انتگرال مختلط :

$\int_C f(z)dz$ (I)

$\int_{(C)} f(z)dz$ باز

1- f(z) تحلیلی : انتگرال به مسیر ربطی ندارد (با ابتدا و انتهای مسیر)

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_1) - F(z_2)$$

2- f(z) تحلیلی نیست

* روی هر مسیر جداگانه حساب شود.

$\int_{x_1}^{x_2} (x \text{ ثابت}) dx =$

$\int_{y_1}^{y} (y \text{ ثابت}) dy =$

$\int_{r_1}^{r_2} (r \text{ ثابت}) dr =$

t یا θ ثابت

$\oint_C f(z)dz$ بسته

f(z) در داخل و روی کانتور تحلیلی باشد $\Rightarrow$ $\oint_C f(z)dz = 0$

تابع f(z) در نقاطی تحلیلی نیست

انتگرال کوشی

روش دوم بخش قبل

قضیه مانده ها $\Rightarrow$ $\oint_{(C)} f(z)dz = 2\pi j$ (مجموع مانده‌ها قطب‌ها داخل کانتور)

(II) قسم دوم انتگرال‌های ناسره حقیقی :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \xrightarrow{\text{تحت شرایط خاص}} \oint_{(C)} f(z)\,dz$$

در این حالت مانند انتگرال‌های بخش قبل محاسبه شود.

(III) انتگرال‌های مثلثاتی :

$$\int_{0}^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \xrightarrow{\text{تحت شرایط خاص}} \oint_{(C)} g(z)\,dz$$

در این حالت هم مانند انتگرال‌های بخش قبل محاسبه شود.

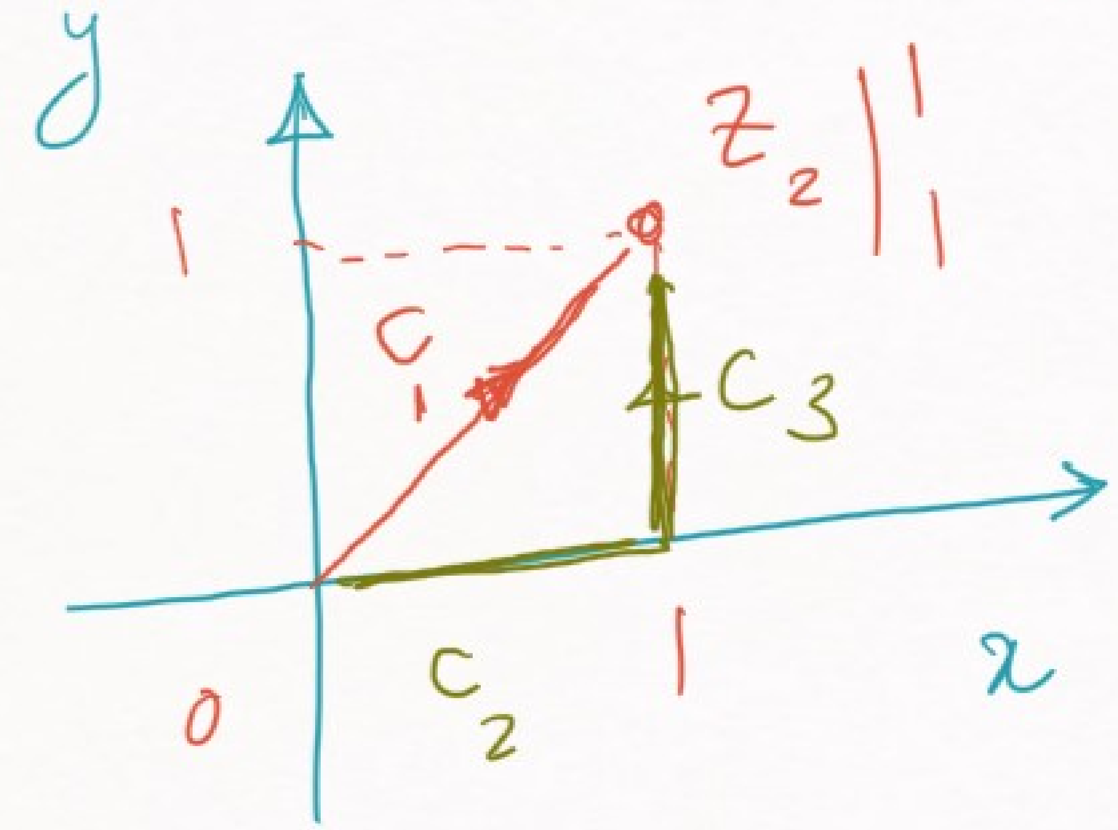
مثال $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta + 2}\,d\theta = ?$. ---

ملاحظه شد که در بخش (I) انتگرال‌های مختلط بحث شد.

در بخش (II) و (III) کاربرد انتگرال‌های مختلط برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی می‌باشد.

