



فهرست مطالب

صفحه

عنوان

۱.....	قسمت C : آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی
۳.....	فصل ۱۰ . سریها ، انتگرالها ، و تبدیلات فوریه
۴.....	۱۰. ۱ . توابع دوره ای ، سریهای مثلثاتی
۷.....	۱۰. ۲ . سریهای فوریه
۱۵.....	۱۰. ۳ . توابع با دوره دلخواه $p = 2L$
۱۹.....	۱۰. ۴ . توابع زوج و فرد
۲۵.....	۱۰. ۵ . بسطهای نیم دامنه ای
۲۸.....	۱۰. ۶ . سری فوریه مختلط (اختیاری)
۳۲.....	۱۰. ۷ . نوسانهای واداشته
۳۶.....	۱۰. ۸ . تقریب بوسیله چند جمله ایهای مثلثاتی
۴۰.....	۱۰. ۹ . انتگرالهای فوریه
۴۹.....	۱۰. ۱۰ . تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه
۵۵.....	۱۰. ۱۱ . تبدیل فوریه
۶۳.....	۱۰. ۱۲ . جداول تبدیلات
۶۶.....	پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۰
۶۸.....	خلاصه مطالب فصل ۱۰

فصل ۱۱. معادلات با مشتقهای جزئی	۷۱
۱۱. ۱. مفاهیم بنیادی	۷۲
۱۱. ۲. مدلسازی : نخ مرتعش ، معادله موج	۷۵
۱۱. ۳. جداسازی متغیرها ، کاربرد سریهای فوریه	۷۷
۱۱. ۴. جواب دالامبر معادله موج	۸۶
۱۱. ۵. حل معادله 'گرمابه کمک سری فوریه	۹۲
۱۱. ۶. معادله گرمابه : حل مساله گرمابه کمک انتگرالهای فوریه	۱۰۷
۱۱. ۷. مدلسازی : غشا ، معادله موج دو بعدی	۱۱۲
۱۱. ۸. غشای مستطیلی . استفاده از سری فوریه دو گانه	۱۱۴
۱۱. ۹. لاپلاسین در مختصات قطبی	۱۲۳
۱۱. ۱۰. غشای مستدير . استفاده از سری بسل - فوریه	۱۲۷
۱۱. ۱۱. معادله لاپلاس . پتانسیل	۱۳۴
۱۱. ۱۲. لاپلاسین در مختصات کروی . معادله لزاندر	۱۳۹
۱۱. ۱۳. حل مسائل معادلات با مشتقهای جزئی به کمک تبدیلات لاپلاس	۱۴۵
۱۱. ۱۴. حل مسائل معادلات با مشتقهای جزئی به کمک تبدیلات فوریه	۱۵۱
مسائل و پرسش‌های دوره‌ای برای فصل ۱۱	۱۰۰
خلاصه 'فصل ۱۱	۱۵۹

قسمت D : آنالیز مختلط	۱۶۱
فصل ۱۲. اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط	۱۶۳
۱۲. ۱. اعداد مختلط . صفحه مختلط	۱۶۳
۱۲. ۲. شکل قطبی اعداد مختلط . توانها و ریشه ها	۱۶۹
۱۲. ۳. منحنی ها و نواحی در صفحه مختلط	۱۷۷
۱۲. ۴. حد . مشتق . تابع تحلیلی	۱۸۰
۱۲. ۵. معادلات کوشی - ریمان	۱۸۶
۱۲. ۶. تابع نمایی	۱۹۳

۱۲.۷. توابع مثلثاتی ، توابع هیپربولیک ۱۹۷	۱۲
۱۲.۸. لگاریتم . توان عمومی ۲۰۱	۱۲
۱۲.۹. نگاشت توسط توابع خاص (اختیاری) ۲۰۷	۱۲
مسائل و پرسش‌های دوره‌ای فصل ۱۲ ۲۱۳	
خلاصه فصل ۱۲ ۲۱۵	
فصل ۱۳ . انتگرال‌گیری مختلط ۲۱۷	
۱۳.۱. انتگرال روی خط در صفحه مختلط ۲۱۸	۱۳
۱۳.۲. دو روش انتگرال‌گیری . مثالها ۲۲۲	۱۳
۱۳.۳. قضیه انتگرال کوشی ۲۲۹	۱۳
۱۳.۴. وجود انتگرال نامعین ۲۳۸	۱۳
۱۳.۵. فرمول انتگرال کوشی ۲۴۰	۱۳
۱۳.۶. مشتقات توابع تحلیلی ۲۴۵	۱۳
پرسشها و مسائل دوره‌ای برای فصل ۱۳ ۲۵۰	
خلاصه فصل ۱۳ ۲۵۳	
فصل ۱۴ . سریهای توانی ، سریهای تیلور ، سریهای لوران ۲۵۵	
۱۴.۱. دنباله‌ها ، سریها ، آزمونهای همگرایی ۲۵۶	۱۴
۱۴.۲. سریهای توانی ۲۶۷	۱۴
۱۴.۳. نمایش توابع به صورت سری توانی ۲۷۴	۱۴
۱۴.۴. سری تیلور ۲۸۰	۱۴
۱۴.۵. سریهای توانی : روش‌های عملی ۲۸۷	۱۴
۱۴.۶. همگرایی یکنواخت ۲۹۱	۱۴
۱۴.۷. سری لوران ۳۰۲	۱۴
۱۴.۸. تکینیها و صفرها . بینهایت ۳۱۰	۱۴
پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۴ ۳۱۸	
خلاصه فصل ۱۴ ۳۱۹	

۳۲۳.....	فصل ۱۵ . انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها
۳۲۳.....	۱۵ . ۱. مانده‌ها
۳۲۹.....	۱۵ . ۲. قضیه مانده
۳۳۲.....	۱۵ . ۳. محاسبه انتگرال‌های حقیقی
۳۳۷.....	۱۵ . ۴. انواع دیگری از انتگرال‌های حقیقی
۳۴۳.....	پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۵
۳۴۵.....	خلاصه فصل ۱۵
۳۴۷.....	فصل ۱۶ . نگاشت همدیس
۳۴۸.....	۱۶ . ۱. نگاشت همدیس
۳۵۲.....	۱۶ . ۲. تبدیلات کسری خطی
۳۵۹.....	۱۶ . ۳. تبدیلات کسری خطی خاص
۳۶۵.....	۱۶ . ۴. نگاشت با سایر توابع
۳۷۲.....	۱۶ . ۵. سطوح ریمان
۳۷۷.....	پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۶
۳۷۹.....	خلاصه فصل ۱۶
۳۸۱.....	فصل ۱۷ . کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل
۳۸۲.....	۱۷ . ۱. میدانهای الکترواستاتیک
۳۸۸.....	۱۷ . ۲. موارد استعمال نگاشت همدیسی
۳۹۳.....	۱۷ . ۳. مسائل گرمایش
۳۹۸.....	۱۷ . ۴. جریان سیال
۴۰۷.....	۱۷ . ۵. فرمول انتگرال پواسن
۴۱۲.....	۱۷ . ۶. خواص عمومی توابع همساز
۴۱۷.....	پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۷
۴۱۹.....	خلاصه فصل ۱۷
۴۲۱.....	سوالات ریاضیات مهندسی در آزمونهای کارشناسی ارشد

و بلاک جامع مهندسی برق و الکترونیک

Download4All.rozblog.com

قسمت C

آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی

فصل ۱۰ . سریها، انتگرال‌ها، و تبدیلات فصل ۱۱ . معادلات با مشتقات جزئی

پدیده‌های دوره‌ای در فیزیک و مهندسی دارای کاربردهای متنوع هستند، و در مسائل عملی نمایش توابع دوره‌ای بر حسب توابع دوره‌ای ساده، مانند توابع سینوسی و کسینوسی از اهمیت خاصی برخوردار هستند. این موضوع سبب خلق سری فوریه که جملات آن توابع سینوسی و کسینوسی هستند می‌گرددند. شروع این موضوع با فوریه (بعداز فعالیتهای اویلر و دانیل برنولی) بود که یکی از مهمترین رویدادها در توسعه ریاضیات کاربردی می‌باشد. در فصل ۱۰ به بررسی سریهای فوریه و خواص آنها می‌پردازیم. موضوع به توابع غیر دوره‌ای گسترش می‌یابد و سبب خلق انتگرال‌ها و تبدیلات فوریه می‌گرددند (بخشهای ۹.۱۰ الی ۱۱.۱۰)، و سریها، انتگرال‌ها و تبدیلات فوریه به آنالیز فوریه موسوم‌اند.

کارهای متنوع از آنالیز فوریه در فصل ۱۱، معادلات با مشتقات جزئی ای که بطور وسیعی در فیزیک و مهندسی کاربرد دارند، ارائه می‌شوند. آنالیز فوریه نقش کلیدی را در حل مسائل بامقادی در کرانه‌ای واولیه ای دارند که در مکانیک، انتقال گرما، الکترواستاتیک و سایر زمینه‌ها به کار می‌روند.

فصل ۱۰

و بلاک جامع مهندسی برق و الکترونیک

Download4All.rozblog.com

سریهای، انتگرالها، و تبدیلات فوریه

سریهای فوریه^۱، که سریهایی با جملات سینوسی و کسینوسی می‌باشند و در مسائل عملی مهم که با توابع دوره‌ای سروکار دارند ظاهر می‌شوند. این سریهای ابزار پرقدرتی برای حل مسائل مختلف، از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی و معاملات با مشتق‌ات جزئی می‌باشند.

در این فصل مفاهیم اساسی، حقایقها، و تکنیکهای را که در ارتباط با سریهای فوریه هستند مورد بحث قرار می‌دهیم. مثالهای توضیحی و برخی کاربردهای مهم این سریهای در مهندسی را نیز در همین فصل خواهیم آورد. کاربردهای بیشتر در فصل بعد که اختصاص به معادلات با مشتق‌ات جزئی و مسائل بامقدار کرانه‌ای دارد ارائه خواهند شد.

نظریه سریهای فوریه نسبتاً پیچیده است، ولی کاربرد این سریهای بسیار ساده است. مطمئناً سریهای فوریه جامعتر از سریهای تیلور می‌باشند. زیرا بسیاری از توابع دوره‌ای ناپیوسته را که از نظر عملی دارای اهمیت هستند و قابل نمایش با سری تیلور نیستند می‌توان به سری فوریه بسط داد. سه بخش آخر این فصل اختصاص به انتگرال و تبدیلات فوریه دارد، که انگیزه و تکنیکی برای توابع غیر دوره‌ای که به ازای هر مقدار X تعریف شده باشند هستند. کاربردهای متناظر آنها در معادلات با مشتق‌ات جزئی در فصل بعد (دربخش ۱۱.۱۴) مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۱- ژان بابتیست ژوزف فوریه (Jean-Baptiste Joseph Fourier) (۱۷۶۸-۱۸۳۰) فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی، در پاریس زندگی و تدریس می‌کرد، همراه ناپلئون به مصر رفت و بعدها فرمانده شد. او از سریهای فوریه در اثر اصلی اش:

Theorie analytique de la chaleur (Analytic Theory of Heat, 1922)

که در آن نظریه هدایت گرمای را بسط داد (معادله گرمای، رک. بخش ۵.۱۱) استفاده نمود. این سریهای جدید به صورت مهمترین ابزار در ریاضی فیزیک در امتداد و نیز اثر قابل ملاحظه‌ای بر پیشرفت ریاضیات داشته اند؛ ر. ک. مرجع [۹] در ضمیمه ۱.

پیشیاز این فصل : حساب انتگرال مقدماتی .

بخشهای که در دوره های فشرده تر قابل حذف است : ۱۰.۶ . ۱۰ . ۱۱ . ۱۰ .

مراجع : ضمیمه ۱ ، قسمت C .

جواب مسائل : ضمیمه ۲ .

۱۰.۱۰ توابع دوره ای . سریهای مثلثاتی

تابع $f(x)$ را دوره ای نامند اگر این تابع به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عدد مثبتی مانند p موجود باشد، به طوری که به ازای هر x داشته باشیم

$$(1) \quad f(x + p) = f(x)$$

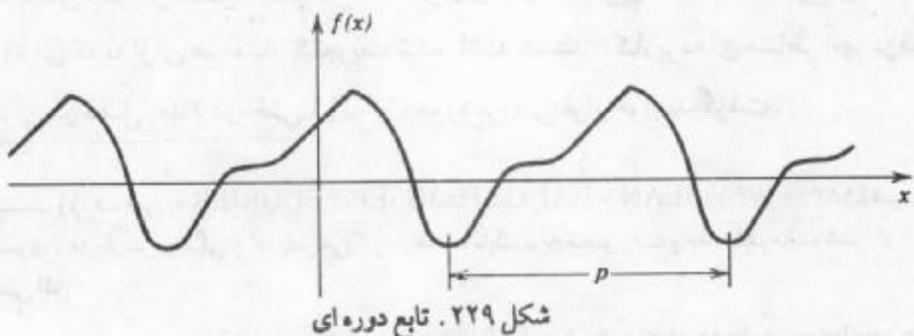
عدد p دوره (x) موسوم می باشد. نمودار چنین تابعی از تکرار دوره ای نمودار آن در هر فاصله ای که طول آن p باشد حاصل می شود(شکل ۲۲۹). تابع و پدیده های دوره ای در بیشتر کاربردها ظاهر می شوند.

تابع دوره ای آشنا تابع سینوسی و کسینوسی هستند، و توجه داریم که تابع ثابت $f = c$ نیز دوره ای است، زیرا این تابع به ازای هر p مثبت در (۱) صدق می کند. مثالهایی از تابع غیر دوره ای یا غیر متناوب عبارت اند از x ، x^2 ، x^3 ، e^x و $\ln x$ از (۱) نتیجه می شود

$$f(x + 2p) = f[(x + p) + p] = f(x + p) = f(x)$$

و در حالت کلی، به ازای هر عدد صحیح n و هر عدد حقیقی x داریم

$$(2) \quad f(x + np) = f(x).$$



۲ - هرگاه تابع متناوب f دارای کوچکترین تناوب ($p > 0$) باشد، اغلب اوقات این دوره را دوره اولیه $f(x)$ می نامند. به عنوان مثال، دوره اولیه $\sin 2x$ و $\sin \pi x$ به ترتیب $\pi/2$ و 1 است. یک تابع دوره ای بدون دوره اولیه تابع ثابت $f = c$ است.

بنابراین $2p$, $3p$, $4p$, ... نیز دوره $f(x)$ هستند. علاوه بر آن، هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره تناوب p باشند، آنگاه تابع $h(x) = af(x) + bg(x)$ با ضابطه $h(x) = af(x) + bg(x)$ ، به ازای هر دو عدد ثابت a و b با دوره تناوب p است.

موضوع مورد بحث در چند بخش اول این فصل یافتن نمایش توابع گوناگون با دوره $2\pi = p$ بر حسب توابع ساده

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (3)$$

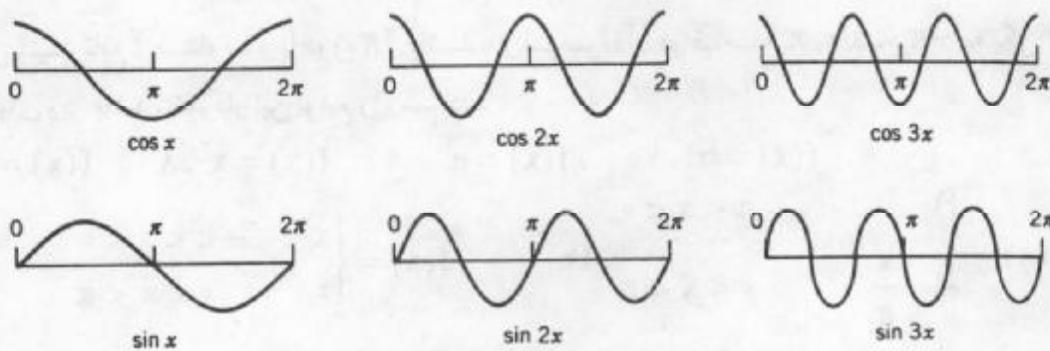
می باشد. که دارای دوره 2π است (ر. ک. شکل ۲۳°). سریهایی که در ارتباط با این موضوع مطرح می شوند به صورت

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (4)$$

هستند، که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ ثابت‌های حقیقی هستند. چنین سری ای به سری مثلثاتی موسوم است، a_n و b_n را ضرایب سری می نامند. با استفاده از نماد مجموع سری \sum ، (۴) را می توان چنین نوشت

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4)$$

مجموعه ای از توابع (۳) که سری (۴) را می سازند، اغلب اوقات به دنباله مثلثاتی موسوم می باشد.



شکل ۲۳°. توابع کسینوس و سینوس با دوره 2π

مشاهده می کنیم که هر جمله سری (۴) دارای دوره 2π می باشد. بنابراین هرگاه سری (۴) همگرا باشد، مجموع تابعی با دوره 2π خواهد بود.

تابع دوره ای که در مسائل مهندسی مطرح می شوند اغلب اوقات نسبتاً پیچیده هستند، و بدین جهت نمایش این توابع بر حسب توابع دوره ای ساده مفید است. چنانچه خواهیم دید تقریباً هر تابع

۳- و قراردادن در دو پرانتز؛ از این سری همگرا دوباره یک سری همگرا به همان حاصل جمع قبلی، همانطوری که می توان ثابت کرد، رسید.

دوره‌ای f با دوره 2π را که در کاربردها - به عنوان مثال، در ارتباط با ارتعاشات - مطرح می‌شود می‌توان به صورت یک سری مثلثاتی نمایش داد (که آن را آنگاه سری فوریه تابع f می‌نامند).

مسائل بخش ۱.۱۰

p ، کوچکترین دوره مثبت (دوره اصلی یا اولیه) تابع زیر را باید.

$$\sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2x, \cos 2x, \sin x, \cos x. \quad ۱$$

$$\sin \frac{2\pi nx}{k}, \cos \frac{2\pi nx}{k}, \sin \frac{\pi x}{k}, \cos \frac{\pi x}{k}, \sin nx, \cos nx. \quad ۲$$

۳. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره p باشد، آنگاه نشان دهید که a و b ثابت) دارای دوره p است. بنابراین مجموع توابع با دوره p تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

۴. اگر p یک دوره $f(x)$ باشد، آنگاه نشان دهید که np ، به ازای $n = 2, 3, \dots$ ، نیز یک دوره $f(x)$ است.

۵. نشان دهید که تابع ثابت f یک تابع دوره‌ای به ازای هر عدد مثبت p با دوره p می‌باشد.

۶. اگر f یک تابع دوره‌ای از X با دوره p باشد، آنگاه نشان دهید که دوره تابع $f(ax)$ ، $a \neq 0$ از X برابر $\frac{p}{|a|}$ است و همچنین تابع $f(\frac{x}{b})$ یک تابع دوره‌ای از X با دوره bp است. درستی این نتایج را برای $f(x) = \cos x$ به ازای $a = b = 2$ بررسی کنید.

فرض کنید تابع f متناوب و با دوره 2π باشد، و فرمول آن در فاصله $\pi < x < -\pi$ - به یکی از صورتهای زیر باشد، نمودار این تابع رارسم کنید.

$$f(x) = |x|. \quad ۱۰ \quad f(x) = e^{|x|}. \quad ۹ \quad f(x) = x^r. \quad ۸ \quad f(x) = x. \quad ۷$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 1 - \frac{x}{\pi} & 0 < x < \pi \end{cases}. \quad ۱۲ \quad f(x) = \begin{cases} x^r & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}. \quad ۱۱$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ \cos \frac{x}{\pi} & 0 < x < \pi \end{cases}. \quad ۱۴ \quad f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}. \quad ۱۳$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}. \quad ۱۶ \quad f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}. \quad ۱۵$$

انتگرال‌های زیر را که در آنها $n = 1, 2, \dots, ۰$ محاسبه کنید (اینها مثالهای نوعی از انتگرال‌هایی هستند که در بخش‌های آینده به آنها نیاز داریم).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx dx. \quad ۱۹$$

$$\int_{-\pi}^0 \cos nx dx. \quad ۱۸$$

$$\int_0^{\pi} \sin nx dx. \quad ۱۷$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx . \quad 22$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx . \quad 21$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx . \quad 20$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx . \quad 25$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^r \cos nx dx . \quad 24$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx . \quad 22$$

۱۰. سریهای فوریه

سریهای فوریه ابزاری برای ارائه توابع دوره‌ای بر حسب توابع کسینوسی و سینوسی می‌باشد. این سریها، سریهای مثلثاتی هستند (بخش ۱۰.۱) که ضرایب آنها از روی فرمولهای خاص [۶] فرمولهای اویلر را در ذیل [۶] محاسبه می‌شوند. هم اکنون در موقعیتی هستیم که به محاسبه ضرایب سری فوریه پرداخته و به ضرایب اویلر برسیم.

فرمولهای اویلر برای ضرایب فوریه

فرض کنید f تابع دوره‌ای با دوره 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

نمایش داد؛ یعنی فرض کنیم که سری همگرا و $f(x)$ برابر حاصل جمع آن باشد، می‌خواهیم ضرایب a_n و b_n برای چنین تابع مفروض f را، در سری (1) متناظر به آن معین کنیم.

ابتدا a_0 را مشخص می‌کنیم. با انتگرالگیری از طرفین (1) از $-\pi$ تا π داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx .$$

هرگاه انتگرالگیری جمله به جمله مجاز باشد^۴، به دست می‌آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) .$$

جمله اول طرف راست برابر $2\pi a_0$ است و با انتگرالگیری مشاهده می‌کنیم که سایر انتگرهای طرف راست صفراند. بنابراین نتیجه اول عبارت است از

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx . \quad (2)$$

حال a_1, a_2, \dots را به روشی مشابه مشخص می‌کنیم. با ضرب (1) در $\cos mx$ ، که در

آن m عدد صحیح مثبت است، و با انتگرالگیری از $-\pi$ تا π می‌یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx . \quad (3)$$

^۴- مثلاً، این موضوع در مورد همگرایی یکتاخت مجاز است (ر. ک. قضیه ۳ واقع در بخش ۱۴).

با انتگرال‌گیری جمله به جمله طرف راست به صورت زیر در می‌آید

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]$$

انتگرال اول صفر است. با به کار بردن (۱۱) ضمیمه ۳.۱ به دست می‌آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx.$$

با انتگرال‌گیری می‌توان نشان داد که چهار جمله واقع در طرف راست صفراند، به استثنای جمله آخر

سطر اول، که به ازای $n = m$ برابر π است. نظر به اینکه در (۳) این جمله در a_m ضرب شده است،

طرف راست (۳) برابر $a_m \pi$ است. بنابراین دومین نتیجه حاصل عبارت است از

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

در خاتمه ضرایب b_1, b_2, \dots در (۱) را مشخص می‌کنیم. هرگاه (۱) را در

ضرب کنیم، که در آن m عدد صحیح مثبت مشخص است، و سپس از $-\pi$ تا π از آن انتگرال بگیریم،

داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx dx. \quad (5)$$

با انتگرال‌گیری جمله به جمله، طرف راست داریم

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \right].$$

انتگرال اول صفر است. انتگرال بعدی از نوعی است که پیش از این بررسی شده است، و به ازای همه

مقادیر $n = 1, 2, \dots$ صفر است. برای انتگرال آخر به دست می‌آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx.$$

جمله اول طرف راست به ازای $n \neq m$ صفر، و به ازای $n = m$ ، برابر π

است. نظر به اینکه در (۵) این جمله در b_m ضرب شده است، طرف راست (۵) برابر $b_m \pi$ می‌باشد،

از این رو آخرین نتیجه عبارت است از

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

با جایگزین کردن n به جای m فرمولهای اویلر^۵ موسوم می‌باشند، حاصل

می‌شوند:

۵- ر. ک. زیرنویس ۹ واقع در بخش ۶.۲.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ب}) \quad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; n = 1, 2, \dots \quad (\text{ج})$$

مقادیر مفروض در (6) به ضرایب فوریه تابع f موسوم اند. سری مثالانی

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7)$$

با ضرایب داده شده در (6) را سری فوریه تابع f می نامند (بدون توجه به همگرایی که بعداً بررسی می شود).

مثال ۱ . موج مربعی

ضرایب فوریه تابع دوره ای $f(x)$ را که در شکل ۲۳۱ الف داده شده است، بباید.

$$f(x) = \begin{cases} -k & ; -\pi < x < 0, \\ k & ; 0 < x < \pi, \end{cases}$$

و $f(x + 2\pi) = f(x)$. چنین توابعی به عنوان نیروهای خارجی وارد بر دستگاههای مکانیکی، نیروهای محرکه الکتریکی وغیره مطرح می شوند. (مقدار $f(x)$ در یک نقطه منفرد اثری در انگرال ندارد؛ از این رو می توان $f(x)$ را در نقاط نامعین $x = \pm\pi$ نادیده گرفت).

باتوجه به (6 الف) به دست می آوریم $a_0 = 0$. این مقدار را بدون انگرالگیری نیز می توان به

دست آورد. چرا که انگرال تابع f بین $-\pi$ و π برابر صفر است. بنا به (6 ب) به دست می آوریم

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-k) \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} k \cos nx dx \right] \\ = \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{0}^{\pi} \right] = 0$$

زیرا در $-\pi, 0, \pi$ به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم $\sin nx = 0$. مشابهًا از (6 ج)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-k) \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} k \sin nx dx \right] \\ = \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{0}^{\pi} \right].$$

نظر به اینکه $\cos 0 = 1$ و $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ می باییم

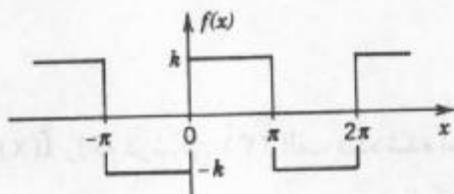
$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

حال ۱ در حالت کلی $\cos 3\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos \pi = -1$

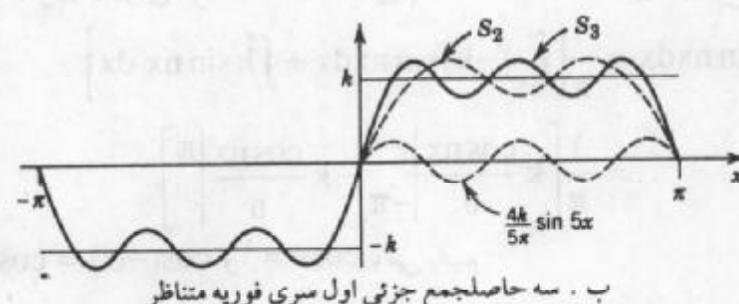
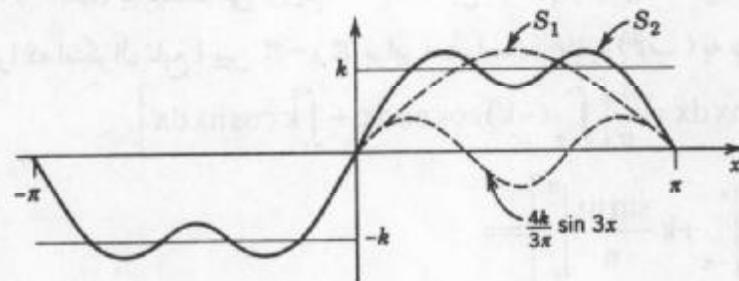
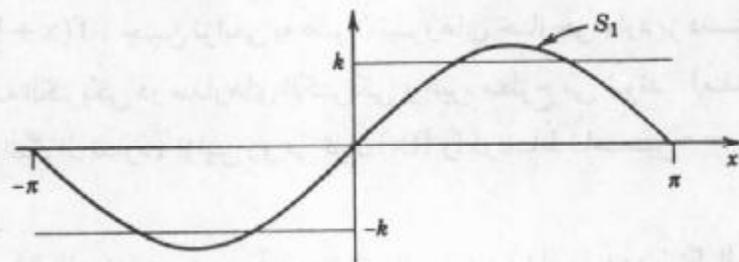
$1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2; & \text{به ازای } n \text{ فرد} \\ 0; & \text{به ازای } n \text{ زوج} \end{cases}$ و بنابراین $\cos n\pi = \begin{cases} -1; & \text{به ازای } n \text{ فرد} \\ 1; & \text{به ازای } n \text{ زوج} \end{cases}$

از این رو، ضرایب فوریه b_n تابع مورد نظر عبارت اند از

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_r = 0, \quad b_r = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_t = 0, \quad b_d = \frac{4k}{5\pi}, \dots,$$



الف . تابع مفروض $f(x)$ (موج مربعی متناوب)



ب . سه حاصل جمع جزئی اول سری فوریه متناوب

شکل ۲۳۱ . مثال ۱

واز آنجا که a_n ها صفر هستند، سری فوریه $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \quad (8)$$

حاصل جمع های جزئی عبارت اند از

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \dots,$$

وازن‌نمودارهای شکل ۲۳۱ چنین برمی‌آید که سری همگرا است و مجموع آن تابع مفروض $f(x)$ است. یادآور می‌شویم که در $x = \pi$ و $x = 0$ نقاط پیوستگی $f(x)$ ، همه مجموعهای جزئی برابر صفر هستند، یعنی برابر میانگین حسابی مقادیر $-k$ و k ای تابع f است.

به علاوه، با فرض آنکه $f(x)$ مجموع سری است، با قراردادن $\frac{\pi}{2} = x$ ، می‌باییم

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right),$$

از این رو داریم

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

این فرمول نتیجه معروفی از لایپنیتز (که در سال ۱۶۷۳ از روی ملاحظات هندسی به دست آورده است) می‌باشد. این مثال بیان می‌کند که مقدار سریهای مختلف با جملات ثابت را می‌توان با محاسبه سری فوریه در نقاط مشخص به دست آورد.

تعامد دنباله‌های مثلثاتی

دنباله مثلثاتی (۳)، بخش ۱.۱۰

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

یک دنباله متعامد بر فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ - (از این رو یک دنباله متعامد بر هر فاصله به طول 2π است، زیرا 2π طول دوره تناوب آنها است) می‌باشد. طبق تعریف تعامد دنباله توابع، تعامد دنباله فوق بدان معنی است که انتگرال هر دو عضو مختلف آن در فاصله فوق برابر صفر است، به عبارت دیگر به ازای هر عدد صحیح $m \neq n$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

و به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه m و n ($m = n$ شامل داریم)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

خاصیت مهم تعامد کلیدی برای دستیابی به فرمولهای اویلر (که در آن این تعامد اثبات شده است) جهت محاسبه ضرایب فوریه است.

همگرایی و حاصل‌جمع سری فوریه

در سراسر این فصل سری فوریه را از نقطه نظر عملی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در آینده خواهیم دید که کاربرد این سریها بسیار ساده است و حال آنکه بحث در مورد نظریه سریهای فوریه کاری دشوار است. بدین جهت ما خود را در گیر جزئیات مسائل نظری نکرده و بحث مطالب نظری را تنها با ارائه و اثبات چند قضیه که در مسائل کاربردی مفید هستند به پایان می‌بریم.

فرض کنید $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره 2π بوده و انتگرال‌های $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ موجود باشند؛ به عنوان مثال $f(x)$ پیوسته یا به طور تکه‌ای پیوسته (پیوسته به جز برای تعداد متناهی نقاط در فاصله انتگرال‌گیری) باشد. آنگاه با محاسبه ضرایب فوریه $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$ و $\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$ که در سری فوریه $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ظاهر شده‌اند، آنها در صورت امکان به سمت $f(x)$ همگرا باشند. در هر صورت همگرا بودن سری فوریه به سمت $f(x)$ در اغلب مسائل عملی برقرار است. در چنین مواردی می‌نویسیم

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

اگر سری فوریه $f(x)$ همگرا ولی به سمت $f(x)$ همگرایی نداشته باشد یا اصولاً یک سری واگرا باشد، می‌نویسند

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

علامت \approx به معنی تساوی نبوده و دلالت بر آن دارد که ضرایب سری مثلثاتی فوق از روی ضرایب فوریه $f(x)$ محاسبه شده اند و سری حاصل یک سری فوریه $f(x)$ می‌باشد که ممکن است دارای مقداری غیر برابر با مقدار $f(x)$ داشته یا یک سری واگرا باشد.

دسته توابعی که به صورت سری فوریه قابل نمایش هستند دسته‌ای وسیع و جالب می‌باشند.

در ذیل شرایطی را برای همگرایی سریهای فوریه ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱ (نمایش با سری فوریه)

هر گاه تابع متناوب $f(x)$ با دوره 2π در فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ پیوسته تکه‌ای بوده و در هر

۶ - تابع f را بر فاصله متناهی $b \leq x \leq a$ پیوسته تکه‌ای نامند اگر $f(x)$ بر این فاصله تعریف شود و فاصله $[a, b]$ را بتوان به تعدادی متناهی زیر فاصله افزای نمود که به هریک از این زیر فاصله‌ها $f(x)$ پیوسته و وقتی که x به سمت انتهای هریک از زیر فاصله‌ها از داخل میل کند دارای حدی متناهی باشد.



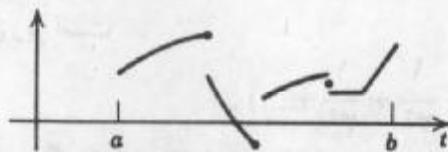
نقطه از فاصله مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد، آنگاه سری فوریه (۷) تابع f [با ضرایب (۶)] همگرا است. مجموع آن در هر نقطه، به جز نقطه x که در آن $f(x)$ ناپیوسته است برابر $f(x)$ است و در نقطه x مجموع سری برابر میانگین حد های چپ و راست^۷ $f(x)$ در این نقطه است.

اثبات همگرای در قضیه ۱ به ازای تابع پیوسته $f(x)$ که دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته است.

با انتگرالگیری جزء به جزء از (۶) می یابیم

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx.$$

جمله اول طرف راست برابر صفر است. با انتگرالگیری مجدد به روش جزء به جزء به دست می آوریم



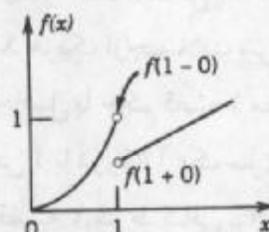
شکل ۸۷. مثالی از یک تابع پیوسته تکه ای

۷- حد چپ $f(x)$ در x_0 به صورت حد تابع f وقتی که x از سمت چپ به x_0 میل می کند تعریف می شود، این حد معمولاً با $f(x_0 - 0)$ نشان داده می شود. بتایران اگر h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند حد راست را با $f(x_0 + 0)$ نشان می دهد و وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند (به ترتیب به صورت $f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$)

مشتقات چپ و راست ($f(x)$ در نقطه x_0 ، وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند، به ترتیب به صورت حد های زیر تعریف می شوند:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h} \quad \text{و} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

بدیهی است که اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد آنگاه جمله آخر صورت هردو کسر همان $f(x_0)$ می شود.



شکل ۲۳۲. حد های چپ و راست

به عنوان مثال تابع $f(x) = \begin{cases} x & ; x < 1 \\ \frac{x}{2} & ; x > 1 \end{cases}$ و راست $f(1-0) = 1$ در نقطه $x = 1$ به ترتیب دارای حدود چپ ۱

$$f(1+0) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx.$$

به دلیل دوره‌ای بودن پیوستگی $f'(x)$ ، جمله اول طرف راست برابر صفر است. به علت پیوسته بودن $f''(x)$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ عددی مثل M وجود دارد به طوری که $|f''(x)| < M$.

با توجه به $|\cos nx| \leq 1$ می‌توان نوشت

$$|a_n| = \frac{1}{n\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx \right| < \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{2M}{n}.$$

همین طور، به ازای هر n ، $|b_n| < \frac{2M}{n}$. از این رو قدر مطلق هر جمله سری فوریه تابع f حداقل برابر جمله متناظر در سری همگرای زیر است

$$|a_0| + 2M(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots).$$

درنتیجه سری فوریه موردنظر همگرا است و اثبات به پایان می‌رسد (خوانندگانی که قبلًا با همگرایی یکنوا آشنا شده‌اند، مشاهده خواهند کرد که بنا بر آزمون وایرشتراس از بخش ۱۴.۶ با مفروضات فوق، سری فوریه به طور یکنوا همگرا است، و بنا به قضیه ۳ از همان بخش برای رسیدن به فرمول (۶) مجاز هستیم که جمله به جمله انتگرال بگیریم).

اثبات همگرایی در حالتی که $f(x)$ پیوسته تکه‌ای باشد و اثبات تحت مفروضات قضیه، سری فوریه (۷) با ضرایب (۶) برای نمایس $f(x)$ را می‌توان در کتابهای درسی پیش‌رفته تر، به عنوان مثال در مرجع [C14] یافت.

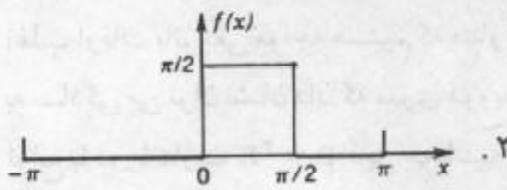
مثال ۲. همگرایی در نقاطی که تابع دارای پرش است

موج مربعی مثال ۱ یک پرش در $x = 0$ دارد. حد چپ و راست تابع در $x = 0$ به ترتیب $-k$ و k است، میانگین این حدود برابر صفر است (شکل ۲۳۱). سری فوریه (۸) موج مربعی نیز در $x = 0$ صفر است. زیرا به ازای $x = 0$ هریک از جملات سری صفر می‌باشد. همین طور می‌توان در مورد پرشها اظهار نظر نمود. نتایج حاصل با حکم قضیه ۱ مطابقت دارد.

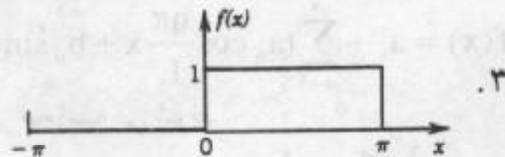
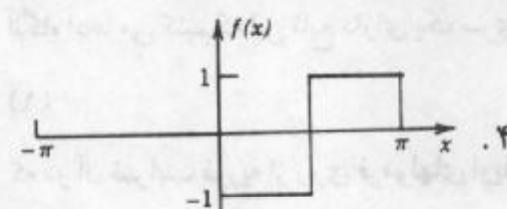
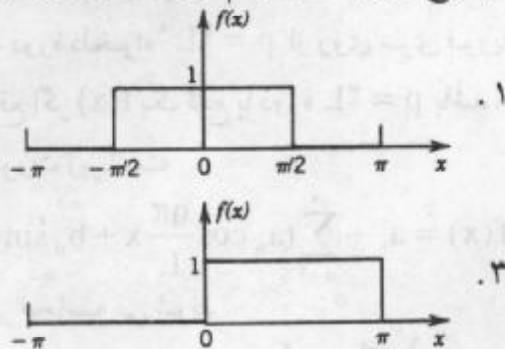
خلاصه: سری فوریه یک تابع مفروض f با دوره 2π یک سری به صورت (۷) است که ضرایب آن از فرمولهای اویلر (۶) به دست می‌آید. قضیه ۱ شرط کافی برای همگرایی این سری را بیان می‌کند. به موجب این قضیه سری فوریه موردنظر در نقاط پیوسته x به سمت (x) و در نقاط ناپیوسته x به سمت میانگین حدود چپ و راست تابع f یعنی به سمت $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ همگرا است.

مسائل بخش ۲۰.۱۰

مطلوب است سری فوریه تابع f را که دوره آن 2π فرض می‌شود، و نمودارهای اویلر سه



مجموع جزئی آن را رسم کنید که در آن $f(x)$ برابر است با



$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} . 6$$

$$f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi) . 8$$

$$f(x) = x^r \quad (0 < x < 2\pi) . 10$$

$$f(x) = x + |x| \quad (-\pi < x < \pi) . 12$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . 5$$

$$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi) . 7$$

$$f(x) = x^r \quad (-\pi < x < \pi) . 9$$

$$f(x) = x^r \quad (-\pi < x < \pi) . 11$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases} . 14$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . 13$$

$$f(x) = \begin{cases} x^r & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^r}{4} & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . 16$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . 15$$

۱۷. درستی قضیه ۱ را در نقاط غیر پیوسته تابع مذکور در مساله ۱ تحقیق کنید.

۱۸. سری فوریه مساله ۳ را از سری فوریه مساله ۱ به دست آورید.

۱۹. نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n و b_n باشد، آنگاه $kf(x) + lg(x)$ دارای ضرایب فوریه $ka_n + la_n$ و kb_n است.

۲۰. با استفاده از مساله ۱۹ و نتایج مسائل ۳ و ۴، سری فوریه مربوط به مساله ۲ را بیابید.

۱۰. ۳. توابع با دوره دلخواه

تابعی که تاکنون مورد بررسی قرارداده ایم با دوره تناوب 2π بوده اند و حال آنکه در مسائل

$$\sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) . N = 1, 2, 3 \text{ به ازای } -\text{ يعني}$$

اغلب اوقات با توابعی مواجه هستیم که متناوب بوده و دورهٔ تناوب آنها برابر 2π نیست. در هر صورت به سادگی می‌توان نشان داد که سری فوریه توابع با یک دورهٔ دلخواه $2L = p$ از روی سری فوریه توابع با دورهٔ تناوب $2\pi = p$ قابل محاسبه است. در واقع اگر $f(x)$ یک تابع با دورهٔ $2L = p$ باشد، آنگاه ادعایی کنیم که این تابع دارای یک سری فوریه به صورت زیر است

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x)$$

که در آن ضرایب فوریه از روی فرمولهای اویلر به شرح زیر محاسبه می‌شوند

$$(الف) \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$(ب) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx ; \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(ج) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx ; \quad n = 1, 2, \dots.$$

اثبات. چگونگی اثبات از روی مطالب ارائه شده در بخش ۲.۱۰ با یک تغییر متغیر حاصل می‌شود. با فرض $v = \frac{\pi x}{L}$ ، یعنی $x = \pm L$ ، $x = \pm \pi v$ متناظر قرار می‌گیرد. با این تغییر متغیر تابع f با دورهٔ $2L$ به تابعی از v ، که $(v) g(v)$ نام دارد، با دورهٔ 2π تبدیل می‌شود. با توجه به (۶) بخش ۲.۱۰ تابع $(v) g(v)$ دارای یک سری فوریه به صورت

$$(3) \quad g(v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv)$$

و ضرایب اویلر به شکل

$$(الف) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) dv$$

$$(ب) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \cos nv dv,$$

$$(ج) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \sin nv dv$$

می‌باشند. با قراردادن $(x) f(x) = \frac{\pi X}{L}$ به ترتیب به جای $(v) g(v)$ و v در (۳) فرمول (۱) حاصل می‌شود.

همین طور فرمولهای (۲) علاوه بر جایگزینی فوق، با قراردادن $dx = \frac{L}{\pi} dv$ و $\pm L$ به ترتیب به جای $\pm \pi$ در فرمولهای (۴) حاصل می‌شوند. بدین طریق اثبات به پایان می‌رسد.

فاصله انتگرالگیری در (۲) را می‌توان با هر فاصله به طول $L = 2L = p$ جایگزین کرد. مثلاً در

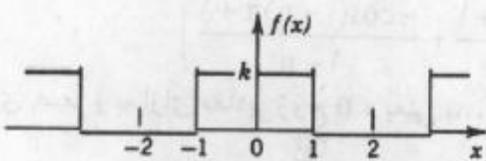
۹- این نماد چون در کاربردها عملی است، L طول یک نخ مرتعش (بخش ۱۱.۲)، یک میله در انتقال گرما (بخش ۱۱.۵) وغیره خواهد بود.

صورت لزوم می توان در فاصله $0 \leq x \leq 2L$ انتگرالگیری کرد.

مثال ۱ . موج مربعی دوره ای

سری فوریه موج مربعی زیر را باید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -2 < x < -1 \\ k & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; 1 < x < 2 \end{cases} \quad p = 2L = 4, \quad L = 2.$$



شکل ۲۳۳ . مثال ۱

نمودار این تابع در شکل ۲۳۳ آمده است.

حل . با توجه به (۲ الف) و (۲ ب) می یابیم

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dx = \frac{k}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-4}^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

از این رو به ازای مقادیر زوج $n = 0, 2, 4, \dots$ داریم $a_n = 0$ و به ازای $n = 1, 3, 5, \dots$ داریم $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ و همین طور به

$$a_n = -\frac{2k}{n\pi} \quad \text{داریم} \quad n = 3, 7, 11, \dots$$

با توجه به (۲ ج) به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ داریم $b_n = 0$ و از آنجا سری فوریه تابع مورد نظر دارای نمایشی به صورت زیر است

$$f(x) = \frac{k}{4} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - \dots \right).$$

مثال ۲ . یکسوکننده نیم موج

یک ولتاژ سینوسی $E \sin \omega t$ ، که در آن t به معنی زمان است ، از یکسوکننده نیم موجی که

قسمت منفی موج را حذف می کند می گذرد (شکل ۲۳۴) . سری فوریه تابع متناوب حاصل

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; -L < t < 0 \\ E \sin \omega t & ; 0 < t < L \end{cases}, \quad p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \quad L = \frac{\pi}{\omega}$$

را باید.

حل . نظر به این که به ازای $0 < t < -L$ داریم $u = 0$ ، از (۲ الف) ، با جایگذاری t به جای x نتیجه می شود

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^\pi E \sin \omega t dt = \frac{E}{\pi}$$

و بنابر (۲ ب) و با استفاده از (۱۱) ضمیمه ۳.۱، به ازای $x = \omega t$ و $y = n\omega t$ می‌یابیم

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi} E \sin \omega t \cos n\omega t dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin(\ell+n)\omega t + \sin(\ell-n)\omega t] dt.$$

انتگرال آخر به ازای $\ell = n$ مساوی صفر و به ازای $n = 2, 3, \dots$ برابر است با

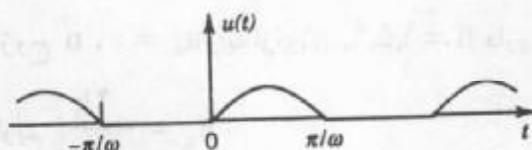
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos(\ell+n)\omega t}{(\ell+n)\omega} - \frac{\cos(\ell-n)\omega t}{(\ell-n)\omega} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos(\ell+n)\pi + 1}{\ell+n} + \frac{-\cos(\ell-n)\pi + 1}{\ell-n} \right). \end{aligned}$$

به ازای مقادیر فرد n مساوی صفر و به ازای مقادیر زوج n ، یعنی $n = 2, 4, \dots$ برابر است با

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{\ell+n} + \frac{1}{\ell-n} \right) = -\frac{2E}{(\ell-n)(\ell+n)\pi}.$$

به همین ترتیب از (۲ ج) $b_n = 0$ و به ازای $n = 2, 3, \dots$ در نتیجه

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \dots \right).$$



شکل ۲۲۴. یکسوکننده نیم موج

مسائل بخش ۳.۱

سری فوریه هریک از توابع زیر را که با دوره تناوب $2L = p$ می‌باشد بیابید و نمودار اولین سه مجموع جزئی آنها رارسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .1$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 3 \end{cases}, \quad p = 2L = 4 \quad .2$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad p = 2L = 4 \quad .3$$

$$f(x) = x (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2 \quad .4$$

$$f(x) = 1 - x^2 (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2 \quad .5$$

$$f(x) = 2|x| (-2 < x < 2), \quad p = 2L = 4 \quad .6$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .7$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1-x & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .8$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .9$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} - x & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad p = 2L = 1 \quad .10$$

$$f(x) = 3x^2 (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2 \quad .11$$

$$f(x) = \frac{\pi x^2}{2} (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2 \quad .12$$

$$f(x) = \pi \sin \pi x (0 < x < 1), \quad p = 2L = 1 \quad .13$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} (0 < x < 2), \quad p = 2L = 2 \quad .14$$

۱۵. سری فوریه مساله ۱ را با توجه به سری فوریه مثال ۱ بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۱۶. سری فوریه مساله ۱۱ را با توجه به سری فوریه مساله ۹ بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۱۷. سری فوریه مساله ۳ را با توجه به سری فوریه مثال ۱، مستقیماً به دست آورید.

۱۸. سری فوریه تابع دوره‌ای که از عبور ولتاژ $v(t) = k \cos 100\pi t$ از یک یکسو کننده نیم موج حاصل می‌شود را پیدا کنید.

۱۹. نشان دهید که هر جمله سری (۱) دارای دوره $2L = p$ است.

۲۰. نشان دهید که فاصله انتگرالگیری در (۲) را می‌توان با هر فاصله به طول $2L = p$ عرض کرد.

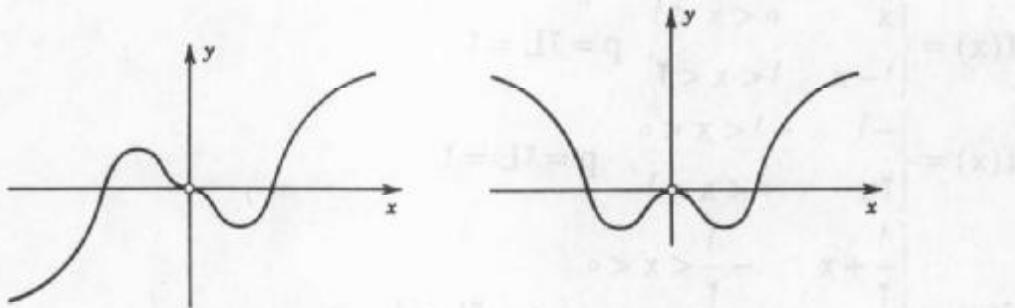
۱۰. ۴ توابع زوج و فرد

در تعیین ضرایب فوریه یک تابع، اگر تابع فرد یا زوج باشد می‌توان از محاسبات غیر ضروری اجتناب کرد و سریعتر به نتیجه رسید. مثالی برای تابع فرد، تابع مذکور در مثال ۱ بخش قبل می‌باشد که چنانچه مشاهده شد تنها دارای جملات سینوسی است.

ابتدا مذکور می‌شویم که تابع $y = g(x)$ ، زوج است هرگاه به ازای هر x

$$g(-x) = g(x).$$

نمودار چنین تابعی نسبت به محور \mathbf{z} متقارن است (شکل ۲۳۵). تابع $h(x)$ را فرد نامند، هرگاه به ازای هر x داشته باشیم (ر. ک. شکل ۲۳۶) $h(-x) = -h(x)$.



نمودار چنین تابعی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. به عنوان مثال $\cos nx$ تابعی زوج و $\sin nx$ تابعی فرد است.

اگر g تابعی زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx \quad (1)$$

اگر h تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0 \quad (2)$$

باتوجه به نمودارهای توابع g و h درستی فرمولهای (۱) و (۲) واضح است، واثبات غیر نموداری آنها به متعلمين واگذار می شود.

حاصلضرب $gh = q$ از تابع زوج g در تابع فرد h تابعی فرد است. در واقع

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x).$$

از این رو اگر $f(x)$ زوج باشد، آنگاه انتگرال $\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ در (۲ج)، بخش ۱۰.۳.۲ فرد است، و $b_n = 0$. همینطور اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه انتگرال $\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ در (۲ب) از بخش قبل، فرد است و $a_n = 0$. از آنجه گفته شد و از (۱) قضیه زیر به دست می آید.

قضیه ۱ (سری فوریه تابع زوج و فرد)

سری فوریه تابع زوج f با دوره تناوب $2L$ یک «سری فوریه کسینوسی» است، یعنی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (3)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots . \quad (4)$$

سری فوریه تابع f با دوره تناوب $2L$ یک «سری فوریه سینوسی» است، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (f \text{ فرد}) \quad (5)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (6)$$

حالتی از دوره تناوب 2π . سری فوریه یک تابع زوج f با دوره 2π که یک سری فوریه کسینوسی است عبارت است از

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (f \text{ زوج}) \quad (3*)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4*)$$

و همین طور برای یک تابع فرد f با دوره تناوب 2π که یک سری فوریه سینوسی است داریم

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (f \text{ فرد}) \quad (5*)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6*)$$

به عنوان مثال، تابع f در مثال ۱، بخش ۲.۱۰، یک تابع فرد است و از این رو با یک سری فوریه سینوسی قابل نمایش است.

از خاصیت زیر که در مساله ۱۹، بخش ۲.۱۰ به آن اشاره شده بود نیز می‌توان برای ساده سازی محاسبات ضرایب فوریه استفاده نمود.

