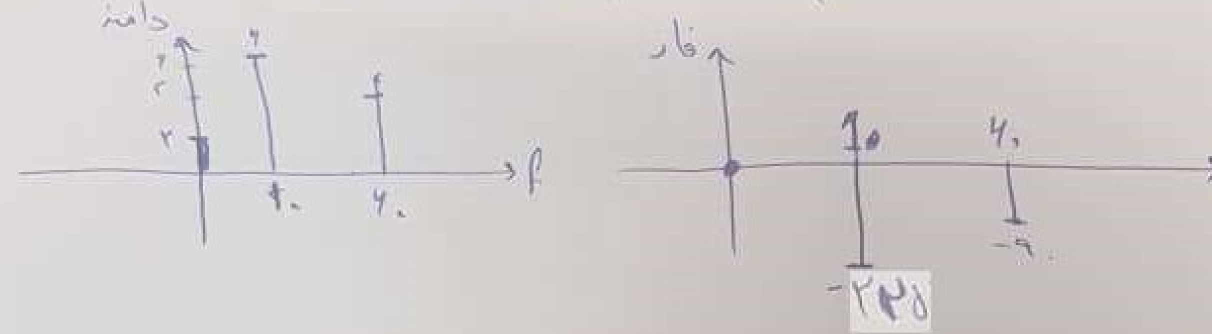




طیف یک طرفه: دامنه مثبت ← منفی بودن با تغییر فاز جبران می شود
تابع کسینوس ← سینوس با تغییر فاز تبدیل می شود

مثال: طیف یکطرفه تابع زیر را رسم نمایید

$$x(t) = 2 - 4\cos(20\pi t - 45^\circ) + 4\sin 120\pi t$$

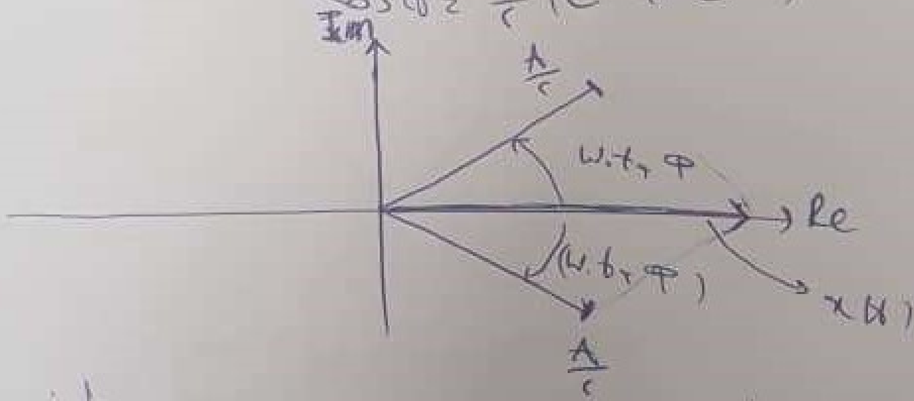
$$\hat{x}(t) = 2 + 4\cos(20\pi t - 225^\circ) + 4\cos(120\pi t - 90^\circ)$$