مثال ۳- تبدیل انتگرال ساده

$$I=\int_C f(z)\,dz=\int_{(C)} z\,dz=?$$



روش اول- چون $f(z)=z$ تحلیلی است بنابراین

$$I=\int_{(C_1)} z\,dz=\int_{z_1}^{z_2} z\,dz=\frac{z^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\boxed{\frac{x^2-y^2}{2}+jxy=j}$$

روش دوم-

$$I=\int_{C_1} f(z)\,dz=\int z\,dz=\int (x+jy)(dx+j\,dy)=\int (x+jx)(dx+j\,dx)=\boxed{\int_0^1 (1+j)^2 x\,dx=j}$$

$$C_1:\begin{cases} y=x \\ dy=dx \end{cases}$$

روش سوم-

$$I=\int_{C_2+C_3} z\,dz=\int_{C_2} z\,dz+\int_{C_3} dz=\int_0^1 (x+\cancel{jy})(dx+j\,\cancel{dy})+$$

$$\boxed{+\int_0^1 (1+jy)(j\,dy)=\tfrac{1}{2}+j-\tfrac{1}{2}=j}$$

$0<x<1$, $y=0$ و $0<y<1$, $x=1$

مثال ۲- مقدار $I=\int_{(C)}(z^2+1)^2 dz$ که در آن $\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ از نقطه $t=0$ تا $t=2\pi$ بدست آورید.

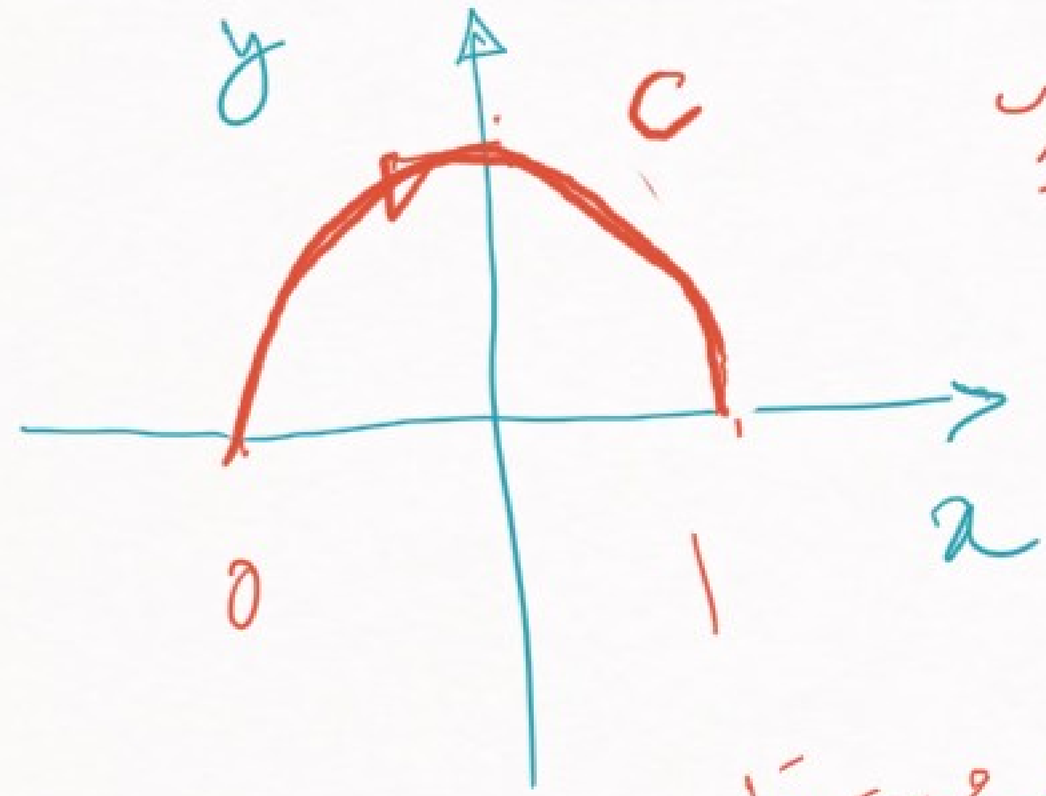
حل: تابع $f(z)=(z^2+1)^2$ تحلیلی است بنابراین محاسبه انتگرال به مسیر بستگی ندارد و لذا داریم:

$$t=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases} \quad , \quad t=2\pi \Longrightarrow \begin{cases} x=2\pi a\\ y=0\end{cases} \Longrightarrow I=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

$$\int_0^{2a\pi}(z^4+2z^2+1)\,dz = \frac{z^5}{5}+\frac{2z^3}{3}+z\Big|_0^{2a\pi} = \frac{(2a\pi)^5}{5}+\frac{2(2a\pi)^3}{3}+(2a\pi)$$

مثال ۳-

$$I = \int_{(C)} (z^2 + z\bar{z})\,dz = ?$$



نیم دایره

$$\begin{cases} z = re^{j\theta} \\ 0 < \theta < \pi \end{cases} \xrightarrow{r=1} z = e^{j\theta} \Longrightarrow dz = je^{j\theta}\,d\theta$$