قضیه ۲ (مجموع توابع)

ضرایب فوریه مجموع $f_1 + f_2$ برابر مجموع ضرایب فوریه متناظر توابع f_1 و f_2 است.

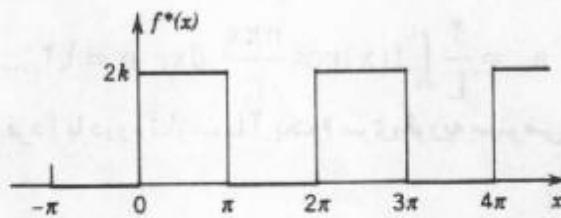
ضرایب فوریه cf ، به ازای هر عدد ثابت c ، برابر ضرایب فوریه تابع f می‌باشد.

مثال ۱. تپه مستطیلی

تابع f در شکل ۲۳۷ از جمع تابع f از مثال ۱، بخش ۲.۱۰ با عدد ثابت k حاصل

می‌شود. بنابراین، بنابر مثال مذکور و قضیه ۲ می‌یابیم

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

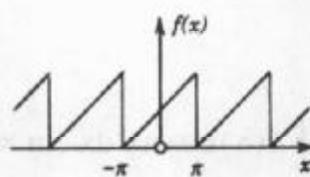
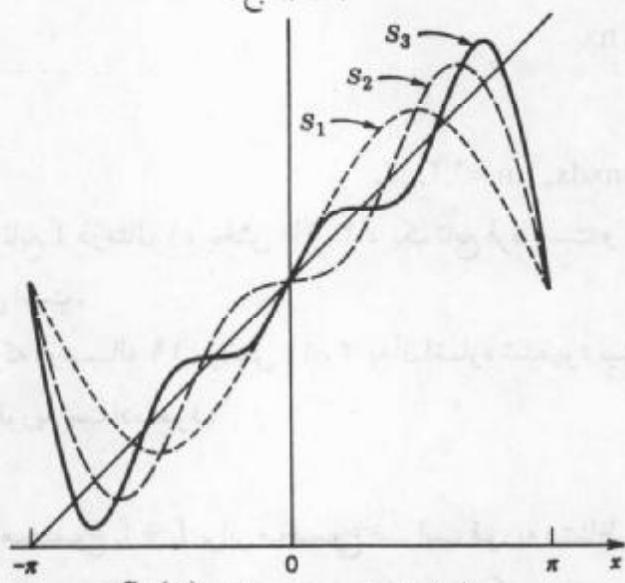


شکل ۲۳۷ . مثال ۱

مثال ۲ . مجموع دندانه اره‌ای

سری فوریه تابع زیر را بایابد (شکل ۲۳۸ الف).

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad f(x) = x + \pi; \quad -\pi < x < \pi$$

الف) تابع $f(x)$ (ب) حاصلجمع‌های جزئی $S_n(x)$

شکل ۲۳۸ . مثال ۲

حل . با فرض $x = f_1(x) + f_2(x) = \pi$ می‌یابیم $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}\pi$. ضرایب فوریه $f_1(x)$ ، به غیر از ضریب جمله اول (جمله ثابت) که π برابر است، صفر می‌باشند. از این رو بنابر قضیه ۲، ضرایب فوریه a_n ، b_n به جزء a برابر π است، همان ضرایب فوریه $f_1(x)$ است. چون $f_1(x)$ فرد

است، به ازای $n = 1, 2, \dots$ داریم $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_i(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx.$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء به دست می آوریم

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi.$$

لذا $b_1 = -\frac{2}{4}$ ، $b_2 = \frac{2}{3}$ ، $b_3 = -\frac{2}{2}$ ، $b_4 = \frac{2}{1}$ ، \dots ، نمایش سری فوریه $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \pi + 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots).$$

مسائل بخش ۴.۱

کدامیک از توابع زیر فرد، زوج، یا نه فرد و نه زوج هستند؟

$$x|x|, \sin x + \cos x, \sinh x, \cosh x, x^r \cos nx, x \cos nx, |x^r| .1$$

$$e^{-|x|}, x \cos x, \ln x, x \sin x, \sin^r x, e^{x^r}, e^x, |x|, x + x^r .2$$

کدامیک از توابع $f(x)$ زیر که متناوب، با دوره تناوب 2π ، فرض می شوند، زوج، فرد یا نه زوج و نه فرد هستند؟

$$f(x) = x^r (0 < x < 2\pi) .4 \quad f(x) = x^r (-\pi < x < \pi) .3$$

$$f(x) = e^{-|x|} (-\pi < x < \pi) .6 \quad f(x) = x|x| (-\pi < x < \pi) .5$$

$$f(x) = x^r - x (-\pi < x < \pi) .8 \quad f(x) = |\sin x| (-\pi < x < \pi) .7$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x < 2\pi - 1 \\ x & -1 < x < 1 \end{cases} .10 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases} .9$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos^r 2x & -\pi < x < 0 \\ \sin^r 2x & 0 < x < \pi \end{cases} .12 \quad f(x) = \begin{cases} \sinh x & -\pi < x < 0 \\ -\cosh x & 0 < x < \pi \end{cases} .11$$

هر یک از توابع زیر را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید:

$$\frac{x}{x+1} .16 \quad e^{kx} .15 \quad \frac{1}{(1-x)^r} .14 \quad \frac{1}{1-x} .13$$

.17. قضیه ۲ را ثابت کنید.

.18. توابعی را باید که هم زوج و هم فرد باشند.

.19. نشان دهید که سری فوریه تابع $f(x) = \sin^r x - \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ است، یعنی

$\sin^r x$ که یک اتحاد مثلثاتی است و چنین تساویها برای سایر اتحادهای

مثلثاتی مثلاً برای $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos^3 x$ نیز برقرار است.

ثابت کنید:

۲۰. حاصلجمع و حاصلضرب دوتابع زوج، تابعی زوج است.

۲۱. حاصلجمع تابعهای فرد، تابعی فرد است. حاصلضرب دوتابع فرد، تابعی زوج است.

۲۲. اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $|f(x)|$ و $f'(x)$ زوج می‌باشند.

۲۳. اگر $f(x)$ زوج باشد، آنگاه $|f(x)|$ ، $f'(x)$ ، و $f''(x)$ زوج می‌باشند.

۲۴. اگر $g(x)$ به ازای هر x تعریف شده باشد، آنگاه تابع $\frac{1}{2}[g(x) + g(-x)]$ تابعی زوج است و تابع $\frac{1}{2}[g(x) - g(-x)]$ تابعی فرد است.

سری فوریه توابع زیر را که دوره تناوب آنها 2π درنظر گرفته شده است تعیین کنید. راهنمایی: در صورت امکان از خواص زوج یا فرد بودن این توابع استفاده کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases} . \quad 26 \quad f(x) = \begin{cases} k & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . \quad 25$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases} . \quad 28 \quad f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . \quad 27$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^r & -\pi < x < 0 \\ x^r & 0 < x < \pi \end{cases} . \quad 30 \quad f(x) = \begin{cases} x^r & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^r}{4} & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . \quad 29$$

$$f(x) = x(\pi^r - x^r)(-\pi < x < \pi) . \quad 32 \quad f(x) = \frac{x^r}{4} (-\pi < x < \pi) . \quad 31$$

نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} . \quad 33 \quad (\text{از مساله ۲۵ استفاده کنید.})$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^r}{6} . \quad 34 \quad (\text{از مساله ۳۱ استفاده کنید.})$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^r}{12} . \quad 35 \quad (\text{از مساله ۳۱ استفاده کنید.})$$

۱۰. ۵. بسطهای نیم دامنه‌ای

در کاربردهای متنوع نیاز عملی به استفاده سری فوریه برای تابع $f(x)$ ای است که بر یک فاصله مثلاً بر فاصله $L \leq x \leq 0$ همانطور که شکل ۲۳۹ الف نشان می‌دهد، تعریف می‌شود. موارد نوعی در فصل بعدی (بخش‌های ۱۱.۳ و ۱۱.۵) در ارتباط با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح خواهد شد. گسترش $f(x)$ متناوب با دوره تناوب L و در این صورت نمایش تابع گسترش یافته را با یک سری فوریه، که در حالت کلی با جملات کسینوس و سینوس ظاهر می‌شوند می‌یابیم. برای این منظور از توابع کمکی می‌توان استفاده نمود، مثلاً توابعی که از گسترش زوج یا فرد $0 \leq x \leq L$ حاصل می‌شوند. تابع

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

و $f_1(x + 2L) = f_1(x)$ ، یک گسترش زوج تابع $f(x)$ است (شکل ۲۳۹ ب). همین طور گسترش فرد تابع را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

و $f_2(x + 2L) = f_2(x)$ (شکل ۲۳۹ ج). با توجه به قضیه ۱۰.۴ تابع $f_1(x)$ دارای سری فوریه کسینوسی و تابع $f_2(x)$ دارای سری فوریه سینوسی است که در فاصله $L \leq x \leq 0$ با $f(x)$ برابر استند. بدین جهت این سریهای فوریه به بسط نیم دامنه‌ای تابع $L \leq x \leq 0$ موسوم می‌باشند. بنابراین بسط نیم دامنه‌ای کسینوسی عبارت است از [ر. ک. (۳)، (۴) بخش ۱۰.۴]

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

که در آن

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

همین طور بسط نیم دامنه‌ای سینوسی به صورت زیر است [ر. ک. (۵)، (۶) بخش ۱۰.۱۰]

$$(3) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

که در آن

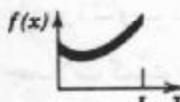
$$(4) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال ۱. تپه مثلثی و بسطهای نیم دامنه‌ای آن

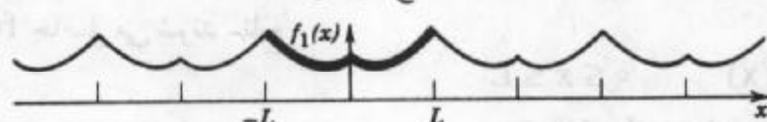
دو بسط نیم دامنه‌ای تابع زیر را یابید (شکل ۲۴۰)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & 0 < x < \frac{L}{2}, \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

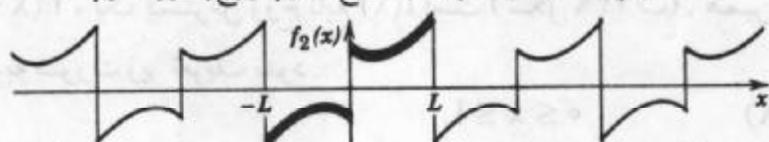
حل. (الف) گسترش زوج دوره‌ای. با توجه به (۴)، بخش ۴.۱۰ داریم



الف) تابع مفروض $f(x)$



ب) گسترش یافته $f_1(x)$ به صورت یک تابع متناوب زوج با دوره تناوب $2L$



ج) گسترش یافته $f_2(x)$ به صورت یک تابع متناوب فرد با دوره تناوب $2L$

شکل ۲۳۹. الف) تابع مفروض $f(x)$ بر بازه $0 \leq x \leq L$

ب) گسترش زوج در کل «برد» (بازه) $-L \leq x \leq L$ (منحنی پررنگ) و گسترش دوره‌ای

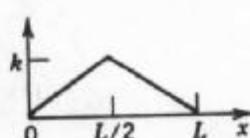
با دوره تناوب $2L$ بر روی محور x .

ج) گسترش فرد بر $-L \leq x \leq L$ (منحنی پررنگ) و گسترش دوره با دوره تناوب $2L$

بر روی محور x .

$$a_0 = \frac{1}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x dx + \frac{2k}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) dx \right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx + \frac{2\pi}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right].$$



شکل ۲۴۰. تابع مورد نظر در مثال ۱

حال با انتگرالگیری جزء به جزء می‌یابیم

$$\begin{aligned} \int_0^L x \cos \frac{n\pi}{L} x dx &= \frac{Lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} + \frac{L}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{L} - 1 \right). \end{aligned}$$

همینطور،

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = -\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} - \frac{L}{n\pi} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right).$$

با جایگزین کردن این نتایج در a_n داریم

$$a_n = \frac{4k}{n\pi} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right).$$

واز آنجا

$$a_1 = \frac{-16k}{\pi}, \quad a_2 = \frac{-16k}{6\pi}, \quad a_3 = \frac{-16k}{10\pi}, \dots$$

و به ازای ... $n \neq 2, 6, 10, 14, \dots$ می‌یابیم. بنابراین اولین بسط نیم دامنه‌ای تابع f عبارت است از

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{L} x + \frac{1}{6} \cos \frac{6\pi}{L} x + \dots \right).$$

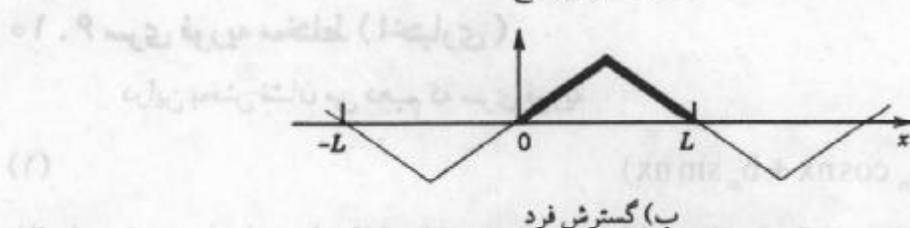
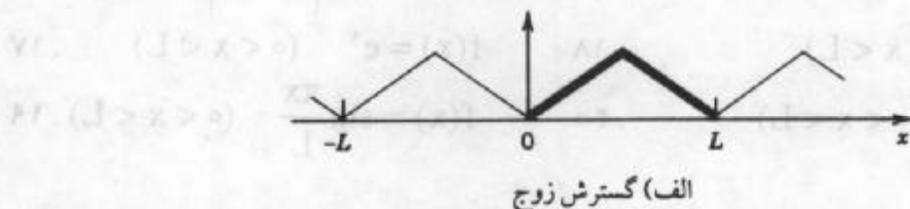
در واقع این سری کسینوسی سری فوریه‌ای است که از تابع گسترش یافته زوج $f(x)$ با دوره تناوب $2L$ حاصل شده است (شکل ۲۴۱ الف). بدیهی است که این سری در فاصله $L < x < 0$ با $f(x)$ برابر است.

(ب) گسترش فرد دوره‌ای. به طریق مشابه از (۶)، بخش ۴.۱۰ می‌توان نشان داد که

$$(5) \quad b_n = \frac{8k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

از این رو بسط نیم دامنه‌ای تابع f به صورت زیر است

$$f(x) = \frac{8k}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{L} x - \dots \right).$$



شکل ۲۴۱: گسترهای دوره‌ای $f(x)$ در مثال ۱

این سری بیانگر گسترش فرد دوره‌ای $f(x)$ با دوره تناوب $2L$ می‌باشد که در شکل ۲۴۱ ب نشان داده شده است.

مسائل بخش ۵.۱۰

هر یک از توابع f زیر را با سری سینوسی فوریه نمایش دهید و نمودار گسترش دوره‌ای متاظر با آن رارسم کنید.

$$f(x) = kx \quad (0 < x < L) \quad .2 \quad f(x) = k \quad (0 < x < L) \quad .1$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{L}x \quad (0 < x < L) \quad .4 \quad f(x) = x^r \quad (0 < x < L) \quad .3$$

$$f(x) = x^r \quad (0 < x < L) \quad .6 \quad f(x) = L - x \quad (0 < x < L) \quad .5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad .8 \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad .7$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .10 \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .9$$

توابع زیر را با سری کسینوسی فوریه نمایش داده و نمودار گسترش دوره‌ای متاظر با $f(x)$ رارسم کنید.

$$f(x) = 1 \quad (0 < x < L) \quad .12 \quad f(x) = x \quad (0 < x < L) \quad .11$$

$$f(x) = \sin^r \pi x \quad (0 < x < \pi) \quad .14 \quad f(x) = x^r \quad (0 < x < L) \quad .13$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .16 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 1 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .15$$

$$f(x) = x^r \quad (0 < x < L) \quad .18 \quad f(x) = e^x \quad (0 < x < L) \quad .17$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (0 < x < L) \quad .20 \quad f(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (0 < x < L) \quad .19$$

۶.۱۰ سری فوریه مختلط (اختیاری)

در این بخش نشان می‌دهیم که سری فوریه

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

با انجام برخی محاسبات ساده قابل بیان به صورت مختلط می‌باشد (مثال ۱ در ذیل ملاحظه کنید). این

عمل به کمک فرمول اویلر (۸)، بخش ۳.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

و مزدوج آن

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

صورت می‌گیرد. با قرار دادن $t = nx$ داریم

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad (2)$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx. \quad (3)$$

با جمع دو رابطه و تقسیم بر ۲ داریم

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}). \quad (4)$$

با تفکیق دو رابطه و تقسیم بر i و با توجه به تساوی $-i = \frac{1}{i}$ می‌یابیم

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = -\frac{i}{2}(e^{inx} - e^{-inx}). \quad (5)$$

با توجه به (۴) و (۵) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{2}a_n(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i}b_n(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}. \end{aligned}$$

وازانجا، (۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}) \quad (6)$$

که در آن $k_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ و $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ ، $c_0 = a_0$ و ازانجا با به (۶)، بخش ۲.۱۰ داریم

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$k_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx,$$

با فرض $k_{-n} = c_n$ فرمولهای (۶) و (۷) به صورت زیر خلاصه می‌شوند

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

سریها، انتگرالها، و تبدیلات فوریه

این سری را صورت مختلط سری فوریه یا به اختصار سری فوریه مختلط و c_n ها را ضرایب مختلط فوریه $f(x)$ می نامند.

باتوجه به مفروضات (۷) می یابیم $b_n = i(c_n - c_{-n})$ و $a_n = c_n + c_{-n}$

فرمولهای (۸) را به طور مستقل نیز می توان به دست آورد. با ضرب سری (۸) در e^{-imx}

به ازای یک عدد صحیح m و با انتگرالگیری از آن در فاصله $-\pi$ تا π می یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx.$$

به ازای $n \neq m$ داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \frac{1}{i(n-m)} (e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}) \\ &= \frac{1}{i(n-m)} 2i \sin((n-m)\pi) = 0, \end{aligned}$$

و به ازای $n = m$ می یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

باتوجه به نتایج فوق داریم

$$(9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx} dx = 2\pi c_m.$$

با جایگزین کردن n بجای m در تساوی فوق فرمول ضرایب سری فوریه مذکور در (۸) حاصل می شود.

بهمن طریق یک تابع با دوره تناوب $2L$ دارای یک سری فوریه مختلط به صورت زیر است:

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{inx}{L}} ; \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{inx}{L}} dx.$$

مثال ۱. سری فوریه مختلط

سری فوریه مختلط تابع $f(x+2\pi) = f(x)$ و $f(x) = e^x$ ؛ $-\pi < x < \pi$ را باید و باتوجه به آن

سری فوریه حقیقی آن را محاسبه کنید (کلمه حقیقی در مقابل کلمه مختلط است و منظور سری فوریه (۱)

با ضرایب (۲) از بخش 10° به ازای $x = \pi$ و $f(x) = e^x$ است).

حل. باتوجه به (۸) داریم

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

با ضرب صورت و مخرج در $1+in$ و با استفاده از $(-1)^n = (-1)^{in} = e^{i\pi n}$ می یابیم

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{1+in}{1+n} (-1)^n (e^\pi - e^{-\pi}).$$

باتوجه به اینکه $2\sinh \pi = e^\pi - e^{-\pi}$ ، صورت مختلط سری فوریه تابع مذبور عبارت است از

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (11)$$

باید بجهت اینکه $c_n = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n$ و $b_n = i(c_n - c_{-n})$ ، $a_n = c_n + c_{-n}$ ، $a_0 = c_0$ باشیم

$$a_0 = c_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi},$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = -\frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

باید نتایج حاصل داریم

$$\begin{aligned} e^x &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2} (\cos 2x - 2 \sin 2x) - \dots \right]$$

که در آن $-\pi < x < \pi$

مسائل بخش ۶.۱۰

۱. نشان دهید که ضرایب مختلط فوریه یک تابع فرد، موهومی محض و یک تابع زوج، حقیقی است.
۲. نشان دهید که $b_n = i(c_n - c_{-n})$ و $a_n = c_n + c_{-n}$ ، $n = 1, 2, \dots$ و به ازای هر ...
۳. سری فوریه مختلط تابع زیر را باید.

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi < x < 0, \\ 1; & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

۴. از روی سری فوریه مختلط تابع مذکور در مساله ۳ صورت حقیقی آن را باید.

۵. سری فوریه مختلط تابع f با ضابطه $\pi < x < -\pi$ را باید.

۶. سری فوریه مختلط تابع زیر را باید.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x < 0, \\ 1; & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

۷. سری فوریه مختلط تابع f با ضابطه $2\pi < x < 0$ را باید.

۸. سری فوریه مختلط تابع مذکور در مساله ۷ را به صورت یک سری فوریه حقیقی بنویسید.

۹. سری فوریه مختلط $\pi < x < -\pi$ ؛ $f(x) = x^7$ را باید.

۱۰. سری فوریه مختلط تابع مذکور در مساله ۹ را به صورت حقیقی تبدیل کنید.

۷. نوسانهای واداشته

سریهای فوریه در ارتباط با معادلات دیفرانسیل دارای کاربردهای مهمی هستند. برای تفهیم این موضوع، یک مساله علمی مهم را که شامل یک معادله دیفرانسیل است مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم (کاربردهای بیشتر در معادلات دیفرانسیل با مشتق‌ات جزئی که در فصل ۱۱ مطرح می‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند).

در بخش ۱۱.۲ آموختیم که نوسانهای واداشته جسمی به جرم m که متصل به یک فنر به مدویل k است در معادله

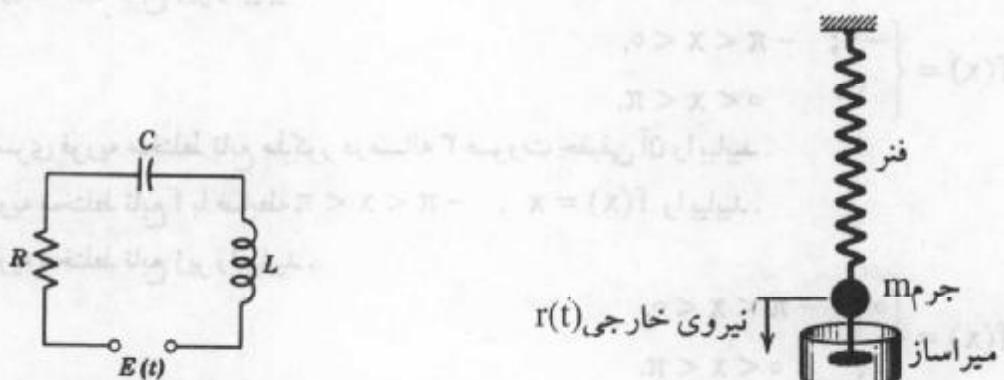
$$my'' + cy' + ky = r(t) \quad (1)$$

صدق می‌کند، که در آن $y = y(t)$ تغییر مکان از وضعیت تعادل، C ثابت میرایی، و $r(t)$ یک نیروی خارجی وابسته به زمان t است. شکل ۲۴۲ یک مدل را نشان می‌دهد و شکل ۲۴۳ یک آنالوگ الکتریکی است که یک مدار RLC را بیان می‌کند و بوسیله رابطه

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \quad (1')$$

بیان می‌شود (بخش ۱۲.۲ را ملاحظه کنید).

(۱) را در نظر می‌گیریم. هرگاه نیروی خارجی $r(t)$ تابعی سینوسی یا کسینوسی بوده و ثابت میرایی موجود باشد ($C > 0$)، در آن صورت جواب حالت پایدار نمایش نوسان همسازی است که فرکانس آن برابر فرکانس (t) است. در هر صورت اگر $r(t)$ تابعی سینوسی یا کسینوسی محض نبوده بلکه تابع دوره‌ای دلخواه باشد، آنگاه جواب



شکل ۲۴۲. سیستم ارتعاشی مربوط به مورد بررسی
شکل ۲۴۳ (مدار - RLC)

حالت پایدار ترکیبی از نوسانهای همساز است که فرکانس آنها $(t)^{\omega}$ و مضارب صحیح $(t)^r$ است. و اگر فرکانس یکی از این نوسانها نزدیک به فرکانس حالت تشدید دستگاه ارتعاشی باشد (بخش ۱۱.۲ را ملاحظه کنید)، آنگاه چنین نوسانی بخش عمده پاسخ دستگاه به نیروی خارجی است. البته این نتیجه برای ناظری که با نظریه ریاضی مربوطه که در مطالعه دستگاههای ارتعاش و حالت تشدید بسیار مهم است آشنا نیست شگفت انگیز است. مطالب فوق را با آوردن مثالی روشن می کنیم.

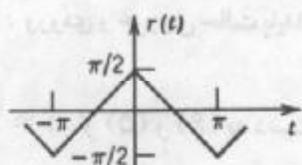
مثال ۱. نوسانهای واداشته حاصل از نیروی موثر دوره‌ای غیرسینوسی
اگر در (۱)، $m = 1$ ، (گرم بر ثانیه)، $c = 0/02$ و (گرم بر ثانیه) $k = 25$ ، آنگاه (۱) به صورت زیر درمی آید

$$y'' + 0/02y' + 25y = r(t) \quad (2)$$

که در آن (t) با (گرم در سانتیمتر بر مربع ثانیه) اندازه گیری شده است. هرگاه (شکل ۲۴۴)

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi, \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

آنگاه جواب حالت پایدار $y(t)$ را باید.



شکل ۲۴۴. نیروی مربوط به مثال ۱

حل. هرگاه $r(t)$ را با سری فوریه به صورت زیر نمایش دهیم

$$r(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3!} \cos 3t + \frac{1}{5!} \cos 5t + \dots \right) \quad (3)$$

(در جواب مساله ۱۱ از بخش ۵.۱ با $\pi = L$ را از $\frac{\pi}{2}$ کم کنیم) آنگاه معادله دیفرانسیل

$$y'' + 0/02y' + 25y = \frac{4}{n\pi} \cos nt \quad (n = 1, 3, \dots) \quad (4)$$

را که طرف راست آن تنها شامل یک جمله از سری (۳) است در نظر می گیریم. در بخش ۱۱.۲ مشاهده کردیم که $y_n(t)$ ، جواب حالت پایدار (۴) به صورت زیر می باشد

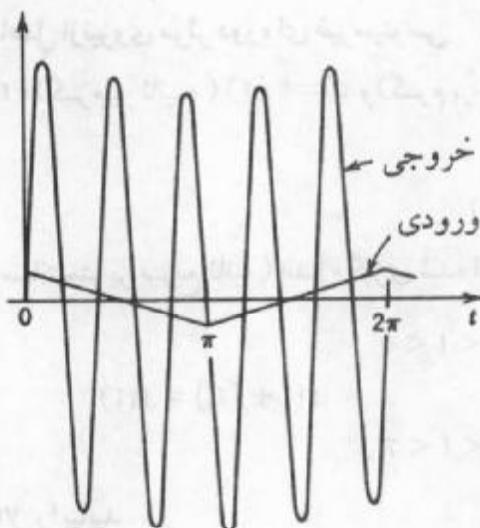
$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt. \quad (5)$$

با جایگزین کردن این y در (۴) می باییم

$$A_n = \frac{4(25-n)}{n\pi D}, \quad B_n = \frac{0/0\lambda}{n\pi D} \quad (6)$$

که در آن $D = (25-n)^2 + (0/0\lambda)^2$ خطی است، انتظار می‌رود جواب حالت پایدار به صورت

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad (7)$$



شکل ۲۴۵. ورودی و خروجی حالت پایدار مربوط به مثال ۱

باشد که در آن y به ازای $n = 1, 2, \dots$ از (۵) و (۶) به دست می‌آید. در واقع درستی این ادعا به سادگی از جایگزینی (۷) در (۲) و استفاده از سری فوریه (t) نتیجه می‌شود، مشروط براینکه مشتقگیری جمله به جمله از (۷) مجاز باشد (متعلمینی که قبلاً با مفهوم همگرایی یکنواخت [بخش ۱۴، آشنا شده اند می‌توانند ثابت کنند که از (۷) می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت).

از (۶) دامنه (۵) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n\pi\sqrt{D}}.$$

برخی از مقادیر عددی آنها عبارت اند از

$$C_1 = 0/0530$$

$$C_2 = 0/0088$$

$$C_3 = 0/0100$$

$$C_4 = 0/0011$$

$$C_5 = 0/0003.$$

به ازای $n = 5$ مقدار D بسیار کوچک است، مخرج C_5 کوچک است، و C_5 خیلی بزرگ است، به

طوری که لا تنهای جمله قابل ملاحظه در (۷) است. این نشان می دهد که حرکت حالت پایدار تقریباً نوسانی همساز با فرکانسی پنج برابر نیروی موثر است (شکل ۲۴۵).

کاربردهای بیشتر سریهای فوریه در ارتباط با سیستم‌های ارتعاشی، انتقال گرما، و مسائل دیگر در فصل ۱۱ ارائه می شوند.

مسائل بخش ۷.۱۰

۱. چه تغییری در ضریب C_n ، مثال ۱ ایجاد می شود (همچنین به شکل ارتعاشی دستگاه) اگر مقدار ثابت فتر به ۹ تغییر یابد؟ اگر یک فتر محکمتر با $k = ۴۹$ به کار بریم چه اتفاقی می افتد؟ آیا میراثی افزایش می یابد؟

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + \omega^2 y = r(t)$ را طوری باید که در آن

$$r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t \quad (\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2) \quad .2$$

$$r(t) = \sin t, \quad \omega = 0/1, 0/7, 0/9, 1/1, 1/5, 2/9, 10/9 \quad .3$$

$$r(t) = \sin t + \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t, \quad \omega = 0/5, 0/9, 1/1, 2/9, 3/1, 4/9, 5/1, 6, 8 \quad .4$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \dots, N \quad .5$$

$$r(t) = \frac{\pi}{4} |\sin t| ; -\pi < t < \pi; r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 2, 4, \dots \quad .6$$

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi; & -\pi < t < 0 \\ -t + \pi; & 0 < t < \pi \end{cases}; r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 1, 3, \dots \quad .7$$

$$r(t) = \begin{cases} t; & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t; & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}; r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 3, 5, \dots \quad .8$$

نوسان حالت پایدار متاظر با $y'' + cy' + y = r(t)$ را طوری باید که در آن $c > 0$ و

$$r(t) = \sin 3t. \quad .11 \quad r(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt. \quad .10 \quad r(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos nt. \quad .9$$

$$r(t) = \begin{cases} \frac{\pi t}{4} & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi(\pi-t)}{4} & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}; \quad r(t+2\pi) = r(t) \quad .12$$

$$r(t) = \frac{t}{12}(\pi^2 - t^2); \quad -\pi < t < \pi, r(t+2\pi) = r(t) \quad .13$$

$$R = 100, \quad I(t)(RLC - 243) \quad .14$$

اهم، $C = 10^{-7}$ هانتری، $L = 10$ فاراد،

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & 0 < t < \pi \end{cases}, \quad E(t+2\pi) = E(t),$$

را محاسبه کنید. برای حل مساله به شرح زیر عمل کنید: سری فوریه $E(t)$ را باید با توجه به آن $I(t)$ به صورت سری مثلثاتی درمی‌آید. فرمولهای عمومی ضرایب این سری را تعیین کنید. مقادیر عددی چند ضریب اول را محاسبه کنید. نمودار مجموع چند جمله اول سری مزبور را رسم کنید.

۱۵. مساله ۱۴ را برای مدار RLC با

$$E(t) = 200(\pi^2 - t^2)t; -\pi < t < \pi$$

و $E(t+2\pi) = E(t)$ حل کنید.

۱۰. تقریب بوسیله چند جمله ایهای مثلثاتی

همانطور که قبلاً متذکر شدیم یکی از کاربردهای وسیع سریهای فوریه در معادلات دیفرانسیل است. یکی دیگر از کاربردهای جالب سریهای فوریه محاسبه تقریبی یک تابع دلخواه به کمک توابع ساده تر است. این موضوع به نظریه تقریب موسوم است. در ذیل به بررسی آن می‌پردازیم.

فرض کنید $f(x)$ تابع مفروضی با دوره تناوب 2π باشد که بتوان آن را به صورت یک سری فوریه نمایش داد. آنگاه مجموع جزئی N ام سری فوریه تقریبی برای تابع f است، یعنی

$$(1) \quad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

طبیعی است برسیم که آیا (1) «بهترین» تقریبی برای تابع f توسط یک چند جمله‌ای مثلثاتی با درجه N (ثابت) است، یعنی یافتن یک تابع به صورت

$$(2) \quad F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

است که به ازای آن «خطای» تقریب می‌نیمم باشد.

نخست به تعریف E ، خطای مورد نظر، می‌پردازیم. در این راستا تعریفی را برمی‌گزینیم که میزان نزدیکی مقادیر توابع f و F را بر فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ - بنحو شایسته‌ای نشان دهد. واضح است که ما کزیم $|F-f|$ برای این منظور مناسب نیست، در شکل ۲۴۶ نشان داده شده که تابع F تقریب خوبی برای تابع f است، ولی مقدار $|F-f|$ در نقاط نزدیک به x بزرگ است. بدینجهت ما مقدار خطای را مطابق فرمول زیر تعریف می‌کنیم

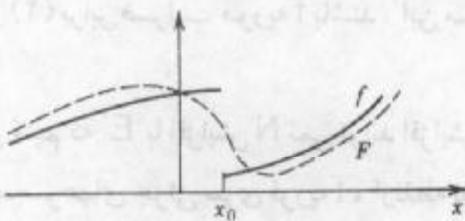
$$(3) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx.$$

واضح است که $E \geq 0$. راخطای مربعی تام F نسبت به تابع f بر فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ - می‌نامیم.

به ازای N ثابت و مشخص، ضرایب را در (۲) طوری تعیین می کنیم که E می نیم شود.

نظر به اینکه $(f - F)' = f' - 2fF + F'$ داریم

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f' dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f F dx + \int_{-\pi}^{\pi} F' dx \quad (4)$$



شکل ۲۴۶. خطای تقریب

با جایگزین کردن (۲) در انتگرال آخر و محاسبه انتگرالهای حاصل (مانند بخش ۱۰.۲) مشاهده می کنیم که همه جملات $\sin nx$ و $\cos nx$ به ازای $n \geq 1$ دارای انتگرال π و همه جملات به صورت $(\cos mx)(\sin nx)$ دارای انتگرال صفر است. لذا می باییم

$$\int_{-\pi}^{\pi} F' dx = \pi(2\alpha'_0 + \alpha'_1 + \dots + \alpha'_N + \beta'_1 + \dots + \beta'_N).$$

با قراردادن (۲) در انتگرال دوم (۴)، مشاهده می کنیم که انتگرالهای حاصل همان انتگرالهای فرمول اویلر (۶)، بخش ۱۰.۲ هستند و به دست می آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f F dx = 2(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_N b_N),$$

و از آنجا (۴) به صورت زیر در می آید

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f' dx - 2\pi \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] + \pi \left[2\alpha'_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha'_n + \beta'_n) \right]. \quad (5)$$

اگر در (۲) فرض کنیم $\beta_n = b_n$ و $\alpha_n = a_n$ ، آنگاه با توجه به (۵) مشاهده می کنیم که خطای مربعی متناظر با چنین انتخابی برای ضرایب F عبارت است از

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f' dx - \pi \left[2a_0 + \sum_{n=1}^N (a'_n + b'_n) \right]. \quad (6)$$

با کم کردن (۶) از (۵) می باییم

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)' + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)' + (\beta_n - b_n)'] \right\}.$$

نظر به اینکه هر جمله در طرف راست مربع یک عدد حقیقی و در نتیجه نامتفاوت است، بنابراین

$\beta_N = b_N$ ، $\alpha_0 = a_0$ و $E \geq E^*$ اگر فقط اگر $E - E^* \geq 0$.

تابع حاصل را در قضیه ذیل ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱ (خطای مربعی می‌نیم)

خطای مربعی تام F در (۲) با N ثابت نسبت به تابع f بر فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ می‌نیم است اگر و فقط اگر ضرایب F در (۲) برابر ضرایب فوریه f باشند. این مقدار می‌نیم از (۶) به دست می‌آید.

بنابر (۶) مشاهده می‌کنیم که E^* با افزایش N نمی‌تواند افزایش یابد. بلکه ممکن است نزول کند. بنابراین، با افزایش N ، مجموعهای جزئی سری فوریه f ، از نقطه نظر خطای مربعی تقریب‌های بهتر و بهتری از $f(x)$ به دست می‌دهند.

نظر به اینکه $E^* \geq 0$ و (۶) به ازای هر N برقرار است از (۶) نامساوی مهمی موسوم به نامساوی بسل^{۱۰}

$$2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \quad (7)$$

در صورت موجود بودن انتگرال طرف راست برای ضرایب فوریه f حاصل می‌شود. می‌توان نشان داد که (مرجع [C14]) را ملاحظه کنید) به ازای هر تابع f ، قضیه پارسوال، یعنی فرمول (۷) با علامت تساوی به جای ناییشتی برقرار است، یعنی همواره داریم

$$2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx. \quad (8)$$

این فرمول به قرمول «اتحاد پارسوال»^{۱۱} موسوم است.

مثال ۱. خطای مربعی برای موج دندانه اره‌ای

خطای مربعی تام تابع F به ازای $3 = N$ برای تابع f با ضابطه

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi)$$

بر فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ موسوم به تابع دندانه اره‌ای را بیایید (شکل ۲۳۸ الف، بخش ۱۰.۴.۱). ملاحظه کنید).

حل. با توجه به مثال ۲، بخش ۱۰.۴.۴ داریم $F(x) = \pi + 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x$. با توجه به آن و (۶) می‌باییم

۱۰- به زیرنویس ۱۲ در بخش ۵.۵ ملاحظه کنید.

۱۱- مارک آنتون پارسوال MARC ANTOINE PARSEVAL (۱۷۵۵-۱۸۳۶)، یک ریاضیدان فرانسوی است. یک تعبیر فیزیکی از این اتحاد در بخش بعد ارائه می‌شود.

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^r dx - \pi \left[2\pi^r + 2^r + 1^r + \left(\frac{2}{3}\right)^r \right],$$

از این رو

$$E^* = \frac{8}{3}\pi^r - \pi(2\pi^r + \frac{49}{9}) \approx 3/567.$$

در شکل ۲۳۸ ب نشان داده شده است، و گرچه $|f(x) - F(x)|$ در نقاط $x = \pm\pi$ بزرگ است (چرا بزرگ؟)، که در آن f ناپیوسته است، F تقریباً با f بر کل فاصله برابر است.

در انتهای بحث سریهای فوریه، مجدداً تأکید بر تمرین هرچه بیشتر روی این سریها به منظور استفاده هرچه بیشتر از آنها در مطالعه کاربردی داریم. در چهار بخش آینده این فصل به چگونگی تعمیم ایده‌ها و تکنیکهای سریهای فوریه برای توابع غیر متناوب می‌پردازیم.

مسائل بخش ۸.۱۰

۱- فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi < x < 0 \\ 1; & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

آنگاه تابع F مذکور در (۲) را طوری بباید که خطای مربعی تام (۳) می‌نمیم باشد.

۲. خطای مربعی می‌نمیم مساله ۱ را به ازای $N = 1, 3, 5, 7$ محاسبه کنید. کوچکترین N ای را بباید که به ازای آن $E^* \leq 0/2$ باشد.

۳. نشان دهید که خطای مربعی می‌نمیم (۶) تابعی نزولی یکنواز N است.

در هریک از مسائل زیر، تابع F به صورت (۲) را طوری بباید که خطای مربعی تام E بر فاصله $\pi \leq x \leq -\pi$ -می‌نمیم باشد و این مقدار می‌نمیم را به ازای $N = 1, 2, \dots, 5$ و $\pi < x < -\pi$ محاسبه کنید.

$$f(x) = x \quad .5 \quad f(x) = |x| \quad .4$$

$$f(x) = x^r \quad .7 \quad f(x) = \frac{x(\pi^r - x^r)}{12} \quad .6$$

$$f(x) = \begin{cases} x; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0; & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad .9 \quad f(x) = \begin{cases} -\pi - x; & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x; & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad .8$$

۱۰. سرعت کاهش خطای مربعی برای تابع تایپوسته در مساله ۵ و تابع پیوسته در مساله ۷ را با هم

مقایسه کرده و روی آن بحث کنید.
با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید که

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{96} \quad (از مساله ۲۷، بخش ۱۰ استفاده کنید.)$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (از مساله ۵، بخش ۱۰ استفاده کنید.)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{90} \quad (از مساله ۹، بخش ۱۰ استفاده کنید.)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{3\pi}{4} \quad .15 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx = \frac{3\pi}{4} \quad .14$$

۹.۱۰ انتگرال‌های فوریه

سریهای فوریه ابزار پرقدرتی برای حل مسائل گوناگونی است که شامل توابع دوره‌ای هستند. در بخش ۱۰.۷ با چند مورد آنها مواجه شدیم و در فصل ۱۱ کاربردهای بیشتری از آنها را ملاحظه خواهیم کرد. نظر به اینکه حل تعداد زیادی از مسائل عملی به توابع غیر دوره‌ای برمی‌گردد، بنابراین بجا است که مطالب ارائه شده در مورد سریهای فوریه را طوری تعمیم دهیم که توابع غیردوره‌ای رانیز در برگیرند. درمثال ۱ سری فوریه یک تابع خاص $(x)_L f_L$ با دوره تناوب $2L$ را درنظر می‌گیریم. دراین سری فوریه فرض می‌کنیم $\infty \rightarrow L$ وضعیت سری را با چنین فرضی بررسی می‌کنیم. سپس یک تابع دلخواه $(x)_L f_L$ با دوره $2L$ را درنظر می‌گیریم و در آن فرض می‌کنیم $\infty \rightarrow L$ و با توجه به آن به انتگرالی دست می‌یابیم که اساسی ترین نتایج این بخش است (انتگرال ارائه شده در قضیه ۱ دراین بخش)

مثال ۱. موج مریعی

موج مریعی دوره‌ای $(x)_L f_L$ با دوره تناوب $2 > 2L$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را درنظر می‌گیریم

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 ; & -L < x < -1 \\ 1 ; & -1 < x < 1 \\ 0 ; & 1 < x < L. \end{cases}$$

قسمت چپ شکل ۲۴۷ نشان دهنده تابع $(x)_L f_L$ به ازای $2L = 4, 8, 16$ است. هرگاه $\infty \rightarrow L$ آنگاه به تابع غیر دوره‌ای زیر می‌رسیم

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 ; & -1 < x < 1, \\ 0 ; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

هم اکنون ضرایب فوریه تابع f_L را وقتی L افزایش می‌یابد بررسی می‌کنیم. هرگاه L تابعی

زوج باشد، آنگاه به ازای هر $n = 0^\circ$ باتوجه به فرمولهای اویلر (۲)، بخش 3.1° می‌بایم

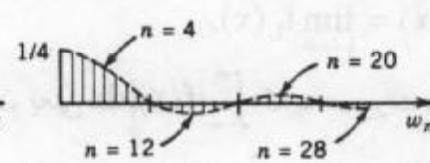
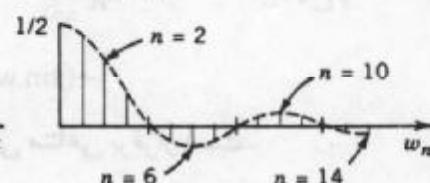
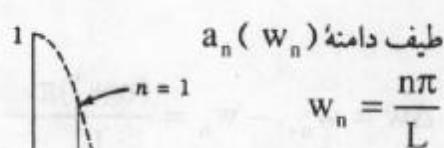
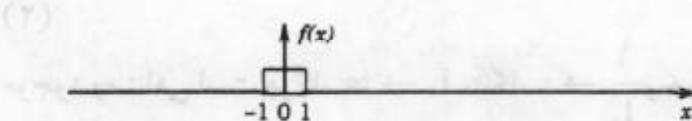
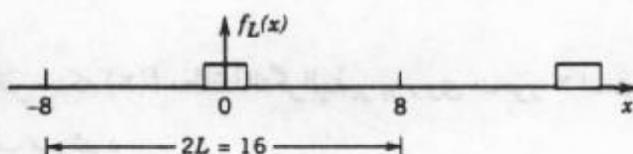
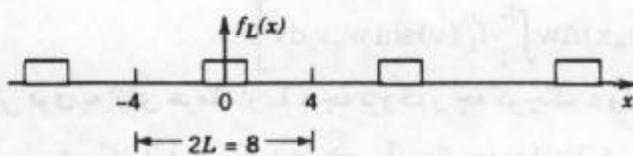
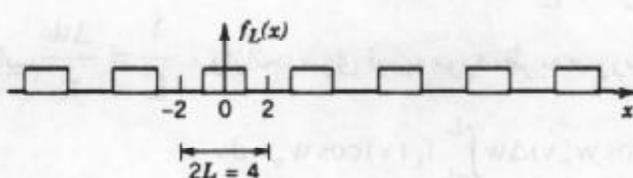
$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx = \frac{1}{L}, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{L} \right)}{\frac{n\pi}{L}}.$$

این دنباله از ضرایب سری فوریه طیف دامنه f نامیده می‌شود زیرا $|a_n|$ ماکریم دامنه موج $a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$ است. شکل ۲۴۷ طیف برای دوره‌های $2L = 4, 8, 16$ را نشان می‌دهد. مشاهده

می‌کنیم که برای افزایش L دامنه بیشتر متمرکز روی محور w_n می‌شود جائی که $w_n = \frac{n\pi}{L}$ است.

در حقیقت به ازای $2L = 4, 8, 16$ مقادیر $7, 3, 1$ را داریم که مقدار دامنه در نیم موج تابع $\frac{\sqrt{\sin w_n}}{Lw_n}$ است (روی نمودار به صورت خط چین ترسیم شده است). از این رو به ازای $2L = 2^{k-1} - 1$ مقدار $1 - 2^k$ دامنه برای نیم موج است، این دامنه‌ها در مقادیر مثبت w_n متمرکز می‌شوند (و به صفر نزول می‌کند).

شکل موج ($f_L(x)$)



شکل ۲۴۷. شکل موج و طیف دامنه در مثال ۱

هم اکنون یک تابع دوره‌ای دلخواه f_L با دورهٔ تناوب L را که سری فوریه آن به صورت زیر می‌باشد، درنظر می‌گیریم

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{n\pi}{L}.$$

وضعیت این سری فوریه را وقتی که $\rightarrow L$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. از نتیجه فوق بامحاسبات انجام شده در مثال ۱ چنین استنباط می‌شود که اگر $\rightarrow L$ ما باید انتظار یک انتگرال (به جای یک سری) شامل $\sin wx$ و $\cos wx$ ، که در آن w یک عدد غیر صحیح بوده و کلیه مقادیر را اختیار می‌کند داشته باشیم، شکل این انتگرال را نیز می‌خواهیم بیاییم.

هرگاه متغیر انتگرال‌گیری در a_n و b_n فرمولهای اویلر (۲)، بخش ۳۰.۳ را به ۷ نمایش داده و سپس آنها را در سری فوریه (x) f_L جایگزین کنیم داریم

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right].$$

با قرار دادن

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

می‌باییم $\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}$ ، و از آنجا سری فوریه مورد نظر به صورت زیر در می‌آید

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + (\sin w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right]. \quad (1)$$

نمایش فوق به ازای هر مقدار L ، چه بزرگ و چه کوچک، ولی متناهی برقرار است.

هم اکنون فرض کنید $\rightarrow L$. با توجه به این فرض تابع غیر دوره‌ای زیر حاصل می‌شود

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x).$$

با فرض اینکه $f(x)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر بر روی محور x است، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\infty} |f(x)| dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^b |f(x)| dx \quad (2)$$

موجود و متناهی است هرگاه $\rightarrow L$ ، آنگاه $\rightarrow \frac{1}{L}$ و جمله اول (۱) به سمت صفر میل می‌کند و

باتوجه به اینکه $\Delta w = \frac{\pi}{L}$ سری فوریه (۱) به صورت انتگرال توسعی (نامرسه) از صفر تا ∞ در

می آید، به عبارت دیگر با فرض $\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = 0$ می پایم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv] dw. \quad (3)$$

با قرار دادن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (4)$$

می توان نوشت

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw. \quad (5)$$

نمایش فوق به انتگرال فوریه تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر $f(x)$ موسوم است.

واضح است که نقطه نظرات ما از حدس به بیان (۵) رسیده و هیچ استدلالی بر آن استوار نیست. حد سری (۱) وقتی $w \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل کند، تعریف انتگرال (۳) نیست. شرایط کافی برای برقراری (۵) در قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۱ (انتگرال فوریه)

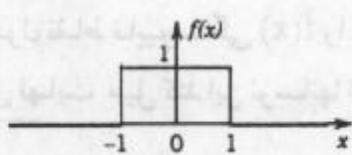
هرگاه $f(x)$ در هر فاصله متناهی به طور تکه‌ای پیوسته (بخش ۱.۶ را مشاهده کنید) و در هر نقطه دارای مشتق راست و مشتق چپ باشد (بخش ۲.۱۰ را ملاحظه کنید) و انتگرال (۲) موجود باشد، آنگاه $f(x)$ را می‌توان به صورت یک انتگرال فوریه نمایش داد. در نقطه‌ای که $f(x)$ ناپیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه برابر میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در آن نقطه است (۲.۱۰ را ملاحظه کنید). (اثبات آن را در مرجع [C14]، ضمیمه ۱ مشاهده کنید).

کاربرد اساسی انتگرال فوریه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی است که در بخش ۱۱.۱۴ ارائه می‌شوند و از انتگرال فوریه برای محاسبه برخی انتگرال‌های توسعی همانند آنچه در مثال زیر ارائه می‌شود استفاده می‌کنند.

مثال ۲. تپه منفرد، انتگرال سینوسی

نمایش انتگرال فوریه تابع زیر را بباید (شکل ۲۴۸)

$$f(x) = \begin{cases} 1; & |x| < 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$



شکل ۲۴۸. مثال ۲

حل . با توجه به (۴) می‌یابیم

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos wv dv = \frac{\sin wv}{\pi w} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{\pi w},$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin wv dv = 0.$$

واز آنجا (۵) به صورت زیر در می‌آید

$$(6) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw.$$

میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در $x=1$ برابر $\frac{1}{2}(1+0)$ یا مساوی $\frac{1}{2}$ است .

بنابراین از (۶) و قضیه ۱ جواب موردنظر حاصل می‌شود

$$(7*) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & 0 \leq x < 1, \\ \frac{\pi}{4}; & x = 1, \\ 0; & x > 1. \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که این انتگرال به عامل ناپیوسته دیریکله^{۱۲} موسوم است . حالت $x=0$ را که مورد علاقه ویژه ما است بررسی می‌کنیم . وقتی $x=0$ ، آنگاه

$$(7) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}.$$

مشاهده می‌کنیم که این انتگرال حد انتگرال سینوسی

$$(8) \quad Si(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} dw$$

وقتی که $z \rightarrow \infty$ (حقيقي است) ، می‌باشد . نمودار $Si(z)$ در شکل ۲۴۹ ترسیم شده است . در مورد یک سری فوریه ، نمودارهای مجموعهای جزئی ، منحنیهای تقریبی منحنی تابع دوره‌ای نمایش داده شده با سری فوریه هستند . همین طور ، در مورد انتگرال فوریه (۵) ، تقریبها از تعویض ∞ با عدد a به دست می‌آید . بنابراین انتگرال

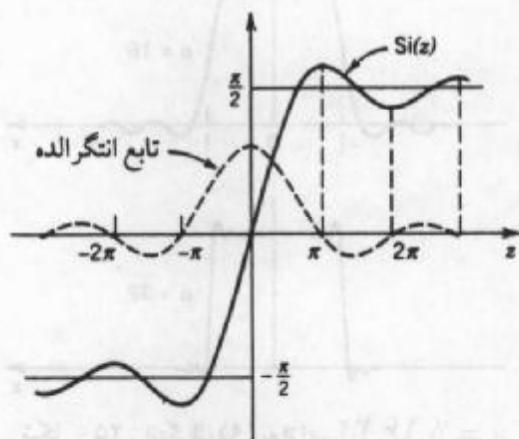
$$(9) \quad \int_a^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

تقریبی برای انتگرال (۶) و درنتیجه تقریبی برای $f(x)$ است (شکل ۲۵۰ را ملاحظه کنید) . شکل ۲۵۰ نوسانات در حول نقاط ناپیوستگی $f(x)$ را نشان می‌دهد . ممکن است انتظار داشته باشیم وقتی که a به سمت بی‌نهایت میل کند این نوسانها از بین بروند ، ولی چنین نیست ، با

۱۲ - به زیرنویس ۱۶ ، بخش ۸.۹ ملاحظه کنید .