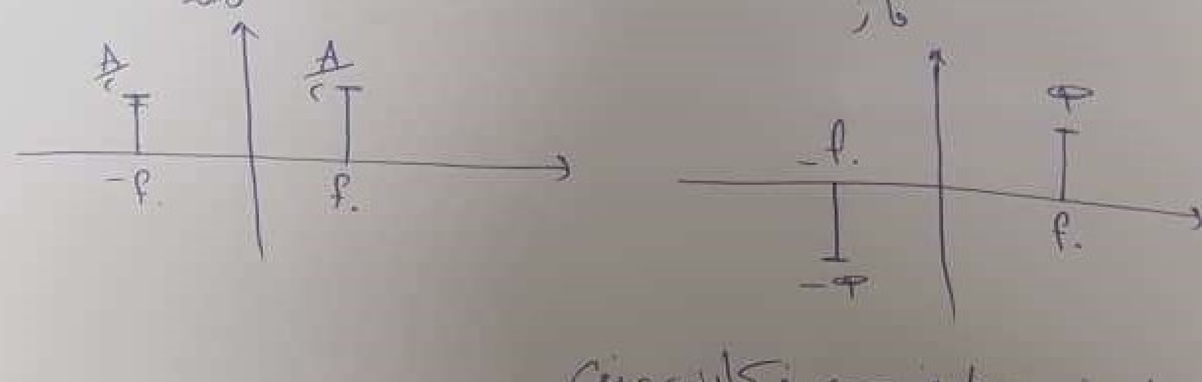



نمایش دوطرفه

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

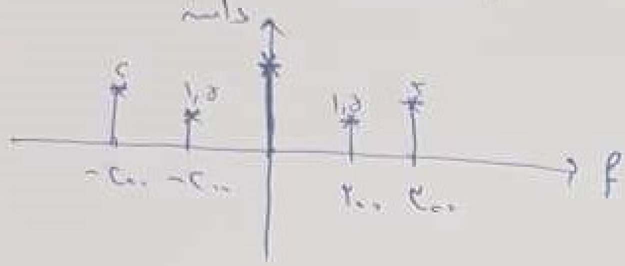


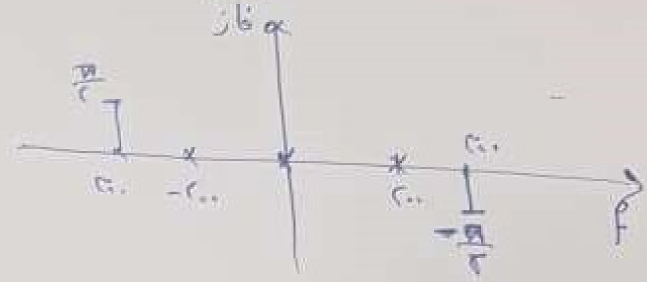




طیف دوطرفه ← فرکانس منفی

مثال: طیف دوطرفه سیگنال های زیر را نمایش دهید

$$x(t) = 4 + 3\cos 400\pi t + 4\sin 600\pi t$$
$$= 4 + 3\cos(400\pi t) + 4\cos\left(600\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$