مختصات قطبی

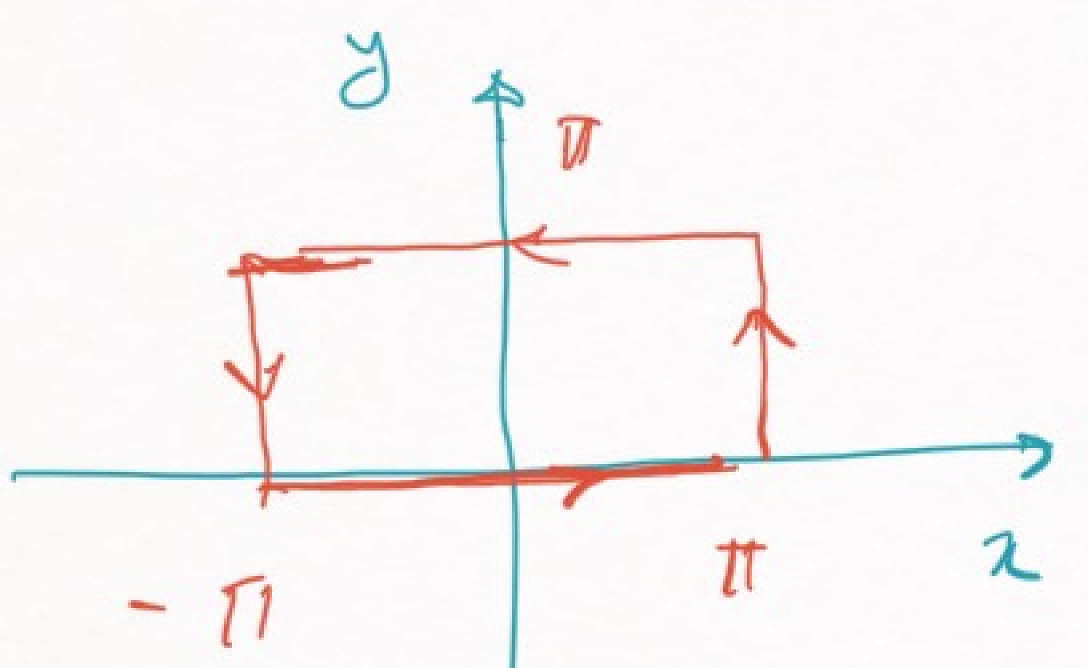
در گردش ساعتگرد جای حد بالا و پایین عوض میشود:

$$I = \int_{C} (z^2 + z\bar{z})\,dz = \int_{\pi}^{0} (e^{2j\theta} + 1)\, je^{j\theta}\,d\theta = \int_{\pi}^{0} (je^{3j\theta} + je^{j\theta})\,d\theta$$

$$I = \frac{1}{3}e^{3j\theta} + e^{j\theta}\Big|_{\pi}^{0} = 1/3 + 1 - 1/3\, e^{j3\pi} - e^{j\pi} = 1/3 + 1 + 1/3 + 1 = 8/3$$

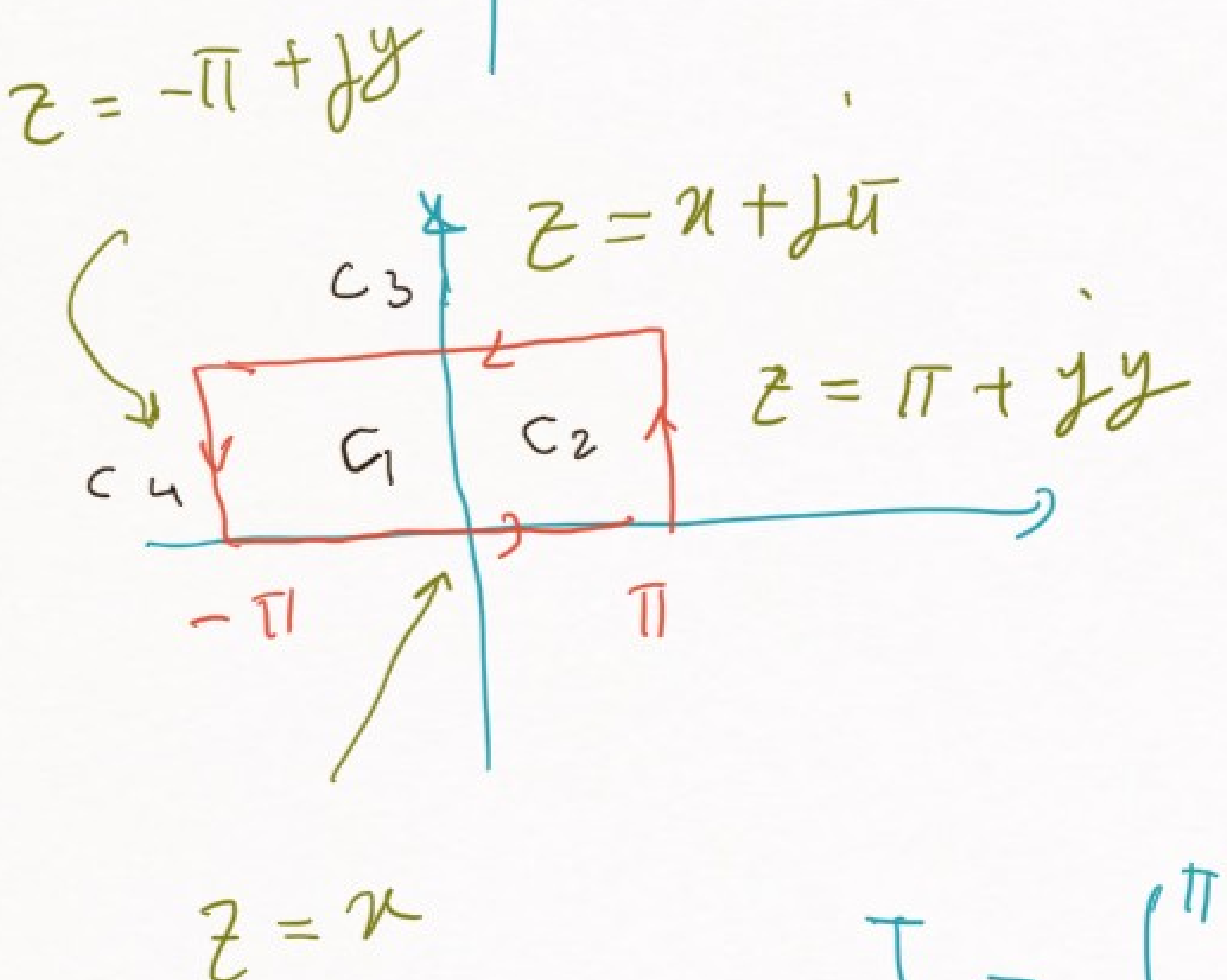
سوال ۴- حاصل انتگرال مقابل

$$\oint_{(C)} \sin(\bar{z})\, d\bar{z} = ?$$



با جایگذاری روی شکل و جمع معادلات هر بخش را می‌نویسیم:

$$\bar{z} = x - jy$$



$$d\bar{z} = dx - j\,dy \Longrightarrow$$

$$I = \oint_{(C)} \sin(\bar{z})\, d\bar{z} = \oint_{(C)} \sin(x - jy)(dx - j\,dy) = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx + \int_{0}^{\pi} \sin(\pi - jy)(-j\,dy) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x - j\pi)\, dx + \int_{\pi}^{0} \sin(-\pi - jy)(-j\,dy)$$

$-\operatorname{ch}\pi$

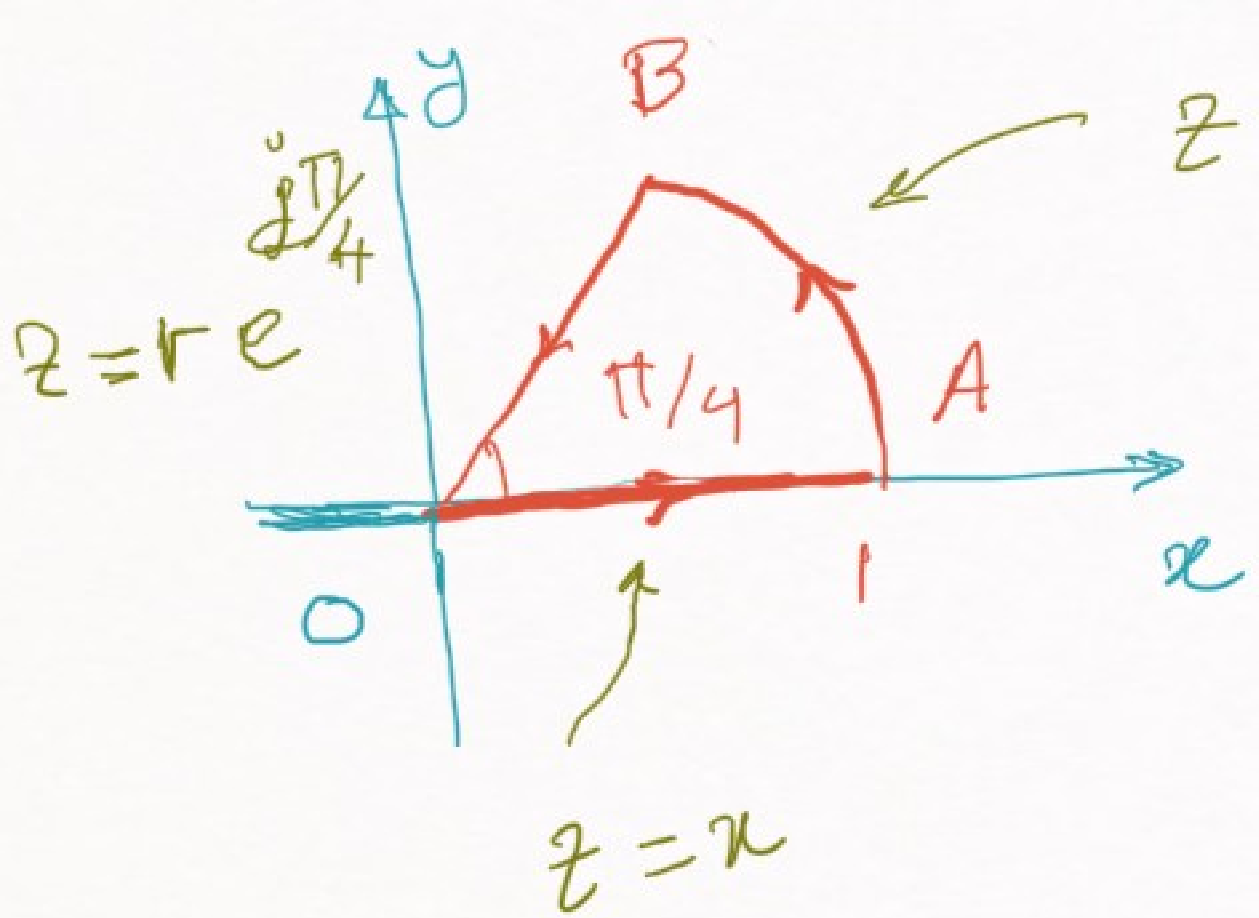
$$I = 0 + \left(-\cos(\pi - jy)\right)\Big|_{0}^{\pi} - \cos(x - j\pi)\Big|_{\pi}^{-\pi} + \left(-\cos(-\pi - jy)\right)\Big|_{\pi}^{0} = \operatorname{ch}\pi - 1 + 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = 0}$$

مثال ۵- حاصل انتگرال

$$\oint_{(C)} \bar{z}\, dz = ?$$

(C) کانتور زیر می‌باشد.



$$I = \oint_{(C)} \bar{z}\, dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = \int_0^1 x\, dx + \int_0^{\pi/2} e^{-j\theta} \cdot j e^{j\theta}\, d\theta + \int_1^0 r e^{-j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4}\, dr$$