افزایش a ، اینها هرچه بیشتر به نقاط $\pm x = a$ نزدیک می‌شوند. این رفتار غیرمنتظره، که در ارتباط با سری فوریه نیز اتفاق می‌افتد، به پدیده گیبس^۳ موسوم است. این مطلب را می‌توان با نمایش (۹) بر حسب انتگرال سینوسی به صورت زیر بیان نمود. با استفاده از (۱۱) از ضمیمه ۱ داریم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w + wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w - wx)}{w} dw.$$



شکل ۲۴۹. انتگرال سینوسی (x)

با قراردادن $t = w + wx$ در انتگرال اول می‌یابیم $\frac{1}{w} dw = \frac{1}{t} dt$ و $w = 0$ با $t = 0$ متناظر قرار می‌گیرد. همین طور در انتگرال آخر تغییر متغیر $w = -t$ داده و با این تغییر متغیر می‌یابیم $\frac{1}{w} dw = -\frac{1}{t} dt$ و فاصله $0 \leq w \leq a$ به فاصله $0 \leq t \leq (x-1)a$ تبدیل می‌شود. نظر به اینکه $\sin(-t) = -\sin t$ می‌یابیم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{(x-1)a}^0 \frac{\sin t}{t} dt.$$

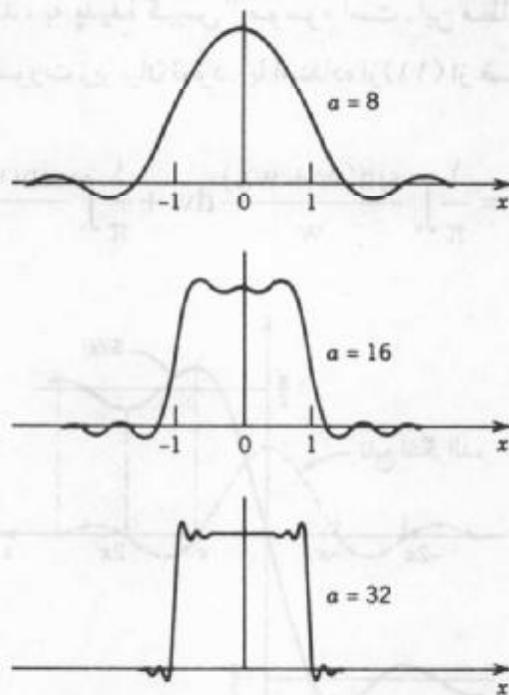
باتوجه به تساوی فوق و (۸) انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{\pi} Si(a(x+1)) - \frac{1}{\pi} Si(a(x-1)),$$

ونوسانهای واقع در شکل ۲۵۰ از نوسانهای شکل ۲۴۹ حاصل می‌شوند. افزایش a می‌تواند باعث

۱۳- جوسایا ویلارد گیبس JOSIAH WILLARD GIBBS (۱۸۴۹ - ۱۹۰۳)، ریاضیدان آمریکایی است. او پروفسور ریاضی - فیزیک در دانشگاه Yale از سال ۱۸۷۱ بود یکی از بنیانگذاران حساب برداری، ترمودینامیک ریاضی، و مکانیکهای آماری می‌باشد. اثارش سبب توسعه ریاضی فیزیک گردید.

تبدیل مقیاسی بر محور شده و سبب انتقال نوسانات گردد.



شکل ۲۵: انتگرال (۹) به ازای $a = 8, 16, 32$

انتگرال‌های سینوسی و کسینوسی فوریه

برای هر تابع زوج یا فرد انتگرال فوریه ساده‌تر می‌شود. دقیقاً در این حالت نیز مانند سریهای فوریه (بخش ۴.۱۰) محاسبات کاهش می‌یابد. در واقع اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، آنگاه $B(w) = 0$ و در (۴) داریم

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv \quad (10)$$

و انتگرال فوریه (۵) به صورت زیر درمی‌آید که به انتگرال کسینوسی فوریه موسوم است.

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx dw \quad (11). \text{ زوج}$$

به طریق مشابه، اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $A(w) = 0$ و در (۴) داریم

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv dv, \quad (12)$$

و انتگرال فوریه (۵) به شکل زیر درمی‌آید که آن را انتگرال سینوسی فوریه می‌نامند

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx dw \quad (13). \text{ فرد}$$

محاسبه انتگرال‌ها

از نمایش انتگرال فوریه برای محاسبه برخی انتگرال‌ها استفاده می‌کنیم. چگونگی انجام این

کار را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

مثال ۳. انتگرالهای لاپلاس

انتگرالهای سینوسی و کسینوسی فوریه تابع f با ضابطه

$$f(x) = e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

را بیابید.

حل. (الف) باتوجه به (۱۰) داریم

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kv} \cos wv dv.$$

حال با انتگرالگیری جزء به جزء می یابیم

$$\int e^{-kv} \cos wv dv = -\frac{k}{k^r + w^r} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right).$$

هر گاه $v = 0$ ، آنگاه عبارت طرف راست مساوی $\frac{k}{k^r + w^r}$ است و هنگامی v به سمت بی نهایت میل می کند، عبارت فوق به علت وجود عامل نمایی به سمت صفر میل می کند. بنابراین

$$A(w) = \frac{\frac{1}{2}k}{\pi(k^r + w^r)}. \quad (14)$$

با جایگزینی آن در (۱۱) نمایش انتگرال کسینوسی فوریه

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{\frac{1}{2}k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^r + w^r} dw \quad (x > 0, k > 0)$$

حاصل می شود. باتوجه به این نمایش مشاهده می کنیم که

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^r + w^r} dw = \frac{\pi}{\frac{1}{2}k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0). \quad (15)$$

(ب) به همین طریق، بنا به (۱۲) داریم

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kv} \sin wv dv.$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء می یابیم

$$\int e^{-kv} \sin wv dv = -\frac{w}{k^r + w^r} e^{-kv} \left(\frac{k}{w} \sin wv + \cos wv \right).$$

این مقدار به ازای $v = 0$ برابر $\frac{w}{k^r + w^r}$ و وقتی که $v \rightarrow \infty$ برابر صفر است. بنابراین

$$B(w) = \frac{\frac{1}{2}w}{\pi(k^r + w^r)}. \quad (16)$$

با جایگزینی (۱۶) در (۱۳) می یابیم

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{\frac{1}{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{w \sin wx}{k^r + w^r} dw.$$

باتوجه به آن مشاهده می کنیم که

$$\int_0^\infty \frac{w \sin wx}{k^r + w^r} dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0). \quad (17)$$

انتگرال‌های (15) و (17) به انتگرال‌های لاپلاس موسوم‌اند.

مسائل بخش ۹.۱

با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw + w \sin xw}{1+w^r} dw = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 \\ \pi e^{-x} & ; x > 0 \end{cases} \quad .1 \quad \text{از (5) استفاده کنید.}$$

$$\int_0^\infty \frac{w^r \sin xw}{w^r + 1} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x; \quad x > 0 \quad .2 \quad \text{از (13) استفاده کنید.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw}{1+w^r} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x}; \quad x > 0 \quad .3 \quad \text{از (11) استفاده کنید.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos xw}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & ; x = 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases} \quad .4 \quad \text{از (11) استفاده کنید.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi w \sin xw}{1-w^r} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; x > \pi \end{cases} \quad .5 \quad \text{از (13) استفاده کنید.}$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \pi w}{w} \sin xw dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; 0 < x < \pi \\ 0 & ; x > \pi \end{cases} \quad .6 \quad \text{از (13) استفاده کنید.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right) \cos xw}{1-w^r} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & ; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad .7 \quad \text{از (11) استفاده کنید.}$$

هریک از توابع زیر را به صورت (11) نمایش دهید.

$$f(x) = \begin{cases} x^r & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases} \quad .9 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases} \quad .8$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad x \geq a \end{cases}$$

$$11 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}; & 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{x}{4}; & 1 < x < 4 \\ 0; & x > 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^r}$$

[۱۵] . ک. ۱۳

$$f(x) = \begin{cases} a^x - x^a & ; 0 < x < a \\ 0 & ; x \geq a \end{cases}$$

$$f(x) = e^{-x} + e^{-rx} \quad (x > 0)$$

اگر $f(x)$ دارای نمایشی به صورت (11) باشد، آنگاه نشان دهید که

$$f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos xw dw \quad (a > 0)$$

$$xf(x) = \int_0^{\infty} B^*(w) \sin xw dw ; \quad B^* = -\frac{dA}{dw}, \quad ١٦ . A \text{ مطابق (١٠) تعریف می شود}$$

$$x^r f(x) = \int_0^\infty A^*(w) \cos x w dw; \quad A^* = -\frac{d^r A}{dw^r} \quad . \quad 14$$

۱۸. با استفاده از فرمول مساله ۱۷ در نتیجه مساله ۸، به حل مساله ۹ پیردازید.

^{۱۹}. درستی فرمول مذکور در مقاله ۱۶ را به ازای

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad x \geq a \end{cases}$$

تحقیق کنید.

۲۰. نشان دهید که $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$ نمی تواند دارای انتگرال فوریه باشد.

۱۰. تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه

یک تبدیل انتگرالی ، یک تبدیل از حاصلضرب چند تابع مفروض در چند تابع مفروض دیگر است که بستگی به متغیر های متفاوت دارند و به شکل یک انتگرال ظاهر می شود. این تبدیلات ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ، معادلات با مشتقهای جزئی ، و معادلات انتگرالی هستند. تبدیل لاپلاس ارائه شده در فصل ۶ یک نوع تبدیل انتگرالی است که دارای کاربردهای متنوع در مسائل مهندسی است. تبدیلات فوریه نیز همانند تبدیلات لاپلاس ، از نقطه نظر کاربردی ، از اهمیت خاصی برخوردار هستند. چنانچه مشاهده خواهیم کرد تبدیلات فوریه را می توان از روی نمایشگاهی انتگرالهای فوریه مذکور در بخش ۹.۱۰ به دست آورد. در این بخش به بررسی دونوع تبدیل فوریه می پردازیم. این تبدیلات ، تبدیلات کسینوس و سینوس ، فوریه هستند که با مقادیر حقیقی می باشند. در بخش بعد

به معروفی تبدیل فوریه ای می‌پردازیم که با مقادیر مختلف است.

تبدیلات کسینوسی فوریه

هرگاه $(x) f$ تابعی زوج باشد، آنگاه انتگرال فوریه آن به صورت زیر است

$$f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx dw \quad (1\text{ الف})$$

که در آن

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv dv \quad (1\text{ ب})$$

[(10) و (11)، بخش ۹.۱۰ را مشاهده کنید]. با فرض $A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f}_c(w)$ ، که در آن C در

اندیس به معنی «کسینوس» است. با این فرض و قرار دادن x به جای v ، (1ب) به صورت زیر در می‌آید

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx \quad (2)$$

و از (1 الف) نتیجه می‌شود

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(w) \cos wx dw. \quad (3)$$

توجه! در (2) ما نسبت به x و در (3) ما نسبت به w انتگرال می‌گیریم. فرمول (2) از تابع $f(x)$ تابع جدید $\hat{f}_c(w)$ را به دست می‌دهد که به تبدیل کسینوسی فوریه $f(x)$ موسوم است. در فرمول (3) که از روی $\hat{f}_c(w)$ حاصل می‌شود تبدیل کسینوسی فوریه معکوس $f(x)$ نامیده می‌شود. فرآیند به دست آوردن تبدیل \hat{f}_c از تابع مفروض f را تبدیل کسینوسی فوریه یا روش تبدیل کسینوسی فوریه می‌نامند.

تبدیلات سینوسی فوریه

به طریق مشابه، برای یک تابع فرد f ، انتگرال فوریه یک انتگرال سینوسی فوریه است [(12) و (13)، بخش ۹.۱۰ را مشاهده کنید]

$$f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wx dw \quad (4\text{ الف})$$

که در آن

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin wv dv. \quad (4\text{ ب})$$

هم اکنون با فرض $B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f}_s(w)$ ، که در آن S در اندیس به «سینوس» بر می‌گردد، آنگاه با تبدیل v به x ، (4ب) به صورت زیر در می‌آید

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx. \quad (5)$$

$\hat{f}_s(w)$ به تبدیل سینوسی فوریه تابع f موسوم است، و با توجه به (۴الف) داریم

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(x) \sin wx dw, \quad (6)$$

که تبدیل سینوسی فوریه معکوس $(w) \hat{f}_s$ نامیده می شود، فرآیند به دست آوردن $\hat{f}_s(w)$ از $f(x)$ را تبدیل سینوسی فوریه یا روش تبدیل سینوسی فوریه می نامند.
توجه! نمادهای زیر را نیز برای تبدیلات فوریه

$$F_c(f) = \hat{f}_s, \quad F_s(f) = \hat{f}_c$$

و F_c^{-1} و F_s^{-1} به ترتیب برای تبدیلات معکوس F_c و F_s به کار می بردند.

مثال ۱. تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه
تبدیل کسینوسی و سینوسی فوریه تابع زیر را باید.

$$f(x) = \begin{cases} k & ; 0 < x < a, \\ 0 & ; x > a. \end{cases}$$

حل: با توجه به تعاریف (۲) و (۵) داریم

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{\sin aw}{w} \right],$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right].$$

نتایج حاصل با فرمولهای ۱ در جدول اول انتهای این فصل به ازای $k=1$ مطابقت دارند.
توجه داشته باشید که به ازای هر عدد ثابت k و $(0 < x < \infty)$ تبدیلات

کسینوسی و سینوسی فوریه این تابع موجود نیستند. (چرا؟)

مثال ۲. تبدیل کسینوسی فوریه تابع نمایی
 $F_c(e^{-x})$ را باید.

حل: با انتگرالگیری جزء به جزء و تکرار آن می یابیم

$$F_c(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+w^2}.$$

این جواب با فرمول ۳ در جدول I، بخش ۱۲.۱ به ازای $a=1$ مطابقت دارد.

خطی بودن، تبدیلات مشتقات

اگر $f(x)$ بر روی نیم محور حقیقی مثبت x مطلقاً انتگرال‌پذیر (بخش ۹.۱۰ را ملاحظه کنید) و بر هر فاصله متناهی به طور تکه‌ای پیوسته (بخش ۱۰.۶ را ملاحظه کنید) باشد، آنگاه تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه $(x) f$ موجود است.

هر گاه، او a و b دو عدد ثابت بوده و $f(x)$ و $g(x)$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه باشند، آنگاه $af(x) + bg(x)$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه است و با توجه به (۲) داریم

$$F_c(af + bg) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [af(x) + bg(x)] \cos wx dx$$

$$= a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx + b \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos wx dx.$$

آخرین عبارت در تساوی فوق برابر $aF_c(f) + bF_c(g)$ می‌باشد. به طریق مشابه با توجه به (۵) به فرمولی برای F_c می‌رسیم. در هر صورت داریم

$$F_c(af + bg) = aF_c(f) + bF_c(g). \quad (\text{الف}) \quad (7)$$

$$F_s(af + bg) = aF_s(f) + bF_s(g). \quad (\text{ب})$$

قضیه ۱ (تبدیلات کسینوسی و سینوسی مشتقات)

فرض کنید $f(x)$ بر روی نیم محور حقیقی و مثبت x پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر و $f'(x)$ بر هر فاصله متناهی به طور تکه‌ای پیوسته باشد، و وقتی $\infty \rightarrow x$ ، $\circ \rightarrow f(x)$ ، آنگاه

$$F_c\{f'(x)\} = wF_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\circ), \quad (\text{الف}) \quad (8)$$

$$F_s\{f'(x)\} = -wF_c\{f(x)\}. \quad (\text{ب})$$

اثبات. با انتگرالگیری به روش جزء به جزء می‌بایس

$$\begin{aligned} F_c\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \cos wx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos wx \Big|_0^{\infty} + w \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\circ) + wF_s\{f(x)\}. \end{aligned}$$

به طریق مشابه،

$$\begin{aligned} F_s\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \sin wx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \sin wx \Big|_0^\infty - w \int_0^\infty f(x) \cos wx dx \right] \\ &= 0 - w F_c\{f(x)\}. \end{aligned}$$

از فرمول (۸ الف)، با جایگذاری f' به جای f نتیجه می شود

$$F_c\{f''(x)\} = w F_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0),$$

از این رو با توجه به (۸ ب) داریم

$$F_c\{f''(x)\} = -w^r F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0),$$

به طریق مشابه

$$F_s\{f''(x)\} = -w^r F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} w f(0).$$

کاربردی از فرمولهای (۹) در معادلات دیفرانسیل با مشتقهای جزئی است که در بخش ۱۱.۱۴.۱۱ ارائه شده است. در آینده، نشان می دهیم که چطور از (۹) برای رسیدن به تبدیلات می توان استفاده کرد.

مثال ۲. یک کاربرد عملی از فرمولهای (۹)

تبدیل کسینوسی فوریه $f(x) = e^{-ax}$ را به ازای $0 < a$ باید.

حل. با مشتقگیری می باییم $(e^{-ax})'' = a^2 e^{-ax}$ ، از این رو $(x)'' = a^2 f(x)$. با توجه به این نتیجه و

(۹ الف) داریم

$$a^r F_c(f) = F_c\{f''\} = -w^r F_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -w^r F_c(f) + a \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

بنابراین $(a^r + w^r) F_c(f) = a \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ را ملاحظه کنید)

$$F_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^r + w^r} \right) \quad (a > 0).$$

جداول تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه در بخش ۱۰.۱۲ ارائه شده اند. برای جداول بزرگتر می توانید به مرجع [C4]، ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

مسائل بخش ۱۰.۱۰

۱. هرگاه

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x < 2 \\ 0 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

آنگاه $\hat{f}_c(w)$ را باید.

۲. تابع $f(x)$ در مساله ۱ را با توجه به جواب مساله ۱ باید. راهنمایی. از مساله ۴، بخش ۹.۱۰ استفاده کنید.

۳. تبدیل کسینوسی فوریه تابع زیر را باید.

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < a, \\ 0 & ; \quad x > a. \end{cases}$$

۴. با انتگرال‌گیری، $F_c(e^{-ax})$ را به ازای $a > 0$ باید.

۵. فرمول ۳ در جدول I، بخش ۱۲.۱۰ را با انتگرال‌گیری به دست آورید.

۶. جواب مساله ۴ را از (۹ ب) به دست آورید.

۷. مقدار $\left(\frac{1}{1+x^2} \right) F_c\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ را از روی مساله ۳ بخش ۹.۱۰ باید.

۸. تبدیل کسینوسی فوریه معکوس e^{-cx} را به دست آورید.

۹. تبدیل سینوسی فوریه تابع زیر را باید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 < x < 1, \\ 0 & ; \quad x > 1. \end{cases}$$

۱۰. تبدیل کسینوسی فوریه تابع مذکور در مساله ۹ را باید.

۱۱. مطلوب است محاسبه $F_c(x^{-1} - x^{-1} \cos \pi x)$. راهنمایی. از مساله ۶، بخش ۹.۱۰ با جابجایی w و x استفاده کنید.

۱۲. فرمول ۱۰ در جدول I، بخش ۱۲.۱۰ را به ازای $a = 1$ از روی مثال ۲، بخش ۹.۱۰ به دست آورید.

۱۳. مطلوب است محاسبه $F_c\left(\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x^2}\right)$. راهنمایی. از مساله ۷، بخش ۹.۱۰ استفاده کنید.

۱۴. به کمک (۸ ب) مقدار $(xe^{-\frac{1}{x^2}}) F_c(xe^{-\frac{1}{x^2}})$ را از روی یک فرمول مناسبی از جدول I، بخش ۱۲.۱۰ محاسبه کنید.

۱۵. به کمک (۸ الف) و فرمول ۳ از جدول I، بخش ۱۲.۱۰ باید.

۱۶. با توجه به اینکه $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ، فرمول ۲ از جدول II ، بخش ۱۰.۱۲ را از روی فرمول ۴ همان جدول به دست آورید.

۱۷. هرگاه $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 4}$ ، آنگاه $(w)^{\hat{f}} = \frac{w^3}{w^4 + 4}$ را به ازای $w > 0$ محاسبه کنید. راهنمایی. از مساله ۲ ، بخش ۹.۱۰ استفاده کنید.

۱۸. نشان دهید که $f(x) = \sin x$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه نیست.

۱۹. آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع $e^x f(x)$ موجود است؟

۲۰. آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\sin x}{x}$ یا $\frac{\cos x}{x}$ موجود است؟

۱۱. تبدیل فوریه

در بخش قبل دو تبدیل که از انتگرال‌های کسینوسی و سینوسی فوریه، بخش ۹.۱۰ الهام گرفته بود مورد بررسی قرار دادیم. یک تبدیل سومی از تبدیلات فوریه را مد نظر قرار می‌دهیم که از روی انتگرال فوریه در شکل مختلط تعریف می‌شود. (برای پیش در آمد این تبدیل مجدداً می‌توانید به بخش ۱۰.۱۰ مراجعه کنید.) ما در اینجا نخست شکل مختلط انتگرال فوریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

صورت مختلط انتگرال فوریه

در فرمولهای (۴) و (۵) واقع در بخش ۹.۱۰ مشاهده کردیم که انتگرال فوریه (حقیقی) تابع f به ازای $x < -\infty$ عبارت است از

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx] dw$$

که در آن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv , \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv.$$

با جایگزین کردن ضرایب انتگرال فوریه $A(w)$ و $B(w)$ در انتگرال فوریه f می‌یابیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)[\cos wv \cos wx + \sin wv \sin wx] dv dw.$$

تساوی فوق را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx - wv) dv \right] dw. \quad (1*)$$

تابع $f(v)\cos(wx - wv)$ واقع در زیر علامت انتگرال داخل کروشی به علت آنکه $f(v)$ تابع زوج از w و $f(v)$ تابعی مستقل از w است، تابعی زوج است، و چون

انتگرال‌گیری در داخل کروشه نسبت به w است، بنابراین نتیجه حاصل بعداز انتگرال‌گیری داخل کروشه تابع زوجی از w است. بنابراین اگر انتگرال داخل کروشه را $G(w)$ بنامیم به علت زوج بودن (w) ، $G(w)$ از $w = 0$ تا ∞ با $\frac{1}{2}$ انتگرال $G(w)$ از $-\infty$ تا ∞ برابر است. درنتیجه

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw.$$

هرگاه در (1) تابع کسینوس به سینوس بدل کنیم، آنگاه به علت فرد بودن تابع سینوس نسبت به w می‌یابیم

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) dv \right] dw = 0.$$

با جمع طرفین (1) و (2) و استفاده از فرمول اویلر ($i = \sqrt{-1}$)

$$(3) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t$$

و تغییر متغیر $wx - wv = t$ می‌یابیم

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iwx - ivv} dv dw$$

انتگرال حاصل به انتگرال فوریه مختلط موسوم است.

بعداز مقدمه کوتاه فوق در وضعیتی هستیم که به معرفی تبدیل فوریه بپردازیم.

تبدیلات فوریه

با نوشتن تابع نمایی در (4) به صورت حاصلضرب دوتابع نمایی، یعنی $e^{iwx} = e^{-ivw} e^{ivx}$ فرمول (4) به صورت زیر در می‌آید

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivw} dv \right] e^{ivx} dw.$$

عبارت داخل کروشه که تابعی از w است را با $\hat{f}(w)$ نمایش می‌دهیم و آن را تبدیل فوریه تابع f می‌نامیم؛ با قرار دادن x به جای v در $\hat{f}(w)$ می‌یابیم

$$(6) \quad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixw} dx.$$

باتوجه به آن، (5) به صورت زیر در می‌آید

$$(7) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{ixw} dw$$

و طرف دوم (7) را تبدیل فوریه معکوس $\hat{f}(w)$ می‌نامیم.

$F(f)$ را برای تبدیل فوریه f و $(\hat{f})^{-1}$ را برای تبدیل فوریه معکوس نیز به کار می‌برند.

فرآیند به دست آوردن تبدیل فوریه $\hat{f} = F(f)$ از تابع مفروض f به تبدیل فوریه یا روش تبدیل

فوریه موسوم است.

وجود. هرگاه $f(x)$ بر روی محور X تعریف و

۱. $f(x)$ بر هر فاصله متناهی به طور تکه ای پیوسته باشد.

۲. $f(x)$ بر محور X مطلقاً انتگرالپذیر باشد.

آنگاه بدون اثبات می پذیریم که دو شرط فوق شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریه (۶) است. برای تعریف تکه ای پیوسته و مطلقاً انتگرالپذیر به ترتیب به بخش‌های ۱۰.۶ و ۹.۱۰ مراجعه کنید.

مثال ۱. تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع زیر را باید.

$$f(x) = \begin{cases} k; & 0 < x < a, \\ 0; & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

حل. با توجه به (۶) می‌باییم

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a ke^{-iwx} dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iwa} - 1}{-iw} \right) = \frac{k(1 - e^{-iwa})}{iw\sqrt{2\pi}}.$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تبدیل فوریه به طور کلی یک تابع مختلط است.

مثال ۲. تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع e^{-ax^2} را به ازای $w > a$ باید.

حل. با توجه به تعریف تبدیل فوریه داریم

$$\begin{aligned} F(e^{-ax^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2 - iwx] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{iw}{2\sqrt{a}})^2\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2\right] dx. \end{aligned}$$

بانمایش انتگرال آخر با $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv$. برای این منظور از تغییر متغیر

$$\sqrt{ax} + \frac{iw}{2\sqrt{a}} = v \quad \text{استفاده می‌کنیم.} \quad \text{با توجه به این متغیر می‌باییم } \frac{dv}{\sqrt{a}} = dx \quad \text{و از آنجا}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

برای محاسبه این انتگرال از شکرده زیر استفاده می‌کنیم. انتگرال را به توان ۲ رسانده و به صورت انتگرال

$$\text{دوگانه درمی آوریم و سپس با استفاده از مختصات قطبی } r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{و} \quad \theta \quad \text{می‌باییم}$$

$$du dv = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} I^r &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^r} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^r} dv = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^r + v^r)} du dv \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^r} r dr d\theta = \frac{2\pi}{a} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^r} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}, \end{aligned}$$

وازن‌جا $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. با توجه به نتیجه حاصل داریم

$$F(e^{-ax^r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-w^r}{4a}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^r}{4a}}.$$

نتیجه حاصل با فرمول ۹ مندرج در جدول III بخش ۱۲.۱۰ مطابقت دارد.

تعییر فیزیکی: طیف

ماهیت نمایش (۷) برای تابع $f(x)$ با فرض آنکه از برهمنی نوسانات سینوسی تمام فرکانس‌های ممکن، موسوم به نمایش طیفی حاصل می‌شود روشن می‌گردد. چنین نامگذاری از اپتیک که در آنجانور از برهمنی رنگها (فرکانسها) به دست می‌آید الهام گرفته است. در (۷) «چگالی طیفی» $\hat{f}(w)$ شدت (x) را در فاصله فرکانسی بین w و $w + \Delta w$ (Δw کوچک و ثابت) اندازه‌گیری می‌کند. ارتباط ارتعاشات با انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^r dw$$

می‌تواند بیانگر کل انرژی سیستم فیزیکی باشد. از این رو انتگرال $\int_{a}^b |\hat{f}(w)|^r dw$ (از a تا b) مقدار توزیع فرکانس‌های w بین a تا b را برای تمام انرژیها به دست می‌دهد.

برای روشن شدن این مطلب یک سیستم ارتعاشی ساده مکانیکی که نوسانگر همساز نامیده می‌شود (جرم یک فنر، بخش ۲.۵) و در معادله زیر صدق می‌کند را بیان می‌کنیم

$$my'' + ky = 0,$$

منظور از x در اینجا به معنی زمان می‌باشد. با ضرب معادله فوق در y' و انتگرالگیری از آن می‌یابیم

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ky^2 = E_0,$$

که در آن $y' = v$ سرعت ارتعاش، جمله اول انرژی جنبشی، جمله دوم انرژی پتانسیل، و ثابت E_0 کل انرژی سیستم را بیان می‌کند. جواب عمومی معادله فوق با توجه به (۴) و (۵)، بخش ۱۰.۶ عبارت است از

$$y = a_1 \cos w_0 x + b_1 \sin w_0 x = c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x}; w_0^2 = \frac{k}{m},$$

که در آن $c_1 = \bar{c}_1 = \frac{1}{2}(a_1 + ib_1)$ و $c_{-1} = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1)$ و $mw_0^2 = k$ است. نظر به اینکه $(iw_0)^2 = -w_0^2$ ، با حل مستقیم و ساده کردن می‌یابیم

$$E_0 = \frac{1}{2}m(c_1 i w_0 e^{iw_0 x} - c_{-1} i w_0 e^{-iw_0 x})^2 + \frac{1}{2}k(c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x})^2$$

$$= 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2.$$

از این رو انرژی متناسب با مربع دامنه $|c_1|^2$ می‌باشد.

در مرحله بعدی اگر سیستم پیچیده‌تری منجر به جواب دوره‌ای $y = f(x)$ ، که قابل نمایش به صورت سری فوریه است شود، آنگاه عبارت انرژی ساده $|c_1|^2$ به صورت مجموع مرיבعات $|c_n|^2$ بیان می‌شود که در آن‌ها ضرایب فوریه داده شده توسط (۸)، بخش $10\cdot 6$ است. در این حالت با «طیف گسته» (یا «طیف نقطه‌ای») برای فرکانس‌های تنها و قابل شمارش (در حالت کلی با تعداد نامتناهی) موافق هستیم و مقدار $|c_n|^2$ توزیع کل انرژی را بیان می‌کند.

نهایتاً، یک سیستم که جواب آن توسط انتگرال فوریه (۷) قابل نمایش باشد منجر به انتگرال فوریه برای انرژی می‌شود و همانند فوق در حالت کلی نیز قابل بررسی است.

خطی بودن. تبدیل فوریه مشتق

باتوجه به قضیه زیر از روی تبدیلات شناخته شده می‌توان به تبدیلات جدید رسید.

قضیه ۱ (خطی بودن تبدیل فوریه)

تبدیل فوریه یک عملگر خطی است، یعنی هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دارای تبدیلات فوریه بوده و a و b اعداد ثابت باشند، آنگاه

$$F(af + bg) = aF(f) + bF(g). \quad (8)$$

اثبات. باتوجه به (۶) داریم

$$\begin{aligned} F\{af(x) + bg(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)] e^{-ixw} dx \\ &= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixw} dx + b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixw} dx \\ &= aF\{f(x)\} + bF\{g(x)\}. \end{aligned}$$

در کاربرد تبدیلات فوریه در معادلات دیفرانسیل، نکته کلیدی در متناظر قرار گرفتن مشتق تابع با ضرب تبدیل در iw است. چگونگی انجام این کار در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۲ (تبدیل فوریه مشتق $f(x)$)

هرگاه $f(x)$ بر محور x پیوسته باشد و وقتی $|x| \rightarrow \infty$ و علاوه بر آن $f'(x) \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow 0$ باشند، آنگاه
برمحور x مطلقاً انتگرال‌بازیر باشد، آنگاه

$$F\{f'(x)\} = iwF\{f(x)\}. \quad (9)$$

اثبات. با انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از $|x| \rightarrow \infty$ و $f(x) \rightarrow 0$ وقتی $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw} dx$ می‌یابیم

$$\begin{aligned} F\{f'(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixw} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-ixw} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw} dx \right] \\ &= 0 + iwF\{f(x)\}. \end{aligned}$$

بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

با دوبار تکرار (9) می‌یابیم

$$F\{f''(x)\} = iwF\{f'(x)\} = (iw)^2 F\{f(x)\}.$$

نظر به اینکه $(iw)^2 = -w^2$ داریم

$$F\{f''(x)\} = -w^2 F\{f(x)\}. \quad (10)$$

فرمولی شبیه فرمولهای فوق برای مشتقات مرتبه‌های بالاتر قابل دسترسی است.
کاربردی از (10) در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در بخش ۱۴. ۱۱ ارائه می‌شود.

هم اکنون نشان می‌دهیم که چطور می‌توان (9) را برای دستیابی به تبدیلات جدید به کار گرفت.

مثال ۳. کاربردی از فرمول (9)

تبدیل فوریه xe^{-x^2} را با توجه به جدول III، بخش ۱۲. ۱۰ به دست آورید.

حل با استفاده از (9) و جدول III داریم

$$\begin{aligned} F(xe^{-x^2}) &= F\left\{-\frac{1}{2}(e^{-x^2})'\right\} = -\frac{1}{2}F\{(e^{-x^2})'\} \\ &= -\frac{1}{2}iwF(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}iw \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} = -\frac{iw}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}. \end{aligned}$$

پیچش (کانولوشن)

پیچش $f * g$ از توابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p) dp. \quad (11)$$

هدف دستیابی به نتایجی شبیه نتایج متناظر در تبدیلات لاپلاس (بخش ۶. ۶) است. در بحث پیچش تبدیل فوریه یک تابع از روی چند تابع با تبدیل فوریه مفروض به دست می‌آید.

قضیه ۳ (قضیه پیچش)

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ بر محور x به طور تکه ای پیوسته، کراندار، ومطلقاً انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه

$$F(f * g) = \sqrt{2\pi} F(f)F(g). \quad (12)$$

اثبات . با توجه به تعریف تبدیل فوریه و تعریض ترتیب انتگرال‌گیری می‌یابیم

$$\begin{aligned} F(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-ixp} dp dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-ixp} dx dp. \end{aligned}$$

با فرض $q = x - p$ یا $x = p + q$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} F(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-ip(q+p)} dq dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-ipq} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-iqp} dq \\ &= \sqrt{2\pi} F(f)F(g). \end{aligned}$$

بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

با گرفتن تبدیل فوریه معکوس از دو طرف (12) و نوشتن $\hat{f} = F(f)$ و $\hat{g} = F(g)$ و با توجه

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ هم‌دیگر را حذف می‌کنند، داریم}$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx} dw, \quad (13)$$

که فرمولی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی است (بخش ۱۴.۱۱).

جملولی از تبدیلات فوریه در بخش بعدی آمده است . برای جداول بزرگتر به مرجع [C۴] ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

به انتهای فصل ۱۰ که مربوط به سریهای فوریه، انتگرال‌های فوریه، و تبدیلات فوریه بود، رسیدیم . سریهای فوریه (وانتگرال‌های فوریه) که یکی از مهمترین پیشرفت‌ها در زمینه ریاضی فیزیک است دارای کاربردهای بسیار در مسائل مهندسی می‌باشد زیرا سریهای فوریه (وانتگرال‌های فوریه) مهمترین ابزار برای حل مسائل با مقادیر کرانه‌ای می‌باشند. این مطالب در فصل بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل بخش ۱۱.۱۰

تبدیلات فوریه توابع زیر را بدون استفاده از جدول III، بخش ۱۰.۱۲ به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases} \quad 2$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} \quad 1$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & -1 < x < 1 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} . \quad ٤$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix}; & -1 < x < 1 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} . \quad ٣$$

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} . \quad ٦$$

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < a \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} . \quad ٥$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ e^{-x}; & x > 0 \end{cases} . \quad ٨$$

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -1 < x < 0 \\ 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} . \quad ٧$$

٩. فرمول ۱ در جدول III، بخش ۱۲. ۱۰ را ثابت کنید.

١٠. از جواب $\hat{f}(w)$ مساله ۹ استفاده کنید و $f(x)$ را از (۷) به دست آورید. راهنمایی. (۷*) بخش ۹. رامور استفاده قرار دهید.

١١. فرمول ۱ از جدول III، بخش ۱۲. ۱۰ را به کمک فرمول ۲ همان جدول به دست آورید.

١٢. مساله ۶ را به کمک (۹) حل و جواب مساله ۱ را به دست آورید.

١٣. (انتقال) نشان دهید اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد، آنگاه $f(x-a)$ دارای تبدیل فوریه بوده و $F\{f(x-a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}$.

١٤. مساله ۶ را به کمک قضیه پیچش حل کنید. راهنمایی. نشان دهید که $(x > 0)xe^{-x} = e^{-x} * e^{-x}$.

١٥. از مساله ۱۳ استفاده کنید و فرمول ۱ از جدول III، بخش ۱۲. ۱۰ را از فرمول ۲ (با $c = 3b$) به دست آورید.

١٦. از جواب مساله ۸ استفاده کنید و انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را تبدیل به انتگرال کسینوسی فوریه کنید (بخش ۹. ۱۰ را ملاحظه کنید).

١٧. (انتقال روی محور w) نشان دهید که اگر $\hat{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، آنگاه $\hat{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iaw} f(x)$ می‌باشد.

١٨. از مساله ۱۷ استفاده کنید و فرمول ۷ از جدول III، بخش ۱۲. ۱۰ را از فرمول ۱ همان جدول به دست آورید.

١٩. از مساله ۱۷ استفاده کنید و فرمول ۸ از جدول III، بخش ۱۲. ۱۰ را از فرمول ۲ همان جدول به دست آورید.

٢٠. فرمول ۳ از جدول III بخش ۱۲. ۱۰ را به ازای $a = 1$ به دست آورید. راهنمایی. از (۱۵)، بخش ۹. ۱۰ و (۳) همین بخش استفاده کنید.

۱۰. ۱۲. جداول تبدیلات

برای جداول بزرگتر به مرجع [C۴]، ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

جدول I. تبدیلات کسینوسی فوریه

فرمول (۲)، بخش ۱۰. ۱۰ را ملاحظه کنید.

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$ را در ضمیمه ۱. ۳ ملاحظه کنید. $\Gamma(a))$
2	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{aw}{2}$
3	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
5	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
6	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a + iw)^{n+1} \quad (\operatorname{Re} =$ (قسمت حقیقی)
7	$\begin{cases} \cos x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
8	$\cos ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
9	$\sin ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(a-w) \quad (\text{بخش ۳. را ملاحظه کنید.})$
11	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arc tan} \frac{2}{w^2} \quad (\text{بخشهای ۵. و ۶. را ملاحظه کنید.})$
12	$J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u(a-w)}{\sqrt{a^2 - w^2}}$

جدول II . تبدیلات سینوسی فوریه

فرمول(۵) ، بخش ۱۰. ۱۰ را ملاحظه کنید.

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathcal{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$ را در بخش ۳. ۱ ملاحظه کنید.
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \sin \frac{a\pi}{2}$
5	e^{-x}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w}{1 + w^2} \right)$
6	$e^{-ax}/x \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan \frac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Im} (a + iw)^{n+1}$ (Im = قسمت موهومی)
8	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \sin x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
11	$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(w-a)$ (بخش ۳. ۶ را ملاحظه کنید.)
12	$\arctan \frac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\sinh aw}{w} e^{-aw}$

جدول III. تبدیلات فوریه

فرمول (۶)، بخش ۱۱.۱۰ را ملاحظه کنید.

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a w }}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{if } 0 < x < b \\ 2x - a & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{-2bw}}{\sqrt{2\pi} w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iwx} & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iwx} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ if } w < a; \quad 0 \text{ if } w > a$

پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۰

۱. سریهای مثلثاتی و سریهای فوریه چه نوع سریهایی هستند؟
 ۲. تعاملد به چه معنایی می‌باشد؟ چه نقشی را تعاملد در راه رسیدن به فرمولهای اویلر ایفا می‌کند؟
 - ۳- چگونه می‌توان یک تابع با دوره تناوب 2π را به یک تابع با دوره تناوب دلخواه تبدیل کرد؟
 ۴. یک تابع فرد متناوب چطور تابعی است؟ شکل سری فوریه آنها به چه صورتی است؟
 ۵. موالات مطرح شده در مساله ۴ را برای یک تابع زوج بیان و پاسخ دهید.
 ۶. بسط نیم دامنه‌ای چه مفهومی دارد؟
 - ۷- آیا یک تابع ناپیوسته می‌تواند دارای سری فوریه باشد؟ سری تیلور چطور؟
 ۸. اگر یک سری فوریه از تابع $f(x)$ قابل بحث باشد، مجموع جملات کسینوسی یا سینوسی چطور برحسب $f(x)$ بیان کردن است؟
 ۹. پیوستگی تکه‌ای چیست؟ به کدام بخش این فصل مرتبط می‌شود؟
 ۱۰. چند جمله‌ای مثلثاتی چیست؟ چرا ما آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم؟
 ۱۱. خطای مربعی میانگین چیست؟ چرا ما آن را مورد بحث قرار می‌دهیم؟
 ۱۲. سری فوریه مختلط چیست؟ ارتباط آن را با سری فوریه حقیقی چطور است؟
 ۱۳. چه اختلافی میان ارتعاش یک فنر جرمدار با معادله $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t)$ با یک نیروی دوره‌ای که به صورت سینوسی محض اعمال می‌شود وجود دارد؟
 ۱۴. تبدیل فوریه چیست؟ چگونه آن را می‌توان از انتگرال فوریه نتیجه گرفت؟
 ۱۵. آیا هر تابع پیوسته تبدیل سینوسی یا کسینوسی فوریه دارد؟ آیا یک تابع ناپیوسته می‌تواند تبدیل کسینوسی یا سینوسی فوریه داشته باشد؟
- سری فوریه توابع دوره‌ای زیر را که با دوره تناوب 2π می‌باشند محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < x < \pi \\ 1 & ; \quad \pi < x < 2\pi \end{cases} . 17$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} . 19$$

$$f(x) = \begin{cases} k & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -k & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . 16$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -1 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases} . 18$$

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .21 \quad f(x) = \frac{1}{\gamma}(\pi - x) \quad (0 < x < \pi) \quad .20$$

$$f(x) = -\frac{x}{\gamma} \quad (-\pi < x < \pi) \quad .22 \quad f(x) = \frac{1}{\gamma}kx|x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .22$$

$$f(x) = \pi - \gamma|x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .25 \quad f(x) = x^\gamma \quad (-\pi < x < \pi) \quad .24$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma}{\gamma} ; & -\frac{\pi}{\gamma} < x < \frac{\pi}{\gamma} \\ \frac{\pi^\gamma}{\gamma} ; & \frac{\pi}{\gamma} < x < \frac{3\pi}{\gamma} \end{cases} \quad .27 \quad f(x) = \begin{cases} 0 ; & -\pi < x < 0 \\ \pi x ; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .26$$

$$f(x) = \begin{cases} \pi x + x^\gamma ; & -\pi < x < 0 \\ \pi x - x^\gamma ; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .29 \quad f(x) = \begin{cases} 0 ; & -\pi < x < 0 \\ x^\gamma ; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .28$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} ; & -a < x < a (< \pi) \\ \frac{\pi - x}{\pi - a} ; & a < x < \pi - a \end{cases} \quad .30$$

سری فوریه توابع زیر را که دوره تناوب آنها $L = 2\pi$ است، به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & -1 < x < 0 \\ -1 ; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .31$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & -1 < x < 1 \\ 0 ; & 1 < x < 3 \end{cases}, \quad p = 2L = 4 \quad .32$$

$$f(x) = x; \quad -2 < x < 2, \quad p = 2L = 4 \quad .33$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & -1 < x < 0 \\ x; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .34$$

$$f(x) = \begin{cases} -x ; & -1 < x < 0 \\ 0 ; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .35$$

$$f(x) = x; \quad -4 < x < 4, \quad p = 2L = 8 \quad .36$$

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -1 < x < 0 \\ 4x; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .37$$

$$f(x) = 1 - x^\gamma; \quad 0 < x < 1, \quad p = 2L = 1 \quad .38$$

$$f(x) = x - x^\gamma; \quad -1 < x < 1, \quad p = 2L = 2 \quad .39$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & -2 < x < 0 \\ e^{-x}; & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad p = 2L = 4 \quad .40$$

مقدار سریهای زیر را محاسبه کنید.

۴۱. (از مساله ۱۷ استفاده کنید).

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

۴۲. (از مساله ۲۱ استفاده کنید).

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

۴۳. (از مساله ۲۹ استفاده کنید).

$$1 - 3^{-r} + 5^{-r} - 7^{-r} + \dots$$

با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید که

۴۴. (از مساله ۲۳ استفاده کنید).

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots = \frac{\pi^r}{6}$$

۴۵. (از مساله ۲۵ استفاده کنید).

$$1 + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{7^r} + \dots = \frac{\pi^r}{96}$$

۴۶. (از مساله ۲۹ استفاده کنید).

$$1 + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{7^r} + \dots = \frac{\pi^r}{960}$$

شش خطای مربعی می نیم اول E متناظر با چند حاصل جمع های جزئی اول را برای

۴۷. مساله ۲۱ حساب کنید.

۴۸. مساله ۲۹ حساب کنید.

جواب عمومی معادله $r(t) = \omega^2 y'' + \omega^2 y = 0$ را در مورد زیر به دست آورید.

$$r(t) = \frac{t^r}{4}; \quad -\pi < t < \pi, \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 1, 2, \dots \quad .49$$

$$r(t) = \frac{1}{12} t(\pi^r - t^r); \quad -\pi < t < \pi, \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 2, \dots \quad .50$$

خلاصه مطالب فصل ۱۰

سریها، انتگرالها، و تبدیلات فوریه

یک سری مثلثاتی (بخش ۱۰.۱) به صورت زیر می باشد

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

سری فوریه یک تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π ، یک سری مثلثاتی به صورت (1) است که

ضرایب آن به ضرایب فوریه موسوم می باشد نیز توسط فرمولهای اویلر به شرح زیر محاسبه می شوند

(بخش ۱۰.۲)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

برای یک تابع f با دوره تناوب دلخواه $2L = p$ سری فوریه (بخش ۱۰. ۳) به صورت

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (3)$$

است که ضرایب فوریه آن از فرمولهای اویلر به شرح زیر به دست می‌آیند

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

این سریها اساس کار در ارتباط با پدیده‌های دوره‌ای هستند که عموماً در معادلات دیفرانسیل با مشتقان جزئی کاربرد دارند (بخش ۷. ۱۰ و فصل ۱۱). اگر $f(x) = f(-x)$ [یا فرد $f(-x) = -f(x)$] باشد، سری فوریه حاصل به ترتیب سریهای کسینوسی و سینوسی فوریه هستند (بخش ۴. ۱۰).

یک تابع مفروض f در فاصله $L \leq x \leq 0$ را می‌توان به صورت سری کسینوسی یا سینوسی فوریه دوره تناوب $2L$ بسط داد. که بسط نیم دامنه‌ای (x) نامیده می‌شود (بخش ۵. ۱۰).

یک مجموعه از توابع کسینوس یا سینوس در (۳) را دنباله مثالثاتی نامیده می‌شود. اولین خاصیت چنین دستگاهی این است که در یک فاصله به طول $2L$ متعامد هستند، یعنی به ازای هر مقدار صحیح $n \neq m$ داریم

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

و به ازای هر مقدار صحیح m و n داریم

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

این تعامد برای محاسبه ضرایب فوریه کاربرد دارد و با توجه به آن به فرمولهای اویلر برای ضرایب فوریه می‌رسیم.

حاصل جمع‌های جزئی سری فوریه به وسیله خطای مربعی به حداقل می‌رسد (بخش ۸. ۱۰).

ایده و تکنیک سریهای فوریه برای توابع غیر دوره‌ای $f(x)$ تعریف شده بر محور حقیقی قابل تعمیم می‌باشد. چنین تعمیمی منجر به ظهور انتگرال فوریه می‌شود که عبارت است از (بخش ۹. ۱۰)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw \quad (5)$$

که در آن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (6)$$

و یا شکل مختلط (بخش ۱۱. ۱۰)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (7)$$

که در آن

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixw} dx. \quad (8)$$

فرمول (۸)، $f(x)$ را به تبدیل فوریه $\hat{f}(w)$ تبدیل می‌کند.

تبدیل کسینوسی فوریه آن به صورت

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx \quad (9)$$

و تبدیل سینوسی فوریه آن به صورت

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx \quad (10)$$

می‌باشد (بخش ۱۰. ۱۰).

فصل ۱۱

و بلاک جامع مهندسی برق و الکترونیک

Download4All.rozblog.com

معادلات با مشتقات جزئی

معادلات با مشتقات جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابعی می‌باشند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل مستقل باشند. بسیاری از مسائل فیزیکی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی مدلسازی نمود و حال آنکه تعداد زیادی از مسائل مکانیک سیالات و جامدات (دینامیک، الاستیتی)، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کوانتم، و دیگر زمینه‌های فیزیکی به معادلات دیفرانسیلی جزئی منجر می‌شوند. برداشت کاربردی معادلات دیفرانسیل جزئی در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی عظیم تر می‌باشد. در معادلات دیفرانسیل جزئی متغیرهای مستقل می‌توانند زمان و یک یا چند مؤلفه فضایی باشند. فصل اخیر به برخی از مهمترین معادلات با مشتقات جزئی که در کاربردهای مهندسی پیش می‌آیند اختصاص داده شده است. این معادلات را از مسائل فیزیکی به دست می‌آوریم و سپس روش‌های حل مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای، یعنی روش‌های به دست آوردن جواب معادلات متناظر با مساله فیزیکی داده شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش ۱۱.۱ به مفهوم جواب معادلات با مشتقات جزئی می‌پردازیم. بخش‌های ۱۱.۲ تا ۱۱.۴ به معادله موج یک بعدی، که حرکت یک نخ مرتعش را مورد بررسی قرار می‌دهد، اختصاص می‌دهیم. در بخش‌های ۱۱.۵ و ۱۱.۶ به معادله گرما، در بخش‌های ۱۱.۷ تا ۱۱.۱۰ به معادله موج دو بعدی (غشای مرتعش) و در بخش‌های ۱۱.۱۱ و ۱۱.۱۲ به معادله لابلس می‌پردازیم.

در بخش‌های ۱۱.۱۳ و ۱۱.۱۴ چنانچه مشاهده خواهیم نمود معادلات با مشتقات جزئی را می‌توان به کمک روش‌های تبدیلات لابلس یا تبدیلات فوریه حل نمود. روش‌های عددی برای حل معادلات با مشتقات جزئی در بخش‌های ۱۱.۲۰ و ۱۱.۲۱ ارائه شده‌اند.

پیشناز این فصل : معادلات دیفرانسیل خطی معمولی (فصل ۲) و سری فوریه (فصل ۱۰) می باشد .
بخشهایی که در دوره های فشرده قابل حذف اند عبارت اند از : ۱۱، ۹، ۱۱، ۶، ۱۱، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۱، ۱۴.

مراجع : ضمیمه ۱ ، قسمت C.

جواب مسائل : ضمیمه ۲ .

۱۱.۱ مفاهیم بنیادی

معادله ای شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع (مجهول) از دو یا چند متغیر مستقل به معادله با مشتق جزئی موسوم است . مرتبه بالاترین مشتق را مرتبه معادله می نامند .
همانند معادله دیفرانسیل معمولی ، یک معادله با مشتق جزئی را خطی گوییم هرگاه نسبت به متغیر وابسته (تابع مجهول) و مشتقهای آن از درجه اول باشد . یک معادله خطی ، همگن است هرگاه هر جمله آن شامل تابع یا یکی از مشتقهایش باشد معادله ای که همگن نباشد به معادله ناهمگن موسوم است .

مثال ۱ . معادلات با مشتقهای خطی مرتبه دوم مهم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1) \text{ معادله موج یک بعدی}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2) \text{ معادله گرمای یک بعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3) \text{ معادله لاپلاس دو بعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (4) \text{ معادله پواسن دو بعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5) \text{ معادله لاپلاس سه بعدی}$$

در این معادلات c ثابت ، t زمان ، x ، y ، z مختصات کارتزین می باشند . معادله (۴) به ازای $f(x, y) \neq 0$ غیرهمگن و سایر معادلات همگن می باشند .

جوایی از یک معادله با مشتق جزئی در ناحیه ای مانند R از فضای متغیرهای مستقل تابعی است که در ناحیه ای شامل R همه مشتقهای جزئی موجود در معادله را دارا بوده و در همه نقاط R در معادله صدق کند . (اغلب اوقات نیازداریم که تابع مورد نظر بر کران R پیوسته بوده و دارای همان مشتقهای جزئی در درون R بوده و در درون R در معادله صدق کند .)