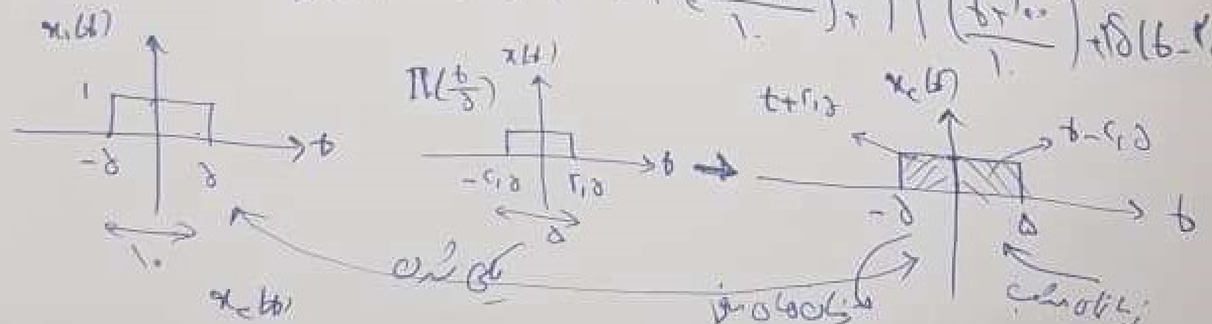



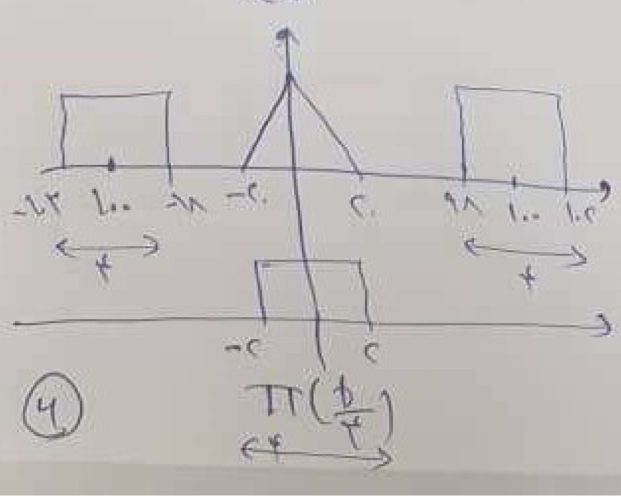

مثال: توابع زیر را رسم نمایید

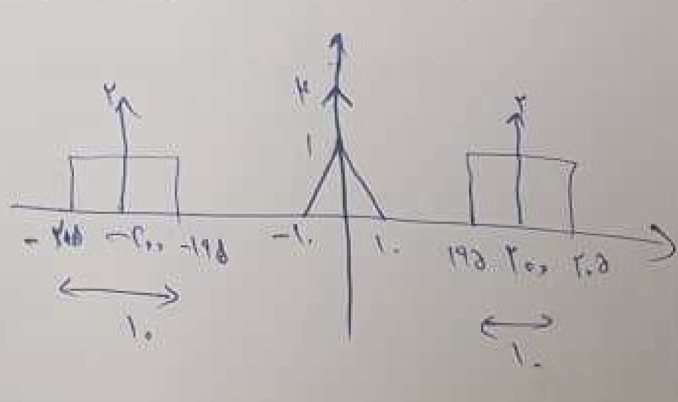
$$x_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{10}\right) \qquad x_2(t) = \Pi\left(\frac{t-2.5}{5}\right) + \Pi\left(\frac{t+2.5}{5}\right)$$

$$x_3(t) = \Pi\left(\frac{t-100}{4}\right) + \Pi\left(\frac{t+100}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{t}{20}\right)$$

$$x_4(t) = \Lambda\left(\frac{t}{10}\right) + 4\delta(t) + \Pi\left(\frac{t-200}{10}\right) + \Pi\left(\frac{t+200}{10}\right) + 2\delta(t-200) + 2\delta(t+200)$$



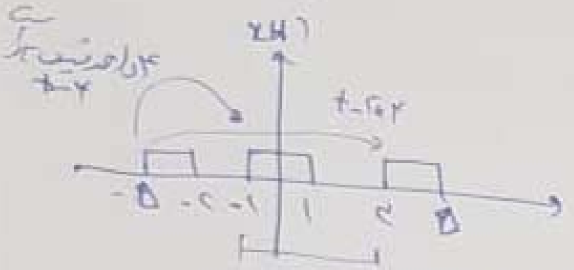
سیگنال متناوب

سیگنال $x(t)$ را متناوب گوییم هرگاه

$$x(t \pm mT_0) = x(t) \quad \forall t \in R,\ \forall m \in N$$

$$\underset{\text{دوره تناوب}}{T_0} \Rightarrow \underset{\text{فرکانس پایه}}{f_0} = \frac{1}{T_0}$$

مثال:



$$4 \longrightarrow T_0 = 4 \quad f_0 = \frac{1}{4} = 0.25$$

متوسط زمانی

متوسط زمانی یک تابع دلخواه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

مثال:

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

$$\langle x(t) \rangle = ? \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} u(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1 - e^{-\frac{T}{2}}}{T}$$

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2}}}{T} = 0$$

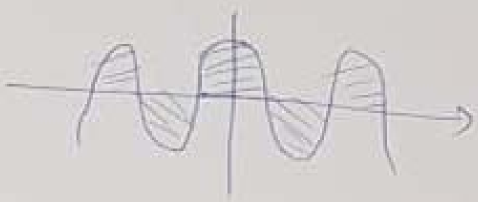
$$x(t) = e^{t} u(t) \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{t} u(t)\, dt = \frac{1 + e^{\frac{T}{2}}}{T}$$

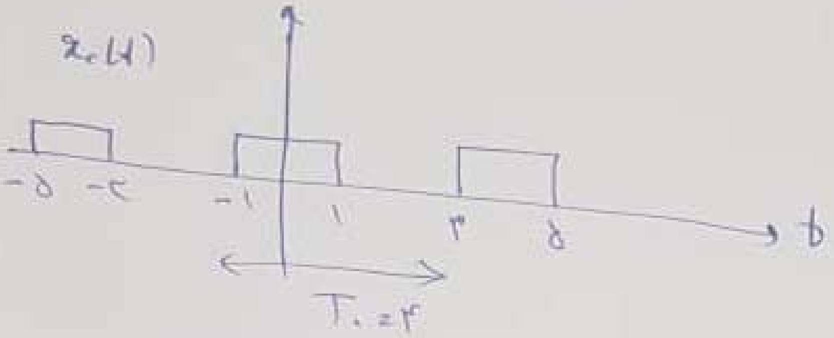
$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1 + e^{\frac{T}{2}}}{T} = \infty$$