(C_1)
$$\begin{cases} z = x \\ dz = dx \end{cases}$$

(C_2)
$$\begin{cases} z = e^{j\theta} \\ \bar{z} = e^{-j\theta} \\ dz = j e^{j\theta} \end{cases}$$

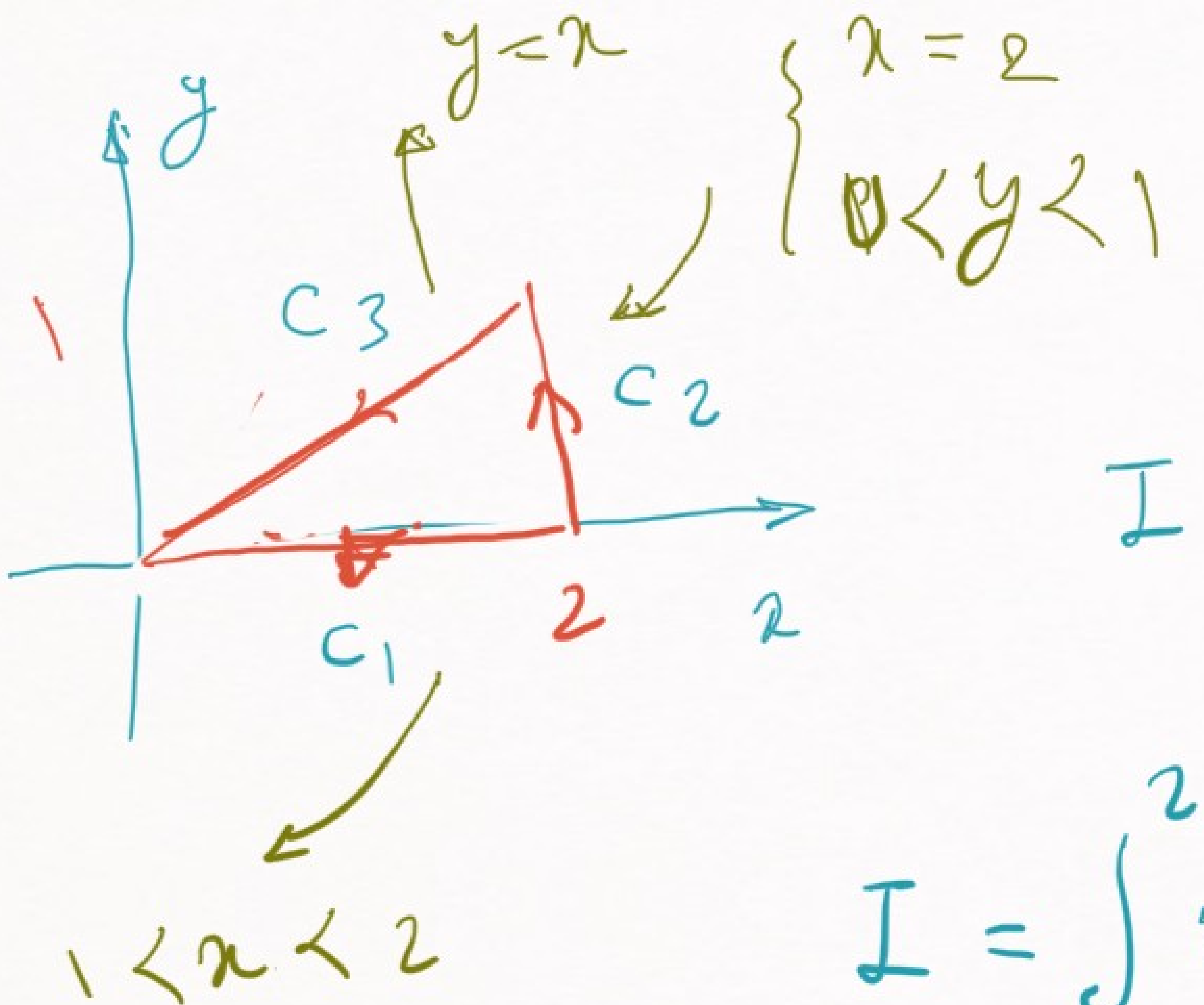
(C_3)
$$\begin{cases} z = r e^{j\pi/4} \\ dz = e^{j\pi/4}\, dr \end{cases}$$

$$I = \tfrac{1}{2} + j\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2} = \boxed{j\tfrac{\pi}{4}}$$

تذکر: چون تابع $f(z) = \bar{z}$ تحلیلی نبود لذا به انتگرال‌گیری روی مسیر اقدام کردیم. و اگر $f(z)$ داخل و روی کانتور (C) تحلیلی بود حاصل انتگرال صفر می‌شد. (قضیه کوشی بیان خواهد شد)