در حالت کلی ، تعداد جوابهای یک معادله با مشتق جزئی بسیار زیاد است . به عنوان مثال ، هر

یک از توابع

$$u = \ln(x^2 + y^2), \quad u = e^x \cos y, \quad u = x^2 - y^2 \quad (6)$$

که به کلی با هم تفاوت دارند، جواب معادله (۳) می باشند، صحت این مطلب را متعلم با مشتقگیری و جایگزین کردن در معادله می تواند تحقیق کند. بعداً خواهیم دید که جواب منحصر به فرد معادله با مشتق جزئی متناظر با یک مساله فیزیکی مفروض با استفاده از اطلاعات اضافی حاصل از مطالب فیزیکی به دست می آید. مثلاً، در برخی موارد مقادیر جواب مساله مورد نظر بر کران ناحیه ای داده شده اند («شرط کرانه ای») یا در مواردی که u ، جواب معادله، وابسته به زمان t است، مقادیر u یا $\frac{\partial u}{\partial t}$ یا هر دوی آنها در $t=0$ مفروض می باشند («شرط اولیه») می دانیم که هرگاه یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی و همگن باشد، آنگاه از ترکیب جوابهای معلوم معادله می توان جوابهای بیشتری برای آن به دست آورد. در مورد معادله با مشتق جزئی خطی همگن نیز چنین می باشد. در واقع قضیه زیر برقرار است.

قضیه بنیادی ۱ (اصل خطی بودن یا برهمنهی)

هرگاه u_1 و u_2 دو جواب معادله با مشتق جزئی همگن خطی در ناحیه R باشند، آنگاه

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند، نیز جواب معادله در ناحیه R است.
اثبات این قضیه مهم که به متعلم واگذار می شود، ساده و کاملاً شبیه اثبات قضیه ۱، بخش ۲.۱ می باشد.
بررسی جوابهای مسائل ۲ تا ۲۳ همانند معادلات دیفرانسیل معمولی انجام می گیرد. مسائل ۲۴ تا ۳۵ به معادلات با مشتقهای مرتبه می شوند که مشابه معادلات دیفرانسیل معمولی قابل حل هستند. برای این منظور و روشن شدن موضوع دو مثال زیر را ارائه می کنیم.

مثال ۲. جواب معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $u'' - u_{xx} = u$ را بایايد.

حل. به علت آنکه در معادله با مشتق جزئی فوق مشتق نسبت به x وجود ندارد، این معادله را می توان به صورت معادله دیفرانسیل $u'' = u$ تصور نمود که دارای جواب عمومی به صورت $u = Ae^x + Be^{-x}$ با مقادیر ثابت A و B غیر وابسته به x است ولی این مقادیر ثابت می توانند تابعی از y باشند. بنابراین جواب معادله موردنظر به صورت زیر است

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}.$$

مثال ۳. معادله با مشتق جزئی $u_{xy} - u = 0$ را حل کنید.

حل. با قراردادن $P = u_x$ می باییم $P_y = -P$ یا $\frac{P_y}{P} = -1$ و از آنجا $\ln P = -y + \tilde{c}(x)$ یا

$P = c(x)e^{-y}$ و با توجه به $P = u_x$ می باییم $u_x = c(x)e^{-y}$ ، با انتگرالگیری از آن نسبت به x

می‌بایس $f(x) = \int c(x) dx$ که در آن $u(x,y) = f(x)e^{-y} + g(y)$ و $g(y)$ به ترتیب تابع دلخواهی از x و y می‌باشند.

مسائل بخش ۱.۱۱

۱. قضیه بنیادی ۱ را برای معادلات با مشتقهای جزئی شامل دو و سه متغیر مستقل ثابت کنید.
۲. نشان دهید که توابع مذکور در (۶) در معادله (۳) صدق می‌کنند.
تحقیق کنید که توابع زیر جواب معادله لاپلاس (۳) هستند.

$$u = x^t - 6x^ty^t + y^t. \quad ۵ \quad u = x^t - 3xy^t. \quad ۴ \quad u = 2xy. \quad ۳$$

$$u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad ۸ \quad u = \sin x \sinh y. \quad ۷ \quad u = e^x \sin y. \quad ۶$$

تحقیق کنید که توابع زیر به ازای مقادیر مناسبی از C و ω جواب معادله موج (۱) می‌باشند.

$$u = \sin 2ct \sin 2x. \quad ۱۱ \quad u = x^t + 3xt^t. \quad ۱۰ \quad u = x^t + 4t^t. \quad ۹$$

$$u = \sin \omega ct \sin \omega x. \quad ۱۴ \quad u = \cos ct \sin x. \quad ۱۳ \quad u = \cos 4t \sin x. \quad ۱۲$$

تحقیق کنید که توابع زیر به ازای مقادیر مناسبی از C و ω جواب معادله گرما (۲) هستند.

$$u = e^{-t} \sin 3x. \quad ۱۷ \quad u = e^{-t} \cos x. \quad ۱۶ \quad u = e^{-t} \cos x. \quad ۱۵$$

$$u = e^{-\omega t} e^t \sin \omega x. \quad ۲۰ \quad u = e^{-16t} \cos 2x. \quad ۱۹ \quad u = e^{-t} \cos \omega x. \quad ۱۸$$

$$21. \text{ نشان دهید که } u = \frac{1}{\sqrt{x^t + y^t + z^t}} \text{ جوابی از معادله لاپلاس (۵) می‌باشد.}$$

۲۲. تحقیق کنید که $u(x,y) = a \ln(x^t + y^t) + b$ در معادله لاپلاس (۳) صدق می‌کند و a و b را طوری بباید که u در شرایط کرانه‌ای $u = 0$ بر دایره $x^t + y^t = 1$ و $u = 5$ بر دایره $x^t + y^t = 9$ صدق کند.
۲۳. نشان دهید که $u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)$ جواب معادله موج (۱) است. که در آن v و w توابع دلخواه مشتقپذیر تامربته ۲ می‌باشند.

معادلات با مشتقهای جزئی که مانند معادلات دیفرانسیل معمولی قابل حل هستند. هرگاه یک معادله با مشتق جزئی تنها شامل مشتق نسبت به یکی از متغیرهای مستقل باشد، آنگاه چنین معادله‌ای را بادرنظر گرفتن سایر متغیرها به صورت پارامتر می‌توان همانند معادلات دیفرانسیل معمولی حل نمود.
 $u(x,y)$ ، جواب هریک از معادلات زیر را بباید.

$$u_{xx} + 4u = 0. \quad ۲۶ \quad u_y = 0. \quad ۲۵ \quad u_x = 0. \quad ۲۴$$

$$u_x = 2xyu. \quad ۲۹ \quad u_y + 2yu = 0. \quad ۲۸ \quad u_{xx} = 0. \quad ۲۷$$

با قرار دادن $p_x = u$ هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$u_{xyy} + u_x = 0.32$$

$$u_{xy} = 0.31$$

$$u_{xy} = u_x . 30$$

دستگاه معادلات با مشتقات جزئی زیر را حل کنید.

$$u_{xy} = 0, u_{xx} = 0.35$$

$$u_{yy} = 0, u_{xx} = 0.34$$

$$u_y = 0, u_x = 0.33$$

۱۱. ۲. مدلسازی: نخ مرتعش، معادله موج

در این قسمت ارتعاشات عرضی کوچک نخی کشان به طول L که دو انتهای آن ثابت و بدون حرکت است مانند ارتعاش یک تار ویولن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم که معادله حاکم بر چنین حرکتی یک معادله با مشتق جزئی است. برای رسیدن به معادله ارتعاش نخ مورد نظر فرض کنید نخ از وضع تعادل خارج شده و سپس در لحظه ای مثلاً لحظه $t=0$ رها شده و به ارتعاش در آید. مساله مشخص کردن ارتعاش نخ، یعنی تعیین $u(x,t)$ ، انحراف نخ در یک نقطه دلخواه x و در لحظه دلخواه $t=0$ است؛ شکل ۲۵۱ را ملاحظه کنید.

در معادلات دیفرانسیل بعداز رسیدن به معادله دیفرانسیل متناظر برای یک مساله فیزیکی، نیاز به شناخت برخی مفروضات ساده‌ای داشتیم تا به کمک آنها بتوان به جواب مساله دست یافت. وضع در معادلات با مشتقات جزئی نیز برهمنامه منوال است.

اطلاعات فیزیکی: ابتدا مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

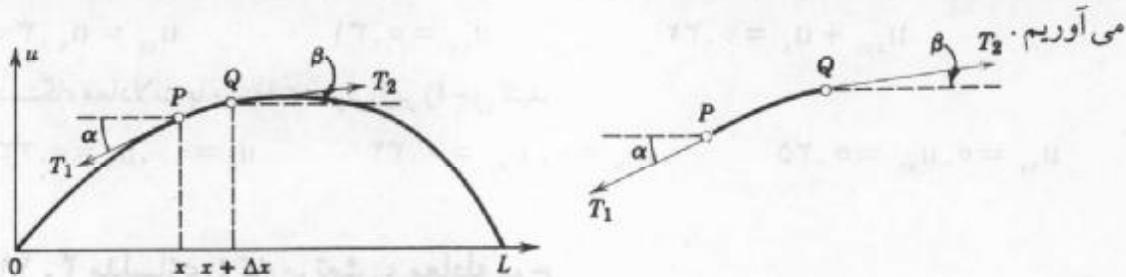
۱. جرم نخ برای واحد طول ثابت می‌باشد، یعنی نخ همگن است. نخ کشان بوده و هیچ گونه مقاومتی در مقابل خمش از خود نشان نمی‌دهد.

۲. نیروی کششی که بر اثر کشیدن نخ قبل از ثابت کردن دو سر آن ایجاد می‌شود بسیار بزرگ بوده و نیروی جاذبه وارد بر نخ در مقابل آن قابل چشم پوشی می‌باشد.

۳. حرکت نخ یک ارتعاش کوچک عرضی در صفحه‌ای قائم است، یعنی هر قسمت نخ تنها به صورت قائم حرکت می‌نماید، و قدر مطلق انحراف و شبیه نخ در هر نقطه کوچک می‌باشد.

باتوجه به مفروضات مذکور انتظار می‌رود که جواب $u(x,t)$ معادله دیفرانسیل به دست آمده ارتعاشات کوچک نخ «غیر ایده‌ال» فیزیکی با چگالی همگن کوچک و تحت کشش بزرگ را به طور منطقی توصیف نماید.

برای رسیدن به معادله دیفرانسیل، نیروهای را که بر قسمت کوچکی از نخ وارد می‌شوند مورد بررسی قرار می‌دهیم (شکل ۲۵۱). چون نخ مقاومتی در مقابل خمش نشان نمی‌دهد، در هر نقطه نیروی وارد نیروی کشش بر منحنی نخ خواهد بود. فرض کنید T_1 و T_2 نیروهای کشش نخ در نقاط انتهایی P و Q قسمت مورد بررسی نخ باشد. به علت اینکه درجهٔ افقی حرکتی صورت نمی‌گیرد، مؤلفه‌های افقی کشش باید صفر باشند. با استفاده از علائم به کار گرفته شده در شکل ۲۵۱ به دست



شکل ۲۵۱. نخ مرتعش در زمان ثابت

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T \text{ ثابت} \quad (1)$$

در جهت قائم دو نیروی $T_1 \sin \alpha$ و $T_2 \sin \beta$ را داریم که به ترتیب مولفه‌های قائم T_1 و T_2 می‌باشند؛ علامت منها در اینجا بدان جهت است که مؤلفه مربوط در P رویه پائین فرض شده است.

برآیند این دو نیرو، باتوجه به قانون دوم نیوتون، برابر جرم $\rho \Delta x$ نخ مورد نظر با شتاب $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ، که مقدار آن در نقطه‌ای بین x و $x + \Delta x$ محاسبه می‌شود، است؛ در اینجا ρ جرم واحد طول نخ قبل از انحراف، و Δx طول تکه نخ قبل از انحراف آن می‌باشند. بنابراین

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

با استفاده از (1) داریم

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_1 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

ضریب زاویه‌های منحنی نخ در $x + \Delta x$ و x می‌باشند، یعنی $\tan \beta$ و $\tan \alpha$

$$\tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}, \tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x.$$

در اینجا چون u به t نیز بستگی دارد لذا باید مشتقهای را به صورت مشتق جزئی بنویسیم. از تقسیم (2) بر Δx می‌یابیم

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

چنانچه Δx به سمت صفر میل کند، معادله با مشتق جزئی همگن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

که در آن $c^2 = \frac{T}{\rho}$ می‌باشد، حاصل می‌شود. این معادله، که به معادله موج یک بعدی موسوم

است، معادله حاکم بر مساله ما می‌باشد. نماد c (به جای c^2) برای ثابت فیزیکی $\frac{T}{\rho}$ انتخاب شده است

تا نشان دهد که این مقدار ثابت همواره مثبت است. یک بعدی بدان علت است که معادله تنها شامل یک متغیر فضایی x است. در بخش زیر به حل معادله (۳) می‌پردازیم.

۱۱. ۳ جداسازی متغیرها، کاربرد سریهای فوریه

در بخش قبل نشان دادیم که نوسانهای یک نخ کشسان در معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

که در آن $u(x,t)$ انحراف نخ است، صدق می‌کند. با توجه به این مطلب که در نقاط انتهایی یعنی در نقاط $x=0$ و $x=L$ نخ ثابت نگهداشته شده است، به ازای هر دو شرط کرانه‌ای

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad (2)$$

را داریم. مسیر حرکت نخ به انحراف اولیه (انحراف در لحظه $t=0$) و سرعت اولیه (سرعت در لحظه $t=0$) بستگی دارد. اگر انحراف اولیه را با $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ نمایش دهیم، دو شرط اولیه زیر را داریم

$$u(x,0) = f(x), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (4)$$

حال $u(x,t)$ جواب معادله (۱) را طوری می‌یابیم که در شرایط کرانه‌ای و اولیه صدق کند. برای رسیدن به چنین جوابی گام به گام به شرح زیر عمل می‌کنیم.

گام اول. با استفاده از روش ضربی یا روش جداسازی متغیرها، دومعادله دیفرانسیل معمولی به دست می‌آوریم.

گام دوم. جوابهایی از این دومعادله را که در شرایط کرانه‌ای صدق می‌کنند، مشخص می‌نمائیم.

گام سوم. موارد استعمال سری فوریه، جوابها را طوری باهم ترکیب می‌کنیم که عبارت حاصل جواب معادله موج (۱) بوده و همچنین در شرایط اولیه مفروض (۳) و (۴) صدق نماید.

گام اول. روش جداسازی متغیر، یا روش ضربی جوابهایی از معادله موج (۱) به صورت

$$u(x,t) = F(x)G(t) \quad (5)$$

که به صورت حاصل ضرب دوتایی به طوری که یکی از آنها تنها به x و دیگری تنها به t وابسته می‌باشد را در نظر می‌گیریم. چنانچه در آتی مشاهده خواهیم کرد این روش دارای کاربردهای گوناگونی در ریاضیات مهندسی است. با مشتقگیری از (۵) می‌یابیم

$$\frac{\partial^r u}{\partial x^r} = F''G \quad \text{و} \quad \frac{\partial^r u}{\partial t^r} = FG$$

که در آن نقطه ها مشتق تابع u نسبت به t و پریمها مشتق تابع u نسبت به x را نشان می دهند. با جایگزین کردن مشتقهای حاصل در معادله دیفرانسیل (۱) داریم

$$FG = c^r F''G.$$

باتقسیم طرفین رابطه فوق بر $c^r FG$ می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^r G} = \frac{F''}{F}.$$

برای برقرار بودن این تساوی دو طرف آن باید برابر مقدار ثابتی مثل k باشند. در واقع، عبارت طرف چپ تابعی است که تنها به t وابسته است و حال آنکه طرف راست شامل تابعی است که تنها به x وابستگی دارد و این تنها وقتی امکان دارد که هر کدام ثابت و برابر عدد ثابتی مانند k باشند. در واقع اگر چنین نباشد طرف اول تابعی از t و طرف دوم تابعی از x خواهد بود و بین x و t رابطه ای برقرار خواهد بود و معادله با مشتق جزئی (۱) به معادله دیفرانسیل تبدیل خواهد شد که مورد نظر ما نیست. بنابراین لازم است که F و G طوری انتخاب شوند که

$$\frac{\ddot{G}}{c^r G} = \frac{F''}{F} = k.$$

از این رابطه بلا فاصله دو معادله دیفرانسیل خطی معمولی، یعنی

$$(6) \quad F'' - kF = 0$$

و

$$(7) \quad \ddot{G} - c^r kG = 0$$

نتیجه می شود که در آن k عددی دلخواه است.

گام دوم . برقراری شرایط کرانه ای

جوابهای F و G را از معادلات (۶) و (۷) طوری می یابیم که $u = FG$ در شرایط کرانه ای (۲) صدق کند، یعنی به ازای هر t داشته باشیم

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{و} \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0$$

حال حل معادله (۶) را پی می گیریم. واضح است هرگاه $\circ \equiv u$ ، آنگاه $\circ \equiv G$ ، که جواب بدیهی معادله است. در حالی که هدف از حل مساله ، یافتن یک جواب غیر بدیهی است. لذا $\circ \not\equiv G$ و از آنجا $. F(L) = 0$ ، $F(0) = 0$ (الف) ، (ب) (۸)

به ازای $\circ = k$ جواب عمومی (۶) به صورت $F = ax + b$ می باشد و از (۸) می یابیم $a = b = 0$. لذا $\circ \equiv F$ ، که جواب موردنظر ما نیست زیرا در این صورت $\circ \equiv u$. به ازای عدد حقیقی مثبت

μ' جواب عمومی (۶) به صورت

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

می باشد و از (۸)، مانند قبل، می باییم $F \equiv 0$. بنابراین تنها حالتی که باقی می ماند انتخاب k کی منفی است، مثلاً $k = -p'$ ، آنگاه معادله (۶) به صورت زیر در می آید

$$F'' + p' F = 0$$

که دارای جواب عمومی

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

است. از این جواب و (۸) می باییم $F(0) = A = 0$ و آنگاه $F(L) = B \sin pL = 0$ ، باید فرض کنیم $B \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $F \equiv 0$. بنابراین $\sin pL = 0$ ، یعنی به ازای عدد صحیح n داریم

$$pL = n\pi \quad (9)$$

با فرض $B = 1$ ، تعداد نامتناهی جواب $F_n(x)$ که در آن

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

حاصل می شوند. این جوابها در (۸) صدق می کنند. [به ازای اعداد صحیح منفی n ضرورتاً، همان جواب را با انتخاب یک علامت منفی به دست می آوریم، زیرا $[\sin(-\alpha)] = -\sin \alpha$]

در این مرحله حل (۷) را پی می گیریم. حال ثابت k به مقادیر $k = -p' = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)$ که از (۹) نتیجه شده اند، منجر می گردند. به ازای این k ها، معادله (۷) به صورت

$$\ddot{G} + \lambda_n^r G = 0$$

که در آن $\lambda_n^r = \frac{cn\pi}{L}$ است، در می آید. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t.$$

از این رو توابع $u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$ که به صورت

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

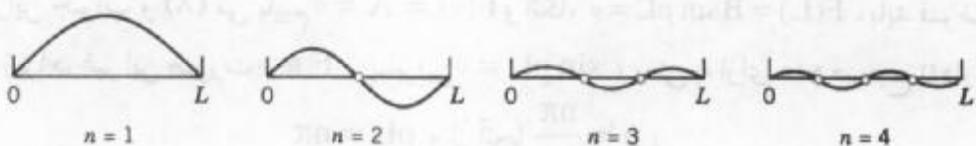
نوشته می شوند جوابهای (۱) هستند، و در شرایط کرانه ای (۲) نیز صدق می کنند. این توابع را توابع ویژه، یا تابع مشخصه و مقادیر $\lambda_n^r = \frac{cn\pi}{L}$ را مقدار مشخصه نخ مرتعش می نامند. مجموعه $\{\lambda_n^r\}_{n=1}^{\infty}$ را طیف می نامند.

چنانچه مشاهده می کنیم هر n حرکت همسازی با فرکانس $\frac{cn}{2\pi L}$ سیکل بر واحد زمان را نمایش می دهد. این حرکت را مدنرمال n ام نخ نامیده می شود. مدنرمال اول ($n = 1$) به مد

اساسی مشهور می‌باشد، و سایر مدهای نرمال متفاوت تر نامیده می‌شوند؛ از دیدگاه موسیقی حاصل آنها گام، گام به علاوه یک پنجم والا آخر می‌باشد. چون از (۱۱) در نقاط $\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, \frac{(n-1)L}{n}$ می‌بایم $\sin \frac{n\pi}{L} x = 0$

مد نرمال n ام دارای $1 - n$ گره است. نقاط گرهی نقاطی از نخ هستند که حرکت نمی‌کنند. (با نقاط انتهایی ثابت؛ شکل ۲۵۲ را ملاحظه کنید.)

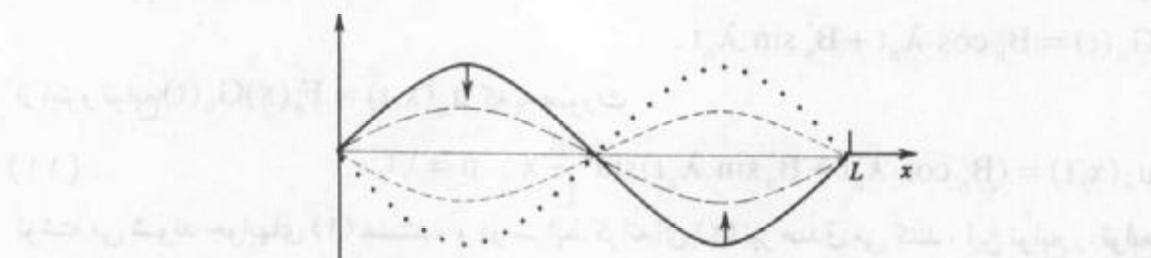
شکل ۲۵۳ مد نرمال دوم را به ازای مقادیر مختلف آن شان می‌دهد. نخ در هر لحظه به شکل



شکل ۲۵۲. مدهای نرمال نخ مرتعش

یک موج سینوسی می‌باشد. وقتی سمت چپ نخ به طرف پایین می‌رود، قسمت راست آن به طرف بالا حرکت می‌کند و بالعکس. برای سایر مدها وضع به همین منوال می‌باشد.

تنظیم موج با تغییرات کشش T انجام می‌گیرد و فرمول فوق برای فرکانس f_n از $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$ با انتخاب $\frac{T}{\rho} = c$ (بخش ۲.۱۱ فرمول (۳)) بیان می‌دارد که فرکانس با کشش متناسب است. T را نمی‌توان به سرعت افزایش داد. آیا چگونگی افزایش مد بنیادی را می‌توانید بیان کنید؟ (برای L و ρ فکر کنید).



شکل ۲۵۳. مد نرمال دوم به ازای مقادیر مختلف t

گام سوم. جواب مساله کلی

بدیهی است که در حالت کلی، یک جواب خاص $u(x, t)$ در شرایط اولیه (۳) و (۴) صدق نخواهد کرد. اما، از آنجا که معادله (۱) خطی و همگن می‌باشد، از قضیه بنیادی ۱ بخش ۱.۱۱ پی

می برمیم که مجموع هر تعداد متناهی از u_n ها، جوابی برای معادله (۱) می باشد. برای حصول جوابی که در شرایط (۳) و (۴) صدق نماید، سری نامتناهی زیر را با فرض $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ مورد بررسی قرار می دهیم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (12)$$

ابتدا صدق نمودن شرط اولیه (۳) (تغییر مکان اولیه مفروض) را مد نظر قرار می دهیم. از روابط (۳) و (۱۲) می یابیم

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x). \quad (13)$$

برای برقرار بودن این تساوی کافی است B_n را برابر ضریب سینوسی فوریه تابع $f(x)$ اختیار کنیم. برای این منظور بنا به (۴) بخش ۵.۱۰ چنین فرض می کنیم

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

حال برقراری شرط اولیه (۴) (سرعت اولیه مفروض) را پی می گیریم. با مشتقگیری از (۱۲) نسبت به t و با استفاده از (۴) می یابیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x). \end{aligned}$$

بنابراین، ضرایب B_n^* را طوری می یابیم که به ازای $t = 0$ ، $\frac{\partial u}{\partial t}$ یک بسط نیم دامنه ای $g(x)$ ، سری

سینوسی فوریه (x) باشد، یعنی B_n^* به صورت زیر اختیار می کنیم [ر. ک (۴) بخش ۵.۱۰]

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

با توجه به $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ می یابیم

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

نتیجه . با توجه به نتایج فوق پی می برمیم که $u(x,t)$ ارائه شده توسط (۱۲)، با ضرایب (۱۴) و (۱۵) جوابی از (۱) می باشد که در شرایط (۲)، (۳) و (۴) صدق می کند، مشروط براینکه سری (۱۲) و همچنین سریهای که با دومرتبه مشتقگیری نسبت به x و از (۱۲) حاصل می شوند همگرا بوده و مجموع

آنها به ترتیب برابر $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ که پیوسته هستند، باشد.

جواب (۱۲) یک جواب صوری برای مساله مورد نظر است و مانیاز داریم به آن معنی بدھیم . برای نیل

معادلات پامشتقات جزئی

به این هدف مساله را در حالتی بررسی می کنیم که سرعت اولیه $(x)g$ برابر صفر باشد. با توجه به این فرض B_n^0 به ازای هر n برابر صفر است. با توجه به این فرض (۱۲) به صورت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{L} x; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (16)$$

درمی آید. هم اکنون باید دید که این سری دارای معنی است یا نه؟ با توجه به [ر. ک. (۱۱)]، ضمیمه [۱.۳]

$$\cos \frac{cn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x - ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x + ct) \right\} \right]$$

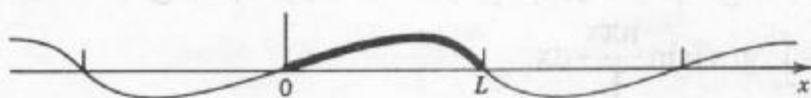
می توان نوشت

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x - ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x + ct) \right\}.$$

دو سری موجود در این جواب به ترتیب با جایگذاری $x - ct$ و $x + ct$ به جای متغیر x در سری سینوسی فوریه (۱۳) تابع $f(x)$ به دست آمده اند. از اینرو می توان نوشت

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]. \quad (17)$$

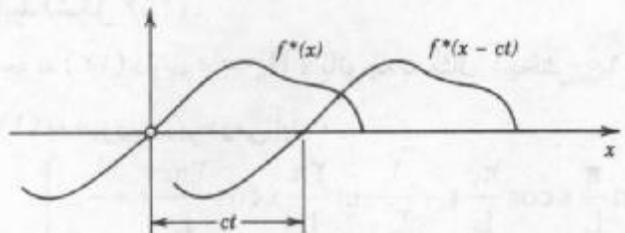
در (۱۷)، f^* بسط نیم دامنه ای فرد f با دوره $2L$ است (شکل ۲۵۴). نظر به اینکه انحراف اولیه $f(x)$ بر بازه $L \leq x \leq 0$ پیوسته و در نقاط انتهایی صفر است، از (۱۷) نتیجه می شود که $u(x,t)$ به ازای هر مقداری از متغیرها تابعی پیوسته از هر دو متغیر x و t می باشد. با مشتقگیری از (۱۷) پی می بریم که انجوابی از (۱) است، مشروط برآنکه $f(x)$ در فاصله $L < x < 0$ دوباره مشتق پذیر بوده و در نقاط انتهایی $x = L$ و $x = 0$ مشتق دوم یک طرفه صفر داشته باشد. تحت این شرایط (۱۷) و از آنجا (۱۶) جوابی از معادله (۱) بوده که در شرایط (۲) الی (۴) صدق می نماید.



شکل ۲۵۴. بسط نیم دامنه ای فرد $f(x)$

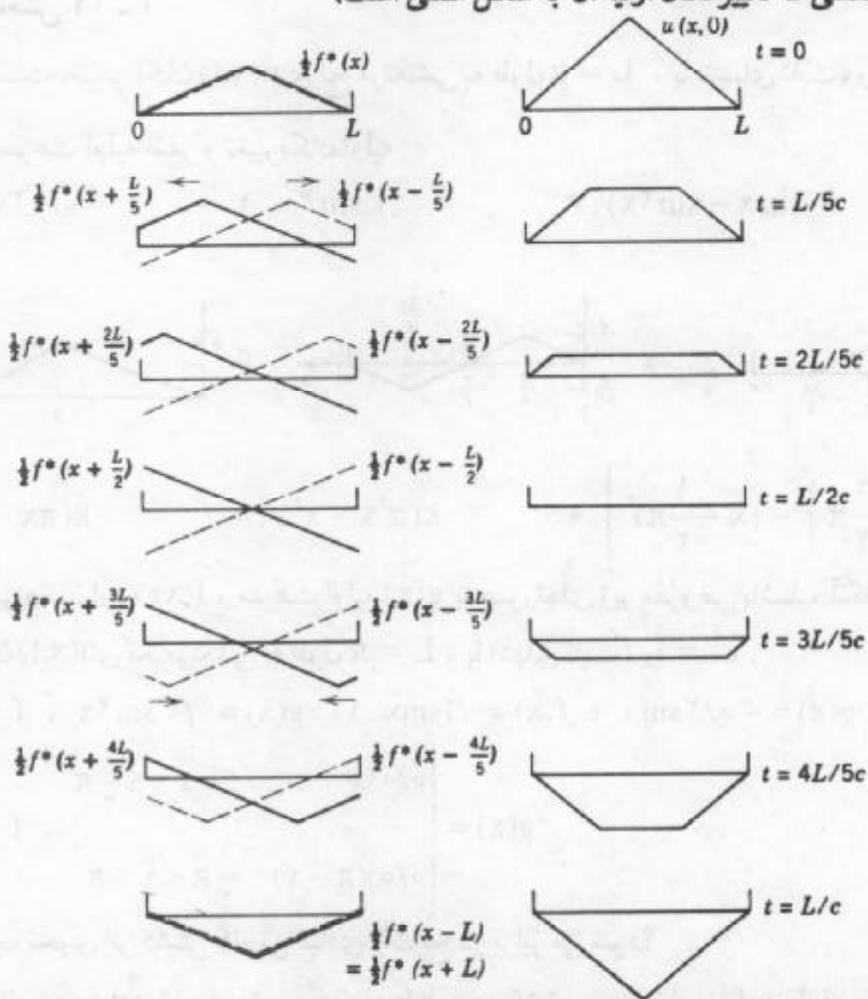
هرگاه $f'(x)$ و $f''(x)$ صرفاً به طور تکه ای پیوسته باشند (ر. ک. بخش ۱.۵)، یا مشتقات یک طرفه آنها صفر نباشند، آنگاه به ازای هر مقادیر متعدد و متناهی از x موجود است به قسمی که مشتقات دوم u در (۱) موجود نیست. به جز در این نقاط معادله موج همواره برقرار است، و از اینرو $u(x,t)$ را می توان از یک نقطه نظر مانند جوابی از مساله مورد نظر تصور نمود. مثلاً، حالت تغییر مکان اولیه مثلثی (مثال ۱ ارائه در ذیل این مطالب) به جوابی از این نوع منجر می شوند.

تعییر فیزیکی جالبی از (۱۷) را ارائه می نماییم. نمودار $f^*(x - ct)$ از انتقال نمودار $f^*(x)$ به اندازه ct واحد به طرف راست حاصل می شود(شکل ۲۵۵). این بدان معنا است که $f^*(x - ct)(c > 0)$ نمایش موجی است که با افزایش t به طرف راست حرکت می کند . مشابهاً، $f^*(x + ct)$ موجی است که به طرف چپ حرکت می کند، و $u(x, t)$ از ترکیب این دو موج حاصل می شود.



شکل ۲۵۵. انتگرالگیری از (۱۷)

مثال ۱. (نحوه تغییر مکان اولیه آن به شکل مثلثی است)



شکل ۲۵۶. جواب $u(x, t)$ در مثال ۱ به ازای مقادیر مختلف t (قسمت راست تصویر) که از ترکیب موجی که به سمت راست (خط چین) و موجی که به سمت چپ (قسمت چپ تصویر) حرکت می کند حاصل شده است.

جواب متناظر با تغییر مکان اولیه مثلثی معادله موج (۱)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & ; \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(t-x) & ; \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

و سرعت اولیه صفر را باید (شکل ۲۵۶) داشت.

حل. از $\circ g(x) \equiv 0$ و با توجه به (۱۲) داریم $B_n^* = 0$ ، با توجه به مثال ۱ بخش ۱۰.۵ مقدار B_n حاصل

می شود. با توجه به آن (۱۲) به صورت زیر درمی آید

$$u(x,t) = \frac{\lambda k}{\pi^r} \left[\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi c}{L} t - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{L} x \cos \frac{3\pi c}{L} t + \dots \right].$$

برای رسم نمودار جواب می توان از $f(x) = u(x, 0)$ و تغییر فوق برای دوتابع موجود در نمایش (۱۷) استفاده نمود. با توجه به آن نمودارترسیم شده در شکل ۲۵۶ حاصل می شود.

مسائل بخش ۳.۱۱

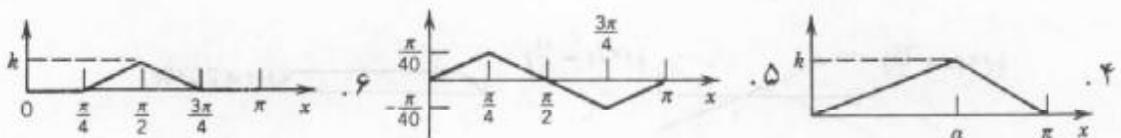
مطلوب است تغییر مکان $u(x,t)$ نخ مرتعشی به طول $L = \pi$ ، با انتهای ثابت، و $c' = \frac{T}{\rho} = 1$

متناظر با سرعت اولیه صفر و تغییر مکان اولیه

$$k(\sin x - \sin 2x). ۳$$

$$k \sin 3x. ۲$$

$$0/0 2 \sin x. ۱$$



$$k \left[\left(\frac{1}{2}\pi \right)^r - \left(x - \frac{1}{2}\pi \right)^r \right]. ۹$$

$$k(\pi^r x - x^r). ۸$$

$$k(\pi x - x^r). ۷$$

هرگاه تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ به صورتهای زیر مفروض باشند، آنگاه مطلوب است تغییر مکان $u(x,t)$ نخ مرتعشی به طول $L = \pi$ ، با انتهای ثابت، و $c' = 1$.

$$g(x) = -0/2 \sin x, \quad f(x) = 0/1 \sin x. ۱۱ \quad g(x) = 0/1 \sin 2x, \quad f = 0. ۱۰$$

$$g(x) = \begin{cases} 0/0 1x & ; \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \\ 0/0 1(\pi - x) & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi \end{cases}, \quad f = 0. ۱۲$$

۱۳. به چه نحوی اثر کشش گام تن بنیادی یک نخ دو برابر می شود؟

۱۴. فرکانس مدببینادی نخ مرتعش چگونه به طول نخ، کشش، جرم نخ بر واحد طول بستگی دارد؟

۱۵. نسبت دامنه های نوسان مدبندی و ماقوک دوم در مساله ۷ چیست؟ نسبت $\frac{a_1}{(a_1 + a_2 + \dots)}$ را هنمایی کنید. از اتحاد پارسوال بخش ۱۰.۸ استفاده کنید.

به روش جداسازی متغیرها، جوابهای (x, t) معادلات زیر را بایابید.

$$xu_x - yu_y = 0.18 \quad u_x - u_y = 0.17 \quad u_x + u_y = 0.16$$

$$u_x - yu_y = 0.21 \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.20 \quad yu_x - xu_y = 0.19$$

$$x^2 u_{xy} + 2y^2 u = 0.24 \quad u_{xy} - u = 0.23 \quad u_x + u_y = 2(x+y)u \quad 22$$

ارتعاشات و اداشهای نخ کشسان

۲۵. نشان دهید که ارتعاشات ایجاد شده نخ کشسان تحت تأثیر نیروی خارجی $P(x, t)$ بر واحد طول که به طور قائم بر نخ وارد می شود در معادله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \quad (18)$$

صدق می کند.

۲۶. با فرض سینوسی بودن نیروی خارجی، یعنی $P = A\rho \sin \omega t$ ، نشان دهید که

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

که بر آن $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \sin \omega t$ ؛ که به ازای n زوج، $k_n = 0$ و به ازای n فرد

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad k_n = \frac{4A}{n\pi} \sin \omega t$$

معادله (۱) می باییم

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0 \quad ; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

۲۷. نشان دهید که با جایگزینی عبارات u و $\frac{P}{\rho}$ از مساله ۲۶ در (۱۸) می باییم

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \sin \omega t; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

و همچنین نشان دهید که به ازای $\omega \neq \lambda_n$ جواب به صورت زیراست

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

۲۸. در مساله ۲۷ را طوری بایابید که u حاصل در شرایط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

صدقی کند.

۲۹. در حالت تشدید ($\lambda_n = \omega$) نشان دهید که

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega} (1 - \cos n\pi)t \cos \omega t.$$

۳۰. نشان دهید که مسائل (۱) الی (۴) با شرایط کرانه ای پیچیده‌تر، یعنی $u(0, t)$ و $u(L, t) = h(t)$ را می‌توان به یک مساله از یکتابع جدید v که یک مساله موج ناهمگن است و در شرایط کرانه ای

$$v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = f_i(x), \quad v_t(x, 0) = g_i(x)$$

صدق می‌کند، تبدیل نمود. راهنمایی. با قراردادن $w = v + w$ ، $u = v + w$ مناسب را بایابید.

۱۱. ۴. جواب دالامبر معادله موج

جالب است توجه کنیم که جواب (۱۷)، بخش ۳.۱۱، معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (1)$$

با معرفی متغیرهای مستقل جدید^۱

$$v = x + ct, \quad z = x - ct \quad (2)$$

معادله (۱) به معادله ساده‌تری بر حسب متغیرهای جدید تبدیل می‌شود که به روش معادلات دیفرانسیل قابل حل است و جواب مساله موردنظر سریعاً حاصل می‌شود.

باتوجه به مفروضات فوق v تابعی از z خواهد شد. با به کارگیری قاعده زنجیره ای بخش ۸.۸ مشتقهای موجود در (۱) را می‌توان بر حسب مشتقها نسبت به v و z ارائه نمود. داریم $v_x = 1$ و $v_z = 0$. برای سادگی در بیان $u(x, t)$ ، به عنوان تابعی از v و z را با همان حرف u نشان می‌دهیم. باتوجه به آن می‌توان نوشت

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z.$$

با به کارگیری قاعده زنجیره ای برای طرف راست و با استفاده از $v_x = 1$ و $v_z = 0$ می‌باییم

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}.$$

مشتق دیگر موجود در (۱) نیز به همین نحو تبدیل شده و نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}).$$

با جایگزین کردن این دو نتیجه در (۱) می‌باییم [ر. ک. زیرنویس ۲. ضمیمه ۳]

۱- یادآور می‌شویم که نظریه کلی معادلات با مشتقهای جزئی روشن اصولی برای یافتن این تبدیل که معادله را ساده‌تر می‌نماید ارائه می‌دهد (ر. ک. مرجع [C9] در ضمیمه ۱).

$$u_{vz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0. \quad (3)$$

معادله حاصل، یعنی معادله (۳) را با دوبار انتگرالگیری متوالی به راحتی می‌توان حل نمود. این موضوع مزیت این روش را نشان می‌دهد. در واقع با انتگرالگیری نسبت به z ، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

که در آن $h(v)$ تابع دلخواهی از v می‌باشد. با انتگرالگیری از این عبارت نسبت به v می‌یابیم

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

که در آن $\psi(z)$ تابع دلخواهی از z می‌باشد. چون انتگرال تابعی از v ، مثلاً $\phi(v)$ می‌باشد، جواب u به صورت $(z)\psi$ خواهد بود. با توجه به (۲) می‌توان نوشت

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (4)$$

این جواب به **جواب دالامبر**^۱ معادله موج (۱) مشهور می‌باشد.

روش ارائه شده در این بخش ظریفتر از روش ارائه شده در بخش ۱۱.۳ است. اما همان طوری که خواهیم دید روش دالامبر در برخی موارد خاص بکار می‌رود و حال آنکه روش سری فوریه در مسائل مختلف کاربرد دارد.

حال جواب دالامبر را با توجه به شرایط اولیه بخش ۱۱.۳، یعنی

$$u(x, 0) = f(x) \quad (5)$$

و

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (6)$$

به دست می‌آوریم. با مشتقگیری از (۴) می‌یابیم

$$u_t(x, t) = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct), \quad (7)$$

که در آن پریمها به ترتیب بیانگر مشتق نسبت به کل عبارت $x + ct$ و $x - ct$ می‌باشند. (۴) ای (۷) داریم

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x) \quad (8)$$

و

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x). \quad (9)$$

حال با تقسیم نمودن طرفین رابطه (۹) بر c و انتگرالگیری نسبت به x می‌یابیم

۱- زان لورن دالامبر (Jean Le Rond d'Alembert)، ۱۷۱۷ الی ۱۷۸۳، ریاضیدان فرانسوی، که به خاطر آثار مهمش در مکانیک شهرت دارد.

$$\phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \frac{1}{C} \int_{x_0}^x g(s) ds ; \quad k(x_0) = \phi(x_0) - \psi(x_0). \quad (10)$$

هرگاه طرفین روابط (۸) و (۱۰) را باهم جمع کنیم، آنگاه \nexists حذف شده و باتقسیم نمودن طرفین رابطه حاصل بر ۲ داریم

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2C} \int_{x_0}^x g(s) ds + \frac{1}{2} k(x_0). \quad (11)$$

مشابه‌اً، با کم کردن (۱۰) از (۸) و تقسیم نمودن طرفین رابطه حاصل بر ۲ می‌یابیم

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2C} \int_{x_0}^x g(s) ds - \frac{1}{2} k(x_0). \quad (12)$$

با جاگذاری $x + ct$ به جای x در (۱۱) و انتگرالگیری از x تا $x + ct$ در می‌آید. همینطور با جاگذاری $x - ct$ به جای x در (۱۲)، آنگاه انتگرالگیری با حذف علامت منفی، از x تا $x - ct$ خواهد بود یا با درنظر گرفتن علامت منفی انتگرال از $x - ct$ تا x صورت می‌پذیرد. نهایتاً

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (13)$$

هرگاه سرعت اولیه صفر باشد، آنگاه (۱۳) به صورت زیر در می‌آید

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] \quad (14)$$

که با (۱۷) بخش ۱۱.۳ مطابقت دارد. با توجه به شرایط کرانه‌ای (۲) می‌توان نشان داد که تابع f باید تابعی فرد با دوره تناوب $2L$ باشد.

این نتیجه نشان می‌دهد که در شرایط اولیه و کرانه‌ای جواب را به طور منحصر به فرد مشخص می‌نماید.

جواب معادله موج به کمک روش‌های تبدیل لاپلاس و فوریه در بخش‌های ۱۱.۱۱ و ۱۱.۱۴ ارائه شده‌اند.

مسائل بخش ۱۱.۴

با استفاده از (۱۴) نمودار (از نوع شکل ۲۵۶ بخش ۱۱.۳) انحراف (x, t) نخ مرتعش (به طول L ، با نقاط انتهایی ثابت و $c = 1$) با سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه $f(x)$ ، داده شده در زیر را رسم کنید. در این ترسیمات توجه کنید که k کوچک مثلاً $1/10 = 0.1$ است.

$$f(x) = k(x - x^*). \quad ۳ \quad f(x) = k \sin 2\pi x. \quad ۲ \quad f(x) = kx(1-x). \quad ۱$$

$$f(x) = k(x^* - x^{\ddagger}). \quad ۶ \quad f(x) = k \sin^2 \pi x. \quad ۵ \quad f(x) = k(x^* - x^{\ddagger}). \quad ۴$$

۷. نشان دهید که c برابر سرعت دوموج مفروض در (۴) می‌باشد.

۸. هرگاه میله فولادی به طول ۲ متر و به وزن $8/0$ نیوتون (حدوداً $18/0$ پوند) و بوسیله نیروی برابر

با 200 نیوتن (حدوداً 45 پوند) کشیده شده باشد، C سرعت موج پیموده شده چقدر است؟

۹. فرکانسهای توابع ویژه مساله 8 چقدر است؟

۱۰. معادله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \gamma^2 u$$

که در آن γ ثابت، را با توجه به اینکه شرط اولیه برابر (x) و سرعت اولیه برابر صفر باشد حل کنید.

۱۱. با توجه به شرایط کرانه ای (۲) بخش ۱۱.۳ نشان دهید که تابع f در رابطه (۱۴) این بخش، باید تابعی فرد و با دوره تناوب $2L$ باشد.

با استفاده از تبدیلات داده شده، هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y) \quad .12$$

$$xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x, z = xy) \quad .13$$

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y) \quad .14$$

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x - y) \quad .15$$

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 2x - y) \quad .16$$

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 3x + y) \quad .17$$

انواع و صورت متعارف معادلات با مشتقات جزئی خطی

معادله

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (15)$$

را بیضی گون نامند، اگر $AC - B^2 > 0$ ، سهمی گون گویند هرگاه $AC - B^2 = 0$ ، و هذلولی گون می نامند اگر $AC - B^2 < 0$ [در اینجا A, B ، و C توابعی از x و y می باشند، و همچنین ممکن است معادله (۱۵) در قسمتهای مختلف صفحه xy از انواع مختلف باشد، یعنی از نوع بیضی گون، سهمی گون و هذلولی گون باشد].

۱۸. نشان دهید که

معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ یک معادله بیضی گون است،

معادله گرما $u_t = c^2 u_{xx}$ یک معادله سهمی گون است،

معادله موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ یک معادله هذلولی گون است،

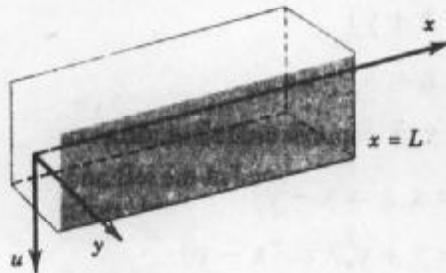
معادله تریکومی $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ از نوع آمیخته است (در نیم صفحه فوقانی بیضی گون، روی محور x ها سهمی گون، و در نیم صفحه تحتانی هذلولی گون است).

۱۹. هرگاه (۱۵) هذلولی گون باشد، می توان آن را با قراردادن $y = \Phi(x, y)$ و $v = \Psi(x, y)$ که در

آن ثابت Φ و ثابت Ψ جوابهای $y = y(x)$ معادله $Ay'' - 2By' + C = 0$ می‌باشند (ر. ک. مرجع [۹])، به صورت نرمال $u_{xz} = F^*(v, z, u, u_v, u_z) = 0$ تبدیل کرد. نشان دهید که در مورد معادله موج (۱)،

$$\Phi = x + ct \quad , \quad \Psi = x - ct.$$

۲۰. هرگاه (۱۵) سهی گون باشد، آنگاه با جایگزین کردن $x = v$ ، $z = \Psi(x, y)$ ، $v = \Psi_x(x, y)$ ، با Ψ تعریف شده در مساله ۱۹، معادله به صورت نرمال $u_{vv} = F^*(v, z, u, u_v, u_z) = 0$ در می‌آید. درستی این نتیجه را برای معادله $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ تحقیق کنید.



شکل ۲۵۷. میله تغییر شکل نیافته در مساله ۲۱

ارتعاشات میله . می‌توان نشان داد که ارتعاشات قائم آزاد کوچک یک میله یکنواخت (شکل ۲۵۷) توسط معادله مرتبه چهارم (ر. ک. مرجع [۹])

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (16)$$

بیان می‌شود. در این معادله $c^4 = \frac{EI}{\rho A}$ = مدول کشسانی یانگ، I = گشتاور ماند مقطع نسبت به محور y ها، ρ = چگالی و A = مساحت مقطع).

۲۱. با قرار دادن $u = F(x)G(t)$ در (۱۶) به کمک روش جداسازی متغیرها، نشان دهید

$$\frac{F^{(4)}}{F} = -\frac{\ddot{G}}{c^4 G} = \beta^4 = \text{ثابت},$$

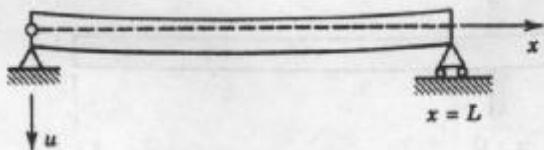
$$F(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x,$$

$$G(t) = a \cos c \beta^4 t + b \sin c \beta^4 t.$$

۲۲. جوابهای $u_n = F_n(x)G_n(t)$ معادله (۱۶) متناظر با سرعت اولیه صفر را طوری بیابید که در شرایط کرانه ای زیر صدق کند (ر. ک. شکل ۲۵۸):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (\text{دو انتهای میله در هر لحظه } t \text{ با تکیه گاه ساده می‌باشند})$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(L, t) = 0 \quad (\text{گشتاورها صفراند، در نتیجه اتحنا در دو انتهای میله صفر است})$$



شکل ۲۵۸. میله در مساله ۲۲

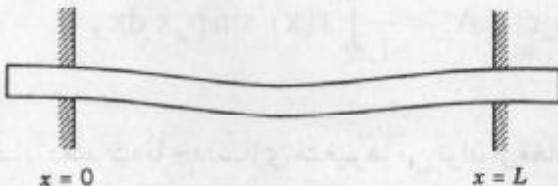
۲۳. جوابی از (۱۶) را بباید که در شرایط مساله (۲۲) و شرط اولیه

$$u(x, \circ) = f(x) = x(L - x)$$

صدق کند.

۲۴. نتایج مساله ۲۳ و مساله ۷ بخش ۱۱. ۳. را مقایسه نمایید. اختلاف بنیادی بین فرکانسها مدهای نرمال ارتعاشات نخ و ارتعاشات میله برابر چیست؟

۲۵. هرگاه دو انتهای میله گیردار باشد، شرایط کرانه‌ای برابر چیست؟ (ر. ا. شکل ۲۵۹.).



شکل ۲۵۹. میله در مساله ۲۵

۲۶. نشان دهید که $F(x)$ در مساله ۲۱ در صورتی در شرایط مساله ۲۵ صدق می‌کند که βL ریشه معادله

$$\cosh \beta L \cos \beta L = 1 \quad (17)$$

باشد.

۲۷. جواب تقریبی معادله (۱۷) را بباید.

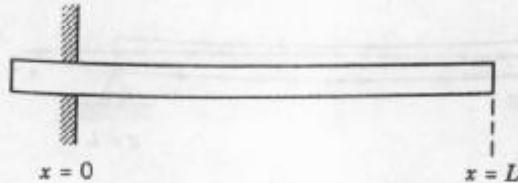
۲۸. هرگاه میله در انتهای چپ گیردار و انتهای دیگر آزاد (شکل ۲۶۰) و شرایط کرانه‌ای به صورت

$$u(\circ, t) = \circ, \quad u_x(\circ, t) = \circ, \quad u_{xx}(L, t) = \circ, \quad u_{xxx}(L, t) = \circ$$

باشد، آنگاه نشان دهید که $F(x)$ در مساله ۲۱ در صورتی در این شرایط صدق می‌کند که βL ریشه معادله

$$\cosh \beta L \cos \beta L = -1 \quad (18)$$

باشد.



شکل ۲۹. میله در مساله ۲۸.

۲۹. جواب تقریبی معادله (۱۸) را باید.

۳۰. ارتعاشات طولی یک میله یا تیر ارجاعی در جهت محور x ها در معادله موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ که آن $c^2 = \frac{E}{\rho}$ ، صدق می کند (ر. ک. Tolstov، [C11]). هرگاه میله در یک انتهای $x = 0$ ثابت و

در انتهای دیگر، $x = L$ آزاد باشد، آنگاه داریم

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0$$

(زیرا نیرو در انتهای آزاد صفر است). نشان دهید که حرکت متناظر با تغییر مکان اولیه $u(x, 0) = f(x)$ و سرعت اولیه صفر به صورت

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin p_n x \cos p_n ct; \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin p_n x dx, \quad p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

می باشد.