مثال: متوسط زمانی توابع زیر را بدست آورید

$x_1(t) = \cos \omega_0 t$

$$\langle x_1(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t)\, dt = 0$$






متناوب با تناوب ۴

$$\int_{T_0} x_2(t)\, dt = 2 \longrightarrow \frac{1}{T_0} \int_{T} x_2(t)\, dt = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{2T_0} x_2(t)\, dt = 2 \times 2 = 4 \qquad \frac{1}{2T_0} \int_{2T_0} x_2(t)\, dt = \frac{\cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{kT_0} x_2(t)\, dt = k \times 2 = 2k \qquad \frac{1}{kT_0} \int_{kT_0} x_2(t)\, dt = \frac{2k}{4k} = \frac{1}{2}$$

$$\langle x_2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_2(t)\, dt = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{kT_0} x_2(t)\, dt = \frac{1}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_2(t)\, dt$$

نتیجه: برای تابع زمانی متناوب با دوره تناوب $T_0$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$

توان متوسط یک سیگنال

توان متوسط سیگنال متناوب $x(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

مثال: توان متوسط $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ چقدر است؟

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) \right) dt$$

$$= \frac{A^2}{2} + \cancel{\frac{A^2}{2T_0} \int_{T_0} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\, dt} = \frac{A^2}{2}$$

انتگرال روی مضارب صحیح دوره تناوب cos و sin برابر صفر است

سری فوریه مختلط

فرض کنید $x(t)$ متناوب با دوره تناوب $T_0$ باشد که $f_0 = \frac{1}{T_0}$ فرکانس پایه آن خواهد بود

سری فوریه نمایی $x(t)$ به صورت زیر خواهد بود

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} \, dt$$

سیگنال $x(t)$ را به حوزه فرکانس می‌برد: محتوای فرکانسی سیگنال $\{f_0, 2f_0, \ldots\}$

رابطه پارسوال:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

پخش شدن توان روی محتوای فرکانسی: $C_n$ بزرگتر یعنی آن فرکانس سهم بیشتری در سیگنال دارد

تبدیل فوریه

زوج تبدیل فوریه برای سیگنال (غیرمتناوب) $x(t)$ به صورت زیر است

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$$x(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} X(f)$$

از حوزه زمان $t$ به حوزه فرکانس $f$

محتوای فرکانسی سیگنال

خواص

۱- تبدیل فوریه یک تابع مختلط است

$$X(f) \rightarrow \begin{cases} |X(f)| & \text{دامنه} \\ \angle X(f) & \text{فاز} \end{cases} \Rightarrow X(f) = |X(f)|\, e^{j\angle X(f)}$$

۲- سطح زیر منحنی $x(t)$ برابر است با تبدیل فوریه در نقطه $f=0$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

۳- اگر $x(t)$ حقیقی باشد آنگاه $X(f)$ تقارن هرمیتی دارد

$$X^*(f) = X(-f)$$

$$\begin{cases} |X(f)| = |X(-f)| & \text{دامنه تقارن زوج} \\ \angle X(f) = -\angle X(-f) & \text{فاز تقارن فرد} \end{cases}$$

۱- اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد آنگاه $X(f)$ نیز حقیقی و زوج است

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد آنگاه $X(f)$ نیز موهومی و فرد خواهد بود

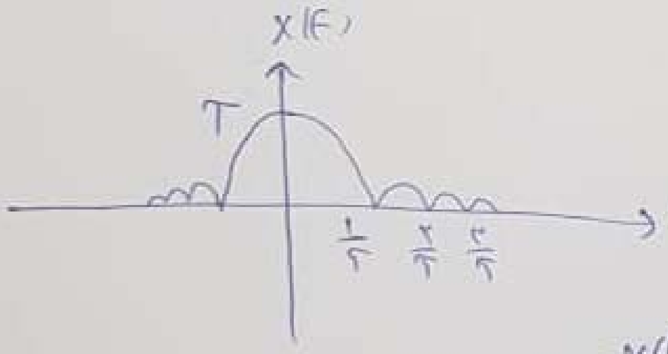
مثال: تبدیل فوریه پالس

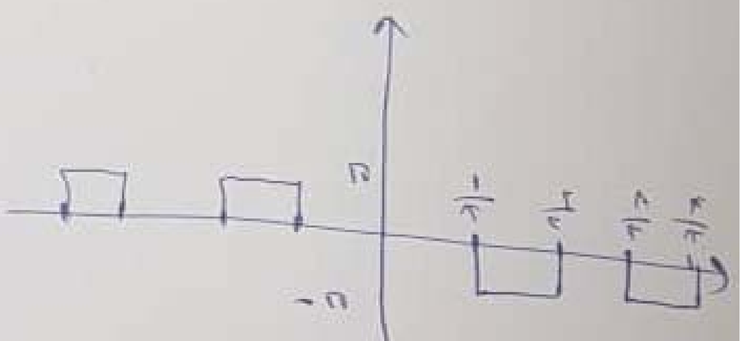
$$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{T}{2}\\ 0 & |t|>\frac{T}{2}\end{cases}$$