مثال ۶ -

$$I = \int_C z^2 dz = ?$$



روش اول -

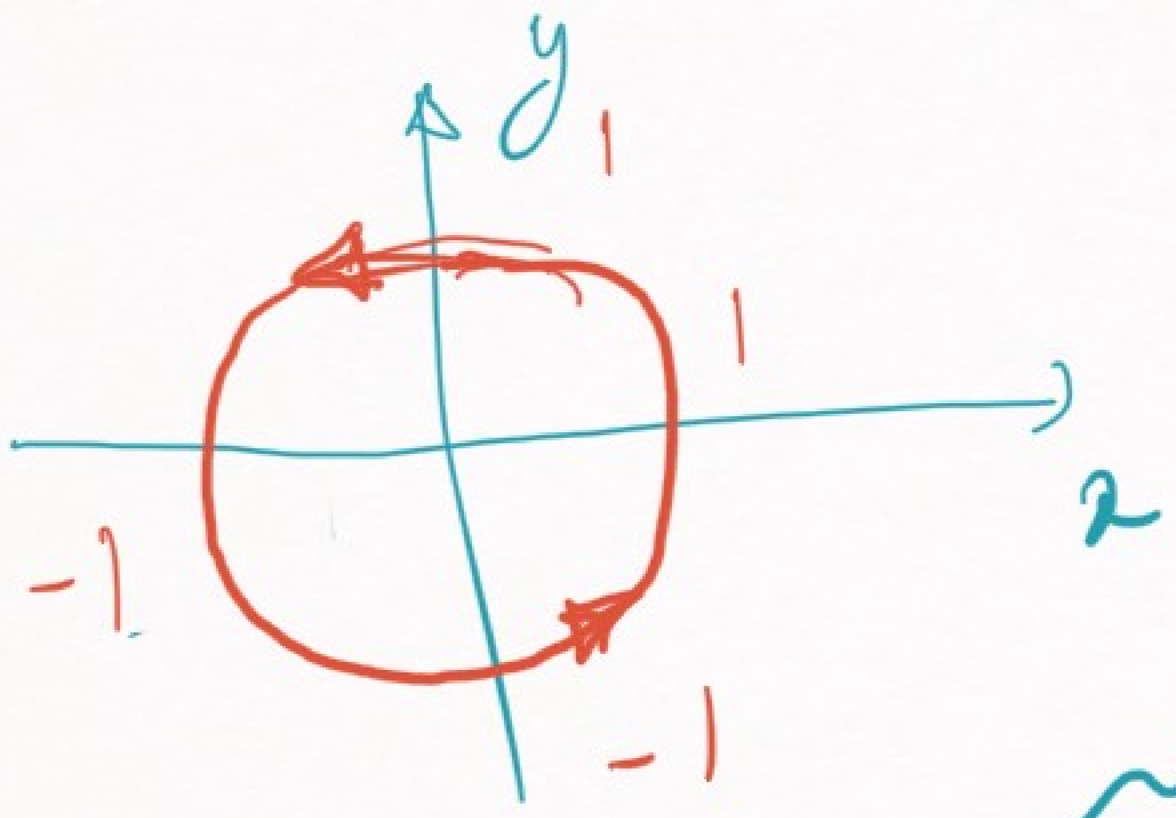
$$I = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$$

$$I = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2+yj)^2 (j\,dy) + \int_1^0 (3y^2+yj)^2 (2+j)\,dy = \dots$$

$$I = 2/3 + 11/3\, j - 2/3 - 11/3\, j \boxed{= 0}$$

روش دوم - چون $f(z)$ تابع تحلیلی است بنابراین $\oint_{(C)} f(z)\,dz = 0$ می شود.

قضیه کوشی که قبلاً بیان شده -



$$I = \oint_{(C)} \bar{z}\, dz = ?$$

چون تابع $f(z) = \bar{z}$ در هیچ جا تحلیلی نیست بنابراین باید انتگرال را مستقیم حساب کنیم!

مختصات قطبی، $r=1$

$$\begin{cases} z = re^{j\theta} \\ dz = je^{j\theta}\, d\theta \\ \bar{z} = re^{-j\theta} = e^{-j\theta} \end{cases}$$

$r=1$

$$\Longrightarrow I = \int \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} (re^{-j\theta})(re^{j\theta} j\, d\theta) = \int_0^{2\pi} r^2$$

$$I = \int_0^{2\pi} j \times d\theta = j\theta \Big|_0^{2\pi} = \boxed{2\pi j}$$

قضیه انتگرال کوشی: اگر $f(z)$ داخل و روی منحنی (C) تحلیلی باشد و $f'(z)$ در روی و داخل مسیر پیوسته باشد آنگاه

$$\boxed{\oint_{(C)} f(z)\,dz = 0}$$

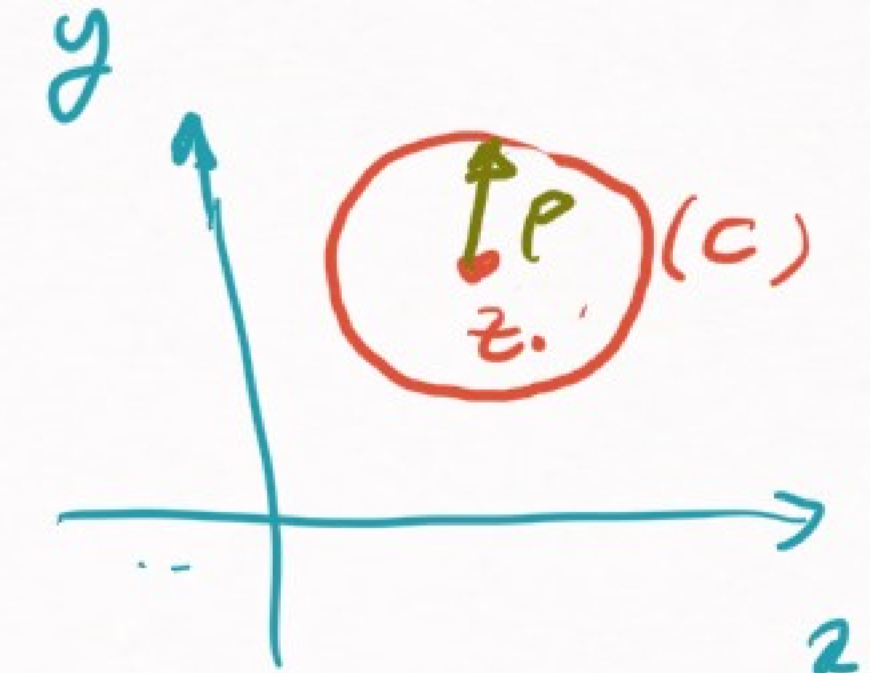
با توجه به قضیه گرین (و آنالیز برداری) اثبات شده.