۳۱. (معادله آیری) نشان دهید که با جداسازی متغیرها می توان از معادله تریکومی (در مساله ۱۸) به معادله آیری $G'' - yG = 0$ رسید. (برای جوابها، ر. ک. مرجع [۱] فهرست شده در ضمیمه ۱ و همچنین ر. ک. به مساله ۳۰ واقع در انتهای فصل ۵.)

۱۱.۵ حل معادله گرما به کمک سری فوریه

بعد از حل معادله موج به حل معادله مهمی می پردازیم که به معادله گرما مشهور است. این

معادله به صورت زیر می باشد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u; \quad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$

که در آن $u(x, y, z, t)$ دمای درون جسم، c^2 ضریب نفوذ، K رسانای گرمایی، σ گرمای ویژه، و ρ چگالی جسم است، $\nabla^2 u$ لaplacین u بوده و در مختصات کارتزین x, y, z چنین تعریف می شود

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(مساله گرما در بخش ۸.۹ مدلسازی شده است).

به عنوان کاربردی مهم، دمای یک میله نازک بلند یا سیمی را که با مقطع عرضی ثابت و همگن در طول محور x ها قرار دارد (شکل ۲۶۱) مورد مطالعه قرار می‌دهیم. علاوه بر آن فرض می‌کنیم سطح جانبی میله به طور کامل عایق پوش شده است، به قسمی که گرماتنها در جهت محور x ها جريان می‌یابد، در این صورت u فقط به x و t بستگی دارد، و معادله گرمایی به شکل معادله گرمایی یک بعدی به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

با اینکه تنها تفاوت این معادله با معادله موج در مشتق u نسبت به زمان است ولی چنانچه مشاهده خواهیم کرد رفتار جوابهای معادله (۱) کاملاً متمایز از رفتار جوابهای معادله موج است.

حل معادله (۱) را به ازای برخی شرایط کرانه‌ای و اولیه مهم مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالتی را در نظر می‌گیریم که دمای نقاط انتهایی $u(0, t) = 0$ و $u(L, t) = 0$ میله صفر باشد، در این صورت شرایط کرانه‌ای به ازای هر t به صورت

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (2)$$

می‌باشد و اگر دمای اولیه این میله، تابع مفروض $u(x, 0) = f(x)$ فرض شود آنگاه شرط اولیه عبارت است از

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3)$$



شکل ۲۶۱. میله مورد بررسی

جواب $u(x, t)$ معادله (۱) را طوری می‌یابیم که در (۲) و (۳) صدق کند. در حل معادله گرمایی شرط اولیه کافی است، ولی در حل معادله موج بخش ۱۱.۳ نیاز به دو شرط اولیه داشتیم. برای حل معادله گرمایی از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. انجام این کار طی مراحل زیر صورت می‌پذیرد.

گام اول: دو معادله دیفرانسیل معمولی با جایگذاری

$$u(x, t) = F(x) G(t) \quad (4)$$

در (۱) می‌یابیم $G'(t) = -c' F''(x)$. معادله حاصل را چنین می‌نویسیم

$$\frac{G'}{G} = \frac{F''}{F}. \quad (5)$$

عبارت طرف چپ (۵) فقط به t و عبارت طرف راست آن تنها تابعی از x می‌باشد. بنابراین متغیرها

معادلات با مشتقهای جزئی

از هم جدا شده اند. همانند بخش ۱۱.۳ نتیجه می شود که طرفین تساوی (۵) باید برابر مقدار ثابتی، مانند k باشند. می توان نشان داد که به ازای $0 \geq k$ تنها جواب $u = FG$ که در معادلات (۲) صدق می کند، $0 \equiv u$ است. به ازای مقدار منفی $k = -p$ از (۵) داریم

$$\frac{G}{c'G} = \frac{F''}{F} = -p.$$

با توجه به آن به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسمیم

$$F'' + p'F = 0 \quad (6)$$

و

$$\dot{G} + c'p'G = 0. \quad (7)$$

گام دوم. صدق نمودن شرایط کرانه ای

ابتدا معادله (۶) را در نظر می گیریم. جواب عمومی این معادله به صورت

$$F(x) = A \cos px + B \sin px \quad (8)$$

می باشد. از شرایط کرانه ای (۲) نتیجه می شود که

$$u(0, t) = F(0) G(t) = 0$$

و

$$U(L, t) = F(L) G(t) = 0.$$

نظر به اینکه از $0 \equiv u$ حاصل می شود، بنابراین لازم است که $0 \equiv G$ و $F(L) = 0$ باشند. بنابراین $F(0) = A = 0$ و از آنجا $F(L) = B \sin pL$ با فرض $B \neq 0$ (در غیر این صورت $F \equiv 0$ و به جواب غیر صفر نمی رسمیم) می یابیم $\sin pL = 0$. برای برقرار بودن این تساوی می توان چنین اختیار کرد $p = \frac{n\pi}{L}$ که در آن $n = 1, 2, \dots$. با فرض $B = 1$ ، جوابهای زیر را که در (۲) نیز صدق می کنند برای (۶) حاصل می شود

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}; \quad n = 1, 2, \dots$$

(همانند بخش ۱۱.۳ نیازی به بررسی مقادیر صحیح منفی n نداریم).

حال معادله دیفرانسیل (۷) را در نظر می گیریم. به ازای $p = \frac{n\pi}{L}$ این معادله به صورت

$$\dot{G} + \lambda_n^r G = 0 \quad \text{که در آن } \lambda_n^r = \frac{cn\pi}{L}$$

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^r t}; \quad n = 1, 2, \dots$$

می باشد که در آن B_n عددی ثابت است. لذا تابع

$$u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^r t}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

جوابهای معادله گرمای (۱) می باشند که در (۲) نیز صدق می کنند. این جوابها توابع ویژه مساله،

$$\text{متناظر با مقادیر ویژه } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \text{ می باشند.}$$

گام سوم. جواب مساله اصلی

تاکنون جوابهای (۹) را برای معادله (۱) که در شراط کرانه ای (۲) نیز صدق می کنند را یافته ایم. هم اکنون برای رسیدن به جوابی که در شرط اولیه (۳) صدق کند، به بررسی یک سری از این توابع ویژه به صورت

$$(10) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n t}; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

می پردازیم. با جایگزین کردن $t = 0$ در (۱۰) و از (۳) می یابیم

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

بنابراین برای برقرار بودن (۳) کافی است ضرایب B_n را برابر ضرایب سری سینوسی فوريه تابع $f(x)$ ، یعنی به صورت زیر اختیار کنیم [ر. ک. (۴) بخش ۱۰. ۵].

$$(11) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n = 1, 2, \dots.$$

جواب فوق در صورتی که $f(x)$ بر بازه $0 \leq x \leq L$ به طور تکه ای پیوسته (ر. ک. بخش ۱۰. ۶)، و دارای مشتق یک طرفه در هر نقطه درونی این بازه باشد، برقرار است؛ یعنی، تحت این مفروضات سری (۱۰) با ضرایب (۱۱) جواب مساله فیزیکی مورد بحث می باشد. اثبات این مطلب که مستلزم دانستن همگرایی یکنواخت سریها می باشد، درآتی، در فرصت‌های مناسب ارائه خواهد شد (مسائل ۲۲، ۲۴، ۲۶ بخشنامه ۱۴).

به علت وجود عامل نمایی، وقتی که آبه سمت بینهایت میل کند، تمام جملات (۱۰) به سمت صفر میل می کنند. میزان تلاشی با n افزایش می یابد.

مثال ۱. دمای اولیه سینوسی

دمای (x,t) یک میله عایق پوش شده مسی به طول 80 سانتیمتر که در دمای اولیه $100 \sin\left(\frac{\pi x}{80}\right)$ درجه سانتیگراد و دو انتهای آن در دمای 0° نگهداری شده است را محاسبه کنید. چه مدتی طول می کشد تا دمای میله به 50 درجه سانتیگراد نزول کند. ابتدا مقدار آنرا حدس بزنید و سپس محاسبه کنید. داده های فیزیکی میله مسی به قرار زیر است:

۳- به زیرنویس ۷، بخش ۱۰. ۲ مراجعه کنید.

چگالی برابر $\frac{gm}{cm^3}$ ۸۶۹۲، گرمای ویژه برابر $\frac{cal}{gm \cdot ^\circ C}$ ۰/۰۹۲ و رسانای گرمایی برابر $\frac{cal}{cm \cdot sec \cdot ^\circ C}$ ۰/۹۵ حل. با توجه به شرط اولیه داریم

$$u(x, \circ) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\lambda \circ} = f(x) = 100 \sin \frac{\pi x}{\lambda \circ}.$$

با توجه به آن می‌بایس

$$B_1 = 100, B_r = B_\tau = \dots = 0.$$

در (۱۰) نیاز به مقدار $c' = \frac{K}{\sigma\rho} = \frac{0/95}{0/092} \times 8/92 = 1/158 [cm^3/sec]$ که در آن $\lambda'_1 = \frac{c' \pi}{L} = \frac{0/01785}{0/01607}$ می‌باشد، داریم

$$\lambda'_1 = 1/158 \times \frac{0/01785}{0/01607} = 0/001785 [sec^{-1}].$$

جواب (۱۰) به صورت

$$u(x, t) = 100 \sin \frac{\pi x}{\lambda \circ} e^{-0/001785t}$$

می‌باشد. چنانچه

$$\frac{t = (\ln(0/0))}{(-0/001785)} = 388 \approx 6/5 \text{ (دقیقه)} = 6/5 \text{ (ثانیه)},$$

$$100e^{-0/001785t} = 50.$$

مثال ۲. سرعت تلاشی

مثال ۱ را در صورتی که دمای اولیه $100 \sin \left(\frac{3\pi x}{\lambda \circ} \right)$ درجه سانتیگراد و سایر اطلاعات مانند مثال قبل باشند حل کنید.

حل. با جایگزینی $7 = 0/01607$ در $0/001785 = 0/01607 = 3\lambda'_1 = 3\lambda'_r$ در (۱۰) هم اکنون به جای $n = 3$ داریم $n = 1$. بنابراین جواب حاصل عبارت است از

$$u(x, t) = 100 \sin \frac{3\pi x}{\lambda \circ} e^{-0/01607t}.$$

از اینرو دمای ماکزیمم $C = 50^\circ$ در لحظه $t = \frac{\ln(0/0)}{(-0/01607)} = 43$ رخ می‌دهد که خیلی سریع نیز می‌باشد (۹ برابر سرعتراز مثال ۱).

با انتخاب n بزرگتر، باز هم تلاشی سریعتر بوده و در یک مجموع یا سری از چنین جملاتی، هر جمله دارای میزان تلاشی بوده، و جملات به ازای n بزرگ، بعد از هر زمان کوتاه به طور عملی صفر می‌شوند. مثال بعدی از این نوع می‌باشد، و منحنی شکل ۲۶۲ متناظر با $t = 0/5 = 0/001785t$ تقريباً شبیه یک

منحنی سینوسی می باشد، یعنی به طور کاربردی این نمودار اولین جمله جواب می باشد.

مثال ۳. دمای اولیه مثلثی در یک میله

دمای در یک میله عایق پوش شده ای را باید که دوسر آن در دمای صفر و دمای اولیه به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & ; \quad \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

حل. از (۱۱) می باییم

$$B_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right). \quad (11)$$

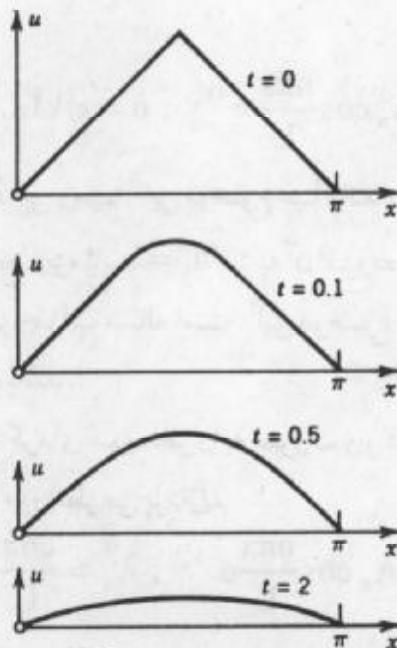
با انتگرالگیری نتیجه می شود که به ازای مقادیر زوج $n = 0, 2, 4, \dots$ و

$$B_n = \frac{4L}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

$$B_n = -\frac{4L}{n^2 \pi^2} \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

(ر. ک. مثال ۱ بخش ۱۰.۵ که در آن $\frac{L}{2} = k$ می باشد.) در نتیجه جواب عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{c\pi}{L} \right)^2 t \right] - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{3c\pi}{L} \right)^2 t \right] + \dots \right].$$



شکل ۲۹۲ جواب مثال ۳ به ازای $L = \pi$ و $c = 1$ و مقادیر مختلف t

شکل ۲۶۲ نشان می دهد که با افزایش دما نزول می کند، زیرا حرارت تلف شده ناشی از خنک بودن دو انتهای می باشد.

متعلم می تواند شکل ۲۶۲ را با شکل ۲۵۶ بخش ۱۱ . ۳ مقایسه کند و مشترکات را باید.
مثال ۴ . میله با دو انتهای عایق پوش شده، مقدار ویژه صفر

جواب مسائل (۱)، (۳) و (۲) را باتوجه به این که هر دو انتهای میله عایق پوش شده است باید.

حل . تجارب فیزیکی نشان می دهد که شدت گرمابا گرادیان دما متناسب می باشد . بنابراین هرگاه دو انتهای $x = 0$ و $x = L$ میله عایق پوش باشد ، بطوریکه هیچگونه گرمایی نتواند از دو انتهای عبور کند ، شرایط کرانه ای به ازای هر t به صورت زیر درمی آید

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0. \quad (2*)$$

باتوجه به $u(x,t) = F(x)G(t)$ می باییم

$$u_x(0,t) = F'(0)G(t) = 0, \quad u_x(L,t) = F'(L)G(t) = 0.$$

با مشتقگیری (۸) می باییم $F'(0) = Bp$ و $F'(L) = -Ap \sin pL$. از نتیجه نهایی می باییم $F'(x) = -Ap \sin px + Bp \cos px$ و همچنین $F''(0) = Ap^2$. با توجه به نتیجه حاصل و (۸) با فرض $A = 0$ ، $B = 0$ ، داریم

$$p = p_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

باتوجه به نتیجه حاصل و (۸) با فرض $A = 0$ ، $B = 0$ ، داریم

$$F_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

همانند بخش قبل به توابع ویژه

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n t}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

منتظر با مقادیر ویژه $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ می رسیم . این موضوع عیناً مانند بخش قبل است و تنها تفاوت در آن است که مقدار ویژه λ_n و تابع ویژه ثابت u_n نیز به آن افزوده می شود . هرگاه دمای اولیه (x) ثابت باشد ، آنگاه تابع ثابت u_n نیز جواب مساله است . این موضوع نشان می دهد که صفر نیز می تواند یک مقدار ویژه ، با تابع ویژه ثابت باشد .

هم اکنون جواب مساله گرمای موردنظر را به صورت زیر درنظر می گیریم و باتوجه به شرط اولیه داده شده به محاسبه ضرایب موردنظر می پردازیم

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n t}; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \quad (13)$$

باتوجه به شرط اولیه (۳) داریم

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

هم اکنون ضرایب A_n را برابر ضرایب کسینوسی $f(x)$ می‌گیریم [ر. ک. (۲) بخش ۱۰.۵].

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

مثال ۵. دمای اولیه مثلثی یک میله با دوانتهای عایق پوش شده

دما را در میله مربوط به مثال ۳، با فرض اینکه دوانتهای میله عایق پوش شده باشد (بجای آنکه دوانتها در دمای صفر نگهداشته شده) را بایابد.

حل. برای دمای اولیه مثلثی می‌باییم $\frac{L}{4} = A_0$ و [ر. ک. مثال ۱، بخش ۱۰.۵.۵] که در آن $k = \frac{L}{2}$

$$A_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{\frac{L}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

$$= \frac{2L}{n\pi} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right).$$

از اینرو جواب (۱۳) عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{2c\pi}{L} \right)^2 t \right] + \frac{1}{6} \cos \frac{6\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{6c\pi}{L} \right)^2 t \right] + \dots \right\}.$$

مشاهده می‌کنیم که با افزایش t ، عبارت فوق کاهش می‌یابد و u به سمت $\frac{L}{4}$ (عکس \rightarrow) مقدار متوسط دمای اولیه میل می‌کند. این مطلب امکان پذیر است زیرا هیچگونه گرمایی نمی‌تواند از دوانتهای میله عایق پندی شده خارج شود. بر عکس، با سرد نمودن دوانتها در مثال ۳، افت دمای خواهیم داشت و $u \rightarrow \frac{L}{4}$ همان دما در دوانتهای میله است.

جريان گرمای دو بعدی در حالت پایدار

معادله گرمای دو بعدی به صورت زیر بیان می‌شود [ر. ک. شروع این فصل]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

اگر جريان گرمای پایدار باشد (یعنی، مستقل از زمان باشد)، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ و معادله گرمای به معادله لابلان^۴

۴- اين معادله مهم در بخش ۸.۶ آمده است و ييشتر در بخشهاي ۱۱.۱۱، ۱۱.۱۲، ۱۲.۱۲ و ۱۷ مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

تبديل می شود. در این صورت، یک مساله گرما شامل معادله گرما (۱۵) در یک ناحیه R واقع در صفحه xy و شرط کرانه ای مفروض بر منحنی C کران R می باشد. چنین مساله ای را یک مساله با مقدار کرانه ای می نامند.

یک مساله با مقدار کرانه ای را مساله دیریکله نامند هرگاه مقدار u بر C مشخص باشد. یک مساله با مقادیر کرانه ای را یک مساله نیومن u در جهت قائم نامیم اگر $\frac{\partial u}{\partial n}$ بر C مشخص باشد. یک مساله با مقادیر کرانه ای را مساله آمیخته نامند هرگاه بر قسمتی از C ، u و بر قسمت دیگر از C مشخص باشد.

مساله دیریکله در یک مستطیل R (شکل ۲۶۳). مساله دیریکله (۱۵) را در مستطیل R (شکل ۲۶۳)، با فرض اینکه دمای $u(x,y)$ بر سمت فوچانی برابر با تابع مفروض $f(x)$ و در سه طرف دیگر مستطیل صفر باشد، حل کنید.

حل این مساله به روش جداسازی متغیرها صورت می پذیرد. با جایگزینی

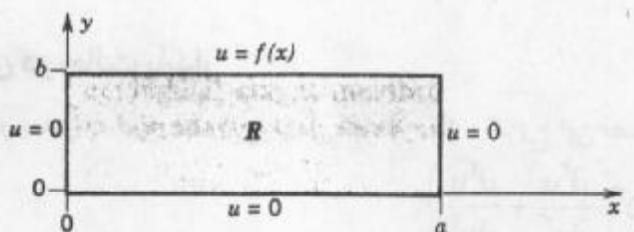
$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

در (۱۵) و تقسیم نمودن طرفین آن بر FG می یابیم

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k.$$

از مطلب فوق و شرایط کرانه ای داریم

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + kF = 0 \quad ; \quad F(0) = 0, \quad F(a) = 0.$$



شکل ۲۶۳. مستطیل R و مقادیر کرانه ای مفروض

این موضوع نشان می دهد که $k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ و متناظر با آن جوابهای غیر بدیهی زیر را داریم

$$F(x) = F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

معادله مربوط به G به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^r G}{dy^r} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^r G = 0,$$

که دارای جوابی به صورت زیر می باشد

$$G(y) = G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

حال شرط کرانه ای $u = 0$ بر قسمت پائینی R ، ایجاب می کند که $G_n(0) = 0$ ، یعنی $B_n = -A_n$ یا $G_n(0) = A_n + B_n = 0$.

$$G_n(y) = A_n \left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) = 2A_n \sinh \frac{n\pi y}{a}.$$

ازین رابطه و (۱۶)، با فرض $2A_n = A_n^*$ ، توابع ویژه به صورت زیر حاصل می شود

$$u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (۱۷)$$

این مطلب در شرط کرانه ای $u = 0$ بر قسمتهای چپ، راست و پائینی نیز صدق می کند.

برای نمایش جوابی که در شرط کرانه ای

$$u(x, b) = f(x), \quad (۱۸)$$

بر قسمت بالای R ، صدق کند، سری نامتناهی زیر را در نظر می گیریم

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

از سری فوق، (۱۸) و (۱۷) با فرض $y = b$ می یابیم

$$u(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}.$$

این نتیجه را می توان به صورت زیر نوشت

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a}) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

این موضوع نشان می دهد که عبارت داخل پرانتز می تواند ضریب فوریه b_n از $f(x)$ باشد، یعنی

[ر. ک. (۴) بخش ۵. ۱۰]

$$b_n = A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

باتوجه به رابطه فوق و (۱۷) مشاهده می کنیم که جواب مساله مورد نظر به صورت زیر می باشد

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (۱۹)$$

که در آن

$$A_n^* = \frac{2}{a \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (۲۰)$$

این جواب به طور صوری، بدون توجه به همگرایی و مجموع سریهای متاظر با u ، u_{xx} ، و u_{yy} به دست آمده است و در صورتی می‌تواند به عنوان جواب مورد استفاده قرار گیرد که f' پیوسته و "f" بطور نکه ای پیوسته بر بازه $a \leq x \leq b$ باشد. اثبات این مطلب تا اندازه‌ای پیچیده و متکی بر همگرایی یکنواخت می‌باشد. اثبات این مطلب را می‌توان در مرجع [C2] ضمیمه ۱ ملاحظه نمود.

پتانسیل الکترواستاتیکی، غشای کشسان

معادله حاکم بر پتانسیل شارژ‌های الکتریکی در هر ناحیه که آزاد از شارژ‌ها است، معادله لاپلاس می‌باشد. از این رو مساله گرمای در حالت پایدار نیز می‌تواند نوعی مساله پتانسیل الکترواستاتیکی تعبیر شود، که در آن (۱۹)، (۲۰) پتانسیل در مستطیل و پتانسیل بر سطح فوقانی برابر $f(x)$ و بر سایر سطوح پتانسیل برابر صفر باشد.

مساله موج بررسی شده در بخش‌های ۷.۱۱ و ۸.۱۱ در حالت پایدار که به صورت (۱۵)، (۱۹) و (۲۰) در می‌آید. تغییر مکان یک غشای کشسان مستطیلی با سه پهلوی ثابت واقع در صفحه xy و پهلوی چهارم با تغییر مکان مفروض $f(x)$ می‌باشد.

مسائل بخش ۵.۱۱

۱. نمودار u ، u_x ، و u_{xx} [ر. ک. (۹)]، با $L = \pi$ و $c = 1$ ، $B_n = 1$ را به ازای $t = ۰, ۱, ۲, ۳$ به عنوان توابعی از X رسم کنید. رفتار این توابع را مقایسه کنید.
۲. چگونگی بستگی میزان تلاشی (۹) به گرمای ویژه، چگالی، و رسانایی گرمایی را، به ازای n ثابت، مشخص کنید.
۳. اگر اولین تابع ویژه (۹) از میله به میزان نصف مقدار اولیه در مدت ۱۰ ثانیه تنزل یابد، میزان نفوذ پذیری چقدر خواهد بود؟

مطلوب است دمای $u(x,t)$ میله‌ای نقره‌ای (به طول 10 cm ، مقطع ثابت 1 cm^3 ، چگالی $10/6\text{ gm/cm}^3$ ، رسانایی گرمایی $1/04\text{ cal/gm}^\circ\text{C}$ ، گرمای ویژه $0/056\text{ cal/gm}^\circ\text{C sec}$) که سطح جانبیش به طور کامل عایق پوش شده است، نقاط انتهایی آن در دمای ثابت صفر درجه سانتیگراد قرار گرفته و دمای اولیه برابر (بر حسب درجه سانتیگراد) $f(x)$ می‌باشد که در آن

$$f(x) = k \sin \frac{\pi}{10}x \quad .5 \quad f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x \quad .4$$

$$f(x) = 5 - |x - 5| \quad .7 \quad f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 5 \\ 0 & ; \text{سایر جاهای} \end{cases} \quad .6$$

$$f(x) = 0/01x(10-x) \quad .9 \quad f(x) = 0/1x(100-x^2) \quad .8$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 2/5 \\ 2/5 & ; \quad 2/5 < x < 7/5 \\ 10-x & ; \quad 7/5 < x < 10 \end{cases} . \quad 10$$

۱۱. با فرض اینکه میله در مفروضات متن صدق کند و دو انتهای آن در دمای دائمی متمایز U_1 و U_2 قرار گرفته باشند. دمای $U_1(x)$ در میله را بعد از طی مدت زمان طولانی بباید (بطور نظری) وقتی که $t \rightarrow \infty$:

۱۲. در مساله ۱۱، فرض کنید دمای اولیه برابر $f(x, 0) = f(x)$ باشد. نشان دهید که دما در هر لحظه $t > 0$ به صورت $u(x, t) = u_1(x) + u_{11}(x, t)$ می باشد که در آن u_{11} همانند قبل تعریف می شود و

$$u_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

که در آن

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_1(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{n\pi} [(-1)^n U_2 - U_1]. \end{aligned}$$

۱۳. (انتهای عایق پوش شده، شرایط کرانه ای عایق گرمای) مطلوب است دمای $u(x, t)$ میله ای به طول L که به طور کامل از اطراف در دو انتهای $x = 0$ و $x = L$ عایق پوش شده است. اطلاعات فیزیکی: شارگر مایی که از مقاطع انتهایی می گذرد بمقادیر $\frac{\partial u}{\partial x}$ در همانجا متناسب است. نشان دهید که این موضوع هم با شرایط زیر متناظر است

$$u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

ثابت کنید که از روش ضربی جواب

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

حاصل می شود، که در آن، بنابر (۲) بخش ۱۰

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

توجه کنید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $u \rightarrow A_0$. آیا این با مشهودات فیزیکی شما مطابقت دارد؟

۱۴. دمای $u(x, t)$ میله مربوط به مساله ۱۳ را طوری بباید که انتهای چپ در دمای صفر بوده و انتهای راست عایق پوش شده، و دمای اولیه برابر با ثابت $= 0$ باشد.

مطلوب است دمای میله توصیف شده در مساله ۱۳، در صورتی که $c = 1$ ، $L = \pi$ ، و

$$f(x) = \circ / 5 \cos 2x . 17$$

$$f(x) = x . 16$$

$$f(x) = 1 . 15$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ \pi - x & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} . 19$$

$$f(x) = x^r . 18$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} . 21 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} . 20$$

۲۲. میله مورد نظر در مسائل ۴ تا ۱۰ را در نظر می گیریم. فرض کنید که دمای نقاط انتهایی آن برای زمانی طولانی برابر 10° درجه سانتیگراد باشد. آنگاه در لحظه، مثلاً در $t = 0$ ، دما در $x = L$ به طور ناگهانی به صفر درجه سانتیگراد تزل کند و همین مقدار بماند، ضمن آنکه دما در $x = 0$ کماکان 10° درجه سانتیگراد باشد. دما در وسط میله در لحظات $0, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$ ثانیه چقدر است؟

۲۳. (تشعشع در انتهای میله) میله ای به طول π که از پهلو عایق پوش شده و در $(0, L)$ ، که انتهای چپ در دمای صفر درجه سانتیگراد نگهداشته و انتهای راست بطور آزاد در هوای شامل دمای صفر درجه سانتیگراد قرار دارد اطلاعات فیزیکی : شرایط کرانه ای تشعشع عبارت است از

$$-u_x(\pi, t) = k[u(\pi, t) - u_0],$$

که در آن u_0 دمای احاطه شده توسط هوا و k ثابت ، مثلاً ، برای سادگی $k = 1$ می باشند. نشان دهید جوابی که در این شرایط کرانه ای صدق می کند، به صورت زیر می باشد

$$u(x, t) = \sin px e^{-pt}$$

که در آن p یک جواب معادله $\tan p\pi = -p$ می باشد. بطور ترسیمی نشان دهید که این معادله دارای نامتناهی جوابهای مثبت ... p_1, p_2, p_3, \dots می باشد، که در آن $\frac{1}{p_n} > n$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - n + \frac{1}{2}) = 0.$$

۲۴. (معادله گرمای غیرهمگن) مساله شامل معادله

$$u_t - c^r u_{xx} = Ne^{-\alpha x}$$

با شرایط (۲) و (۳) را در نظر می گیریم. در اینجا عبارت طرف راست ممکن است نمایش تلفات گرمای ناشی از تلاشی رادیوакتیو در میله باشد. نشان دهید که معادله این مساله را می توان با قرار دادن $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ و تعیین $v(x, t) = v(L, t) = 0$ به طوری که $w(0, t) = 0$ و $w(x, 0) = f(x) - w(x)$ به یک معادله همگن تبدیل نمود.

۲۵. (تشعشع) هرگاه میله ذکر شده در متن که دو انتهای آن در محیط اطراف خود که در درجه حرارت صفر است شروع به تشعشع کند، آنگاه معادله حاکم بر چنین پدیده‌ای به صورت زیر می‌باشد

$$v_t = c^2 v_{xx} - \beta v.$$

نشان دهید که با قرار دادن $v(x,t) = u(x,t)w(t)$ این معادله را می‌توان به صورت (۱) درآورد.

۲۶. مساله $v(L,t) = 0$ ، $v(0,t) = 0$ ، $v_t = c^2 v_{xx} - v$ ($0 < x < L, t > 0$) را که در آن عبارت v -انتقال گرمای محیط اطراف که با درجه حرارت صفر است می‌باشد را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $v(x,t) = u(x,t)w(t)$ ، $v(x,t) = u(x,t)w(t)$ را طوری بیابید که u در (۱۰) و (۱۱) صدق کند.

۲۷. (شارگرمایی) شارگرمایی $(\phi(t))$ در $x = 0$ برای جواب (۱۰) برابر چیست؟ توجه کنید که وقتی $\infty \rightarrow 0 \rightarrow t \rightarrow 0$ ، $\phi(t) \rightarrow 0$. آیا بطور فیزیکی این مطلب قابل توجیه است؟

۲۸. مطلوب است حل مساله (۱)، (۲) و (۳) با $L = \pi$ و

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

۲۹. هرگاه میله مذکور در مساله ۲۸ شامل دو قسمت آهنی ($c^2 = 16/\pi^2$) با دمای اولیه 20° درجه سانتیگراد و صفر نسبت به اتصال کامل در $x = 0$ باشد. درجه حرارت تقریبی در وجه مشترک آنها در $t = 10, 20, 30^\circ$ ثانیه برابر چیست؟ (تنها جمله اول جواب را به کار ببرید.)

۳۰. (میله باتولید گرمای) هرگاه گرمای تولید شده در یک میزان ثابت در سراسر میله به طول $L = \pi$ با دمای اولیه $f(x)$ و انتهای $x = \pi$ و $x = 0$ که در دمای صفر قرار گرفته‌اند، باشد معادله گرمایی صورت $u_t = c^2 u_{xx} + H$ می‌باشد که در آن ثابت $H > 0$. این مساله را حل کنید. راهنمایی. قرار دهید

$$u = v - Hx \frac{(x - \pi)}{2c^2}$$

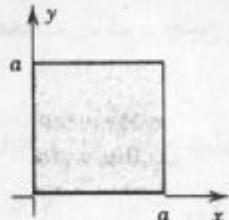
مسائل دو بعدی

۳۱. (معادله لاپلاس) مطلوب است محاسبه پتانسیل در یک مریع $2 \leq x \leq 40^\circ$ ، $0 \leq y \leq 20^\circ$ هرگاه قسمت فوقانی آن در پتانسیل $\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}$ و طرفهای دیگر در پتانسیل صفر قرار گرفته باشند.

۳۲. مطلوب است محاسبه پتانسیل در مستطیل $20 \leq x \leq 40^\circ$ ، $0 \leq y \leq 20^\circ$ که قسمت فوقانی آن در پتانسیل 22° ولت و پهلوهای دیگر در پتانسیل صفر نگهداشته شده باشند.

۳۳. (جریان گرمای در یک صفحه) رویه‌های یک صفحه مربعی نازک (شکل ۲۶۴، که در آن $a = 24^\circ$) به طور کامل عایق پوش شده است. قسمت فوقانی در دمای $C = 20^\circ$ و دیگر پهلوهای در دمای $C = 5^\circ$

قرار گرفته اند. مطلوب است دمای حالت پایدار $(x,t) u$ در این صفحه مربعی شکل.



شکل ۲۶۴. صفحه مربعی

۳۴. معادله گرمای دو بعدی

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

برای یک صفحه نازک مربعی شکل ۲۶۴ به ضلع $a = \pi$ به قسمی که پهلوهای قائم آن در درجه حرارت $0^\circ C$ و دو ضلع افقی آن عایق پوش شده است را بیابد.

۳۵. فرمولهای مشابه با (۱۹)، (۲۰)، برای توزیع دما در مستطیل R مذکور در متن را وقتی که طرف پائین R در دمای $f(x)$ و سه طرف دیگر در دمای صفر قرار گرفته باشند را بیابید.

۳۶. مطلوب است دمای حالت پایدار صفحه مفروض در مساله ۳۳، هرگاه قسمت پائینی در $U^\circ C$ بالائی در $C^\circ U$ ، و دو طرف دیگر در دمای صفر درجه سانتیگراد نگهداشته شده است. راهنمایی. مساله را به دو مساله که دمای کرانه ای بر سه طرف هر کدام از مسائل برابر با صفر باشد تبدیل کنید.

۳۷. (مساله مقدار کرانه ای آمیخته) مطلوب است دمای حالت پایدار در صفحه مفروض در مساله ۳۳ که در آن طرفهای بالایی و پائینی به طور کامل عایق پوش شده، طرف چپ در دمای صفر درجه سانتیگراد، و طرف چپ در دمای $C^\circ f(y)$ قرار گرفته اند.

۳۸. (تشعشع) مطلوب است دمای حالت پایدار در مستطیل مفروض شکل ۲۶۳ که در آن طرفهای بالا و چپ به طور کامل عایق پوش شده و طرف راست در حال تشعشع در محیط اطراف با دمای صفر مطابق با h° باشد که در آن $h > 0$. (در حل این مساله به علت آنکه در پهلوی پائین هیچ شرطی نداریم به جوابهای متعدد می‌رسیم).

۳۹. (ناحیه نامتناهی) مطلوب است دمای حالت پایدار $(x,y) u$ در نوار $\pi < x < 0, 0 < y < \infty$ که در آن طرفهای قائم به طور کامل عایق پوش شده و قسمت پائینی در دمای $(x) f$ نگهداشته شده است (فرض کنید که $|u|$ کراندار است).

۴۰. (مساله نیومن) معادله $u_{yy} = 0$ برای مستطیل شکل ۲۶۳ با شرایط کرانه ای نیومن $u_y(x,0) = f(x)$ و بر طرفهای دیگر $u = 0$ حل کنید.

۱۱.۶ معادله گرمایی: حل مساله گرمایی کمک انتگرالهای فوریه

در ادامه بحث به کمک انتگرالهای فوریه (بخش ۱۰.۹) به حل معادله گرمایی در یک میله نامتناهی می پردازیم. چنین میله هایی مدلهاخویی برای میله ها یا سیمهای بلند (به طول حدود ۱۰۰ متر) می باشد. به عبارت دیگر در این بخش می خواهیم جواب معادله گرمایی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

را برای میله ای که از هر دو طرف تابعیت ادامه داشته باشد و سطح جانبی آن عایق پوش شده است بیابیم. در حل چنین مساله ای شرایط کرانه ای نداریم و تنها شرط موجود شرط اولیه

$$u(x, 0) = f(x); \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

می باشد که در آن $f(x)$ دمای اولیه مفروض میله در نقطه ای به طول x می باشد.

برای حل این مساله روند را همانند بخش گذشته شروع می کنیم، یعنی در معادله گرمایی (۱)

$$F'' + p' F = 0 \quad (3) \quad [ر. ک. (۶) بخش ۵.۱۱]$$

$$G' + c' p' G = 0. \quad (4) \quad [ر. ک. (۷) بخش ۵.۱۱]$$

جواب معادلات فوق به ترتیب عبارت است از

$$G(t) = e^{-c' p' t} \quad F(x) = A \cos px + B \sin px$$

$$u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \sin px)e^{-c' p' t}. \quad (5)$$

[همانند بخش گذشته، باید ثابت k را منفی اختیار کنیم، یعنی $p' = -k$ ، زیرا مقادیر مثبت k منجر به حضور یک تابع نمایی صعودی در (۵) می گردد، که دارای معنی فیزیکی نیست.]

به جهت آنکه در (۲) تابع $f(x)$ متناوب فرض نشده است، طبیعی است که در این حالت انتگرال فوریه را به جای سری فوریه به کار می بریم. با توجه به اینکه در (۵)، A و B دلخواه می باشند، می توان این مقادیر را به صورت تابعی از p در نظر گرفت و نوشت $A = A(p)$ و $B = B(p)$. حال، چون معادله گرمایی خطی و همگن می باشد، در این صورت تابع

$$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; p) dp = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \sin px] e^{-c' p' t} dp \quad (6)$$

جواب معادله گرمایی (۱) می باشد، مشروط براینکه این انتگرال موجود بوده و بتوان از آن دوباره نسبت به x و یک بار نسبت به t مشتق گرفت.

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \sin px] dp = f(x). \quad (7)$$

از اینرو با استفاده از (۴) و (۵) بخش ۹.۱۰ ضرایب $A(p)$ و $B(p)$ را بر حسب $f(x)$ به صورت زیر می

دست می آوریم

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv dv, B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv dv. \quad (8)$$

بنابر (۸) بخش ۱۱.۱۰، انتگرال فوريه (۷) را با توجه به (۸) می توان نوشت

$$u(x, \circ) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) dv \right] dp.$$

از (۸) به سادگی $u(x, t)$ را با جایگزین تابع نمایی در انتگرال به صورت زیر به دست می آید

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) e^{-c' p' t} dp \right] dp.$$

با فرض اینکه می توان ترتیب انتگرالگیری را عوض نمود، می یابیم

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_0^\infty e^{-c' p' t} \cos(px - pv) dp \right] dv \quad (9)$$

در این صورت انتگرال داخل کروشه رامی توان به کمک فرمول

$$\int_0^\infty e^{-s'} \cos 2bs ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad (10)$$

با انتخاب $p = \frac{s}{c\sqrt{t}}$ به عنوان متغیر جدید انتگرالگیری و قراردادن

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

از (۱۰) انتگرال داخلی حاصل می شود. در این صورت $2bs = (x - v)p$ و $ds = c\sqrt{t} dp$. پس $ds = c\sqrt{t} dp$

(۱۰) چنین می شود:

$$\int_0^\infty e^{-c' p' t} \cos(px - pv) dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{(x - v)^2}{4c't} \right\}.$$

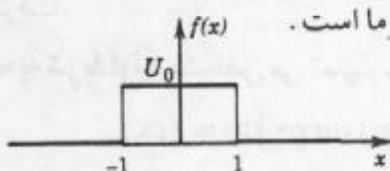
با جایگذاری این نتیجه در (۹) نمایش زیر به دست می آید

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp \left\{ -\frac{(x - v)^2}{4c't} \right\} dv. \quad (11)$$

با انتخاب $z = \frac{v - x}{2c\sqrt{t}}$ به عنوان متغیر انتگرالگیری نمایش دیگری به صورت زیر حاصل می شود

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz. \quad (12)$$

هرگاه $f(x)$ به ازای همه مقادیر x کراندار و در هر فاصله متناهی انتگرالبندی باشد، می توان نشان داد (ر. ل. مرجع [C12]) که تابع (۱۱) یا (۱۲) در معادله موج (۱) و شرط اولیه (۲) صدق می نماید. از این رو جواب فوق مورد نظر ما است.



شکل ۱.۲۶۵. دمای اولیه در مثال ۱

مثال ۱ . دما در میله ای نامتناهی

مطلوب است دما در میله ای نامتناهی هرگاه دمای اولیه برابر

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & ; \quad |x| < 1, \\ 0 & ; \quad |x| > 1 \end{cases}$$

باشد (شکل ۲۶۵).

حل. از (۱۱) داریم

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right\} dv.$$

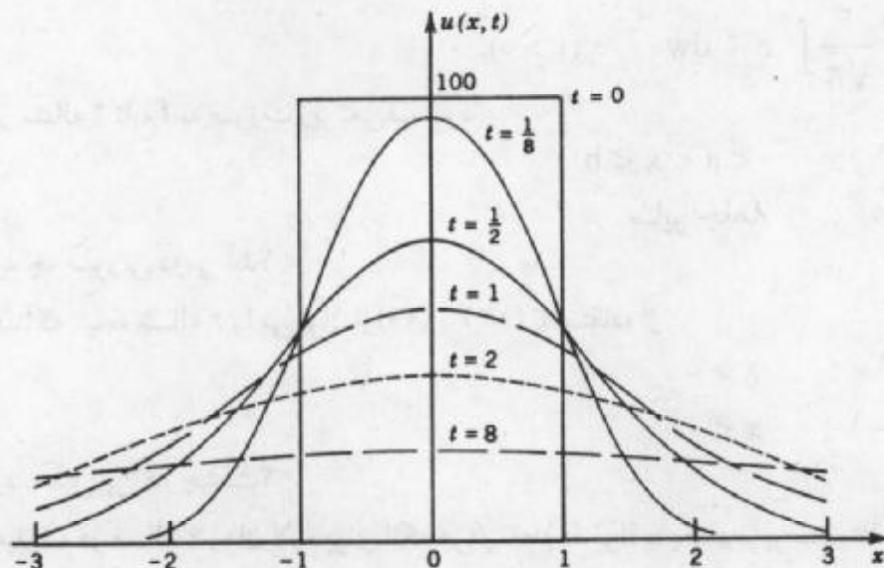
هرگاه متغیر انتگرالگیری v را که در بالا معرفی شد به کار ببریم، آنگاه انتگرالگیری نسبت به v از ۱ تا ۱

$$\text{با انتگرالگیری نسبت به } v \text{ از } -\frac{x-1}{2c\sqrt{t}} \text{ تا } -\frac{x+1}{2c\sqrt{t}} \text{ متناظر می‌گردد، و}$$

$$u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(x+1)/2c\sqrt{t}}^{(x-1)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2} dz \quad (t > 0). \quad (13)$$

یادآور می‌شویم که این انتگرال، یک تابع مقدماتی نیست، اما می‌توان آن را به سادگی بر حسب تابع خطای، که مقادیر آن در جدول آمده است بیان نمود (جدول A۴ ضمیمه ۵ برخی از این مقادیر را در بر دارد، جدولهای بزرگتر در مرجع [۱] ضمیمه ۱ فهرست شده‌اند. همچنین مسائل ۱۶ تا ۲۵ زیر را مشاهده کنید). شکل ۲۶۶، $u(x, t)$ را به ازای $U_0 = 100^\circ C$ درجه سانتیگراد، $c = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ و چند

مقدار t نشان می‌دهد.



شکل ۲۶۶ . جواب $u(x, t)$ مثال ۱ به ازای $C = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ و بعضی مقادیر t

مسائل بخش ۶.۱۱

۱. دما در مثال ۱) با $C = 100^\circ$ را در نقاط $x = 0$ و $x = 1/5$ به $c' = 1 \frac{\text{cm}'}{\text{sec}}$ صورت توابعی از t رسم کنید. آیا نتایج حاصل با مشهودات فیزیکی مطابقت دارد؟

۲. هرگاه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0, \end{cases}$$

آنگاه نشان دهید که (۱۲) به صورت زیر در می‌آید

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (t > 0).$$

۳. نشان دهید که به ازای $x = 0$ جواب مساله (۲) مستقل از t می‌باشد. آیا می‌توان این نتیجه را از دلایل فیزیکی به دست آورد؟

۴. هرگاه میله از یک طرف نامتناهی باشد و از $t = 0$ ادامه داشته باشد، و دمای انتهای $x = 0$ و دمای اولیه آن $f(x)$ باشد، آنگاه نشان دهید که دمای میله نیمه متناهی عبارت است از

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^x f(x + \tau w) e^{-w^2} dw - \int_{-\infty}^x f(-x + \tau w) e^{-w^2} dw \right] \quad (14)$$

که در آن $\tau = 2c\sqrt{t}$.

۵. با فرض آنکه $f(v)$ مذکور در (۱۱) فرد است، (۱۴) را از (۱۱) به دست آورید.

۶. هرگاه در مساله ۴، $f(x) = 1$ ، آنگاه نشان دهید که

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw \quad (t > 0).$$

۷. هرگاه در مساله ۴ تابع f به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < a < x < b \\ 0 & ; \quad \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

آنگاه (۱۴) به چه صورتی در می‌آید؟

۸. نشان دهید که نتیجه مساله ۶ را می‌توان از (۱۱) یا (۱۲) با استفاده از

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x > 0 \\ -1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

به دست آورد. دلیل این کارچیست؟

۹. نشان دهید که در مساله ۶ زمان لازم برای آنکه هردو نقطه دلخواه به یک دما برسند متناسب با مربع فواصل آنها از کرمانه $x = 0$ است.

۱۰. (توزيع نرمال) با انتخاب $w = \sqrt{2}Z$ به عنوان متغیر انتگرالگیری نشان دهید که (۱۲) به صورت

زیر درمی آید

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + cw\sqrt{2t}) e^{-\frac{w^2}{2}} dw.$$

دانشجویان آشنا با نظریه احتمالات مشاهده می کنند که این مطلب متوجه به چگالی $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$ توزیع نرمال می گردد. (ر. ک. بخش ۷. ۲۳).

مطلوب است جواب معادله گرمای (۱)، با استفاده از (۶) (درنمایش انتگرالی) با شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$

$$[\text{با استفاده از مثال ۳ بخش ۹. ۱۰}] \quad f(x) = e^{-|x|} \quad .11$$

$$[\text{با استفاده از (۱۵) بخش ۹. ۱۰}] \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad .12$$

$$[\text{با استفاده از مثال ۲ بخش ۹. ۱۰}] \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; \text{سایر جاها} \end{cases} \quad .13$$

$$[\text{با استفاده از مساله ۴ بخش ۹. ۱}] \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad .14$$

۱۵. به کمک انتگرالگیری تحقیق کنید که (۱۴) مذکور در مساله ۱۴ در شرط اولیه صدق می کند.

تابع خطأ. تابع خطأ با انتگرال

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw$$

تعریف می شود. این تابع در ریاضیات مهندسی مهم است. برای آشنا شدن با این تابع متعلم می تواند به حل مسائل زیر پردازد. (چند فرمول در ضمیمه ۳. ۱ گنجانده شده اند، (۳۵) تا (۳۷) را ملاحظه کنید.)

۱۶. تابع انتگرالی $x \operatorname{erf} x$ را رسم کنید (منحنی حاصل را منحنی توزیع نرمال می نامند).

۱۷. نشان دهید که $\operatorname{erf} x$ فرد است.

۱۸. نشان دهید که (۱۳) را می توان به صورت زیرنوشت

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{1+x}{2c\sqrt{t}} \right] \quad (t > 0).$$

$$19. \text{ نشان دهید که در مساله ۶ داریم } u(x,t) = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} \right) \quad \text{که در آن } t > 0.$$

۲۰. می توان ثابت کرد که $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. با استفاده از این مطلب، نشان دهید که در مساله ۲،

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} \right).$$

۲۱. نشان دهید که

$$\int_a^b e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \quad \int_a^b e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b.$$

۲۲. سری مکلورن x erf را با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری ملکورن تابع انتگرال‌ده به دست آورید.

۲۳. erf x را به ازای $\frac{1}{5} = 0.22$ از مساله ۲۲ را محاسبه کنید و نتیجه را با مقادیر زیر که تاسه رقم اعشار حاصل شده آند مقایسه کنید.
 $0.000, 0.112, 0.223, 0.329, 0.428, 0.520$

۲۴. نشان دهید که

$$\operatorname{erf} x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-s^2} ds.$$

۲۵. (ریع صفحه) از مساله ۱۹ نتیجه بگیرید که دما در ریع $x > 0$ و $y > 0$ با دمای اولیه 1° ، عایق پوش شده، و دمای کرانه‌ها در 0° ، عبارت است از

$$u(x, y, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2c\sqrt{t}}\right).$$

۷.۱۱ مدل‌سازی: غشا، معادله موج دو بعدی

به عنوان یک مساله مهم دیگر از مبحث ارتعاشات، حرکت یک غشای کشیده شده مانند پوسته طبل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بررسیهای مربوط به غشا مرتعش شبیه ارتعاش نخ است که در بخش‌های ۲۰.۱۱ مورد بررسی قرار گرفت است.

مفروضات فیزیکی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. جرم غشا برای واحد سطح ثابت می‌باشد («غشای همگن»). غشا بطور کامل انعطاف پذیر بوده و به اندازه‌ای نازک است که هیچگونه مقاومتی در برابر خمش از خود نشان نمی‌دهد.

۲. غشا کشیده شده و سپس در سراسر کرانه خود در صفحه xy ثابت نگهداشته شده است. کشش بروارد طول T که بر اثر کشیدن غشا ایجاد شده، در همه نقاط و در تمام جهت‌ها یکی می‌باشد و در عین حرکت تغییر نمی‌کند.

۳. تغییر مکان (x, y, t) غشا در اثنای حرکت نسبت به اندازه غشا کوچک است، و تمام زوایای میل کوچک می‌باشند.

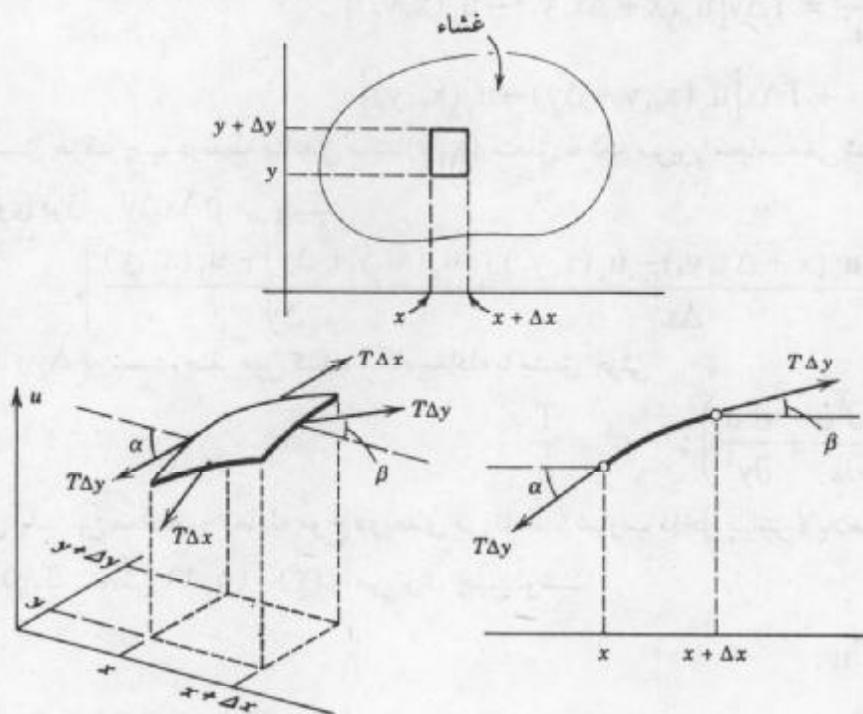
گرچه در عمل این مفروضات نمی‌تواند تحقق یابند، ولی ارتعاشات کوچک عرضی یک غشای نازک به طور نسبتاً دقیقی در این مفروضات صدق می‌نمایند.

برای رسیدن به معادله دیفرانسیلی که حرکت غشا از آن پیروی می‌کند، مطابق شکل ۲۶۷ نیروهای وارد بر تکه کوچکی از غشا را مورد بررسی قرار می‌دهیم چون تغییر مکانهای غشا و زوایای میل کوچک می‌باشند، کناره‌های تکه مزبور به تقریب برابر Δx و Δy گرفته می‌شود. کشش T نیرو بر

واحد طول می باشد. لذا نیروهای وارد بر لبه های این تکه به ترتیب $T\Delta x$ و $T\Delta y$ می باشند. با توجه به اینکه غشا بطور کامل انعطاف پذیر می باشد، این نیروها برعغشا مماس می باشند. ابتدا مؤلفه های افقی نیروها را مورد بررسی قرار می دهیم. این مؤلفه ها از ضرب نیروها در کسینوس زوایای میل حاصل می شوند. بدلیل کوچک بودن این زوایا، کسینوسهایشان نزدیک ۱ می باشد. از این رو مؤلفه های افقی نیروها در لبه های مقابله تقریباً یکسان هستند. لذا، حرکت ذرات غشا در امتداد افقی بسیار کوچک می باشد. با توجه به این موضوع پی می بریم که حرکت غشا را می توان عرضی در نظر گرفت، یعنی می توان فرض نمود که هر ذره به طور قائم حرکت می نماید. حال مؤلفه های قائم نیروها را مورد بررسی قرار می دهیم. این مؤلفه ها به ترتیب در طول لبه های راست و چپ عبارت است از^۵ (شکل ۲۶۷)

$$-T\Delta y \sin \alpha \quad \text{و} \quad T\Delta y \sin \beta$$

که در آن علامت منها بدان معنا است که جهت نیروی وارد بر لبه چپ به طرف پائین فرض شده است.