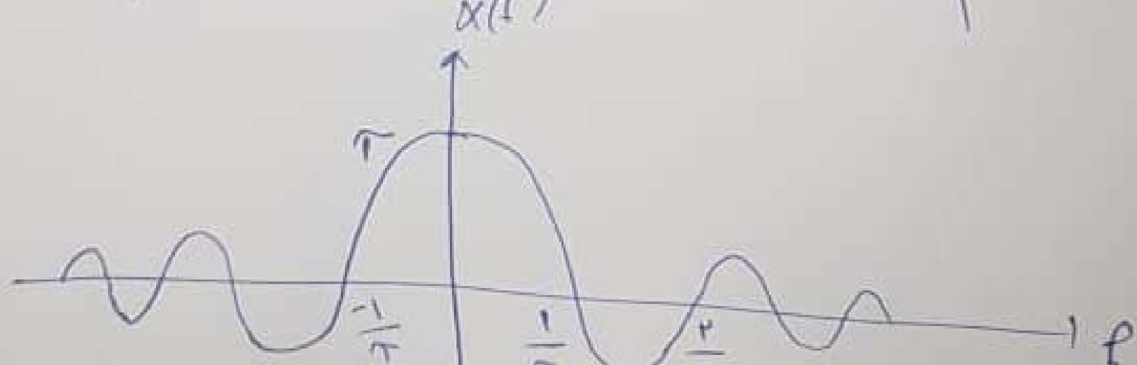
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{1}{j2\pi f}\left(e^{+j\pi fT}-e^{-j\pi fT}\right)$$

$$=\frac{\sin \pi fT}{\pi f}=T\,\mathrm{sinc}\, fT$$




۵- خطی بودن

$$x_1(t)\longrightarrow X_1(f)$$
$$x_2(t)\longrightarrow X_2(f)$$
$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\longrightarrow a_1X_1(f)+a_2X_2(f)$$

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو تابع زمانی باشند با تبدیل فوریه‌های $V(f)$ و $W(f)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, w^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)\, W^*(f)\, df$$

اگر $v(t) = w(t)$ قضیه انرژی ریلی را داریم

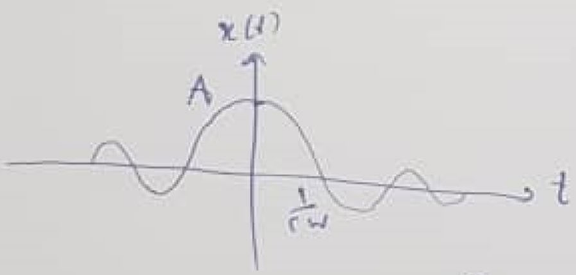
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df$$

قضیه همزادی: فرض کنید تابع $x(t)$ و تبدیل فوریه آن یعنی $X(f)$ داده شده است

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$X(t) \longrightarrow x(-f)$$

...ل: تبدیل فوریه $x(t) = A\,\text{sinc}(2Wt)$

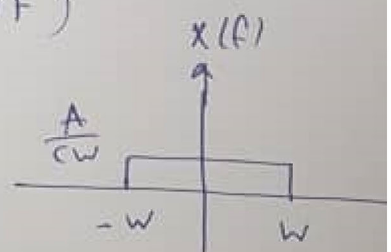



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

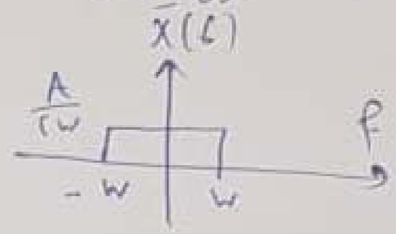
$$A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} A\tau\,\text{sinc}\, f\tau$$

$$\frac{A}{2W}\,\Pi\left(\frac{t}{2W}\right) \longrightarrow A\,\text{sinc}(2Wf)$$

$$A\,\text{sinc}\, 2Wt \longrightarrow \frac{A}{2W}\,\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$