تمرین: با فرض $z - z_0 = \rho e^{j\theta}$ [illegible] باشد.

مثال

الف) $I_1 = \oint_C (z-z_0)\,dz \Longrightarrow$ چون $f(z) = z - z_0$ در داخل و روی کانتور تحلیلی است

بنابراین $I_1 = 0$



ب) $I_2 = \oint \frac{1}{z-z_0}\,dz$

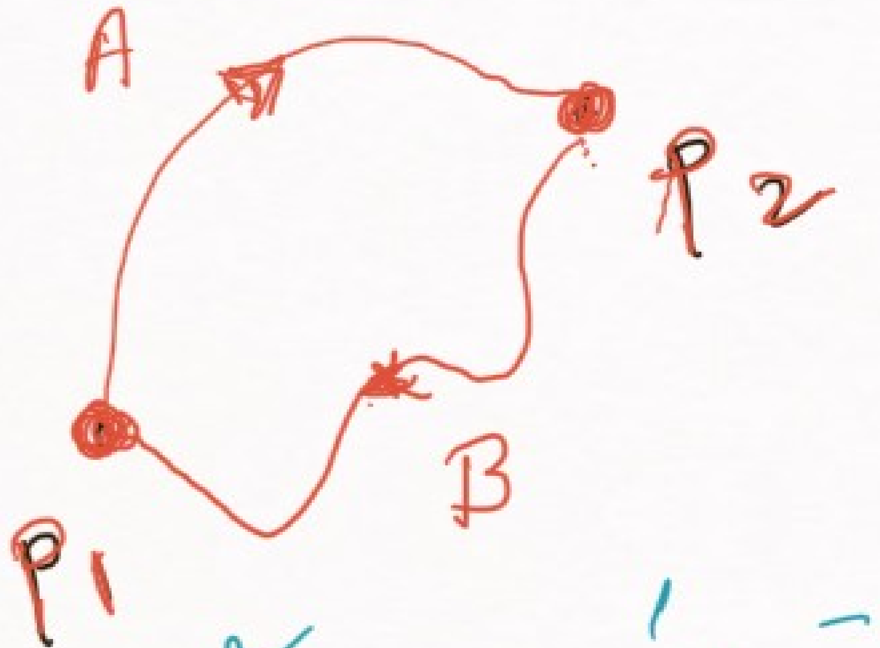
باید محاسبه گردد: چون تابع $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ تحلیلی نیست باید محاسبه شود.

$z - z_0 = \rho e^{j\theta}$

$dz = \rho j e^{j\theta} d\theta \;;\; 0 < \theta < 2\pi$

$$\longrightarrow I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\rho j e^{j\theta} d\theta}{\rho e^{j\theta}} = \int_0^{2\pi} j\,d\theta = \boxed{2\pi j}$$

نتیجه قضیه کوشی - اگر داشته باشیم $I=\int_{P_1}^{P_2} f(z)\,dz$ ، $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه حاصل انتگرال به مسیری که P_1 را به P_2 متصل میکند ربطی ندارد.



$$\oint_{(C)} f(z)\,dz = 0$$

$C = P_1AP_2B$

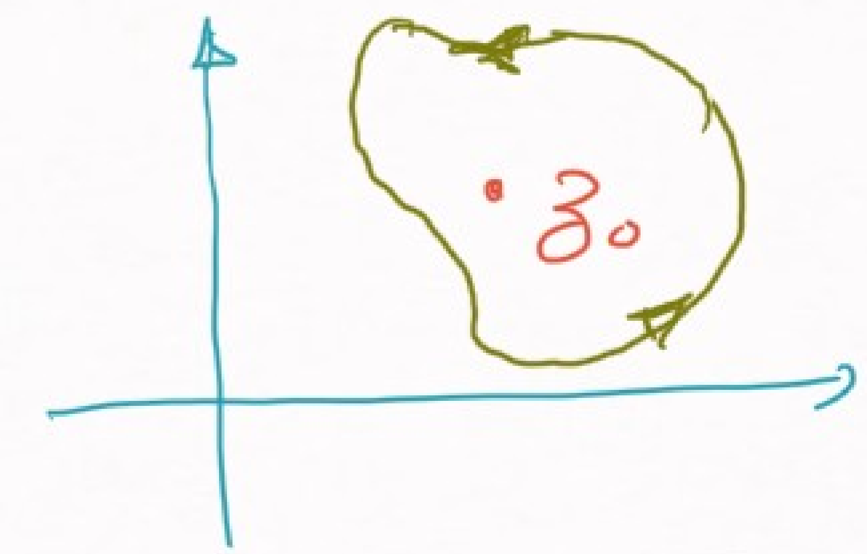
چون ثابت در مسیر دلخواه صفر میشود ...

قضیه کوشی گورسا - در قضیه کوشی علاوه بر تحلیلی بودن $f(z)$ باید $f'(z)$ نیز پیوسته باشد ولی گورسا اثبات کرد که شرط پیوستگی $f'(z)$ را حذف نمود و فقط تحلیلی بودن $f(z)$ را لازم دانست. به این قضیه کوشی گورسا گویند.