شکل ۲۶۷. غشای مرتعش

به دلیل کوچک بودن زوایا، می توان به جای سینوس آنها تانژانت شان را قرار داد. لذا برآیند دوم مؤلفه قائم آنها عبارت اند از

۵- توجه کنید که زاویه میل در طول لبه ها تغییر می کند، و α و β مقادیر آن زاویه در نقطه ای مناسب از لبه های مورد نظر می باشند.

$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin \beta - \sin \alpha) &\approx T\Delta y(\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_1)] \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن اندیس x ، مشتق جزئی نسبت به آن متغیر را نشان می‌دهد و y_1 و y_2 مقادیری بین y و $y + \Delta y$ می‌باشند. همینطور، برآیند مولفه‌های قائم نیروی وارد بر دو لبه دیگر این تکه عبارت اند از $T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)]$

که در آن x_1 و x_2 مقادیری بین x و $x + \Delta x$ می‌باشند.

در این مرحله قانون دوم نیوتون را برای این معادله به کار می‌گیریم. بنابراین دوم نیوتون (ر. ک. بخش ۵.۲)، مجموع نیروهای وارد بر ناحیه مورد نظر برابر $\rho \Delta A$ ، جرم تکه مزبور، در شتاب $\frac{\partial^r u}{\partial t^r}$ است؛ که در آن ρ چگالی غشای منحرف نشده بر واحد مساحت و $y = \Delta x \Delta y$ مساحت تکه، قبل از منحرف شدن، می‌باشد. از این‌رو

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^r u}{\partial t^r} &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_1)] \\ &\quad + T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)] \end{aligned}$$

که در آن مشتق طرف چپ در نقطه مناسبی مانند (\tilde{x}, \tilde{y}) متعلق به تکه مزبور محاسبه می‌شود. از تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\rho \Delta x \Delta y$ می‌یابیم

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_1)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)}{\Delta y} \right].$$

چنانچه Δx و Δy به سمت صفر میل کنند، آنگاه معادله با مشتق جزئی

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = c^r \left(\frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r} \right); \quad c^r = \frac{T}{\rho} \quad (3)$$

به دست می‌آید. این معادله موج دو بعدی می‌نماید. عبارت داخل پرانتز لاپلاسین $\nabla^r u$ تابع u می‌باشد (ر. ک. بخش ۵.۱۱). (۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = c^r \nabla^r u. \quad (3')$$

در بخش آتی به حل این معادله خواهیم پرداخت.

۱۱.۸. غشای مستطیلی. استفاده از سری فوریه دوگانه

برای حل مساله غشای مرتعش، باید جوابی مانند $u(x, y, t)$ از معادله موج دو بعدی

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = c^r \left(\frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r} \right) \quad (1)$$

را که در شرط کرانه‌ای

$$u = 0 \text{ بر کران غشا به ازای هر } t \geq 0, \quad (2)$$

و شرایط اولیه

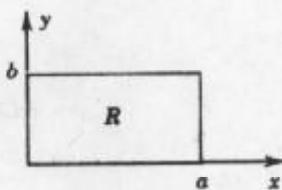
$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad [f(x, y)] \quad (3)$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x, y) \quad [g(x, y)] \quad (4)$$

صدق می کنند به دست آوریم. $u(x, y, t)$ تغییر مکان نقطه (x, y) را از وضعیت تعادل $u = 0$ در لحظه t رانشان می دهد. مشاهده می کنیم که شرایط (2) تا (4) شبیه شرایطی هستند که در مورد نخ مرتعش داشتیم.

غشای مستطیلی R را که در شکل ۲۶۸ نشان داده شده است را به عنوان اولین مورد مهم مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل ۲۶۸. غشای مستطیلی

گام اول. سه معادله دیفرانسیل معمولی

با اعمال روش ضربی ابتدا جوابهایی از معادله موج (1) را که در شرط کرانه ای (2) صدق می کنند مشخص می نمائیم. بدین منظور فرض کنید

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t). \quad (5)$$

با جایگزینی (5) در معادله موج (1) می یابیم

$$FG = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

که در آن زیرنویسها مشتقهای جزئی و نقطه ها مشتق نسبت به t رانشان می دهند. با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $c^2 FG$ ، داریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}).$$

چون توابع طرف چپ وابسته به t می باشند و توابع طرف راست مستقل از t هستند، باید طرفین تساوی فوق برابر با یک مقدار ثابت باشند. با کمی دقت مشاهده می کنیم که تنها مقادیر متغیر این مقدار ثابت منجر به جوابهای می شوند که بدون آنکه همواره صفر باشند در شرط کرانه ای (2) صدق می نمایند. اثبات درستی این مطلب همانند روشی است که در بخش ۱۱.۳ آمده است. چنانچه این

مقدار ثابت را با نماد v - نمایش دهیم، می‌یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c'G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -v^r.$$

از رابطه فوق دو معادله دیفرانسیل خطی معمولی

$$\ddot{G} + \lambda' G = 0 \quad (6)$$

که در آن $c v = \lambda$ و معادله با مشتق جزئی دومتغیره

$$F_{xx} + F_{yy} + v^r F = 0 \quad (7)$$

که به معادله هلمولتز^۶ دو بعدی مشهور می‌باشد، حاصل می‌شود.

هم اکنون روش ضربی را برای معادله این هلمولتز به کار میگیریم. برای منظور فرض کنید

$$F(x, y) = H(x)Q(y). \quad (8)$$

با جایگذاری (8) در (7) می‌یابیم

$$\frac{d^r H}{dx^r} Q = -(H \frac{d^r Q}{dy^r} + v^r HQ).$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر HQ داریم

$$\frac{1}{H} \frac{d^r H}{dx^r} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{d^r Q}{dy^r} + v^r Q \right).$$

هر دو طرف تساوی فوق باید برابر یک عدد ثابت باشد. این ثابت باید منفی، مثلاً $-k^r$ باشد زیرا تنها مقادیر منفی منجر به جوابهای غیرمتعدد با صفر می‌شوند که در شرایط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کنند.
از این‌رو

$$\frac{1}{H} \frac{d^r H}{dx^r} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{d^r Q}{dy^r} + v^r Q \right) = -k^r.$$

از این تساوی دو معادله دیفرانسیل معمولی برای H و Q ، به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\frac{d^r H}{dx^r} + k^r H = 0 \quad (9)$$

و

$$\frac{d^r Q}{dy^r} + p^r Q = 0; \quad p^r = v^r - k^r. \quad (10)$$

گام دوم. صدق نمودن شرایط کرانه‌ای

جوابهای عمومی (۹) و (۱۰) عبارت است از

$$Q(y) = C \cos py + D \sin py \quad \text{و} \quad H(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

۶-هرمان فن هلمولتز (Hermann von Helmholtz)، فیزیکدان آلمانی که به خاطر آثار مهمش در ترمودینامیک، جریان سیال و اکوستیک معروف می‌باشد.

که در آن A, B, C, D مقادیر ثابت می باشند. از (۵) و (۲) بی می برمی که $F = HQ$ باید روی کرانه صفر باشد، که با $y = 0, x = a, x = b$ و $y = 0$ متناظر می باشند [شکل ۲۶۸ را ملاحظه کنید]. این مطلب شرایط زیر را نتیجه می دهد

$$H(0) = 0, H(a) = 0, Q(0) = 0, Q(b) = 0.$$

باتوجه به این نتایج $H(0) = A = 0$ ، و بنابراین

$$H(a) = B \sin ka = 0.$$

باید B را مخالف صفر بگیریم، چون در غیر این صورت $F = H = 0$. باتوجه به چنین فرضی می باییم $ka = m\pi$ یا $\sin ka = 0$ ، یعنی به ازای هر عدد صحیح m

$$k = \frac{m\pi}{a}.$$

همینطور می توان استنتاج نمود که $C = p$ و p باید به مقادیر $\frac{n\pi}{b}$ محدود شود که در آن n عددی صحیح است. از اینرو جوابهای زیر حاصل می شوند

$$Q_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{و} \quad H_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}$$

که در آن $m, n = 1, 2, \dots$. (مانند حالت نخ مرتعش، لازم نیست که حالتهای $-1, -2, \dots$ را مورد بررسی قرار دهیم، چرا که جوابهای متناظر با این اعداد صرف نظر از یک ضریب ۱- الزاماً همان جوابهای مربوط به m و n مثبت می باشند). از اینرو توابع

$$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad m = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

جوابهایی از معادله (۷) می باشند که بر کرانه غشای مستطیلی برابر صفر هستند.

حال توابع ویژه و مقادیر ویژه را مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور از (۷)، (۶) را پی می گیریم. باتوجه به اینکه در (۱۰)، (۶) $p' = v' - k'$ و در (۶)، (۶) می باییم $\lambda = cv$. از اینرو با $\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$.

$$\text{از اینرو با } p = \frac{n\pi}{b} \text{ و } k = \frac{m\pi}{a} \text{ در معادله دیفرانسیلی (۶) مقدار} \\ \lambda = \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

متناظر قرار می گیرد. باتوجه به آن جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B'_{mn} \sin \lambda_{mn} t.$$

در نتیجه توابع $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$ به صورت

$$u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (13)$$

نوشته می شوند با λ_{mn} که به (۱۲) بیان شده است، جوابهای معادله موج (۱) می باشند که بر کرانه غشای مستطیلی شکل ۲۶۸ صفر هستند. این توابع را توابع ویژه یا توابع مشخصه می نامند، و اعداد λ_{mn} مقادیر ویژه یا مقادیر مشخصه غشای مرتعش نامیده می شوند. فرکانس U_{mn} با $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ برابر می باشد.

در بحث توابع ویژه، جالب است توجه کنیم که بنا به آنکه a و b چه باشند، ممکن است چندین توابع F_{mn} دارای یک مقدار ویژه مشترک باشند. تعبیر فیزیکی این مطلب بدان معنی است که ممکن است ارتعاشاتی با فرکانس یکسان وجود داشته باشند که خطوط گرهی (منحنیهای حاصل از نقاطی بر غشا که فاقد حرکت می باشند) آنها کاملاً متمایز می باشند. این مطلب را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

مثال ۱. مقادیر ویژه و توابع ویژه در غشای مربعی
غشای مربعی را که برای آن $a = b$ ، درنظر می گیریم. با توجه به (۱۲) ملاحظه می کنیم که مقادیر ویژه عبارت است از

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2}. \quad (14)$$

از این رو

$$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$$

ولی به ازای $m \neq n$ توابع ویژه متناظر

$$F_{nm} = \sin n\pi x \sin m\pi y \quad \text{و} \quad F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y$$

با یکدیگر تفاوت دارند. مثلاً به ازای $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ دو تابع

$$F_{12} = \sin 2\pi x \sin \pi y \quad \text{و} \quad F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y$$

متناظر می شوند. بنابراین جوابهای مربوطه

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$

و

$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

به ترتیب دارای خطوط گرهی $x = \frac{1}{2}y$ و $y = \frac{1}{2}x$ می باشند (شکل ۲۶۹ را ملاحظه کنید). با انتخاب

$$B_{12} = B_{21}^* = 1 \quad \text{و} \quad B_{12}^* = B_{21} = 0 \quad \text{می یابیم}$$

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t(F_{12} + B_{21}F_{21}), \quad (15)$$

که ارتعاش دیگری متناظر با مقدار ویژه $c\pi\sqrt{5}$ را نشان می دهد. خط گرهی این تابع جواب معادله

$$F_{11} + B_{11}F_{11} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{11} \sin \pi x \sin \pi y = 0 \\ \text{می باشد، یا، چون } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{11} \cos \pi x) = 0. \quad (16)$$

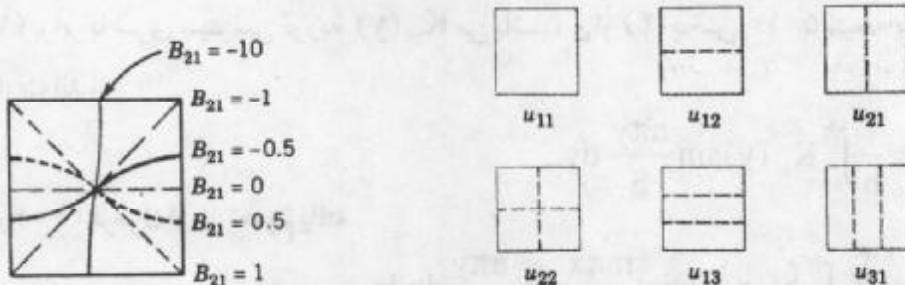
این جواب به مقدار B_{11} بستگی دارد (شکل ۲۷۰ را مشاهده کنید).

باتوجه به (۱۴) ملاحظه می کنیم که حتی بیشتر از دوتابع می توانند با یک مقدار عددی λ_{mn} متناظر شوند. مثلاً چهارتتابع $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$ با مقدار $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = c\pi\sqrt{65}$

$$1^2 + 1^2 = 4^2 + 1^2 = 65.$$

این مطلب از آنجا ناشی می شود که ۶۵ را به روش‌های گوناگون می توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت. طبق قضیه ای از گاووس، برای هر مجموعی از دو مربع که دست کم دو عامل اول آن به صورت $1 + 4n$ ، که در آن n عدد صحیح مثبت است، باشد چنین وضعیتی اتفاق می افتد.
در مورد اخیر،

$$65 = 5 \times 13 = (4+1)(12+1).$$



شکل ۲۷۰. خطوط گرهی جوابهای $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31}$ در مورد غشای مربعی

برخی مقادیر B_{21}

$u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{13}, u_{31}, u_{22}$

گام سوم. جواب مساله اصلی

برای رسیدن به جوابی که در شرایط اولیه (۳) و (۴) نیز صدق نماید، به روشی مشابه بخش

۳. ۱۱ عمل می کنیم. سری دوگانه^۷

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \quad (17) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

۷- مسائل همگرایی و یکنایی را بررسی نمی کنیم.

را در نظر می‌گیریم. از (۱۷) و (۳) می‌یابیم

$$u(x, y, \circ) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y). \quad (18)$$

این سری، سری فوریه دوگانه نامیده می‌شود. فرض کنید که $f(x, y)$ را بتوان به چنین سری‌ای بسط داد.^۸ در این صورت ضرایب فوریه B_{mn} تابع $f(x, y)$ در (۱۸) را می‌توان به صورت زیر مشخص نمود. با قرار دادن

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (19)$$

(۱۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

به ازای لای ثابت این سری، به عنوان تابعی از x ، سری سینوسی فوریه تابع $f(x, y)$ می‌باشد. از (۴) بخش ۱۰.۵ می‌یابیم که ضرایب این بسط عبارت است از

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (20)$$

به علاوه، (۱۹) برابر با سری سینوسی فوریه $K_m(y)$ می‌باشد، و از (۴) بخش ۱۰.۵ نتیجه می‌شود که ضرایب عبارت اند از

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

از این فرمول و (۲۰) فرمول اویلر تعمیم یافته

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (21)$$

که در آن $m, n = 1, 2, \dots$ می‌باشند، برای ضرایب فوریه $f(x, y)$ که در سری فوریه دوگانه (۱۸) تعریف شده اند حاصل می‌شود.

B_{mn} های موجود در (۱۷) بر حسب $f(x, y)$ مشخص شده اند. برای تعیین B_{mn} از (۱۷)

نسبت به ا جمله به جمله مشتق گرفته؛ و با استفاده از (۴) می‌یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y).$$

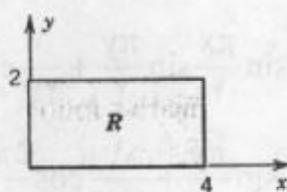
فرض کنید که $g(x, y)$ را بتوان به صورت سری فوریه دوگانه بسط داد. آنگاه با انجام عملیاتی همانند قبل، داریم

- شرایط کافی: $f, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ باید در مستطیل R که مورد بحث می‌باشد پیوسته باشند.

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad m = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

n = 1, 2, \dots.

این مطلب بیان می‌کند، برای آنکه (۱۷) در شرایط اولیه صدق نماید، لازم است که ضرایب B_{mn} و B_{mn}^* مطابق (۲۱) و (۲۲) انتخاب شوند.



شکل ۲۷۱. غشاء در مثال ۲

مثال ۲. ارتعاش یک غشای مستطیلی

مطلوب است ارتعاش یک غشای مستطیلی به ابعاد $a = 4 \text{ ft}$ و $b = 2 \text{ ft}$ در صورتی که کشش $\frac{lb}{ft^2} = 12/5$ ، چگالی $\frac{\text{slugs}}{ft^3} = 2/5$ (همچنین برای لاستیک سبک)، سرعت اولیه صفر، و تغییر مکان اولیه

$$f(x,y) = 0 / [(4x - x^r)(2y - y^r)] \text{ ft} \quad (23)$$

باشد.

$$B_{mn} = \frac{4}{4 \times 2} \int_0^r \int_0^r / [(4x - x^r)(2y - y^r)] \sin \frac{m\pi x}{4} \sin \frac{n\pi y}{2} dx dy \quad \text{حل.}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^r (4x - x^r) \sin \frac{m\pi x}{4} dx \int_0^r (2y - y^r) \sin \frac{n\pi y}{2} dy.$$

برای اولین انتگرال سمت راست مقدار

$$\frac{128}{m^r \pi^r} [1 - (-1)^m] = \frac{256}{m^r \pi^r} \quad \text{فرد است (m)}$$

و برای دومین انتگرال مقدار

$$\frac{16}{n^r \pi^r} [1 - (-1)^n] = \frac{32}{n^r \pi^r} \quad \text{فرد است (n)}$$

به دست می‌آیند. به ازای m یا n زوج این مقادیر صفر هستند. درنتیجه با فاکتور گیری $\frac{1}{2}$ برای m یا n زوج می‌یابیم $B_{mn} = 0$ و برای m و n فرد داریم

$$B_{mn} = \frac{256 \times 32}{20 m^2 n^2 \pi^2} \approx \frac{0/426050}{m^2 n^2}.$$

از رابطه فوق و (۱۷) جواب مورد نظر به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0/426050 \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^2 n^2} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\sqrt{m^2 + 4n^2}\right) t \sin \frac{m\pi x}{4} \sin \frac{n\pi y}{2} \\ &= 0/426050 \left(\cos \frac{5\pi\sqrt{5}}{4} t \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{27} \cos \frac{5\pi\sqrt{37}}{4} t \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{3\pi y}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{27} \cos \frac{5\pi\sqrt{13}}{4} t \sin \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{729} \cos \frac{5\pi\sqrt{45}}{4} t \sin \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{3\pi y}{2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (24)$$

در بررسی این جواب توجه کنید که اولین جمله خیلی شبیه شکل اولیه غشا می باشد و خطوط گرهی ندارد، و چون ضرایب آن از جملات بعدی کوچک و کوچکتر می شوند، مقدار تعیین کننده همان جمله اول است. جمله دوم دارای دو خط گرهی افقی ($y = \frac{2}{3}$)، جمله سوم دو خط گرهی قائم ($x = \frac{4}{3}$)، جمله چهارم دو خط گرهی افقی و دو خط گرهی عمودی و الی آخر می باشند.

مسائل بخش ۸.۱۱

۱. چنانچه کشش غشا افزایش یابد، چگونگی تغییر فرکانس جواب (۱۳) را باید.
۲. خطوط گرهی جوابهای (۱۳) را به ازای $n, m = 1, 2, 3, 4$ در حالت $a = b = 1$ مشخص نموده و نمودار آنها را رسم کنید.
۳. مساله ۲ را به ازای $a = 3$ و $b = 1$ حل کنید.
۴. تعداد مقادیر ویژه غشای مربعی به ضلع واحد را طوری تعیین کنید که با هر یک از آنها چهار تابع ویژه متمایز متناظر باشد.
۵. مقادیر ویژه غشای مستطیلی به اضلاع $a = 2$ و $b = 1$ را طوری تعیین کنید که با هر یک از آنها دو یا تعدادی بیشتر توابع ویژه متناظر قرار گیرد.
۶. نشان دهید که، در بین تمام غشاهای مستطیلی با مساحت $A = ab$ و c یکسان، غشای مربعی می باشد که به ازای آن $[a, b, c] = [1, 1, 1]$ دارای پائین ترین فرکانس است.
۷. نتیجه ای مشابه نتیجه حاصل از مساله ۶ برای فرکانس یکی از جوابهای (۱۳) با m و n ثابت دلخواه بیابید.
۸. با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء مقدار B_{mn} را در مثال ۲ بیابید.
۹. در مثال ۲ حاصل دو انتگرال می باشد. تابعی که با این انتگرالها متناظر می باشند را بیابید.

و مقادیر آنها را محاسبه کنید.

سری فوریه دوگانه . هر یک از توابع $f(x,y)$ زیر را به صورت یک سری فوریه دوگانه به شکل (۱۸) با فرض $\pi < x < \pi$ و $0 < y < \pi$ نمایش دهید.

$$f(x,y) = x$$

$$.11 \quad f(x,y) = 1$$

$$.10$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1; & \frac{\pi}{2} < x, y < \pi \\ 0; & \text{مسایر جاهای} \end{cases} .13$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0; & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} .12$$

هر یک از توابع $f(x,y)$ زیر را ، که در آن $a < x < b$ و $0 < y < b$ به یک سری فوریه دوگانه به صورت (۱۸) نمایش دهید.

$$f = 0/25 xy .15$$

$$f = k .14$$

$$f = (x+1)(y+1) .17$$

$$f = 0/125(x+y) .16$$

$$f = xy(a' - x')(b' - y') .19$$

$$f = xy(a-x)(b-y) .18$$

مطلوب است تغییر مکان $u(x,y,t)$ غشای مربعی با $a = b = 1$ و $c = 1$ ، در صورتی که سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه برابر یکی از تابع زیر باشد

$$f(x,y) = k \sin \pi x \sin 2\pi y .21$$

$$f(x,y) = 0/1 \sin \pi x \sin \pi y .20$$

$$f(x,y) = k \sin 3\pi x \sin 4\pi y .22$$

$$f(x,y) = 0/0 1 xy(1-x)(1-y) .22$$

$$f(x,y) = k \sin^r \pi x \sin^r \pi y .24$$

. ۲۵ . (ارتعاشات و اداشته یک غشا) نشان دهید که ارتعاشات و اداشته غشا در معادله

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u + \frac{P}{\rho}$$

صادق است . که در آن $P(x,y,t)$ نیروی خارجی وارد بر واحد مساحت می باشد که به طور قائم بر صفحه xy وارد می شود.

۹.۱۱ لابلسین در مختصات قطبی

در ارتباط با مسائل مقدار کرانه ای برای معادلات با مشتقهای جزئی ، به کارگیری مختصاتی که نسبت به آنها کرانه ناحیه موردنظر دارای نمایش ساده ای باشد یک اصل کلی می باشد. در بخش آتی غشاهای مستدیر (پوسته طبلها) مورد بحث قرار خواهیم داد. از اینزو مختصات قطبی r و θ که با $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$

تعریف می شوند، برای این مساله مناسب خواهد بود، زیرا در این مختصات می توان کرانه غشا را توسط معادله ساده ثابت = ۱ بیان نمود. وقتی از r و θ استفاده می کنیم، باید لابلسین

$$\nabla^r u = \frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r}$$

در معادله موج بر حسب مختصات جدید نوشته شود.

تبديل نمایش دیفرانسیلی از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر اغلب اوقات در کاربردها مورد استفاده قرار می‌گیرد، و متعلم باید این مطالب را با دقت بیشتری بررسی نماید.
برای سادگی، مشتقهای جزئی را با زیرنویسها مشخص می‌کنیم و $u(x, y, t)$ را وقتی که تابعی از x و y و t در نظر گرفته می‌شود، با همان حرف u نمایش می‌دهیم. همانند بخش ۱۱.۴ از قاعده زنجیره‌ای (بخش ۸.۸)، می‌یابیم

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x .$$

با مشتقگیری مجدد از رابطه فوق نسبت به x و به کار بردن قاعده حاصلضرب به دست می‌آوریم
 $u_{xx} = (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x$
 $= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} .$ (۱)

حال، با به کارگیری مجدد قاعده زنجیره‌ای داریم

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x , \quad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x .$$

برای مشخص نمودن مشتقهای جزئی r و θ با عمل مشتقگیری از

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{x^r + y^r}$$

می‌یابیم

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^r + y^r}} = \frac{x}{r} , \quad \theta_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^r} \left(-\frac{y}{x^r} \right) = -\frac{y}{r^r} .$$

با مشتقگیری مجدد از دو فرمول فوق، داریم

$$r_{xx} = \frac{r - xr_x}{r^r} = \frac{1}{r} - \frac{x^r}{r^r} = \frac{y^r}{r^r} , \quad \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^r} \right) r_x = \frac{2xy}{r^r} .$$

همه این عبارات را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم. با فرض پیوستگی مشتقهای جزئی اول و دوم،

$$u_{xx} = \frac{x^r}{r^r} u_{rr} - \frac{2xy}{r^r} u_{r\theta} + \frac{y^r}{r^r} u_{\theta\theta} + \frac{y^r}{r^r} u_r + \frac{2xy}{r^r} u_\theta . \quad (2)$$

به طریقی مشابه نتیجه می‌شود

$$u_{yy} = \frac{y^r}{r^r} u_{rr} + \frac{2xy}{r^r} u_{r\theta} + \frac{x^r}{r^r} u_{\theta\theta} + \frac{x^r}{r^r} u_r - \frac{2xy}{r^r} u_\theta . \quad (3)$$

با جمع نمودن روابط (۲) و (۳) لاپلاسین u در مختصات قطبی به دست می‌آید

$$\nabla^r u = \frac{\partial^r u}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r} . \quad (4)$$

در بخش آتی به مطالعه کاربرد این فرمول در ارتعاش پوسته طبل (غشای مستدیر) می‌پردازیم.

مسائل بخش ۹.۱۱

۱. محاسبات جزئی در (۲) و (۳) را انجام دهید.
۲. (۴) را به مختصات کارتزین تبدیل کنید.
۳. نشان دهید که (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla^r u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

۴. هرگاه u مستقل از θ باشد، آنگاه (۴) به صورت $\nabla^r u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$ درمی‌آید. این نتیجه را مستقیماً از لابلائی در مختصات کارتزین با فرض آنکه u مستقل از θ می‌باشد به دست آورید.

۵. نشان دهید که تنها جواب $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ که در آن $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ می‌باشد، عبارت است از $u = a \ln r + b$.

۶. نشان دهید که $\nabla^r u = r^n \sin n\theta$ و $u_n = r^n \cos n\theta$ که در آن $n = 0, 1, \dots$ جوابهای $\nabla^r u = 0$ باشند. مفروض توسط (۴)، هستند.

۷. با فرض اینکه جمله به جمله مشتقگیری مجاز می‌باشد، نشان دهید که یک جواب معادله لابلائی در قرص $1 < R < R_0$ که به ازای f مفروض در شرط کرانه ای $u(R, \theta) = f(\theta)$ صدق کند، عبارت است از

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n\theta + b_n \left(\frac{r}{R} \right)^n \sin n\theta \right]$$

که در آن a_n و b_n ضرایب فوريه f می‌باشند (ر. ک. بخش ۱۰.۳).

پتانسیل الکترواستاتیک. مسائل گرمای در حالت پایدار

پتانسیل الکترواستاتیک u در هر ناحیه آزاد از بارها در معادله لابلائی $\nabla^r u = 0$ صدق می‌کنند. همچنین معادله گرمای $\nabla^r c = u_r$ (ر. ک. بخش ۱۱.۵)، در صورتی که دمای u مستقل از زمان t باشد («حالت پایدار»)، به معادله لابلائی تبدیل می‌شود. مطلوب است پتانسیل الکترواستاتیک (به طور هم ارز: توزیع دمای در حالت پایدار) در قرص $1 < r < R_0$ متناظر با شرایط کرانه ای زیر است:

$$u(\theta) = 40 \sin^2 \theta \quad . \quad 8. \quad u(\theta) = 10 \cos^2 \theta \quad . \quad 9.$$

$$u(\theta) = \begin{cases} -100 & ; \quad -\pi < \theta < 0 \\ 100 & ; \quad 0 < \theta < \pi \end{cases} \quad . \quad 11. \quad u(\theta) = \begin{cases} 110 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad . \quad 10.$$

$$u(\theta) = \begin{cases} \theta; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0; \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . ۱۳ \quad u(\theta) = \begin{cases} \theta &; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta &; \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} . ۱۲$$

$$u(\theta) = |\theta| ; -\pi < \theta < \pi . ۱۵ \quad u(\theta) = \theta^r ; -\pi < \theta < \pi . ۱۴$$

۱۶. فرمولی برای پتانسیل u بر محور x ها در مساله ۱۵ باید. از چهار جمله اول این سری را برای محاسبه u در نقاط $75/0, 50/0, 25, 0/5, -0/5, -0/25, 0/25, 50/5$ تا دو رقم اعشار استفاده کنید.

۱۷. فرمولی برای پتانسیل u بر محور y ها در مساله ۱۵ باید.

۱۸. پتانسیل الکترواستاتیک را در نیم قرص $1 < r < \theta < \pi$ را طوری باید که بر نیم دایره $r = 1$ برابر با $(\pi - \theta)^{1/2}$ و بر قطعه $1 < r < a$ برابر با صفر باشد.

۱۹. مقدار دمای u در حالت پایدار را در یک صفحه نازک نیم استوانه ای $a < r < \theta < \pi$ را طوری باید که نیم دایره $r = a$ در دمای ثابت u و کران قطعه $a < r < a$ در 0 نگهداشته شده باشد.

۲۰. (لاپلاسین در مختصات استوانه ای) نشان دهید که لاپلاسین در مختصات استوانه ای r, θ, z که با $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}(y/x), z = z$ تعریف می شود عبارت است از

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ را بحسب مختصات x و y که به صورت زیر تعریف می شوند بیان کنید.

$$x^* = x + y, y^* = x - y . ۲۲ \quad x^* = ax + b, y^* = cy + d . ۲۱$$

$$x^* = \frac{1}{x}, y^* = \frac{1}{y} . ۲۴ \quad x^* = x^r, y^* = y^r . ۲۳$$

$$(دوران به اندازه زاویه \alpha) x^* = x \cos \alpha - y \sin \alpha, y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha . ۲۵$$

۲۶. (مساله نیومن) نشان دهید که جواب مساله نیومن

$$\nabla^2 u = 0; r < R$$

$$u_n(R, \theta) = f(\theta) \quad (\text{قائم خارجی})$$

عبارت است از

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

که در آن A_n دلخواه و

$$A_n = \frac{1}{\pi n R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, B_n = \frac{1}{\pi n R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

۲۷. نشان دهید که (۹)، بخش ۴.۹ سبب می شود که $f(\theta)$ در مساله ۲۶ در شرط

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0,$$

که معروف به «شرط سازگاری» است صدق کند.

۲۸. (مساله نیومن) مطلوب است حل مساله زیر

$$\nabla^r u = 0 \quad ; \quad 1 < r < 3$$

$$u_r(1, \theta) = \sin \theta,$$

$$u_r(3, \theta) = 0.$$

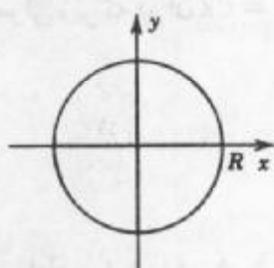
۱۱. ۱۰. غشای مستدیر. استفاده از سری بسل - فوریه

غشاهای مستدیر که دراستوانه ها، پمپ ها، میکروفنونها، تلفنها، نظایر آنها وجود دارند از مسائل مهم در مهندسی می باشند. هرچند غشاء مستدیر یک صفحه است و یک جسم کشسان می باشد ولی مقاومتی در مقابل خمین از خود نشان نمی دهد، معادله این ارتعاشات در معادله موج دو بعدی (۳)، بخش ۷.۱۱، صدق می کند و در مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ معادله ارتعاش صفحه مستدیر به صورت زیر در می آید [ر. ک (۴) بخش قبل]

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = c^r \left(\frac{\partial^r u}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r} \right).$$

شکل ۲۷۲ غشای مستدیر به شعاع R را نشان می دهد. تعیین جواب $u(r, \theta)$ که به طور شعاعی متقارن می باشد، یعنی جواب به θ وابسته نیست^۹ مورد نظر ما می باشد. در چنین حالتی معادله به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = c^r \left(\frac{\partial^r u}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (1)$$



شکل ۲۷۲. غشای مستدیر

حال به شرایط کرانه ای و اولیه می پردازیم. چون غشا در طول کرانه $R = \pi$ ثابت فرض شده است، به ازای هر $t \geq 0$ ، شرط کرانه ای

^۹- برای جوابهای وابسته به θ ، مجموعه مسائل را ملاحظه کنید

$$u(R, t) = 0 \quad (2)$$

می باشد. جوابهای که به θ بستگی ندارند وقتی پدید می آیند که شرایط اولیه مستقل از θ باشند، یعنی وقتی که این شرایط به صورت زیر باشند

$$u(r, 0) = f(r) \quad [f(r)] \text{ انحراف اولیه} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(r) \quad [g(r)] \text{ سرعت اولیه} \quad (4)$$

گام اول. معادلات دیفرانسیل معمولی. معادله بسل

با استفاده از روش ضربی، ابتدا جوابهای

$$u(r, t) = W(t)G(r) \quad (5)$$

را که در شرط کرانه ای (2) صدق می کند را می باییم. با مشتقگیری از (5) و جایگزینی در (1) و تقسیم نتیجه حاصل بر WG^c می باییم

$$\frac{\ddot{G}}{c'G} = \frac{1}{W} (W'' + \frac{1}{r} W')$$

که در آن نقطه ها مشتق نسبت به t و پریمها مشتق نسبت به r را نشان می دهند. طرفین تساوی اخیر باید برابر مقدار ثابتی باشند، و این ثابت باید منفی باشد، مثلاً $-k'$ ، تا آنکه بتوانیم جوابهای را که در شرط کرانه ای صدق می نمایند و متحدد با صفر نیستند بیابیم.

از این رو،

$$\frac{\ddot{G}}{c'G} = \frac{1}{W} (W'' + \frac{1}{r} W') = -k'^2.$$

$$\text{از رابطه مذکور دومعادله دیفرانسیل معمولی زیر که در آن } ck = \lambda \text{ می باشد، حاصل می شوند} \\ \ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad (6)$$

و

$$W'' + \frac{1}{r} W' + k'^2 W = 0. \quad (7)$$

هرگاه قراردهیم $s = kr$ ، آنگاه (7) به معادله بسل (بخش ۵.۵) تبدیل می شود. با توجه به $\frac{1}{r} = \frac{k}{s}$ و از قاعده زنجیره ای داریم

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} k, \quad W'' = \frac{d^2 W}{ds^2} k^2.$$

با جایگذاری این روابط در (7) و حذف عامل مشترک k^2 می باییم

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0. \quad (7^*)$$

این معادله بدل (۱)، بخش 5.5 ، با پارامتر $\circ = ۷$ می باشد.

گام دوم. صدق نمودن شرط کرانه ای

جوابهای (۷) توابع بدل J_0 و Y_0 به ترتیب ازنوع اول و دوم هستند [ر. ک. بخشهاي ۵.۵ و ۷.۵]، از طرفی Y_0 در صفر بینهایت می شود، لذا Y_0 نمی توان استفاده کرد زیرا تغییر مکان غشا باید همواره متناهی باقی بماند. درنتیجه

$$W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \quad (۸)$$

حال برگران $R = r$ از (۲) داریم $G \equiv ۰$ (زیرا $W(R) = J_0(kR) = ۰$ ایجاب می کند که ۰)

این شرایط می توانند برقرار باشند زیرا دارای (تعدادی نامتناهی) صفرهای مثبت، $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (ر. ک. شکل ۲۸۳)، با مقادیر عددی

$$\alpha_1 = ۲/۴۰۴۸, \alpha_2 = ۵/۵۲۰۱, \alpha_3 = ۸/۶۵۳۷, \alpha_4 = ۱۱/۷۹۱۵, \alpha_5 = ۱۴/۹۳۰۹,$$

و نظایر آنها می باشند (برای جداول جامعتر، ر. ک. مرجع [۱]، ضمیمه ۱). اینها به طور نامنظم از هم فاصله دارند، صفرهای دیگر $\alpha_6, \alpha_7, \dots$ دارای همین وضع هستند. هم اکنون معادله (۸) ایجاب می کند که

$$kR = \alpha_m. \quad (۹)$$

از این رو $k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}$ ، که در آن $۱, ۲, \dots$ بنابراین توابع

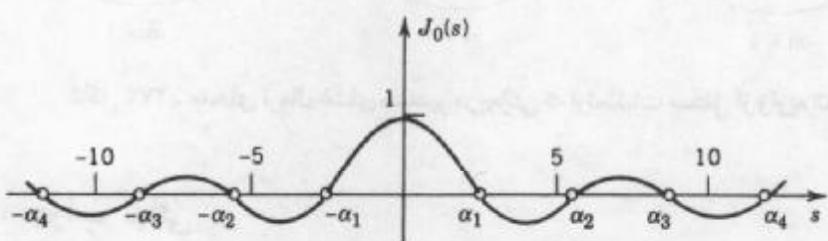
$$W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right); m = ۱, ۲, \dots, \quad (۱۰)$$

جوابهای از (۷) می باشند که در $r = R$ صفر می شوند.

توابع ویژه و مقادیر ویژه . به ازای W_m مذکور در (۱۰)، جواب عمومی حاصل از (۶) با

$$\lambda = \lambda_m = ck_m$$

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t.$$



شکل ۲۷۳. تابع بدل $J_0(s)$

ازاینو و توابع

$$u_m(r, t) = W_m(r)G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t)J_0(k_m r) \quad (11)$$

که در آن $m = 1, 2, \dots$ ، جوابهایی از معادله موج (۱) می‌باشند که در شرط کرانه‌ای (۲) صدق می‌نمایند. اینها توابع ویژه مساله مورناظر ما می‌باشند و مقادیر ویژه متناظر با این توابع λ_m هاستند.

ارتعاش غشای متناظر با u_m را مد نظر m ام می‌نامند؛ فرکانس این ارتعاش $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ دور بر واحد زمان است. چون صفرهای J_0 به طور منظم بر روی محور توزیع نشده‌اند (برخلاف صفرهای توابع سینوسی که در مرود نخ مرتعش پدیدار می‌شوند)، صدای طبل کاملاً با صدای ویولن تفاوت دارد. شکل‌های متمایز مدهای نرمال که در شکل ۲۷۴ نشان داده شده‌اند به سادگی از شکل ۲۷۳ حاصل می‌شوند.

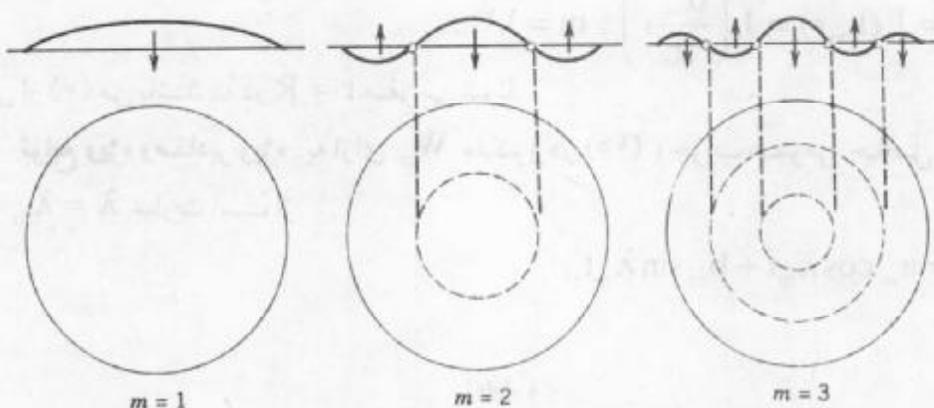
به ازای $m = 1$ همه نقاط غشا همزمان به سمت بالا (یا پائین) حرکت می‌کنند.

به ازای $m = 2$ ، وضعیت به شرح زیر می‌باشد. تابع

$$W_r(r) = J_0\left(\frac{\alpha_r}{R}r\right)$$

$$\text{به ازای } \alpha_r = \alpha_1 R \text{، درنتیجه } r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_r} = \frac{\alpha_r r}{R} \text{ یک خط}$$

گرهی است، و زمانی که در یک لحظه مشخص قسمت مرکزی غشا به سمت بالا حرکت می‌کند، قسمتهای خارجی ($r > r$) به سمت پائین حرکت می‌نماید، و بالعکس. جواب $u_m(r, t)$ دارای $m - 1$ خطوط گرهی می‌باشد، که دوایر متعدد مرکزند (شکل ۲۷۴).



شکل ۲۷۴. مدهای نرمال غشای مستطیل در حالتی که ارتعاشات مستقل از زاویه‌اند

گام سوم. جواب نهایی

برای رسیدن به جوابی که در شرایط اولیه (۳) و (۴) صدق کنند، می‌توان همانند نخ مرتعش

عمل کرد، برای این منظور، سری زیر را در نظر می‌گیریم

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t] J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right). \quad (12)$$

با قرار دادن $t = 0$ و با استفاده از (۳) می‌یابیم

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r). \quad (13)$$

از این‌پر برای آنکه (۱۲) در (۳) صدق نماید، ثابت‌های a_m باید ضریب سری بسل - فوریه‌ای باشد که

$$[n = 1, 2, \dots] \text{ نمایش می‌دهد؛ یعنی } [r \cdot J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) \text{ را برحسب}]$$

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1'(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) dr; \quad m = 1, 2, \dots. \quad (14)$$

مشتق‌پذیری $f(r)$ در بازه $R \leq r \leq 0$ برای وجود جوابی به صورت (۱۳) کفايت می‌نماید (ر. ک. مرتع [A۹]). ضرایب b_m در (۱۲) را می‌توان به طور مشابه از (۴) مشخص نمود. برای به دست آوردن مقادیر عددی a_m و b_m ، می‌توان یکی از روش‌های معمول انتگرال‌گیری تقریبی را با استفاده از جداول J_0 و J_1 به کار گرفت. برخی اوقات از انتگرال‌گیری عددی همانندمثال زیر، می‌توان اجتناب کرد.

مثال ۱. ارتعاشات غشای مستدیر

مطلوب است ارتعاشات غشای مستدیر به شعاع l و چگالی ρ ، چنانچه کشش

سرعت اولیه صفر و تغییر مکان اولیه برابر است با

$$f(r) = 1 - r^2 [ft].$$

$$\text{حل. } b_m = \frac{T}{\rho} = \frac{\Lambda}{2} = 4 \left[\frac{ft^2}{sec^2} \right]$$

مساله ۲۹ در بخش ۹.۵، با توجه به اینکه $R = 1$ ، می‌یابیم

$$a_m = \frac{2}{J_1'(\alpha_m)} \int_0^1 r(1-r^2) J_0(\alpha_m r) dr = \frac{4 J_0(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1'(\alpha_m)} = \frac{\Lambda}{\alpha_m^2}.$$

که در آن آخرین تساوی از (۳)، بخش ۶.۵، با $1 = 0$ نتیجه شده است، یعنی

$$J_1'(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) - J_0(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m).$$

جدول ۹.۵ از [۱]، با توجه به آن α_m و $J_0'(\alpha_m)$ محاسبه می‌شوند. از این مطلب، بنابر (۲)، بخش

$$a_m = -J_0'(\alpha_m) \quad \text{می‌یابیم.}$$

۱۰- مسائل همگرایی و یکتایی را مورد بررسی فرارنمی دهیم.

a_m	$J_r(\alpha_m)$	$J_i(\alpha_m)$	α_m	m
$1/10801$	$0/43176$	$0/51915$	$2/40483$	۱
$-0/13978$	$-0/12328$	$-0/34026$	$5/52008$	۲
$0/04548$	$0/06274$	$0/27145$	$8/65373$	۳
$-0/02099$	$-0/03943$	$-0/23246$	$11/79153$	۴
$0/01164$	$0/02767$	$0/20605$	$14/93092$	۵
$-0/00722$	$-0/02078$	$-0/18773$	$18/07106$	۶
$0/00484$	$0/01634$	$0/17327$	$21/21164$	۷
$-0/00343$	$-0/01328$	$-0/16170$	$24/35247$	۸
$0/00253$	$0/01107$	$0/15218$	$27/49348$	۹
$-0/00193$	$-0/00941$	$-0/14417$	$30/63461$	۱۰

پس

$$f(r) = 1/108J_r(2/4048r) - 0/140J_r(5/5201r) + 0/045J_r(8/6537r) - \dots$$

مشاهده می کنیم که ضرایب بطور نسبی تدریجی کاهش می یابند. مجموع ضرایب بطور صریح مفروض در جدول برابر $99915/0$ می باشد. مجموع تمام ضرایب باید واحد باشد. (چرا؟) بنابراین با توجه به آزمون لاینیتزر در ضمیمه ۳.۰ مجموع جزئی این جملات با تقریب سه رقم اعشار برای دامنه نوسان $f(r)$ به دست می دهد.

از آنجا که

$$\lambda_m = ck_m = \frac{c\alpha_m}{R} = 2\alpha_m,$$

از (۱۲) جواب به صورت زیر حاصل می شود (با اندازه ۲ در فوت و ۱ در ثانیه)

$$u(r,t) = 1/108J_r(2/4048r)\cos 4/8097t - 0/140J_r(5/5201r)\cos 11/0402t \\ + 0/045J_r(8/6537r)\cos 17/3075t - \dots$$

در شکل ۱، ۲۷۴ ایده ای از حرکت اولین جمله سری فوق، $m=2$ جمله دوم، $m=3$ جمله سوم را به دست می دهد که می توان تقریباً تایج خوبی برای یک تار ویولن در بخش ۱۱.۳ مشاهده نمود.

مسائل بخش ۱۰.۱۱

۱. دلیل استفاده از مختصات قطبی در بخش حاضر را بیان کنید.
۲. هرگاه کشش غشا افزایش یابد، فرکانس هریک از مدل‌های نرمال (۱۱) چگونه تغییر می‌کند؟
۳. یک طبل کوچک دارای مدببیتی بالاتر از طبل بزرگتر که دارای کشش و چگالی یکسان هستند می‌باشد. چگونه درستی این موضوع از فرمولهای ما حاصل می‌شود؟
۴. با استفاده از مقدار عددی α_1 ، فرمولی برای فرکانس بینایی طبل مستدیر بیابید.
۵. فرمولی برای کشش T مورد نیاز برای ارائه یک نت بینایی از یک طبل مستدیر را بیابید.
۶. مقدار عددی شعاعهای خطوط گرهی u_1, u_2, u_m [ر. ک. (۱۱)] را، به ازای $R = 1$ مشخص کنید.
۷. نموداری مانند شکل ۲۷۴ برای u_1, u_2, u_m رسم کنید.
۸. به سوالی که در مساله ۶ شده است در موردنی u_1, u_2, u_m پاسخ دهید.
۹. آیا ممکن است به ازای c و R مشخص، دو یا تعداد بیشتری از توابع u_m [ر. ک. (۱۱)] که خطوط گرهی متمایزی دارند با یک مقدار ویژه معین متناظر شوند؟
۱۰. برای چه در مثال $a_1 + a_2 + \dots = 11$ ؟ پنج حاصل جمع جزئی اول این سری را محاسبه کنید.
۱۱. ارائه شده در مثال ۱ را محاسبه کنید.
۱۲. با استفاده از مقادیر متن، به ازای $m = 1, 2, \dots, 5$ درستی تساوی $m = (m - \frac{1}{4})\alpha_m$ را برمی‌کنید.

۱۳. نشان دهید برای آنکه (۱۲) در (۴) صدق کند لازم است که

$$b_m = \frac{1}{c\alpha_m R J'_1(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) dr, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

۱۴. تغییر مکان $(x, t) u$ غشای مستدیر به شعاع $1 = R$ در صورتی باید که $c = 1$ ، سرعت اولیه صفر و تغییر مکان اولیه برابر باشد با

$$f(r) = k(1 - r^2).$$

راهنمایی. مسائل ۲۵ الی ۳۲ بخش ۹.۵ را ملاحظه کنید.

۱۵. مطلوب است حل مساله ۱۴، وقتی که $f(r) = k(1 - r^2)$ و دیگر داده‌ها همانند قبل باشند.

ارتعاشات غشای مستدیر وابسته به r و θ

۱۶. نشان دهید که با جایگزینی $(t) G(t) = F(r, \theta)$ در معادله موج

$$u_{rr} = c^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}) \quad (16)$$

دومعادله زیر حاصل می‌شود

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0; \quad \lambda = ck, \quad (17)$$

$$F_n + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + k^2 F = 0. \quad (18)$$

۱۷. نشان دهید که با قرار دادن $F = W(r)Q(\theta)$ در (۱۸) نتیجه می شود

$$Q'' + n^2 Q = 0, \quad (19)$$

$$r^2 W'' + rW' + (k^2 r^2 - n^2)W = 0. \quad (20)$$

۱۸. در مساله ۱۷ نشان دهید که $Q(\theta)$ متناوب با دوره 2π است و بنابراین در (۱۹) و (۲۰)

، $Q_n = \sin n\theta$ و $Q_n^* = \cos n\theta$ و $n = 0, 1, \dots$

$W_n = J_n(kr)$ که در آنها $n = 0, 1, \dots$ حاصل می شوند.

۱۹. نشان دهید که شرط کرانه ای

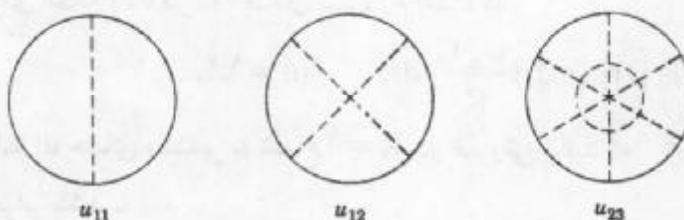
$$u(R, \theta, t) = 0 \quad (21)$$

منجر به مقادیر ویژه $s = \alpha_{mn}$ صفر مثبت m و $k = k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ می شوند که در آن $k = k_{mn}$ می باشد.

۲۰. نشان دهید که جوابهای (۱۶) که در (۲۱) صدق می کنند عبارت اند از (شکل ۲۷۵)

$$u_{mn} = (A_{mn} \cos ck_{mn}t + B_{mn} \sin ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r) \cos n\theta, \quad (22)$$

$$u_{mn}^* = (A_{mn}^* \cos ck_{mn}t + B_{mn}^* \sin ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r) \sin n\theta.$$



شکل ۲۷۵ خطوط گرهی برخی از جوابهای (۲۲)

۲۱. نشان دهید که شرط اولیه $u_r(r, \theta, 0) = 0$ در (۲۲) منجر به $B_{mn} = 0$ و $B_{mn}^* = 0$ می شوند.

۲۲. نشان دهید که $u_{mo} = 0$ و u_{mo}^* برابر (۱۱)، در بخش حاضر است.

۲۳. نشان دهید که u_{11} بیانگر مدبندی غشای نیم دایره ای می باشد و فرکانس مستتاپر را وقتی $R = 1$ و $c^2 = 1$ بباید.

۱۱.۱۱ معادله لاپلاس . پتانسیل

یکی از معادلات با مشتقات جزئی مهم در فیزیک معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

می باشد. در اینجا $\nabla^r u$ لaplاسین u است. در مختصات کارتزین فضائی x, y, z داریم

$$\nabla^r u = \frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r} + \frac{\partial^r u}{\partial z^r}. \quad (2)$$

نظریه جوابهای معادله لaplاس به نظریه پتانسیل موسوم می باشد. جوابهای معادله لaplاس (1) که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند توابع همساز نامیده می شوند.