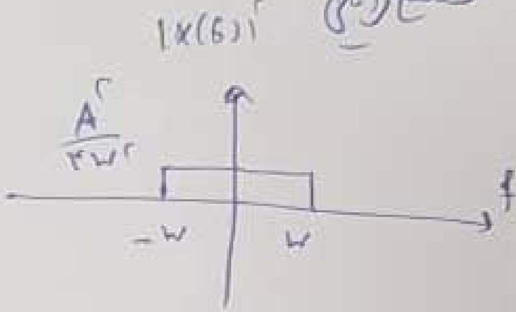


مثال: انرژی سیگنال $x(t) = A\,\text{sinc}\,2wt$ را بدست آورید




$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\,\text{sinc}^2\,2wt\;dt$$

قضیه رایلی




$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$$

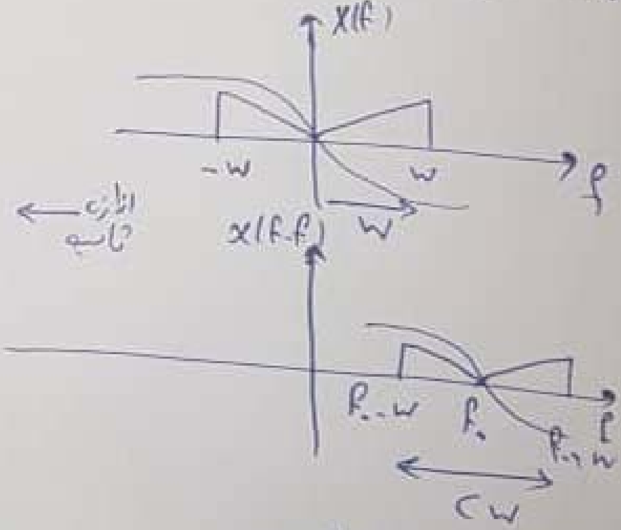
$$= 2w \times \frac{A^2}{4w^2} = \frac{A^2}{2w}$$

۸- شیفت زمان فرکانس

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

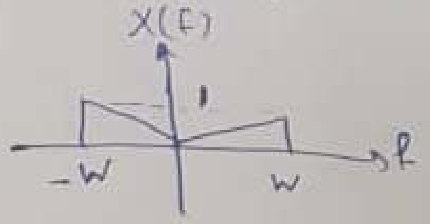
$$x(t)\,e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow X(f-f_0)$$

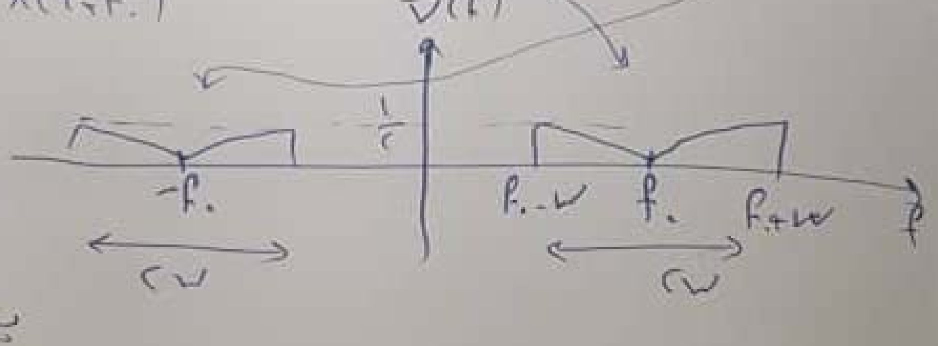



مثال: قضیه مدولاسیون

$$v(t) = x(t)\cos\omega_0 t = x(t)\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t}}_{X(f-f_0)} + \underbrace{\frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}}_{X(f+f_0)} = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$




پهنای باند دو برابر شده است

۹ـ مشتق و انتگرال

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \longrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\,\delta(f)$$

مثال:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt' \longrightarrow U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

مثال:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \Rightarrow x(t) \longrightarrow X(f)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi f\, X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j2\pi f\, X(f)$$