$f(z)$ تحلیلی روی و داخل کانتور C $\Longrightarrow \oint_{(C)} f(z)\,dz = 0$

فرمول انتگرال کوشی - اگر $f(z)$ داخل و روی کانتور بسته (C) و نقطه z_0 تحلیلی باشد آنگاه داریم:

$$\oint_{(C)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0)$$



مثال- حاصل انتگرال مقابل:

$$I = \oint_{(C)} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz \qquad C: |z-1| = 3$$

نقاط $z=0$ و $z=-1$ داخل کانتور قرار دارد و بنابراین:

$$I = \oint_{(C)} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \oint_{(C)} e^z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_{(C)} \frac{e^z}{z}\,dz - \oint \frac{e^z}{z+1}\,dz$$

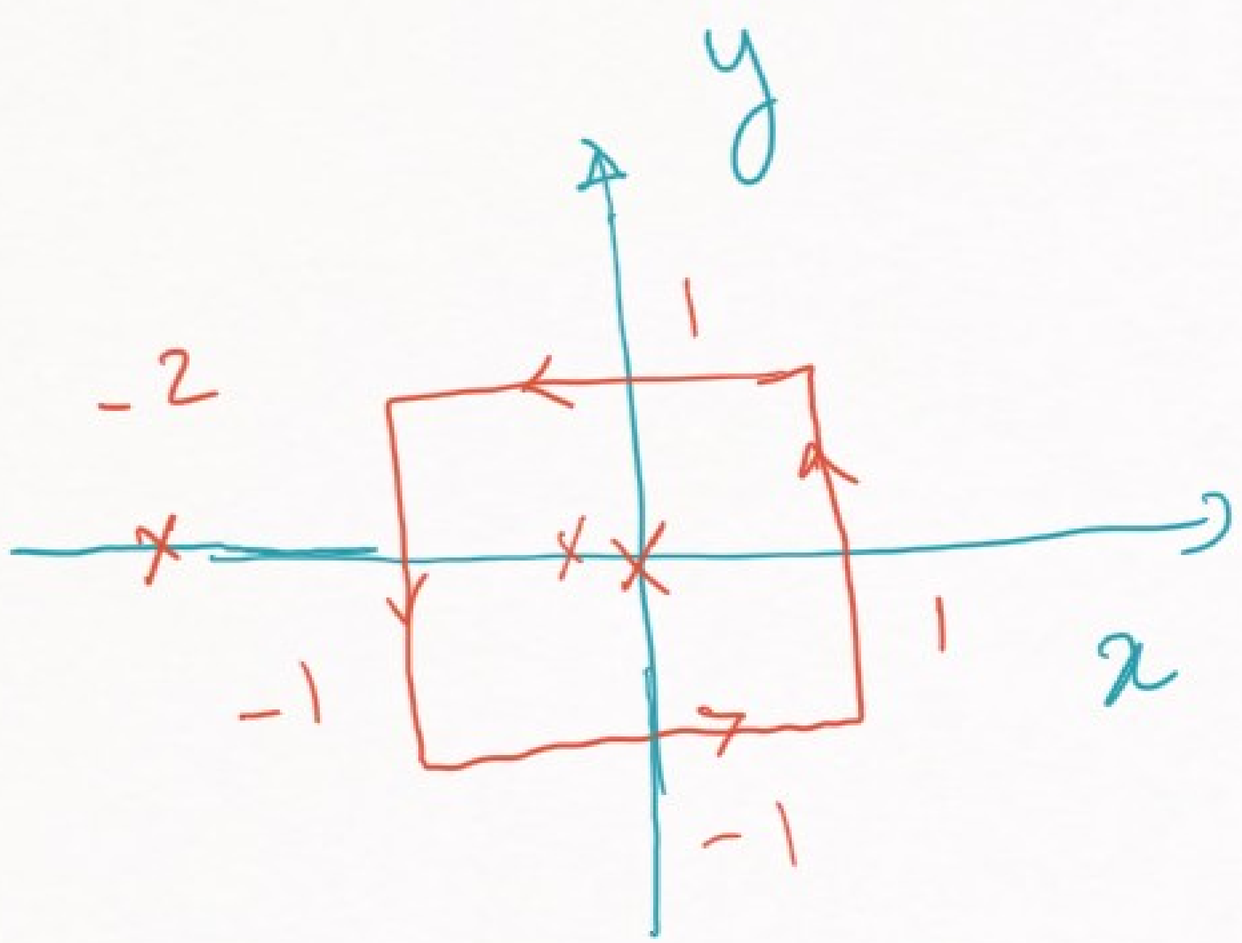
$$= 2\pi j\, e^0 - 2\pi j\, e^{-1} = \boxed{2\pi j(1 - e^{-1})}$$

انتگرال کوشی در حالت کلی - اگر $f(z)$ در روی و داخل کانتور بسته (c) تحلیلی باشد و z_0 داخل کانتور باشد داریم:

$$\oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

مثال ۱۵ ← حاصل انتگرال

$$\oint_{(c)} \frac{e^z}{z^2(z+2)}\,dz$$



نقاط منفرد تابع $z=-2$ و $z=0$ می باشد که فقط $z=0$ داخل کانتور می باشد بنابراین در این حالت $f(z)=\frac{e^z}{(z+2)}$ می باشد و طبق رابطه بالا

$$I = \frac{2\pi j}{1!} \left.\frac{d f(z)}{dz}\right|_{z=0}$$

مشتق اول

$$I = 2\pi j \left(\frac{e^z(z+2) - e^z}{(z+2)^2} \right)\Bigg|_{z=0} = \frac{\pi}{2} j$$