قبلًا با این معادله، در حالت سه بعدی، (بخش‌های ۹.۸، ۹.۹) مانند دو بعدی (بخش ۱۱.۵) برخورد نداشتم، و حال این معادله را در مختصات استوانه ای و کروی، تنها از نوع مسائل بامقدار کرانه ای مورد بررسی قرار می دهیم. برای تفہیم اهمیت معادله لaplاس در ریاضیات مهندسی، برخی کاربردهای اساسی را بیان می کنیم.

کاربردهای اساسی معادله لaplاس

نیروی جاذبه. معادله حاکم بر نیروی جاذبه معادله لaplاس می باشد. در مثال ۳، بخش ۹.۸ دیدیم که هرگاه ذره A به جرم M در نقطه ثابت (X, Y, Z) و ذره دیگری مانند B به جرم m در نقطه (x, y, z) قرار داشته باشد، آنگاه ذره A ذره B را جذب می نماید، و نیروی جاذبه بین دو ذره برابر گرادیان تابع عددی زیر است

$$u(x, y, z) = \frac{c}{r}, \quad c = GMm,$$

که در آن

$$r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} \quad (> 0).$$

این تابع به پتانسیل میدان گرانشی موسوم است، و در معادله لaplاس صدق می کند. تعمیم این مطلب به پتانسیل نیروی حاصل از توزیع پیوسته جرم کاملًا واضح می باشد. چنانچه جرمی به چگالی $\rho(X, Y, Z)$ سرتاسر یک ناحیه T در فضا توزیع شده باشد، آنگاه پتانسیل متناظر u در نقطه (x, y, z) که خالی از جرم می باشد به صورت زیر تعریف می شود:

$$u(x, y, z) = k \iiint_T \frac{\rho(X, Y, Z)}{r} dX dY dZ \quad (k > 0), \quad (3)$$

که در آن r دارای همان تعریف قبل می باشد. چون $\frac{1}{r} > 0$ (جواب معادله لaplاس (1) می باشد،

$$\nabla^r u = 0, \quad \text{و } \rho \text{ مستقل از } x, y \text{ و } z \text{ می باشد، می بایس}$$

$$\nabla^r u = k \iiint_T \rho \nabla^r \left(\frac{1}{r} \right) dX dY dZ = 0;$$

یعنی، پتانسیل گرانشی که توسط (3) تعریف شده است در هر نقطه ای که به وسیله ماده اشغال نشده

باشد در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

الکترواستاتیک. نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات از قانون کولن (ر. ک. بخش ۹.۸)، که همان صورت ریاضی قاعده گرانشی نیوتون را دارا است، پیروی می‌نماید. از این مطلب نتیجه می‌شود که میدان حاصل از یک توزیع بار الکتریکی از نقطه نظر ریاضی می‌تواند با تابع پتانسیلی، که در هر نقطه که به وسیله بار اشغال نشده باشد در معادله لاپلاس صدق می‌کند، بیان شود.

جریان گرما. معادله حاکم بر جریان گرما به صورت زیر می‌باشد

$$u_1 = c^r \nabla^r u,$$

که در حالت پایدار ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) این معادله به معادله لاپلاس، چنانکه در بخش ۱۱.۵ برای مسائل دو بعدی آموختیم، و در سه بعدی وضع برهمان منوال می‌باشد، تبدیل می‌شود.
هیدرودینامیک. معادله لاپلاس در رابطه با حالت پایدار جریان سیال تراکم ناپذیر چنانکه در فصل ۱۷ نشان خواهیم داد) که در آن مشاهده می‌کنیم که مسائل دو بعدی را می‌توان از روش‌های آنالیز مختلط حل نمود) نیز ظاهر می‌شوند.

لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای و کروی

در اغلب کاربردهایی که به معادله لاپلاس متوجه می‌گردند، لازم است که مساله با مقدار کرانه‌ای را حل کنیم، یعنی، جوابی از معادله لاپلاس (۱) را که در شرایط کرانه‌ای مفروض بر سطح کراندار S از ناحیه T که در معادله در نظر گرفته شده بود، مشخص کنیم که مسائل سه نوع و به شرح زیر می‌باشند:

(I) اولین مساله با مقدار کرانه‌ای یا مساله دیریکله مساله‌ای است که در آن $u|_{\partial S}$ مشخص باشد.

(II) دومین مساله با مقدار کرانه‌ای یا مساله نیومن مساله‌ای است که در آن مشتق قائم

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S} \text{ بر } S \text{ مشخص باشد.}$$

(III) سومین مساله با مقدار کرانه‌ای یا مساله با مقدار کرانه‌ای آمیخته مساله‌ای است که در آن $u|_{\partial S}$ و $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S}$ بر قسمت باقیمانده از S مشخص باشند.

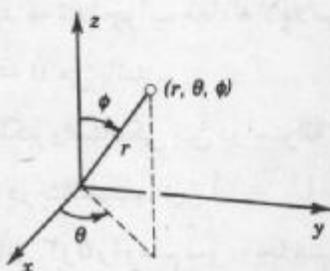
در حل مسائل با مقادیر کرانه‌ای اغلب اوقات نوع دستگاه مختصات مهم است. بدین جهت به بررسی نمایش لاپلاسین در دستگاه‌های مختلف می‌پردازیم. رفتار لاپلاسین در فضای سه متغیره شبیه لاپلاسین در فضای دو متغیره ارائه شده در بخش ۱۱.۹ است.

برای مختصات استوانه‌ای r, θ, z که به شکل زیر به مختصات کارتزین مربوط می‌شوند (شکل ۲۷۶)

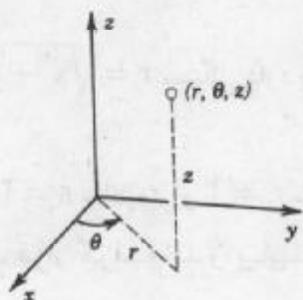
$$(4) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

از (۴) بخش ۱۱.۹، با افزودن u_{zz} به $\nabla^r u$ می‌یابیم

$$\nabla^r u = \frac{\partial^r u}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r} + \frac{\partial^r u}{\partial z^r}. \quad (5)$$



شکل ۲۷۷. مختصات کروی



شکل ۲۷۸. مختصات استوانه‌ای

یکی از دستگاههای مهم دیگر مختصات کروی r, θ, ϕ است که به شکل زیر به مختصات کارتزین مربوط می‌شوند (شکل ۲۷۷) ^{۱۱}

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi. \quad (6)$$

لاپلاسین تابع u در مختصات کروی به صورت زیر است

$$\nabla^r u = \frac{\partial^r u}{\partial r^r} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r} + \frac{\cot \phi}{r^r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^r \sin^r \phi} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r}. \quad (7)$$

عبارت (7) را به صورت زیر نیز می‌نویستند

$$\nabla^r u = \frac{1}{r^r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^r \phi} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r} \right]. \quad (7')$$

اثبات درستی (7) و (7') را به متعلم واگذار می‌کنیم. روند کارهمناند مطالبی است که در بخش ۱۱.۹ ارائه شده‌اند.

در بخش آتی نشان می‌دهیم که روش جداسازی متغیرها در مختصات کروی به معادله لزاندار، که در بخش ۵.۳ توصیف آن آمده است، برمی‌گردد.

مسائل بخش ۱۱.۱۱

۱. نشان دهید که تابع $\frac{c}{r} = u$ در معادله لاپلاس در مختصات کروی صدق می‌کند.

۲. نشان دهید که تنها جواب معادله لاپلاس سه بعدی که تنها به $r = \sqrt{x^r + y^r + z^r}$ بستگی دارد برابر $u = \frac{c}{r} + k$ می‌باشد، درینجا c و k مقادیر ثابت هستند.

۱۱- معادلات (6) در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نمادهای مشابه در مختصات قطبی استفاده می‌شود.

۳. در مساله ۲ ، ضرایب c و k را طوری باید که Δu نمایش پتانسیل الکترواستاتیک بین دو کره متعدد مرکز به شعاعهای $2 = r_1$ سانتیمتر و $4 = r_2$ سانتیمتر ، که به ترتیب در پتانسیلهای $U_1 = 110$ ولت و $U_2 = 70$ ولت قرار گرفته اند، باشد.

۴. نشان دهید که تنها جواب معادله لاپلاس دو بعدی که فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد به صورت $u = c \ln r + k$ می باشد.

۵. پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو استوانه هم محور با شعاعهای $2 = r_1$ سانتیمتر و $4 = r_2$ سانتیمتر را که به ترتیب در پتانسیلهای $U_1 = 110$ ولت و $U_2 = 70$ ولت قرار گرفته اند را باید نمودار جوابهای مسائل ۳ و ۵ رارسم نموده و با هم مقایسه کنید.

۶. با جایگزینی (r) ، که در آن r در مساله ۲ تعریف شده است، در $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ، در مطابقت با (۷) ، تحقیق کنید که $u = -\frac{1}{r} u'' + \frac{1}{r} u'$.

۷. از ∇u در مختصات کارتزین (۷) را به دست آورید.

۸. با تبدیل دوباره ∇u به مختصات کارتزین درستی (۵) را تحقیق کنید.

نشان دهید که هر یک از توابع $f(x,y) = u$ از زیر در معادله لاپلاس صدق می کند. نمودار برخی از خطوط هم پتانسیل ثابت $= u$ رارسم کنید.

$$x^2 - y^2 = u. \quad 10 \quad xy. \quad 9$$

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)} = u. \quad 12 \quad x^2 - 3xy^2 = u. \quad 11$$

$$(x+1)(y-1) = u. \quad 14 \quad \frac{x}{(x^2 + y^2)} = u. \quad 13$$

$$\frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = u. \quad 15$$

مطلوب است توزیع دما در حالت پایدار (مستقل از زمان) در هر یک از موارد زیر :

۱۶. بین دو صفحه موازی $x = x_1$ و $x = x_2$ که به ترتیب در دمای u_1 و u_2 قرار گرفته اند.

۱۷. بین دو استوانه مستبدیر هم محور با شعاعهای r_1 و r_2 که به ترتیب در دمای u_1 و u_2 قرار گرفته اند.

۱۸. بین دو کره متعدد مرکز با شعاعهای r_1 و r_2 که دمای آنها به ترتیب u_1 و u_2 است.

۱۹. هرگاه سطح گوی $R^2 \leq r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ در دمای صفر نگهداشته شود و دمای اولیه در داخل گوی $f(r)$ باشد، آنگاه نشان دهید که دمای $u(r,t)$ در گوی دارای جوابی به صورت $u(r,t) = c^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r)$ می باشد که در شرایط $u(R,t) = f(r)$ ، $u(R,t) = 0$ صدق می کند.

۲۰. با قرار دادن $u = v$ نشان دهید که مساله ۱۹ به صورت $v_{tt} = 0$ ، $v_t = c^2 v_{rr}$ در می آید، شرط $v(0,t) = 0$ را اضافه کنید (زیرا که u باید در $t = 0$ کراندار باشد)، $v(r,0) = rf(r)$

و مساله حاصل را به روش ضربی حل کنید.

۲۱. (معادله هلمهولتز) نشان دهید که با قرار دان $i = \sqrt{-1}$ (۱) در معادله موج سه بعدی $u_{rr} = c^2 \nabla^2 u$ معادله هلمهولتز سه بعدی (ر. ک. بخش ۱۱.۸)

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

حاصل می شود.

۲۲. فرض کنید r, θ, ϕ مختصات کروی باشند، هرگاه $u(r, \theta, \phi)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق کند، نشان دهید که $v(r, \theta, \phi) = r^{-1} u(r^{-1}, \theta, \phi)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق می کند.

۲۳. هرگاه $v(r, \theta) = u(r^{-1}, \theta)$ در $\nabla^2 u = 0$ صدق کند، آنگاه نشان دهید که $u(r, \theta) = v(r, \theta)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق می کند (r و θ مختصات قطبی می باشند).

۲۴. با استفاده از روش ضربی مساله با مقدار کرانه ای زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = 0 \quad (0 < x < \pi, y > 0)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 1,$$

$$|u(x, y)| < \infty.$$

$$y \rightarrow \infty$$

۲۵. آیا جواب مساله ۲۴ به صورت $u = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \tan \left(\frac{\sin x}{\sinh y} \right)$ نشان دهید که در همه شرایط مساله ۲۴ صدق می کند.

۱۲.۱۱ لaplاسین در مختصات کروی. معادله لزاندار

در این بخش به بررسی یک مساله با مقدار کرانه ای که شامل معادله لaplاس در مختصات کروی می باشد، می پردازیم. فرض کنید کره S به شعاع R در توزیع پتانسیل الکتریکی ثابت $u(R, \theta, \phi) = f(\phi)$ (۱)

قرار داشته باشد، که در آن r, θ, ϕ مختصات کروی می باشند که در بخش ۱۱.۱۱ تعریف شده اند، مشروط برآنکه مرکز S بر مبدأ مختصات منطبق باشد و تابع $f(\phi)$ مفروض باشد. با توجه به اینکه پتانسیل روی S مستقل از θ می باشد، پتانسیل در فضای بین چنین خواهد بود. درنتیجه $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ ، بنا به (۷) از بخش قبل معادله لaplاس به صورت

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (2)$$

در می آید. علاوه بر آن، پتانسیل را در بینهایت برابر صفر می گیرند، یعنی باید داشته باشیم

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \phi) = 0. \quad (3)$$

هم اکنون می خواهیم مساله با مقدار کرانه ای شامل معادله (۲) با شرط کرانه ای (۱) و شرط در بینهایت (۳) را به روش ضربی حل کنیم. برای این منظور در (۲) چنین قرار می دهیم

$$u(r, \phi) = G(r)H(\phi).$$

با تقسیم نتیجه حاصل بر تابع GH ، می باییم

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = - \frac{1}{H \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dH}{d\phi} \right).$$

مطابق معمول، دو ظرف این معادله باید مساوی با مقدار ثابتی، مثلثاً k باشد، به قسمی که

$$\frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dH}{d\phi} \right) + kH = 0. \quad (4)$$

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = k.$$

معادله آخری را می توان به صورت $(r'G')' = kG$ یا

$$r'G'' + 2rG' - kG = 0.$$

نوشت. این معادله یک معادله اویلر - کوشی است. از بخش ۲.۶ داریم که این معادله دارای جوابهایی به صورت $G = r^\alpha$ می باشد. هرگاه نمادگذاری را عوض کنیم و به جای k ، $n(n+1)$ قرار دهیم، این جوابها دارای صورت ساده تری خواهد شد. با این نمادگذاری داریم

$$r'G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0. \quad (5)$$

که در آن n هنوز دلخواه می باشد. با قرار دادن $r^\alpha = G$ در (۵) می باییم

$$[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1)]r^\alpha = 0.$$

صفرهای عبارت داخل کروشه $\alpha = -n$ و $\alpha = n+1$ می باشند. درنتیجه جوابهای زیر به دست می آیند:

$$G_n(r) = r^n, \quad G_{n+1}(r) = \frac{1}{r^{n+1}}. \quad (6)$$

حال تغییر شکل معادله (۴)، با قرار دادن $w = \cos \phi$ می باییم $\sin \phi = 1 - w^2$ و

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw} \frac{dw}{d\phi} = -\sin \phi \frac{d}{dw}.$$

درنتیجه، (۴) به ازای $k = n(n+1)$ به صورت زیر در می آید

$$\frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dH}{dw} \right] + n(n+1)H = 0. \quad (7)$$

این معادله یک معادله لزاندار می باشد (ر. ک. بخش ۵. ۳) که آنرا به صورت زیر می نویسیم

$$(1-w^r) \frac{d^r H}{dw^r} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0. \quad (7)$$

هم اکنون حل این معادله را با استفاده از سری لزاندار - فوریه پی می گیریم. به ازای عدد صحیح $n = 0, 1, \dots$

$$H = P_n(w) = P_n(\cos\phi); \quad n = 0, 1, \dots$$

که جوابهای معادله لزاندار (7) می باشند حاصل می شوند. از اینرو دو دنباله جوابهای $u = GH$ به صورت زیر برای معادله لاپلاس (۲) به دست می آیند:

$$u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos\phi), \quad u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\phi) \quad (8^*)$$

که در آن $n = 0, 1, \dots$ و A_n و B_n اعداد ثابت می باشند.

جواب مساله داخلی. این مطلب به معنای جوابی از (۲) می باشد که در نقاط درونی کره برقرار بوده و در (۱) صدق نماید. بدین منظور سری z زیر را درنظر می گیریم

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi). \quad (8)$$

برای آنکه (8) در (۱) صدق کند باید داشته باشیم

$$u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\phi) = f(\phi); \quad (9)$$

یعنی، (9) باید برابر سری لزاندار - فوریه باشد. از (7) بخش ۵. ۹ ضرایب به صورت

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw$$

نتیجه می شوند که در آن $\tilde{f}(w) = f(\phi)$ مقدار $f(\phi) = \cos\phi$ را به صورت تابعی از $w = \cos\phi$ نشان می دهد. چون $dw = -\sin\phi d\phi$ و حدود انتگرالگیری $-1 \leq w \leq 1$ به ترتیب مستاظر با $\phi = 0^\circ$ و $\phi = 180^\circ$ می باشند، همچنین می یابیم

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\phi) P_n(\cos\phi) \sin\phi d\phi; \quad n = 0, 1, \dots. \quad (10)$$

از اینرو سری (8) با ضرایب (10) جواب مساله فوق به ازای نقاط درونی کره می باشد.

۱۲- تاکنون n دلخواه بود زیرا k دلخواه بود. می توان نشان داد که تحدید n به عدد صحیح برای آنکه جواب (7) پیوسته، همراه با مشتق آن در بازه $1 \leq w \leq -1$ یا $0 \leq \phi \leq \pi$ باشد امری ضروری می باشد.

۱۳- همگرایی را مورد بررسی قرار نمی دهیم، می توان نشان داد که هرگاه $(\phi, f(\phi))$ در بازه $0 \leq \phi \leq \pi$ تکه ای پیوسته باشند، از سری (8) با ضرایب (10) می توان جمله به جمله نسبت به ϕ مشتق گرفت و سریهای حاصل همگرا و به ترتیب با $\frac{\partial^r u}{\partial \phi^r}$ نمایش می دهند. پس سری (8) با ضرایب (10) جواب مساله موردنظر در درون کره می باشد.

جواب مساله خارجی. برای یافتن جواب در خارج کره نمی‌توان از توابع $u_n(r, \phi)$ استفاده نمود زیرا این توابع در (۳) صدق نمی‌کنند، ولی می‌توان از توابع $u_n^*(r, \phi)$ ، که در (۳) صدق می‌کنند، استفاده کرد و مانند قبل عملی نمود. این موضوع به جواب

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) \quad (r \geq R) \quad (11)$$

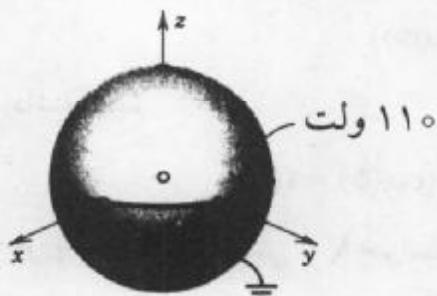
با ضرایب

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi \quad (12)$$

منجر می‌شوند.

مثال ۱. خازن کروی

مطلوب است پتانسیل در داخل و خارج یک خازن کروی شامل دو نیم کره فلزی به شعاعهای ۱ فوت که توسط یک شکاف عایق از یکدیگر جدا شده است. در صورتی که نیم کره بالای در دمای ۱۱۰ ولت و پائینی در صفر نگهداشته شده باشد.



شکل ۲۷۸. خازن کروی در مثال ۱

حل. شرط کرانه‌ای به صورت زیر مفروض می‌باشد (به شکل ۲۷۷ در بخش ۱۱.۱۱ مراجعه کنید).

$$f(\phi) = \begin{cases} 110 & ; \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < \phi \leq \pi. \end{cases}$$

چون $R = 1$ ، از این رو با توجه به (۱۱۰) می‌باشیم

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \cdot 110 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi.$$

قرار می‌دهیم $w = \cos \phi$ ، آنگاه $P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi = -P_n(w) \, dw$ و انتگرال‌گیری از ۱ تا 0 می‌باشد. با توجه به (۱۱) بخش ۳.۵ داریم

$$A_n = 55(2n+1) \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \int_1^0 w^{n-2m} \, dw$$

که در آن به ازای n زوج، $M = \frac{n-1}{2}$ و به ازای n فرد، $M = \frac{n}{2}$ مقدار انگرال برابر می باشد. از این‌رو

$$A_n = \frac{55(2n+1)}{2^n} \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!}. \quad (13)$$

با قراردادن $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ داریم

$$A_0 = \frac{165}{2} \cdot \frac{2!}{0!1!2!} = \frac{165}{2},$$

$$A_1 = \frac{275}{4} \left(\frac{4!}{0!2!3!} - \frac{2!}{1!1!1!} \right) = 0,$$

$$A_2 = \frac{385}{8} \left(\frac{6!}{0!3!4!} - \frac{4!}{1!2!2!} \right) = -\frac{385}{8},$$

والی آخر. چون $A_0 = P_0$ لذا پتانسیل (۸) در داخل کره عبارت است از

$$u(r, \phi) = 55 + \frac{165}{2} r P_0(\cos \phi) - \frac{385}{8} r^2 P_2(\cos \phi) + \dots$$

با P_0, P_1, \dots, P_2 مفروض در (۱۱)، بخش ۳.۵ چون $R = 1$ ، از (۱۰) و (۱۲) این بخش مشاهده

می کنیم که $A_n = B_n$ ، و (۱۱) پتانسیل در خارج کره را به صورت زیر به دست می دهد

$$u(r, \phi) = \frac{55}{r} + \frac{165}{2r} P_1(\cos \phi) - \frac{385}{8r^2} P_2(\cos \phi) + \dots$$

حاصل جمع جزئی این سری را می توان برای محاسبه مقدار تقریبی پتانسیل مورد استفاده قرار داد.

همچنین، جالب است که توجه کنیم که در فواصل دور، پتانسیل کره مانند پتانسیل بار نقطه، تقریباً برابر

$\frac{55}{r}$ می باشد. (با مثال ۳ بخش ۹.۸ مقایسه کنید).

مسائل بخش ۱۲.۱۱

۱. با جایگزینی بررسی کنید که $u_n(r, \phi)$ و $u_n^*(r, \phi)$ در (۸) جوابهای (۲) می باشند.

۲. سطوحی را که توابع u_1 و u_2 بر آنها صفر می باشند بیابید.

۳. نمودار تابع $P_n(\cos \phi)$ را به ازای $n = 0, 1, 2$ رسم کنید [ر. ک. (۱۱) بخش ۳.۵].

۴. نمودار $P_2(\cos \phi)$ و $P_4(\cos \phi)$ را رسم کنید.

فرض کنید r, θ, ϕ مختصات کرویی که در متن کتاب مورد استفاده قرار گرفته باشند، آنگاه مطلوب

است پتانسیل در داخل کره $R = 1$ ، با فرض آنکه هیچ باری در داخل کره وجود ندارد و پتانسیل بر سطح

برابر $f(\phi)$ است، که در آن

$$f(\phi) = \cos 2\phi, \quad f(\phi) = \cos \phi, \quad f(\phi) = 1. \quad .5$$

$$f(\phi) = \cos^r \phi \quad . \quad ۹ \quad f(\phi) = 1 - \cos^r \phi \quad . \quad ۸$$

$$f(\phi) = 10 \cos^r \phi - 3 \cos^r \phi - 5 \cos \phi - 1.11 \quad f(\phi) = \cos^3 \phi + 3 \cos \phi. \quad ۱۰$$

۱۲. نشان دهید که در مساله ۵، پتانسیل در خارج کرده برابر پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای است که در مبدأ قرار دارد.

۱۳. فصل مشترک سطوح هم پتانسیل مساله ۶ با صفحه xz را رسم کنید.

۱۴. پتانسیل در خارج کرده‌ای که در مسائل ۵ تا ۱۱ آمده است را بایابید.

۱۵. مقادیر A_0, A_1, A_2 و A_3 را در مسائل ۱، از فرمول (۱۳) به دست آورید.

۱۶. در مثال ۱، نمودار مجموع سه جمله که بطور واضح مفروض می‌باشد را به ازای $\theta = 1$ رسم کنید و با رسم آن مشاهده می‌کنید که این مجموع تقریب‌های برای تابع کرانه‌ای مفروض می‌باشد.

۱۷. دمای گوی همگن به شعاع واحد را طوری بایابید که کران پائینی در دمای صفر درجه سانتیگراد و دمای بالایی در 20° درجه سانتیگراد قرار گرفته باشند.

۱۸. نشان دهید که [ر. ک. مساله ۸ بخش ۳. ۵]

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x).$$

۱۹. با استفاده از مساله ۱۸ و مساله ۱۲ بخش ۳. ۵ نشان دهید که

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]}{(2n+1)}.$$

با استفاده از این مطلب، عبارات A_0, A_1, A_2 و A_3 مربوط به مثال ۱ را تحقیق کنید و سپس A را محاسبه نمائید.

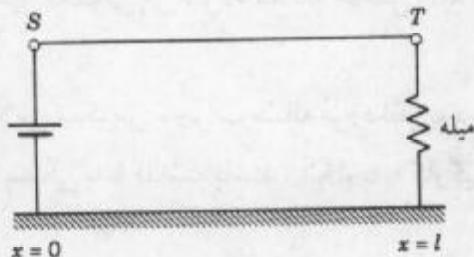
۲۰. (معادلات خط انتقال) یک کابل یا سیم تلفن طولانی (شکل ۲۷۹) را که به طور ناقص عایق کاری شده است، به قسمی که سیم تلفن در سراسر طولش نشت می‌کند، درنظر می‌گیریم. مبدأ S جریان (x,t) سیم در $x = 0$ و انتهای دریافت کننده T در $x = L$ واقع می‌باشد. جریان از S به T برقرار می‌گردد و از داخل مصرف کننده به زمین برگردانده شده. فرض کنید R, L, C و G به ترتیب مقاومت، القا، ظرفیت نسبت به زمین و هدایت نسبت به زمین برای واحد کابل باشند. نشان دهید که

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{اولین معادله خط انتقال})$$

که در آن $u(x,t)$ پتانسیل در کابل می‌باشد. راهنمایی. قانون ولتاژ کیرشهف را برای تکه کوچکی از کابل که بین x و $x + \Delta x$ واقع است به کار برد (اختلاف پتانسیل در x و $x + \Delta x$ برابر است با افت القایی به علاوه افت مقاومتی).

۲۱. نشان دهید که برای کابل در مساله ۲۰

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + G \frac{\partial u}{\partial t}$$
 (دومین معادله خط انتقال)
راهنمایی. از قانون جریان کیرشهف استفاده کنید (اختلاف جریان در $x + \Delta x$ و x برابر است با اتفاف به علت نشست به زمین به علاوه اتفاف ظرفیتی).



شکل ۲۷۹. خط انتقال

۲۲. نشان دهید که حذف آیا ۱۱ از معادلات خط انتقال منجر به معادلات $u_{xx} = LGu_u(RC + GL)u_t + RGu$,
 $i_{xx} = L Ci_u + (RC + GL)i_t + RG i$ می شوند.

۲۳. (معادلات تلگراف) برای کابلهای زیر دریایی G قابل چشم پوشی می باشد و فرکانسها پایین می باشند. نشان دهید که این فرضها منجر به معادلاتی که به معادلات کابل زیر دریایی یامعادلات تلگراف موسوم اند می شوند:

$$u_{xx} = RCu_t, \quad i_{xx} = RCi_t.$$

۲۴. پتانسیل دریک کابل زیردریایی با انتهای $x = 0$ و $x = l$ صفر و توزیع ولتاژ اولیه ثابت U_0 را بیابید.

۲۵. (معادلات خط فرکانس بالا) نشان دهید که در حالت جریانهای متناسب فرکانس بالا معادلات مذکور در مساله ۲۸ را می توان به طور تقریبی به معادلات زیر که به معادلات خط فرکانس بالا موسوم اند، تبدیل کرد:

$$u_{xx} = LGu_u, \quad i_{xx} = LCi_u.$$

اولین معادله را با فرض اینکه پتانسیل اولیه برابر $U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ و به ازای هر t در نقاط انتهای $x = 0$ و $x = l$ در $u = 0$ می باشند راحل کنید.

۱۳. حل مسائل معادلات بامشتقات جزئی به کمک تبدیلات لاپلاس
متعلمین آشنا به فصل ۶ ممکن است مایل باشند بدانند که آیا روش تبدیلات لاپلاس را

می‌توان برای حل معادلات با مشتقهای جزئی به کار گرفت. پاسخ به این سوال، علی‌الخصوص اگر متغیرهای مستقل در نیمه مثبت محور قرار گیرند، مثبت است. مراحل حل شبیه مراحل موجود در فصل ۶ می‌باشد. برای یک معادله دو متغیره این مراحل عبارت اند از

۱. تبدیل لاپلاس را نسبت به یکی از دو متغیرها، معمولاً نسبت به t ، به کار می‌گیریم. این روش منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌شود. معادله حاصل را به کمک شرایط کرانه‌ای و اولیه داده شده حل می‌کنیم.

۲. با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس، جواب مساله مورد نظر به دست می‌آید.

چنانچه ضرایب معادله مفروض بستگی به t نداشته باشند، آنگاه با به کار گیری تبدیل لاپلاس، مساله به مساله ساده‌تری تبدیل می‌شود.

مثال ۱. یک معادله مرتبه اول

مساله

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = t \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

را حل کنید. دلیل به کار گیری w در این معادله این است که می‌خواهیم w را برای نمایش دادن تابع پله‌ای واحد (بخش ۳.۶) بکار ببریم.

حل. با تبدیل لاپلاس گرفتن نسبت به t از طرفین (۱) و با توجه به (۱) بخش ۲.۶ می‌یابیم

$$f\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + x [sf\{w\} - w(x, 0)] = 0. \quad (2)$$

در اینجا $w(x, 0) = 0$. در جمله اول با تغییر انتگرالگیری و مشتقگیری می‌یابیم

$$f\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial w}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} f\{w(x, t)\}. \quad (3)$$

بنویشن $f\{w(x, t)\}$ از (۲) داریم

$$\frac{\partial W}{\partial x} + xsW = 0.$$

این معادله را می‌توان یک معادله دیفرانسیل معمولی با متغیر مستقل x در نظر گرفت، زیرا در آن مشتق نسبت به s وجود ندارد. جواب عمومی این معادله عبارت است از (بخش ۱.۷)

$$W(x, s) = c(s)e^{-\frac{sx^2}{4}}.$$

از $\frac{1}{s}$ و $f\{t\} = \frac{1}{s}$ می‌یابیم $w(0, t) = t$ ، بنابراین

$$W(0, s) = c(s) = \frac{1}{s}.$$

در نتیجه

$$W(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{sx}{c}}$$

$$\text{از } t = s^{-1} \text{ و به کارگیری دومین قضیه انتقال (بخش ۶.۳) به ازای } a = \frac{x}{c} \text{ تبدیل معکوس}$$

مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود

$$w(x,t) = (t - \frac{x}{c}) u(t - \frac{1}{c}x) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < \frac{x}{c}, \\ t - \frac{1}{c}x & ; \quad t > \frac{x}{c}. \end{cases} \quad (4)$$

بدلیل صوری بودن بحث فوق باید ثابت کرد که ما آنرا به عنوان یک تمرین به متعلم واگذار می کنیم.

مثال ۲ . نخ نیمه متناهی

تغییر مکان $w(x,t)$ یک نخ کشسان با شرایط زیر را باید.

(i) در ابتداء کار نخ بر محور x از $t=0$ («نخ نیمه متناهی») قرار دارد.

(ii) در هر لحظه $t > 0$ معادله حرکت انتهای چپ نخ عبارت است از (شکل ۲۸)

$$w(0,t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & ; \quad 0 < t < 2\pi \\ 0 & ; \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (iii)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x,t) = 0.$$

توجه کنید که نخ با طول بینهایت وجود خارجی ندارد ولی مدل مانعی طویل (با وزنی ناچیز) می باشد که انتهای راست آن در نقطه دوری واقع بر محور x ها ثابت شده است.

حل . برای رسیدن به جواب مورد نظر باید معادله موج (بخش ۱۱.۲)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (5)$$

را به ازای x و t مثبت ، تحت «شرایط کرانه ای»

$$w(0,t) = f(t) , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x,t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

با f که در بالا توصیف شده است ، و شرایط اولیه

$$w(x,0) = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

حل کنیم . با تبدیل لاپلاس گرفتن نسبت به t از طرفین (5) و با توجه به (2) ، بخش ۶.۲ می یابیم

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^r w}{\partial t^r}\right\} = s^r \mathcal{L}\{w\} - sw(x, 0) - \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = c^r \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^r w}{\partial x^r}\right\}.$$

بنابر (۷) و (۸)، دو جمله در عبارت فوق حذف می شوند. هم اکنون با تعویض ترتیب انتگرالگیری با مشتقگیری می یابیم

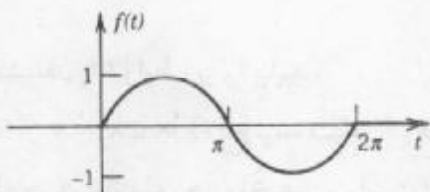
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^r w}{\partial x^r}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^r w}{\partial x^r} dt = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \mathcal{L}\{w(x, t)\}.$$

با نوشتن $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$ ، می یابیم

$$s^r W = c^r \frac{\partial^r W}{\partial x^r}$$

یا

$$\frac{\partial^r W}{\partial x^r} - \frac{s^r}{c^r} W = 0.$$



شکل ۲۸۰. حرکت انتهای چپ نخ مذکور در مثال ۲ عنوان تابعی از زمان

چون این معادله تنها شامل یک مشتق نسبت به x می باشد، آن را می توان یک معادله دیفرانسیل معمولی برای $W(x, s)$ نسبت به x تصور نمود. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$W(x, s) = A(s)e^{\frac{sx}{c}} + B(s)e^{-\frac{sx}{c}}. \quad (9)$$

باتوجه به (۶) می یابیم

$$W(0, s) = \mathcal{L}\{w(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

و با فرض آنکه بتوان ترتیب انتگرالگیری نسبت به t و حدگیری وقتی که $x \rightarrow \infty$ را عوض نمود، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x, s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) dt = 0.$$

این مطلب ایجاب می کند که در (۹)، $c > 0$ زیرا $A(s) = 0$ باشد، لذا به ازای هر s ثابت مثبت تابع $e^{\frac{xs}{c}}$ با افزایش x زیاد می شود. قابل توجه است که می توان فرض کرد $s > 0$ زیرا عموماً تبدیل لاپلاس به ازای هر s بزرگتر از عدد معینی مانند γ وجود دارد (بخش ۲.۶). از این‌رو می یابیم

$$W(0, s) = B(s) = F(s).$$

پس (۹) چنین می شود:

$$W(x,s) = F(s)e^{-\frac{sx}{c}}.$$

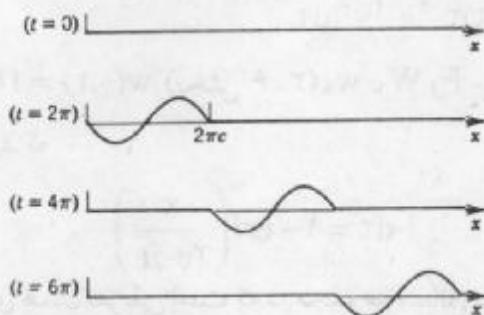
از دومین قضیه انتقال (بخش ۳.۶) به ازای $a = \frac{x}{c}$ تبدیل لاپلاس معکوس تابع فوق عبارت است از
(شکل ۲۸۱)

$$w(x,t) = f(t - \frac{x}{c})u(t - \frac{x}{c}) \quad (10)$$

یا

$$w(x,t) = \begin{cases} \sin(t - \frac{x}{c}); & \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \text{ یا } ct > x > (t - 2\pi)c \\ 0; & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این مطلب یک موج سینوسی تنها است که با سرعت c به طرف راست در حال حرکت می باشد. قابل توجه است که یک نقطه x تا لحظه $t = \frac{x}{c}$ بی حرکت می ماند، زمان لازم است تا با حرکت آغازی در $t = 0$ (آغاز حرکت طرف چپ) و با سرعت c به x رسید. نتیجه حاصل با شهود فیزیکی مطابقت دارد. چون اثبات صوری است، باید بررسی کنیم که آیا (۱۰) در شرایط موردنظر صدق می کند یا نه؟ چگونگی انجام این کار به متعلم واگذار می شود.



شکل ۲۸۱. موج سیار در مثال ۲

مسائل بخش ۱۳.۱۱

۱. هرگاه $L = c = 1$ و f مانند تابع مفروض در مثال ۱، بخش ۳.۱۱، به ازای $k = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}$ «مثلثی» باشد، آنگاه شکلی مانند شکل ۲۸۱ رسم کنید.

۲. سرعت موج مطرح شده در مثال ۲ چطور به کشش و جرم نخ بستگی دارد؟

۳. صحت جواب مثال ۲ را بررسی کنید. چه موج سیاری در مثال ۲ حاصل می شود در صورتی که در لحظه $t = 0$ شروع به اعمال حرکت سینوسی (بی پایان) به انتهای چپ نخ نمائیم.

مسائل زیر با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$u(0,t) = 1, u(x,0) = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial t} = 2x \quad . \quad ۴$$

$$t \geq 0 \text{ اگر } u(0,t) = 0, x \geq 0 \text{ اگر } u(x,0) = 0, x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt \quad . \quad ۵$$

۶. مساله ۵ را با روشی دیگر حل کنید.

دما $w(x,t)$ در یک میله نیمه متناهی با سطح جانبی عایق پوش شده که روی محور x ها از 0 تا ∞ قرار گرفته است را با فرض اینکه دمای اولیه صفر بوده و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به ازای هر $t > 0$ داشته باشد $w(0,t) = f(t)$ ، $w(x,t) \rightarrow 0$ ، تحت فرآیند به شرح ذیل بیابید.

۷. مدلی بسازید و نشان دهید که تبدیل لاپلاس منجر به

$$sW(x,s) = c^r \frac{\partial^r W}{\partial x^r} ; \quad W = \mathcal{L}\{w\}$$

$$W(x,s) = F(s)e^{-\frac{\sqrt{sx}}{c}} ; \quad F = \mathcal{L}\{f\}$$

می گردد.

۸. با به کار گرفتن قضیه پیچش در مساله ۷ ، نشان دهید که

$$w(x,t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}} d\tau.$$

۹. با قرار دادن $(t) = u(t) = w(0,t)$ (بخش ۳.۶) و $F(W, w, t)$ متناظر را به ترتیب با w در مساله ۸ نشان دهید که

$$w_0(x,t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}} d\tau = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

که در آن تابع خطای erf دارای همان تعریفی است که در مجموعه مسائل بخش ۱۱.۶ آمده است.

۱۰. (فرمول دوهامل) در مساله ۹ نشان دهید که

$$W_0(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{\sqrt{sx}}{c}}$$

و با توجه به قضیه پیچشی فرمول دوهامل

$$w(x,t) = \int_0^t f(t-\tau) \frac{\partial w_0}{\partial \tau} d\tau$$

را نتیجه بگیرید.

۱۴- ژان ماری کنستان دوهامل (JEAN MARIE COWSTANT DUHAMEL) ۱۸۷۲- ۱۸۹۷، ریاضیدان فرانسوی.

۱۴.۱۱ حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه

معادلات با مشتقات جزئی را همچنین می‌توان بوسیله روش‌های عملی دیگری حل نمود.

در این بخش به کمک تبدیلات فوریه به حل معادلات با مشتقات جزئی می‌پردازیم.

هرگاه داده‌های کرانه‌ای یا اولیه بر نیمه مثبت محور مفروض باشند، آنگاه در حل مسائل از تبدیلات کسینوسی یا سینوسی فوریه (بخش ۱۰.۱۰) استفاده می‌کنیم، و چنانچه این داده‌ها بر سراسر محور مفروض باشند، می‌توان از تبدیلات فوریه (بخش ۱۱.۱۰) استفاده نمود. ما اساس انجام این کار را با آوردن کاربردهای نوعی روش‌نی نمائیم.

مثال ۱. مساله گرمای محور x ها

مطلوب است دمای $u(x,t)$ میله همگن با سطح مقطع ثابت به طور کامل عایق پوش شده که در فاصله $-\infty - t \infty$ بر محور x واقع است را طوری بباید که دمای اولیه در این میله به صورت زیر باشد

$$u(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

و چنانچه $\infty \rightarrow |x|$ ، به ازای هر $t \geq 0$ داریم

$$u(x,t) \rightarrow 0, \quad u_x(x,t) \rightarrow 0. \quad (2)$$

مساله فوق را در حالت خاص

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1. \end{cases} \quad (3)$$

حل کنید.

حل . می‌خواهیم معادله گرمای

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad (4)$$

را با شرایط (۱) و (۲) حل کنیم. تکنیک راه حل در اینجا به کارگیری تبدیل فوریه نسبت به متغیر x و تبدیل معادله به یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب t است. جزئیات انجام این کار به شرح زیر می‌باشد.

فرض کنید $F(u) = \tilde{u}$ نمایش تبدیل فوریه u باشد. با توجه به (۱۰) بخش ۱۱.۱۰ (۴) به صورت زیر در می‌آید

$$F(u_t) = c^2 F(u_{xx}) = c^2 (-w^2) F(u) = -c^2 w^2 \tilde{u}.$$

هم اکنون با فرض قابل تعویض بودن ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری می‌باییم

$$F(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx} dx = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -c^2 w^2 \tilde{u}.$$

چون این معادله فقط شامل یک مشتق نسبت به t بوده و نسبت به w مشتقی در معادله موجود نیست. این معادله را می‌توان به عنوان یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با متغیر مستقل t و w موجود در آنرا به عنوان یک پارامتر تصور نمود. به روش جداسازی متغیرها (بخش ۱.۲) جواب عمومی به صورت $\tilde{u}(w, t) = C(w)e^{-c^2 w^2 t}$,

که در آن $C(w)$ ثابت دلخواه وابسته به پارامتر w است که برای معادله مورد نظر حاصل می‌شود. شرط اولیه (۱) ایجاب می‌کند که $(\tilde{u}(w, 0) = C(w) = \tilde{f}(w) = F(f))$ و از آنجا می‌یابیم $\tilde{u}(w, t) = \tilde{f}(w)e^{-c^2 w^2 t}$.

باتوجه به فرمولی (۷) بخش ۱۱.۱۰ می‌یابیم

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \quad (5)$$

در این فرمول می‌توان تبدیل فوریه

$$\tilde{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivw} dv$$

را جایگزین نمود و با فرض قابل جابجا بودن ترتیب انتگرال‌گیری نتیجه گرفت

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} e^{i(wx - wv)} dw \right] dv.$$

بنابراین این فرمول اویلر (۳)، بخش ۱۱.۱۰، تابع انتگرال داخلى برابر است با $e^{-c^2 w^2 t} \cos(wx - wv) + i e^{-c^2 w^2 t} \sin(wx - wv)$.

که قسمت موهومی آن یک تابع فرد نسبت به w است و بنابراین انتگرال مربوط به آن برابر صفر است^{۱۵}. و قسمت حقیقی آن یک تابع زوج بوده و هر دو حدود انتگرال دوگانه موردنظر از ۰ تا ∞ می‌باشد. بنابراین باتوجه به آن می‌توان نوشت

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_0^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} \cos(wx - wv) dw \right] dv.$$

این نتیجه با (۹)، بخش ۱۱.۶ مطابقت دارد. و منجر به فرمولهای دیگری برای (۱۱) و (۱۳) در بخش ۱۱.۶ می‌شود.

مثال ۲. حل مساله توصیف شده در مثال ۱ به کمک روش پیچشی

مساله گرما در مثال ۱ را به کمک روش پیچشی حل کنید.

حل. شروع کار که مانند گذشته است منجر به (۵) می‌شود، یعنی

۱۵- در واقع، جزء اصلی انتگرال، بخش ۱۵.۳ را بینید.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \quad (5)$$

قبول می کنیم که این موضوع به شکل (۱۳) بخش ۱۱.۱۰ می باشد، یعنی

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) \tilde{g}(w) e^{iwx} dw \quad (6)$$

که در آن

$$\tilde{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2 w^2 t}. \quad (7)$$

چون، بنا به تعریف پیش [۱۱)، ر. ک. بخش ۱۱.۱۰

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x - p) dp, \quad (8)$$

همانند مراحل فعلی و گذشته باید تبدیل فوریه معکوس \tilde{g} را از روی \tilde{g} مشخص کنیم.

برای این منظور می توان از فرمول ۹ جدول III بخش ۱۲.۱۲ استفاده نمود (این فرمولها از مثال ۲ بخش ۱۱.۱۰ حاصل شده اند).

$$F(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$$

که در آن a یک ثابت مناسب می باشد. با فرض $a = \frac{1}{4c^2 t}$ یا $c^2 t = \frac{1}{4a}$ و با استفاده از (۷) می یابیم

$$F(e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}) = \sqrt{2c^2 t} e^{-c^2 w^2 t} = \sqrt{2c^2 t} \sqrt{2\pi} \tilde{g}(w).$$

بنابراین \tilde{g} دارای تبدیل فوریه معکوس به صورت زیر می باشد

$$\frac{1}{\sqrt{2c^2 t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

با جایگزینی x با $p - x$ قراردادن آن در (۸)، می یابیم

$$u(x, t) = (f * g)(x) - \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp\left\{-\frac{(x-p)^2}{4c^2 t}\right\} dp. \quad (9)$$

جواب حاصل با (۱۱) بخش ۱۱.۶ مطابقت دارد.

مثال ۳. کاربرد تبدیل سینوسی فوریه در حل مساله گرما

مساله گرما برای یک میله نامتناهی که در فاصله ۰ تا ∞ در طول محور X قرار دارد را در صورتی حل کنید که دمای اولیه مساوی

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x < \infty)$$

و دما در ابتدای میله برابر باشد با

$$u(0, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

حل. به جای تبدیل فوریه می توان تبدیل سینوسی فوریه (ر. ک. بخش ۱۰.۱۰) استفاده نمود، چون

X از ∞ تا ∞ ادامه داده شده است. مراحل حل همانند مثال ۱ می باشد، از معادله گرما و (۹b) بخش ۱۰. ۱۰ داریم

$$F_s(u_t) = \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial t} = c^T F_s(u_{xx}) = -c^T w^T F_s(u) = -c^T w^T \tilde{u}_s(w, t).$$

در این مثال توجه کنید که $f(0) = u(0, 0) = 0$

جواب این معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول عبارت است از

$$\tilde{u}_s(w, t) = C(w)e^{-c^T w^T t}.$$

از شرط اولیه $u(x, 0) = \tilde{f}_s(w) = C(w)$ داریم $u(x, 0) = f(x)$ از این‌رو

$$\tilde{u}_s(w, t) = \tilde{f}_s(w)e^{-c^T w^T t}.$$

با تبدیل سینوسی معکوس گرفتن و جایگزین کردن

$$\tilde{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(p) \sin wp dp$$

جواب زیر برای مساله حاصل می شود

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(p) \sin wp e^{-c^T w^T t} \sin wx dp dw. \quad (10)$$

مثال ۴. معادله موج بریک بازه نیمه متناهی . جواب دالامبر

معادله موج

$$u_{tt} = c^T u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

را اطوری حل کنید که شرایط زیر حاکم باشند

$u(x, 0) = f(x)$ (تفاوت مکان اولیه مفروض)

$u_t(x, 0) = 0$ (سرعت اولیه صفر)

$u \rightarrow 0$ ، $u_x \rightarrow 0$ به ازای هر x وقتی $|x| \rightarrow \infty$

که در آن f دارای تبدیل فوریه است.

حل . با تبدیل فوریه گرفتن نسبت به x ، قرار دادن $u = \tilde{u}$ و با استفاده از (۱۰) ، بخش ۱۰. ۱۰ می‌یابیم

$$F(u_{tt}) = \tilde{u}_{tt} = c^T F(u_{xx}) = -c^T w^T \tilde{u}.$$

از این‌رو

$$\tilde{u}_{tt} + c^T w^T \tilde{u} = 0.$$

چون مشتق موجود در معادله به w وابسته نیست ، این معادله را می‌توان یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با ضریب ثابت $c^T w^T$ تصور نمود. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$u(w, t) = A(w) \cos cwt + B(w) \sin cwt .$$

از $F\{u(x, \circ)\} = \tilde{u}(w, \circ)$ ، و شرط اولیه داریم

$$\tilde{u}(w, \circ) = A(w) = \tilde{f}(w),$$

$$\tilde{u}_t(w, \circ) = c w B(w) = \circ.$$

بنابراین

$$\tilde{u}(w, t) = \tilde{f}(w) \cos cwt .$$

برای رسیدن به آن نیاز به بسط تابع کسینوس بر حسب توابع نمایی و سپس به کارگیری زیر را داریم
 $F\{f(x - a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}. \quad (11)$

که با استفاده از تعریف تبدیل فوریه و با قراردادن $p = x - a$ نتیجه $dx = dp$ ، $x = p + a$ ، $x - a = p$ می شود. لذا

$$\begin{aligned} F\{f(x - a)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-iw(p+a)} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iwa} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-iwp} dp. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{f}(w) \cos cwt = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{f}(w) [e^{icwt} + e^{-icwt}]$$

دارای تبدیل فوریه معکوس

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] \quad (12)$$

می باشد. این جواب به جواب دالامبر (۱۴) بخش ۱۱. ۴. مشهور می باشد.

هم اکنون در پایان فصل ۱۱ قرار داریم. در این فصل بامعادلات با مشتقهای جزئی بسیار مهم که دارای کاربردهای متنوع در فیزیک و مهندسی است آشنا شدیم. با پایان یافتن این فصل به انتهای بخش C ، آنالیز فوریه و معادلات با مشتقهای جزئی رسیدیم که چنین معادلاتی پایه و اساس بسیاری از پژوههای تحقیقاتی هستند.

روشهای عددی معادلات با مشتقهای جزئی در بخش‌های ۲۰. ۲۰. ۷. ۲۰. ۷. به طور مستقل

از قسمتهای دیگر در بخش E ارائه می شود.

در بخش بعدی (بخش D ، قصهای ۱۶ تا ۱۷) با آنالیز مختلط که بسیار در رشته های مهندسی با اهمیت هستند خواهیم پرداخت.

مسائل و پرسش‌های دوره‌ای برای فصل ۱۱

۱. از قوانین فیزیکی ، معادله موج یک بعدی چگونه به دست می آید؟

۲. مساله نخ مرتعش دارای چه شرایطی است؟
 ۳. توابع ویژه و فرکانسهای نخ مرتعش کدام اند؟
 ۴. جواب دالامبر مربوط به مساله نخ مرتعش چگونه حاصل می شود؟
 ۵. به چه دلیل جوابهای معادله موج به کمک سری فوریه آنقدر مورد بررسی قرار گرفته است و حال آنکه جواب حاصل از روش دالامبر که سریعتر حاصل می شود زیاد مورد توجه واقع نشده است؟
 ۶. معادله گرما چه شکلی دارد و چه شرط اضافی در مساله گرما باید در نظر گرفت؟
 ۷. اصل برهمنهش چیست و برای چه معادلاتی کاربرد دارد؟
 ۸. معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی کدام اند؟ برای هر کدام یک مثال بیاورید.
 ۹. توابع ویژه یک غشای مربعی چیست؟ درباره فرکانسها یا این چه می دانید؟
 ۱۰. توابع ویژه یک غشای مستدير کدام اند؟ چگونه فرکانسهای این توابع با نخ مرتعش اختلاف دارند؟
 ۱۱. در حل معادله موج به روش جداسازی تنها توابع مثلثاتی به دست می آید، در حالی که در جداسازی معادله گرما نیز توابع نمایی حاصل می شوند. علت این اختلاف در چیست؟
 ۱۲. برخی معادلات با مشتقهای جزئی ساده را می توان با روش‌های معادلات دیفرانسیل معمولی حل نمود. با آوردن مثال توضیح دهید.
 ۱۳. چرا توابع لزاندار و بسل در این فصل مطرح شده اند؟ در کجا این کتاب این توابع ارائه شده اند؟
 ۱۴. تابع خطأ چیست و در چه مساله ای ارائه شده است؟
 ۱۵. چرا در این فصل این قدر از سری فوریه استفاده کرده ایم و حال آنکه بسیاری از توابع در پدیده های فیزیکی متناوب نیستند؟
 - ۱۶- در حل مساله موج به چند شرط اولیه نیاز داریم؟ در حل مساله گرما چطور؟
 ۱۷. نشان دهید که تابع $u = \sin x \sinh y - 6x^2y + 1$ جوابهای معادله لاپلاس هستند.
 ۱۸. نشان دهید که تابع $u = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ جوابهای معادله لاپلاس هستند.
 ۱۹. به چه دلیل انتگرال فوریه در این فصل مطرح شده است؟
 ۲۰. در فصل ۶ معادله کمکی یک معادله جبری بود. چرا در حل معادله با مشتق جزئی به کمک روش تبدیلات به معادله دیفرانسیل معمولی می رسمیم؟
- معادلات زیر را حل کنید:
- $$u_{xy} + u_y + x + y + 1 = 0 \quad \dots \quad ۲۲$$
- $$u_{yy} + 16u = 0 \quad \dots \quad ۲۱$$
- $$u_x(0,y) = g(y), u(0,y) = f(y), u_{xx} + u = 0 \quad \dots \quad ۲۴$$
- $$u_{xx} + u_x - 2u = 10 \quad \dots \quad ۲۳$$

$$u_y(x, 0) = g(x), u(x, 0) = f(x), u_{yy} + u_y = 0. \quad 25$$

۲۶. تمامی جوابهای معادله لاپلاس دو متغیره را که به صورت $u(x, y) = F(x)G(y)$ هستند به دست آورید.