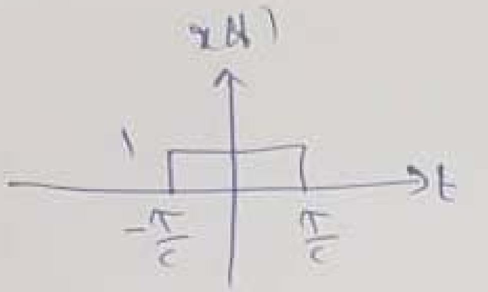
۱۰ـ کانولوشن

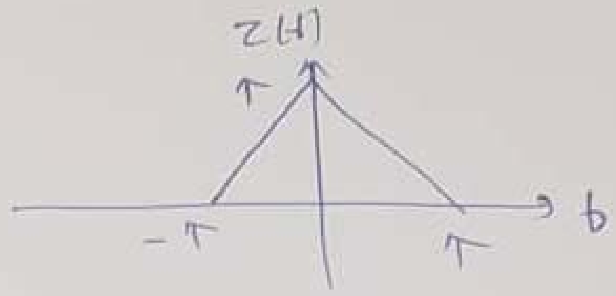
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$x(t) * y(t) \longrightarrow X(f)\, Y(f)$$

$$x(t)\, y(t) \longrightarrow X(f) * Y(f)$$

مثال:




$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau \operatorname{sinc} f\tau$$

$$z(t) = x(t) * x(t)$$

$$Z(f) = X(f)X(f) = \tau^2 \operatorname{sinc}^2 f\tau$$

مثال: قضیه مدولاسیون

$$v(t) = x(t)\cos\omega_0 t = x(t) \times \frac{1}{2}\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\}$$

$$= \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

$X(f)$ $\quad$ $\delta(f-f_0)$ $\quad$ $X(f)$ $\quad$ $\delta(f+f_0)$

$$\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \frac{1}{2}X(f) * \delta(f-f_0) = \frac{1}{2}X(f-f_0)$$

$$\frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t} \longrightarrow \frac{1}{2}X(f) * \delta(f+f_0) = \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

$$V(f) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

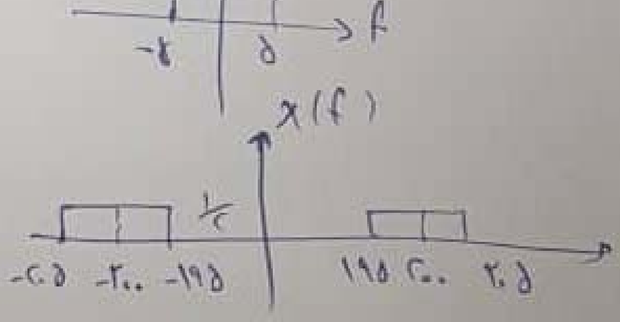
مثال:

$$x(t) = 10 \operatorname{sinc} 10t \cos 2\pi 200 t$$

$$A \operatorname{sinc} 2Wt \longrightarrow \frac{A}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$

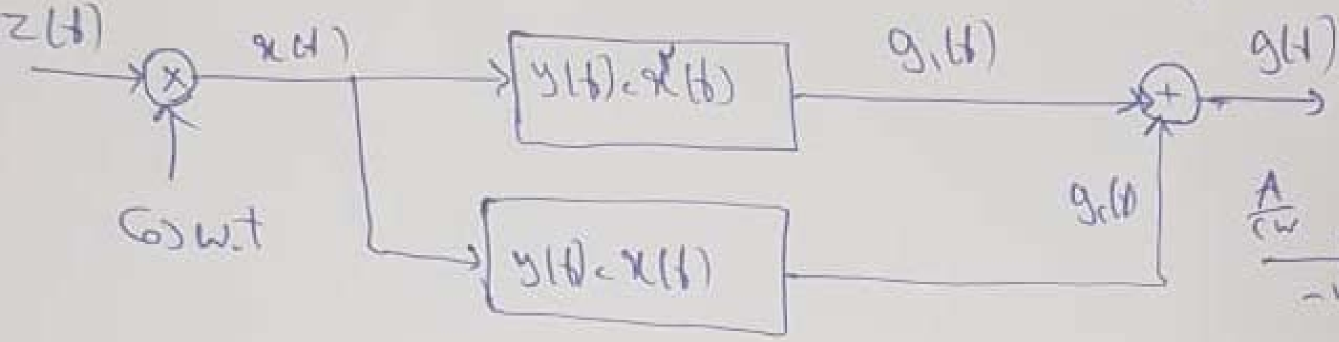
$$10 \operatorname{sinc} 10t \longrightarrow \Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$

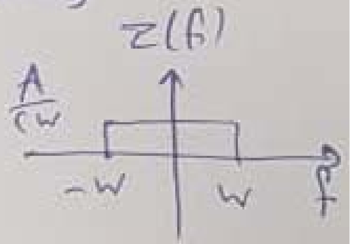

$$X(f) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-200}{10}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f+200}{10}\right)$$



مثال: سیگنال $z(t)=A\,\mathrm{sinc}\,2Wt$ به سیستم زیر اعمال شده است

طیف خروجی را رسم کنید $W_0 \gg W$



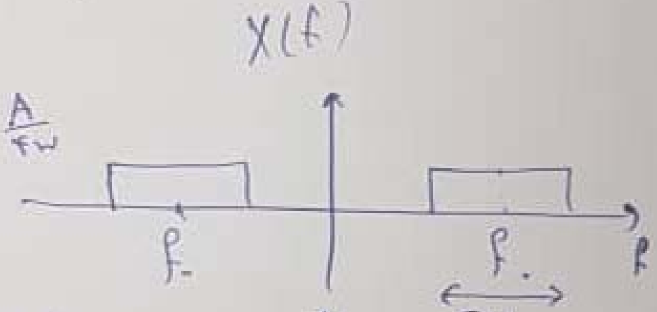

$$x(t) = z(t)\cos w_0 t$$

$$g_1(t) = x^2(t) = z^2(t)\cos^2 w_0 t = \frac{1}{2}z^2(t) + \frac{1}{2}z^2(t)\cos 2w_0 t$$

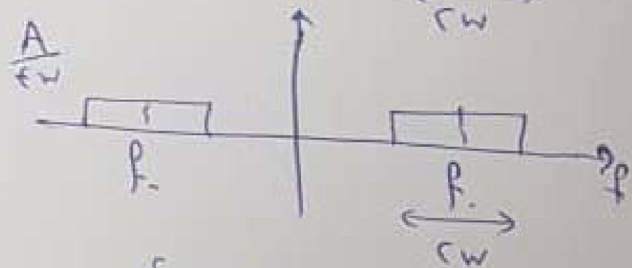
$$g_2(t) = x(t) = z(t)\cos w_0 t$$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}Z(f-f_0) + \frac{1}{2}Z(f+f_0)$$

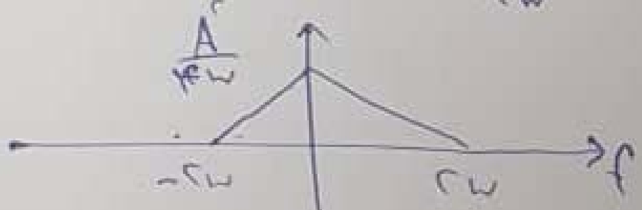



$$G_2(f) = X(f) = \frac{1}{2}Z(f-f_0) + \frac{1}{2}Z(f+f_0)$$

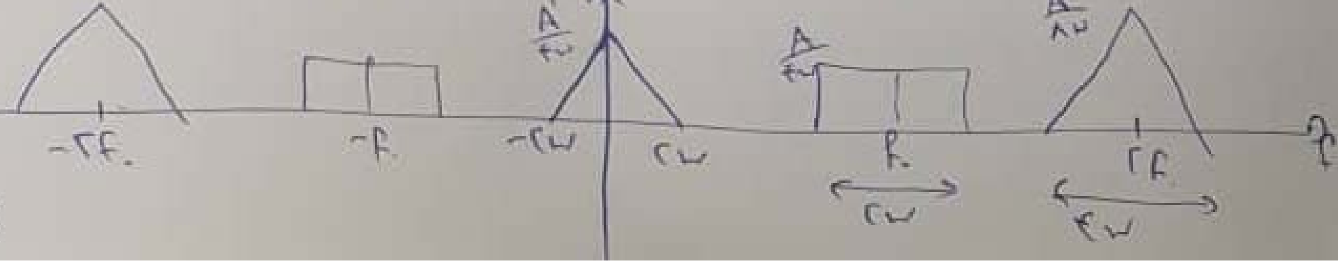



$$G_1(f) = X(f) * X(f)$$

$$\frac{1}{2}z^2(t) \longrightarrow \frac{1}{2}Z(f) * Z(f)$$




$$\frac{1}{2}z^2(t)\cos 2w_0 t$$


(14)