با استفاده از تبدیلات داده شده، معادلات مورد نظر را حل کنید.

$$u_{xy} = u_{xx}; v = y, z = x + y. \quad 27$$

$$yu_{xy} = xu_{xx} + u_x; v = y, z = xy. \quad 28$$

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0, v = y, z = x + y. \quad 29$$

$$u_{xx} = u_{yy}; v = y + x, z = y - x. \quad 30$$

$$u_{yy} + u_{xy} - 2u_{xx} = 0; v = x + y, z = 2y - x. \quad 31$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0; v = x, z = x - y. \quad 32$$

$$2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0; v = 2x - y, z = 2y - x. \quad 33$$

مساله ارتعاش نخی به طول π را در صورتی که $c' = \frac{T}{\rho} = 1$ ، سرعت اولیه برابر صفر وارتعاش اولیه برابر یکی از توابع زیر باشد حل کنید.

$$f(x) = -1/\sqrt{3}\sin 3x. \quad 35 \quad f(x) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x. \quad 34$$

$$f(x) = \sin^2 x. \quad 37 \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|. \quad 36$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ \frac{(\pi - x)}{2} & ; \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}. \quad 38$$

مطلوب است دمای $u(x, t)$ در یک میله به طول $L = \pi$ و $c = 1$ که سطح جانبی و حتی دوانهای آن در $x = \pi$ عایق پوش شده، و دمای اولیه $u(x, 0) = f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \sin x. \quad 40 \quad f(x) = k = 1. \quad 39$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}. \quad 42 \quad f(x) = \cos^2 x. \quad 41$$

توزیع دما در یک میله مسی به طول 5° سانتیمتر با مقطع عرضی ثابت را محاسبه کنید، در صورتی که میله کاملاً از سطح جانبی عایق پوش شده، $c' = \frac{K}{\sigma\rho} = 1/158 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ و نقاط پایانی $x = 0$ و $x = \pi$ در دمای صفر درجه سانتیگراد قرار گرفته و دمای اولیه برابر یکی از مقادیر زیر باشد

$$f(x) = \sin^2 \left(\frac{\pi x}{10} \right). \quad 45 \quad f(x) = 100 \sin \left(\frac{\pi x}{25} \right). \quad 44 \quad f(x) = \sin \left(\frac{\pi x}{50} \right). \quad 43$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 25, \\ 50 - x & ; \quad 25 < x < 50. \end{cases} . \quad 47 \quad f(x) = x(50 - x). \quad 46$$

در بخش ۱۱.۵ مشاهده کردیم که درجه حرارت (x, t) در یک میله به طول L که به طور کامل سطح جانبی و دو انتهای آن عایق پوش شده است عبارت است از

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{cn\pi}{L} \right)^2 t \right].$$

هم اکنون با فرض $L = c = 1$ ، جواب مساله را طوری بباید که دمای اولیه برابر یکی از مقادیر زیر باشد

$$f(x) = 95 \cos 2x \quad . \quad 49 \quad f(x) = 30x^2. \quad 48$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 4(\pi - x) & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases} . \quad 50$$

۵۱. فرض کنید که رویه های صفحه نازک مفروض بین $\pi \leq y \leq \pi$ ، $0 \leq x \leq \pi$ به طور کامل عایق پوش شده، لبه ها در دمای صفر قرار گرفته و دمای اولیه برابر با $f(x, y, 0) = u(x, y, 0)$ باشد. با به کار گیری روش جداسازی متغیرها، در معادله حرارت دو بعدی $u_t = c^2 \nabla^2 u$ ، نشان دهید که دمای صفحه در نقطه دلخواه (x, y) واقع در صفحه و در لحظه t از فرمول زیر به دست می آید

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

که در آن

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin mx \sin ny dx dy.$$

۵۲. دمای صفحه مربوط به مساله ۵۱ را با شرط $f(x, y) = x(\pi - x)(\pi - y)$ بباید. نشان دهید که غشاها به شرح زیر به مساحت واحد با c^2 دارای فرکانسهای مدبندی است که در زیر (تا ۴ رقم اعشار) داده شده اند. نتایج را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071: \quad 54. \quad \text{مربع: } \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\pi}} = 0.6784: \quad 53$$

$$. \quad \alpha_{12} = 5/13562 = 0.7244: \quad 54 \quad (\text{اولین صفر مثبت})$$

$$\frac{3/832}{\sqrt{8\pi}} = 0.7644: \quad 56 \quad (\text{نیم دایره})$$

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = 0.7906: \quad 57 \quad (\text{مستطیل به ابعاد ۱ و ۲})$$

۵۸. مطلوب است تغییر مکان (x, y, t) غشا مربعی واقع در ناحیه $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq x \leq 1$

با $c = 1$ ، تغییر مکان اولیه $f(x, y) = kx(1 - x^2 - y^2)$ ، و سرعت اولیه صفر .
۵۹. مطلوب است پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو دایره متعدد المراکز به شعاعهای ۲ cm و ۱۰ cm که به ترتیب در پتانسیلهای ۱۱۰ ولت و صفر ولت قرار گرفته اند .

$$60. \text{ معادله } u_{yy} + y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} = 0 \text{ را با جایگزینی } \frac{y}{x} \text{ حل کنید .}$$

خلاصه فصل ۱۱

معادلات با مشتقهای جزئی

در فصول ۱ تا ۶ مشاهده کردیم که مسائل ساده فیزیکی یک متغیره به معادلات دیفرانسیل معمولی منجر می شوند و حال آنکه پدیده های فیزیکی و مهندسی شامل دو یا چند متغیر مستقل منجر به معادلات با مشتقهای جزئی می شوند . این نوع مسائل اصولاً از پیچیدگیهای خاصی برخوردارند .

در این فصل با معادلات با مشتقهای جزئی مهم فیزیک و ریاضی به شرح زیر مواجهدیم .

$$(1) \text{ معادله موج یک بعدی (بخش‌های ۱۱.۲ و ۱۱.۴)}$$

$$(2) \text{ معادله موج دو بعدی (بخش‌های ۱۱.۷ و ۱۱.۱۰)}$$

$$(3) \text{ معادله گرمایی یک بعدی (بخش‌های ۱۱.۵ و ۱۱.۶)}$$

$$(4) \text{ معادله لاپلاس دو بعدی (بخش‌های ۱۱.۵ و ۱۱.۹)}$$

$$(5) \text{ معادله لاپلاس سه بعدی (بخش‌های ۱۱.۱۱ و ۱۱.۱۲)}$$

معادلات (۱) و (۲) هذلولوی ، معادله (۳) سهموی ، معادلات (۴) و (۵) بیضوی می باشند . (ر . ک . مجتمعه مساله مساله بخش ۱۱ . ۴) .

در عمل ، باید جواب معادلات را طوری یافت که بر یک ناحیه مفروض در یک سری شرایط اضافی مفروض ، مثل شرایط اولیه (شرایط در لحظه $t = 0$) یا شرایط کرانه ای (مقادیر جواب u یا برخی مشتقهایش بر کران ناحیه که یک منحنی C یا یک سطح S است) صدق کند . برای معادلات (۱) و (۲) دو شرط اولیه (تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه) مشخص شده است . برای معادله (۳) توزیع دمای اولیه مشخص شده است . در (۴) یا (۵) شرط کرانه ای تعیین شده و مسائل حاصل شده اند (ر . ک . بخش ۱۱ . ۵) .

مسئله دیریکله است هرگاه u بر S تعیین شده است .

$$\text{مسئله نیومن است هرگاه } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ بر } S \text{ مشخص شده باشد .}$$

مسئله آمیخته است هرگاه u بر قسمتی از S و u بر قسمتهای دیگر S مشخص شده باشد .

یک روش عمومی برای حل این قبیل مسائل روش جداسازی متغیرها یا روش ضربی است که

جوابهای حاصل از حاصل‌ضرب توابعی حاصل می‌شوند که هر کدام تنها به یک متغیر وابسته‌اند. معادله (۱) با جایگزینی (ر. ک. بخش ۱۱. ۳)

$$u(x,t) = F(s)G(t)$$

حل شده است. حل مساله به صورت فوق برای (۳) در بخش ۱۱. ۵ آمده است. با جایگزینی عبارت فوق در معادله مفروض دو معادله دیفرانسیل معمولی برای F و G حاصل می‌شوند، از این معادلات با شرایط کرانه‌ای داده شده تعداد نامتناهی جواب $F_n = G_n$ به دست می‌آید به طوری که توابع متناظر

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$$

جوابهای معادلات با مشتق جزئی می‌باشند که در شرایط کرانه‌ای مفروض صدق می‌کنند. اینها توابع ویژه مساله می‌باشند، و مقادیر ویژه متناظر فرکانس ارتعاش، مثلاً در مسائل گرما کاهش دما و همینطور برای سایر مسائل راتعین می‌کند. برای صدق کردن شرط اولیه (شرایط اولیه)، باید سری نامتناهی از u_n را در نظر بگیریم، که ضرایب آن، ضرایب فوریه توابع f و g متناظر با شرایط اولیه مفروض (بخش‌های ۱۱. ۳ و ۱۱. ۵) باشد. بدین جهت سریهای فوریه (و همینطور انگرال‌های فوریه) در اینجا از اهمیت‌های اساسی برخوردارند (ر. ک. بخش‌های ۱۱. ۳، ۱۱. ۵، ۱۱. ۶، ۱۱. ۸).

مسائل حالت پایدار آنهایی هستند که جواب به زمان t وابسته نباشد. برای اینها، معادله حرارت $\nabla^2 u = c \nabla^2 u$ به معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ (بخش ۱۱. ۵) تبدیل می‌شود.

قبل از حل یک مساله مقدار کرانه‌ای یا اولیه، اغلب معادله را به دستگاه مختصاتی می‌برند که کران ناحیه دارای معادله ساده‌تری است. در مختصات قطبی با فرض $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، معادله لاپلاس (ر. ک. بخش ۹. ۱۱) به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}. \quad (6)$$

برای مختصات کروی، بخش ۱۱. ۱۱ را ملاحظه کنید. چنانچه از روش تفکیک متغیرها برای آنها استفاده کنیم، از (۲) و (۶) (ارتعاش غشاء مستدير، بخش ۱۱. ۱۰) به معادله بسل و از (۵) (حل مساله لاپلاس برای یک کره) به معادله لزاندار (۱۲. ۱۱) می‌رسیم.

روش‌های عملگر (تبدیلات لاپلاس و تبدیلات فوریه) در حل معادلات با مشتق جزئی در نواحی نامتناهی (ر. ک. بخش‌های ۱۱. ۱۳ و ۱۱. ۱۴)، خصوصاً هرگاه ضرایب معادلات ثابت یا نهایا به یک متغیر وابسته باشد، مفید و کمک کننده می‌باشد.

D قسمت

آنالیز مختلط

فصل ۱۲ . اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط

فصل ۱۳ . انتگرالگیری مختلط

فصل ۱۴ . سریهای توانی ، سریهای تیلور ، سریهای لوران

فصل ۱۵ . انتگرالگیری به روش مانده ها

فصل ۱۶ . نگاشت همدیس

فصل ۱۷ . کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل

بسیاری از مسائل مهندسی را می توان با استفاده از روش‌های اعداد و توابع مختلط بررسی و حل نمود .

اصولاً دونوع از این گونه مسائل وجود دارند . نوع اول شامل «مسائل مقدماتی» هستند که برای حل آنها برخی آگاهی از اعداد مختلط فراگرفته شده کافی است . به عنوان مثال ، بسیاری از مسائل کاربردی مربوط به مدارهای الکتریکی و سیستمهای ارتعاش کننده مکانیکی از این نوع اند .

نوع دوم شامل مسائل پیشرفته تری می باشند که آشنایی بیشتری از نظریه توابع تحلیلی مختلط یا به اختصار ، «نظریه توابع مختلط» یا «آنالیز مختلط» و روش‌های دقیق و پرقدرتی را می طلبد . مسائل غالباً درهایت گرما ، جریان سیال ، و الکترواستاتیک از این نوع اند .

شش فصل آتی (فصلهای ۱۲ تا ۱۷) به آنالیز مختلط و کاربرد آنها اختصاص دارد . چنانچه خواهیم دید که اهمیت توابع تحلیلی مختلط در ریاضیات مهندسی ریشه در سه نتیجه اصلی زیر دارد .

- ۱ . قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی جوابهای معادله لاپلاس نسبت به دو متغیر مستقل می باشند . در نتیجه ، مسائل پتانسیل دو بعدی را می توان به کمک روش‌هایی که در ارتباط با توابع تحلیلی توسعه یافته اند ، بررسی نمود .

۲. بسیاری از انتگرالهای حقیقی و مختلط پیچیده‌ای که در کاربردها رخ می‌دهند را می‌توان به کمک روش‌های انتگرالگیری مختلط ارزیابی و محاسبه نمود.
۳. بخش وسیعی از توابع در ریاضیات مهندسی توابع تحلیلی می‌باشند و مطالعه مقادیر مختلط از متغیرهای مستقل منجر به تفہیم عمیقتر خواص این توابع می‌گردد.

فصل ۱۲

اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط

اعداد و صفحه مختلط در بخش‌های ۱۱.۱۲.۳ مورد بحث قرار گرفته‌اند. آنالیز مختلط مربوط به توابع تحلیلی در بخش ۱۲.۴ مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۱۲.۵ با معادلاتی موسوم به معادلات کوشی - ریمان مواجه هستیم. این معادلات، معادلاتی بنیادی هستند. اینها منجر به معادله لاپلاس می‌شوند. در باقیمانده بخش ۱۲ به مطالعه برخی توابع مختلط مقدماتی (تابع نمایی ، تابع مثلثاتی و نظایر آنها) می‌پردازیم. این نوع توابع به صورت حقیقی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بخش ۱۲.۹ اختصاص به نگاشتهای این نوع توابع دارد. (در فصل‌های ۱۶ و ۱۷ این مطالب ارائه شده‌اند).

پیشناز این فصل : حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی.

مراجع : ضمیمه ۱ ، قسمت D.

جواب مسائل : ضمیمه ۲.

۱۱.۱۲ اعداد مختلط . صفحه مختلط

در زمانهای گذشته ریاضیدانان با معادلاتی به صورت $-x^2 - 10x + 40 = 0$ یا $x^2 = 10x + 40$ مواجه شدند که دارای هیچ ریشه حقیقی نبودند، بررسی چگونگی حل معادلاتی که دارای ریشه‌های حقیقی نیستند سبب پیدایش اعداد مختلط^۱ گردید.
با به تعریف ، یک عدد مختلط z که زوج مرتب (x,y) از دو عدد حقیقی x و y است. برای

۱- اولین کسی که اعداد مختلط را برای این منظور به کار گرفت، ریاضیدان ایتالیایی جیرولامو کاردانو (Girolamo Cardano) (۱۵۰۱-۱۵۷۶) بود. کاردانو همان کسی است که فرمولی برای حل معادله درجه سوم ارائه داد. اصطلاح «اعداد مختلط» به وسیله ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل فردیش گاووس (ر. ک. زیرنویس بخش ۱۴) وضع شد وهم او بود که راه را برای استفاده عمومی و سیستماتیک از اعداد مختلط باز نمود.

آن می نویسیم

$$z = (x, y).$$

x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می نامند و می نویسند

$$\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y.$$

دو عدد مختلط مساوی هستند هرگاه قسمتهای حقیقی و موهومی آنها به ترتیب باهم برابر باشند.

(۱°) رایکه موهومی می نامند و چنین قرار می دهند

$$i = (0, 1).$$

(۱)

هم اکنون جمع و ضرب در اعداد مختلط را طوری تعریف می کنیم که سیستم حاصل تعمیم سیستم اعداد حقیقی باشد. به ازای دو عدد مختلط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ جمع و ضرب به ترتیب چنین تعریف می کنیم

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (2^*)$$

و

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3^*)$$

باتوجه به تعاریف فوق داریم

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

($x_1, 0$) و ($x_2, 0$) به ترتیب مانند x_1 و x_2 عمل می کنند، یعنی همانطور که گفته شد اعداد مختلط تعمیم اعداد حقیقی هستند. با توجه به این مطالب چنین می نویسیم

$$x = (x, 0).$$

از این تساوی، (۱) و (۳*) به ازای هر عدد حقیقی z داریم

$$iz = (0, 1)(y, 0) = (0, y).$$

نظر به اینکه با توجه به (۲*)، $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ ، از اینرو داریم

$$z = x + iy. \quad (4)$$

چنانچه $x = 0$ ، آنگاه iy را موهومی محسوس می نامند. همچنین از (۱) و (۳*) داریم $i^2 = -1$

$$. i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad \text{زیرا}$$

- دانشجویان آشنا با بردارها، مشاهده می کنند که این مطلب با جمع برداری مطابقت دارد و حال آنکه برای ضرب چنین معنی ای وجود ندارد.

نمایش (۴) برای اعداد مختلط در مسائل عملی بیشتر کاربرد دارد.^۳

باتوجه به این نمایش جدید برای جمع داریم [ر. ک. (۲*)]

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (2)$$

برای ضرب نتیجه از دستورالعمل خیلی ساده حاصل می شود. با ضرب کردن جمله به جمله و استفاده از $i^2 = -1$ می یابیم [ر. ک. (۳*)]

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (3)$$

این نتیجه با (۳*) مطابقت می کند.

مثال ۱. قسمتهای حقیقی، موهومی و جمع و ضرب اعداد مختلط

فرض کنید $z_1 = ۹ + ۳i$ ، $Im z_1 = ۳$ ، $Re z_1 = ۹$ ، $z_2 = ۸ - ۲i$ ، $z_1 = ۸ + ۳i$ ، $z_2 = ۸ - ۲i$ ، $Im z_2 = -۲$

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (8 - 2i) = 16 + i,$$

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(8 - 2i) = 72 + 6i + i(-16 + 24) = 76 + 10i.$$

تفريق و تقسيم به عنوان اپراتورهای معکوس جمع و ضرب تعریف می شوند. بنابراین تفاضل $Z = z_1 - z_2$ عدد مختلط می باشد به طوری که $z_1 = z + z_2$. از این و باتوجه به (۲*) داریم

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (4)$$

نسبت (۵) یک عدد مختلط Z می باشد به طوری که $z_1 = ZZ_2$. در ذیل بعد از مثال ۲ نشان می دهیم که

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy; \quad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (5*)$$

قاعده عملی برای به دست آوردن نتیجه فوق از ضرب صورت و مخرج $\frac{Z_1}{Z_2}$ در $x_2 - iy_2$ و ساده کردن حاصل می شود

$$\begin{aligned} Z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \\ &\text{و از آنجا (۵*) به دست می آید.} \end{aligned}$$

مثال ۲. تفاضل و تقسیم اعداد مختلط

به ازای $z_2 = ۸ - ۲i$ و $z_1 = ۸ + ۳i$ داریم

^۳- مهندسین برق اغلب به جای از زاستفاده می کنند و آرایه شدت جریان اختصاص می دهند.

$$z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 2i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85}i.$$

با ضرب نتیجه فوق در $-2i - 9$ و رسیدن به $3i + 8$ درستی تقسیم فوق را امتحان کنید.

ایثات (۷*): داریم $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + y_2x_1)$. بنا به تعریف برابری دو عدد مختلط، قسمتهای حقیقی را باهم و قسمتهای موهومی را نیز باهم برابر قرار می‌دهیم و می‌یابیم

$$x_1x_2 - y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2,$$

$$y_1x_2 + y_2x_1 = y_1x_2 + y_2x_1.$$

این یک دستگاه دو معادله با دو مجهول x و y می‌باشد. با فرض آنکه $z_2 \neq 0$ (از اینرو $0 \neq x_2 + y_2$) و حل این دستگاه معادلات نسبت به x و y جواب منحصر بفرد (۷*) حاصل می‌شود.

خواص جمع و ضرب اعداد مختلط همانند جمع و ضرب اعداد حقیقی می‌باشد، برای اعداد مختلط

دلخواه z_1 ، z_2 و z_3 نتایج زیر را داریم (دراینجا $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$)

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1z_2 = z_2z_1 \end{cases} \quad (\text{قوانین جابجایی})$$

$$\begin{cases} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \end{cases} \quad (\text{قوانین شرکت پذیری})$$

(۸)

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \quad (\text{قانون توزیع پذیری})$$

$$z + 0 = 0 + z = z$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

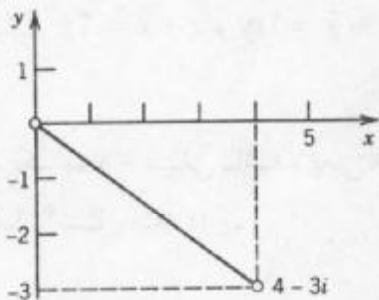
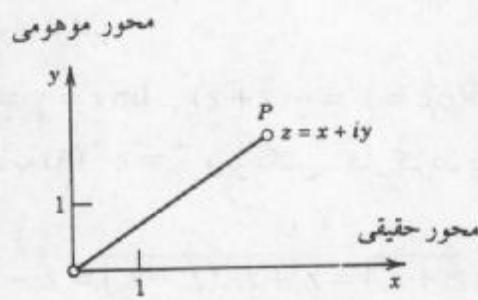
$$z \cdot 1 = z$$

صفحه مختلط

بحث فوق در اعداد فوق یک بحث جبری بود. حال به بررسی نمایش هندسی اعداد مختلط به صورت نقاط یک صفحه می‌پردازیم. این نمایش از نظر کاربردی اهمیت بسیار دارد. ایده این کار بسیار ساده و طبیعی است. دو محور مختصات عمود برهم انتخاب می‌کنیم، محور افقی X را محور حقیقی و محور قائم Y را محور موهومی می‌نامیم. طول واحد را برای هر دو محور یکسان در نظر می‌گیریم (شکل ۲۸۲). این دستگاه را دستگاه مختصات کارتزین^۳ می‌نامیم. حال عدد مختلط $z = x + iy$ را به عنوان نقطه P به مختصات x و y مشخص می‌کنیم. صفحه XY

^۳- زیرنویس ۳ در بخش ۱.۸ رالاحظه کنید.

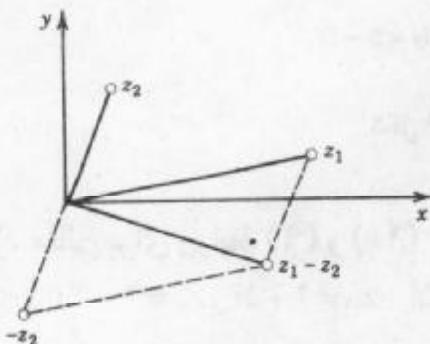
که در آن اعداد مختلط بدین طریق نمایش داده می‌شوند را صفحه مختلط می‌نامند.^۵
نمایشی از یک عدد مختلط در شکل ۲۸۳ آمده است.

شکل ۲۸۳. عدد $4 - 3i$ در صفحه مختلط

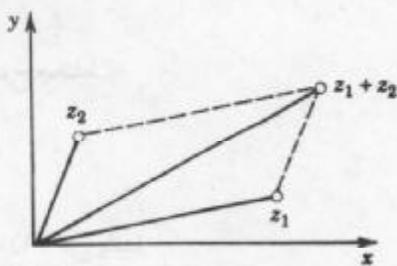
شکل ۲۸۲. صفحه مختلط

به جای آن که بگوئیم «نمایش نقطه z در صفحه مختلط» بطور خلاصه و ساده می‌گوئیم «نقطه z در صفحه مختلط».

جمع و تفریق به نحوی توسط اشکال ۲۸۴ و ۲۸۵ توصیف شده است.



شکل ۲۸۵. تفاضل اعداد مختلط



شکل ۲۸۴. جمع اعداد مختلط

مزدوج اعداد مختلط. مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت نمایش \bar{z} می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\bar{z} = x - iy.$$

از نظر هندسی \bar{z} منعکس z نسبت به محور حقیقی می‌باشد. در شکل ۲۸۶ عدد مختلط $5 + 2i$ و

- گاهی اوقات به یاد بود رُان روبرت آرگان (Jean Robert Argand ۱۷۶۸-۱۸۲۲) ریاضیدان فرانسوی، متولد در زنو Geneva و بعداً کتابدار در پاریس، «نمودار آرگان» می‌نامند. مقاله آرگان درباره صفحه مختلط در ۱۸۰۶، نه سال بعد از انتشار مقاله مشابهی از ریاضیدان نروژی، کاسپار وسل Caspar Wessel (۱۷۴۵-۱۸۱۸) که یک نقشه بردار از دانشگاه علوم دانمارک بود، منتشر شد.

مزدوج آن، یعنی $\bar{z} = 5 - 2i$ نشان داده شده اند.

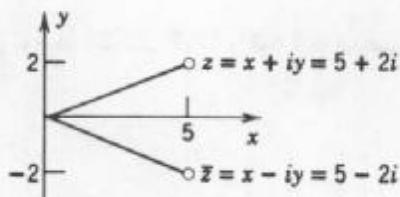
با توجه به تعریف مزدوج یک عدد مختلط داریم $\bar{z} \bar{z} = z^2 + y^2$ که یک عدد حقیقی است، این خاصیت در بسیاری اوقات مثلاً در تقسیم اعداد مختلط کاربرد دارد. به علاوه، با جمع و تفریق z و \bar{z} می‌یابیم $z - \bar{z} = 2y$ و $z + \bar{z} = 2x$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (9)$$

هرگاه z یک عدد حقیقی باشد، یعنی $x = z$ ، آنگاه بنا به (۹)، $\bar{z} = z$ و بر عکس. کار کردن با مزدوج آسان است، مثلاً داریم

$$(z_1 + z_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad (z_1 - z_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (10)$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$



شکل ۲۸۶. مزدوج مختلط

مثال ۳. مثالی برای روابط (۹) و (۱۰)

فرض کنید $z_1 = 4 + 3i$ و $z_2 = 2 + 5i$. آنگاه بنا به (۱۰) می‌یابیم

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i}[(4+3i)-(4-3i)] = \frac{3i+3i}{2i} = 3.$$

هم اکنون درستی (۱۰) بررسی می‌شود

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(4+3i)(2+5i)} = \overline{-7+26i} = -7-26i,$$

$$(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (4-3i)(2-5i) = -7-26i.$$

مسائل بخش ۱.۱۲

۱- (توانهای یکه موهومی) نشان دهید که

$$i^r = -i, i^r = -i, i^r = i, i^r = i, \dots$$

(۱۱)

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \dots$$

هرگاه هریک از اعداد مختلط زیر را به صورت $x + iy$ بنویسید.

$$\begin{array}{cccc} 3z_1 - 6z_2 \cdot 6 & \frac{z_2}{z_1} \cdot 5 & \frac{1}{z_2} \cdot 4 & (z_1 + z_2)^2 \cdot 3 \\ & & \frac{1}{z_2} \cdot 4 & z_1 z_2 \cdot 2 \\ & & \frac{338}{z_2} \cdot 9 & \frac{z_1}{(z_1 + z_2)} \cdot 8 & 0/2z_1^2 \cdot 7 \end{array}$$

مطلوب است محاسبه

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Re} \frac{(2-3i)^2}{2+3i} \cdot 12 & \operatorname{Im} \frac{3+4i}{7-i} \cdot 11 & \operatorname{Re} \frac{1}{1+i} \cdot 10 \\ \operatorname{Re} z^2, (\operatorname{Re} z)^2 \cdot 15 & (0/3 + 0/4i)^2 \cdot 14 & \operatorname{Im} \frac{z}{z} \cdot 13 \\ & (1+i)^8 \cdot 17 & \operatorname{Im} z^2, (\operatorname{Im} z)^2 \cdot 16 \end{array}$$

۱۸. نشان دهید که عدد مختلط z موهومی محض است اگر و فقط اگر $\bar{z} = -z$.

۱۹. درستی فرمولهای (۱۰) را به ازای i و $z_1 = 31 - 34i$ و $z_2 = 2 - 5i$ بررسی کنید.

۲۰. هرگاه حاصلضرب دو عدد مختلط صفر باشد، آنگاه نشان دهید که لااقل یکی از عاملهای ضرب برابر صفر است.

۲۰.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط . توانها و ریشه ها

در این بخش به بحث بیشتر در مورد اعداد مختلط و نمایش آنها در صفحه مختلط می پردازیم.

نخست به بررسی اعداد مختلط در صفحه مختصات قطبی r و θ می پردازیم. داریم

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

آنگاه شکل قطبی عدد مختلط $z = x + iy$ عبارت است از

$$(2) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

r را قدر مطلق یا مدویل z می نامند و بانماد $|z|$ نمایش می دهند. بنابراین

$$(3) \quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz}.$$

از نظر هندسی، $|z|$ فاصله z از مبدأ مختصات می باشد (ر. ک. شکل ۲۸۷). به طور مشابه،

$$|z_1 - z_2| \quad \text{فاصله بین } z_1 \text{ و } z_2 \text{ است (ر. ک. شکل ۲۸۸).}$$

θ را آرگومان z می نامند و بانماد $\arg z$ نمایش می دهند. از اینرو (ر. ک. شکل ۲۸۷)

$$(4) \quad \theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}; \quad z \neq 0.$$

از نظر هندسی، θ زاویه جهت دار بین محور X مثبت و OP در شکل ۲۸۷ می باشد. بنابراین در

محاسبات، تمام زوایا بر حسب رادیان اندازه گیری می شوندو جهت آنها عکس حرکت عقربه های ساعت فرض می شود.

برای $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ زاویه θ تعریف نمی شود (چرا $\theta = 0^\circ$ مفروض، آرگومان θ با مقادیری که اختلاف آنها از هم مضارب صحیح 2π است تعیین می گردد). مقداری از θ که در بازه $x < \theta < \pi$ قرار دارند را مقدار اصلی آرگومان $(\neq z)$ می نامند و بانماد $\text{Arg } z$ نمایش می دهند. لذا $\theta = \text{Arg } z$ در تعریف زیر صدق می کند

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi.$$

مثال ۱. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

فرض کنید $z = 1+i$ (ر. ک. شکل ۲۸۹)، آنگاه

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); |z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi, n = 0, 1, \dots$$

مقدار اصلی آرگومان برابر است با $\arg z = \frac{\pi}{4}$. مقادیر دیگر عبارت اند از $\frac{-7\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ و نظایر آن.

مثال ۲. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

فرض کنید $|z| = 6$ ، آنگاه $z = 3 + 3\sqrt{3}i$. قدرمطلق z برابر است با

$$\text{و مقدار اصلی } z \text{ برابر است با } \arg z = \frac{\pi}{3}.$$

توجه! هنگام استفاده از فرمول (۴) باید دقت کنیم که z در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد. همانطوری که می دانیم $\tan \theta$ دارای دوره تناوب π می باشد. بنابراین آرگومان z و $-z$ دارای تائزات های یکسان می باشند. به عنوان مثال، اگر $\theta_1 = \arg(-1-i)$ و $\theta_2 = \arg(1+i)$ می یابیم که

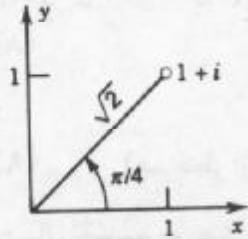
$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = 1$$

نامساوی مثلثی

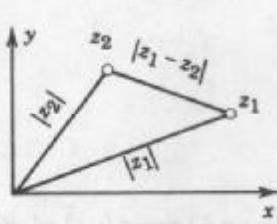
برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 نامساوی مثلثی مهم

$$(5) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

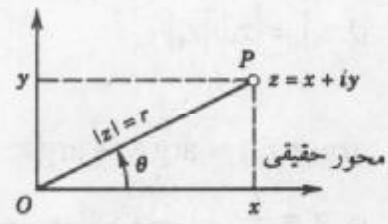
که بکرات از آن استفاده خواهیم کرد را داریم (شکل ۲۹۰). از آنجا که نقاط z_1 ، z_2 و $z_1 + z_2$ رئوس مثلثی به اضلاع $|z_1|$ ، $|z_2|$ و $|z_1 + z_2|$ را تشکیل می دهند، اندازه یک ضلع مثلث از مجموع اندازه دو ضلع دیگر آن نمی تواند بیشتر باشد این نامساوی حاصل می شود. اثبات غیر هندسی آن به خواننده واگذار می شود (مساله ۳۹).



شکل ۲۸۹ . مثال ۱



شکل ۲۸۸ . فاصله بین دو عدد مختلط



شکل ۲۸۷ . صفحه مختلط، شکل

قطبی یک عدد مختلط

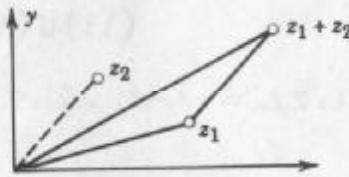
مثال ۳ . نامساوی مثلثیفرض کنید $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + 3i$ آنگاه (نمودار آن را رسم کنید!)

$$|z_1 + z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} = 4/\sqrt{17} < \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5/\sqrt{2}.$$

تعمیم نامساوی مثلثی . به استقراء می توان (۵) را به هر مجموع دلخواه به صورت زیر تعییم داد

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \quad (6)$$

یعنی قدر مطلق مجموع ناییشتراز مجموع قدر مطلقاتها می باشد .



شکل ۲۹۰ . نامساوی مثلثی

ضرب و تقسیم در مختصات قطبی

شکل قطبی اعداد مختلط در ضرب و تقسیم مفید می باشد . فرض کنید

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

حال ضرب اعداد فوق را مورد مطالعه قرار می دهیم . بنابراین (۳) ، بخش ۱۲ . ۱ حاصل ضرب عبارت است از

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

و از آنجا داریم

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (7)$$

۶ - هرگاه z_1 و z_2 بر روی خطی که مبداء می گذرد واقع باشند این مثلث تبهگون می شود .

با گرفتن قدر مطلق و آرگومان از دو طرف رابطه (۷)، نتایج مهم زیر حاصل می‌شوند
 $|z_1 z_r| = |z_1| |z_r|$ (۸)

و

$\arg(z_1 z_r) = \arg z_1 + \arg z_r \quad (۹) \quad (\text{صرف نظر از مضرب } 2\pi)$

حال تقسیم دو عدد مختلط فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم. عدد مختلط $z = \frac{z_1}{z_r}$ در تساوی $zz_r = z_1$ صدق می‌کند. از این‌رو $|zz_r| = |z| |z_r| = |z_1|$. لذا می‌یابیم $\arg(zz_r) = \arg z + \arg z_r = \arg z_1$

$\left| \frac{z_1}{z_r} \right| = \frac{|z_1|}{|z_r|} \quad (z_r \neq 0) \quad (10)$

و

$\arg \frac{z_1}{z_r} = \arg z_1 - \arg z_r \quad (11) \quad (\text{صرف نظر از مضارب } 2\pi)$

با ترکیب دو فرمول (۱۰) و (۱۱) می‌یابیم

$\frac{z_1}{z_r} = \frac{r_1}{r_r} [\cos(\theta_1 - \theta_r) + i \sin(\theta_1 - \theta_r)]. \quad (12)$

مثال ۴. مثالی برای فرمولهای (۸) تا (۱۱)

فرض کنید $z_1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ ، $z_r = 3i$ و $z_1 z_r = -6 - 6i$. آنگاه $z_1 z_r = 6\sqrt{2} e^{j\pi}$ باشد. بنابراین $\left| \frac{z_1}{z_r} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{|z_1|}{|z_r|}$ و $\arg \frac{z_1}{z_r} = \frac{\pi}{2} - \arg z_r = \frac{3\pi}{4}$.

$\arg z_1 z_r = -\frac{3\pi}{4} = \arg z_1 + \arg z_r - \pi,$

$\arg \left(\frac{z_1}{z_r} \right) = \frac{\pi}{4} = \arg z_1 - \arg z_r.$

توانهای صحیح z^n . با توجه به روابط (۷) و (۱۲) داریم

$z^r = r^r (\cos 2\theta + i \sin 2\theta),$

$z^{-r} = r^{-r} [\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)]$

و به طور کلی، برای هر عدد صحیح n داریم

$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (13)$

مثال ۵ . فرمول دموآور

به ازای $|z| = r$ ، فرمول (۱۳) به فرمول زیر معروف به فرمول دموآور^۷

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \operatorname{con} n\theta + i \sin n\theta \quad (13^*)$$

منجر می‌گردد. این فرمول برای بسط $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ مفید می‌باشد. برای مثال، اگر $n = 2$ و قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی از دو طرف رابطه (۱۳*) را نظیر به نظری با هم مساوی قرار دهیم، نتایج زیر حاصل می‌شوند

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta , \quad \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta ,$$

که با این نتایج آشنا بودیم. این مطالب نشان می‌دهند که روش‌های مختلط اغلب ساده‌تر از روش‌های متناظر فرمولهای حقیقی است.

ریشه‌ها

اگر $z = w^n$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots$ ، آنگاه هر مقدار w متناظر با یک مقدار z است. بر عکس، به ازای $z \neq 0$ مفروض، مقدار متمایز از w متناظر با آن وجود دارد. هر یک از این مقادیر را ریشه n ام z می‌نامند، و می‌نویستند

$$w = \sqrt[n]{z}. \quad (14)$$

بنابراین این رابطه چند مقداری، یعنی n مقداری است، برخلاف اعداد حقیقی که در آنجا معمولاً این تابع یک مقدار را اختیار می‌کند. مقادیر $\sqrt[n]{z}$ را به سادگی می‌توان به روش زیر مشخص نمود. با توجه به نمایش قطبی برای z و

$$w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$$

معادله $z = w^n$ به صورت زیر در می‌آید

$$w^n = R^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) = z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

با مساوی قرار دادن قدر مطلقهای دو طرف می‌یابیم

$$R = \sqrt[n]{r}, \quad R^n = r$$

که در آن ریشه مشبت و حقیقی می‌باشد و از این‌رو به طور یکتا مشخص می‌شود. همینطور با توجه به تساوی آنگومنها می‌یابیم

$$\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{و در نتیجه} \quad n\phi = \theta + 2k\pi$$

۷- آبراهام دموآور Abraham De Moivre (۱۶۶۷-۱۷۵۴)، ریاضیدان فرانسوی است که کمیتهای موهومی را وارد مثلثات کرد و درباره نظریه احتمال ریاضی تحقیقات نمود (ر. ک. بخش ۲۳).

که در آن k یک عدد صحیح می‌باشد. به ازای $1 - n, k = 0, 1, 2, \dots, n$ ، $k = 0, 1, 2, \dots, n$ مقدار متمایز برای w به دست می‌آید. مقادیر صحیح دیگر k ، مقدار تکراری را برای w به دست می‌دهد. به عنوان مثال، $\sqrt[n]{k\pi} = \sqrt[n]{2\pi}$ را نتیجه می‌دهد که متناظر با $k = 0$ می‌باشد و الی آخر. در نتیجه به $\sqrt[n]{z}$ به ازای $z \neq 0$ ، دارای n مقدار متمایز

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad (15)$$

که در آن $1 - n, k = 0, 1, 2, \dots, n$ ، می‌باشد. این n مقدار روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به مرکز مبداء مختصات واقع بوده و رئوس یک n ضلعی منتظم می‌باشند.

مقداری از $\sqrt[n]{z}$ که با درنظر گرفتن مقدار اصلی $\arg z$ و به ازای $k = 0$ از (15) به دست می‌آید به مقدار اصلی $w = \sqrt[n]{z}$ موسوم است.

مثال ۶. ریشه دوم

از (15) نتیجه می‌گیریم که $w = \sqrt{z}$ دارای دو مقدار

$$w_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (16\text{الف})$$

$$w_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right] = -w_1, \quad (16\text{ب})$$

است که نسبت به مبداء مختصات متقابن می‌باشند. به عنوان مثال، ریشه دوم $\sqrt[4]{i}$ دارای مقادیر $\sqrt[4]{i} = \pm \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$

می‌باشد. از (16) می‌توان فرمول کاربردی زیر را به دست آورد

$$\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|z|+x)} + (\operatorname{sign} y) i \sqrt{\frac{1}{2}(|z|-x)} \right] \quad (17)$$

که در آن نماد sign تابع علامت است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{sign} y = \begin{cases} 1 & y \geq 0, \\ -1 & y < 0, \end{cases}$$

و ریشه دوم اعداد حقیقی مثبت را مثبت می‌گیریم. درستی این موضوع از (16) نتیجه می‌شود. برای این منظور اتحادهای مثلثاتی زیر را درنظر می‌گیریم

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}, \quad \sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}.$$

با ضرب طرفین روابط فوق در \sqrt{r} می‌یابیم

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(r+r\cos\theta)}, \quad \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(r-r\cos\theta)}.$$

با استفاده از $x = r \cos \theta$ ، و سرانجام با انتخاب علامت $\operatorname{Im} \sqrt{z}$ داریم
 $\operatorname{sign}[(\operatorname{Re} \sqrt{z})(\operatorname{Im} \sqrt{z})] = \operatorname{sign} y$.
 (چرا؟).

مثال ۷. معادله درجه دوم مختلف

مطلوب حل معادله $z^2 - (5+i)z + 8+i = 0$
 حل. داریم

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(5+i) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(5+i)^2 - 8-i} = \frac{1}{2}(5+i) \pm \sqrt{-2 + \frac{3}{2}i} \\ &= \frac{1}{2}(5+i) \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + (-2)\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - (-2)\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2}(5+i) \pm \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right] = \begin{cases} 3+2i, \\ 2-i. \end{cases} \end{aligned}$$

دایره به شعاع واحد و با مرکز مبداء مختصات که در مثال بعد و کرار آ در بخشها و فصلهای بعدی ظاهر می شود به دایره واحد موسوم است.

مثال ۸. ریشه n ام واحد. دایره واحد

مطلوب است حل معادله $z^n = 1$.

حل. با توجه به (۱۵) داریم

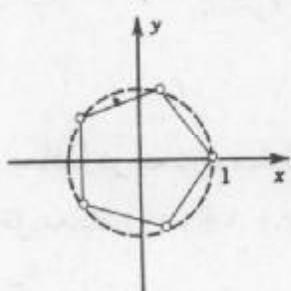
$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (18)$$

هرگاه مقدار متناظر با $k = 0$ را با (۱) نمایش دهیم، آنگاه n مقدار $\sqrt[n]{1}$ را می توان به صورت $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ نوشت. این مقادیر رتوس یک n ضلعی منتظمی را تشکیل می دهند که در دایره واحد محاط بوده و یک راس آن واقع در نقطه ۱ است. هر یک از این n مقدار را یک ریشه n ام واحد می نامند. به عنوان مثال، مقادیر $\sqrt[4]{1}$ عبارت اند از $1, \omega, \omega^2, \omega^3$ (شکل ۲۹۱) و مقادیر $\sqrt[6]{1}$ عبارت اند از $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ (شکل ۲۹۲). شکل ۲۹۳ مقادیر $\sqrt[7]{1}$ را نشان می دهد.

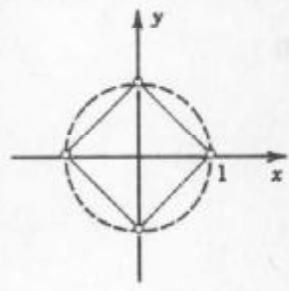
هرگاه w_1 یکی از ریشه های n ام عدد مختلف دلخواه z باشد، آنگاه

$$w_1, w_1\omega, w_1\omega^2, \dots, w_1\omega^{n-1}$$

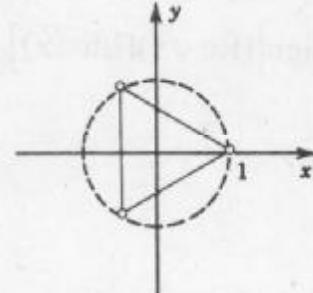
مطلوب $\sqrt[n]{z}$ می باشند، زیرا ضرب کردن w_1 در k به معنی افزایش آرگومان به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ است. متعلمهین می بایست صورت قطبی مسائل را با دقت بیشتری مورد توجه قرار دهند، زیرا در آینده اغلب با



شکل ۲۹۳.



شکل ۲۹۲.



شکل ۲۹۱.

این گونه مسائل سرو کار دارند.

مسائل بخش ۲۰.۱۲

۱. (ضرب در آ) نشان دهید که ضرب یک عدد مختلط در آ، بردار نظیر آن را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت، دوران می دهد.

مطلوب است

$$|\cos\theta + i\sin\theta| \cdot 5 \quad |z|^2, |z^2| \cdot 4 \quad |1/5 + 2i| \cdot 3 \quad |-0/2i| \cdot 2$$

$$\left| \frac{(1+i)^5}{i^7(1+4i)^4} \right| \cdot 9 \quad \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^8 \quad \left| \frac{5+7i}{7-5i} \right|^7 \quad \left| \frac{\bar{z}}{z} \right|^6$$

اعداد مختلط زیر را به صورت قطبی بتویسید.

$$6+8i \cdot 13 \quad -3 \cdot 12 \quad 1+i \cdot 11 \quad -2i, 2i \cdot 10$$

$$\frac{2+3i}{5+4i} \cdot 17 \quad \frac{3\sqrt{2}+2i}{-\sqrt{2}+\frac{2}{3}i} \cdot 16 \quad \frac{i\sqrt{2}}{4+4i} \cdot 15 \quad \frac{1+i}{1-i} \cdot 14$$

مقدار اصلی آرگون اعداد زیر را بیابید.

$$2+2i \cdot 21 \quad -\pi \cdot 20 \quad -10-i \cdot 19 \quad -6-6i \cdot 18$$

اعداد زیر را به شکل $x+iy$ نمایش دهید.

$$2\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) \cdot 23 \quad 4(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi) \cdot 22$$

$$\cos(-1/\lambda) + i \sin(-1/\lambda) \cdot 25 \quad 10(\cos 0/4 + i \sin 0/4) \cdot 24$$

تمام مقادیر ریشه های زیر را بیابید و نقطه متناظر آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید.

$$\sqrt[3]{1} \cdot 29 \quad \sqrt{-7-24i} \cdot 28 \quad \sqrt{-8i} \cdot 27 \quad \sqrt{i} \cdot 26$$

$$\sqrt[4]{1+i} \cdot 33 \quad \sqrt[4]{-1} \cdot 32 \quad \sqrt[4]{-1} \cdot 31 \quad \sqrt[4]{-7+24i} \cdot 30$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$z^2 - (5+i)z + 8 + i = 0 \quad 35 \quad z^2 + z + 1 - i = 0 \quad 34$$

$$z^2 - 3(1+2i)z^2 - 8 + 6i = 0 \quad 36$$

۳۷. درستی نامساویها را ثابت کنید. این نامساویها اغلب اوقات مفید واقع می‌شوند.

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad (19)$$

۳۸. درستی نامساوی مثلثی را برای $z_1 = 4 + 5i$ و $z_2 = -2 + 1/5i$ تحقیق کنید.

۳۹. نامساوی مثلثی را ثابت کنید.

۴۰. (تساوی متوازی الاصلی) نشان دهید که $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. این تساوی را تساوی متوازی الاصلی می‌نامند. علت این نامگذاری را بیان کنید.

۱۲. منحنی‌ها و نواحی در صفحه مختلط

در این بخش، برخی منحنیها، نواحی مهم و مفاهیم وابسته به آنها را که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز داریم، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این بحث و بررسی به ما کمک خواهد کرد تا با صفحه مختلط بیشتر آشنا شویم.

دواپر و قرصها. فاصله بین دو نقطه z و a عبارت است از $|z - a|$. بنابراین دایره C به شعاع ρ و به مرکز a (شکل ۲۹۴) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$|z - a| = \rho. \quad (1)$$

در حالت خاص، دایره واحد، یعنی دایره‌ای به شعاع یک و به مرکز $a = 0$ ، عبارت است از (شکل ۲۹۵)

$$|z| = 1.$$

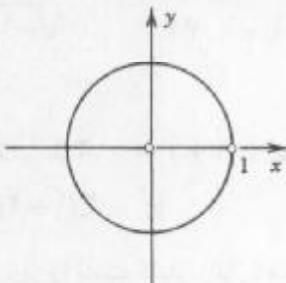
علاوه بر آن، نامساوی

$$|z - a| < \rho \quad (2)$$

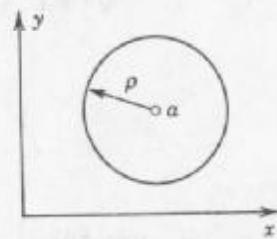
به ازای هر نقطه z در C برقرار می‌باشد، یعنی (۲) نمایش نقاط درونی C است. این چنین نواحی را قرص مستدیر، یا به طور دقیق‌تر یک قرص مستدیر بازمی‌نامند، در مقابل یک قرص مستدیر بسته به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|z - a| \leq \rho,$$

این قرص شامل نقاط درونی C و خود C می‌باشد. قرص مستدیر باز (۲) را یک همسایگی نقطه a نیز می‌نامند. واضح است که a بینهایت از این همسایگیها دارد، که هریک متناظر با مقدار مشخصی از



شکل ۲۹۵. دایره واحد



شکل ۲۹۴. دایره در صفحه مختلط

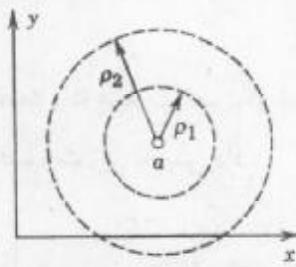
$\rho > 0$ است، و آن متعلق به همه همسایگی هایش است.
مشابهآ، نامعادله

$$|z - a| > \rho$$

نقاط بیرونی C را نمایش می دهد. به علاوه، ناحیه بین دو دایره متحده مرکز به شعاعهای $\rho_1 < \rho_2$ را می توان به صورت زیر، که در آن a مرکز دوایر است، نمایش داد

$$\rho_1 < |z - a| < \rho_2. \quad (3)$$

چنین نواحی را یک حلقه مستدیر باز یا یک طوق باز می نامند(شکل ۲۹۶).



شکل ۲۹۶. طوق در صفحه مختلط

مثال ۱. قرص مستدیر

ناحیه $|z - 3 + i| \leq 4$ را در صفحه مختلط مشخص کنید.

حل. این نامساوی برای هر مقدار z که فاصله آن از $3 - i = a$ بیشتر از ۴ نباشد، دقیقاً برقرار است. بنابراین ناحیه موردنظر قرص دایره ای بسته به شعاع ۴ و به مرکز $3 - i$ می باشد.

مثال ۲. دایره یکه و قرص یکه

هر یک از نواحی زیر را مشخص کنید.

- به طور کلی، هر مجموعه که شامل قرص باز (۲) را نیز یک همسایگی a می نامند. به عنوان مثال، قرص (۲) را اغلب یک همسایگی مستدیر باز a می نامند.

$$\text{الف. } |z| < 1 \quad \text{ب. } |z| \leq 1 \quad \text{ج. } |z| > 1$$

حل. الف. نقاط درونی دایره واحد است. این ناحیه را قرص یکه بازمی نامند.

ب. دایره واحد و نقاط درونی آن است، این ناحیه را قرص یکه بسته می نامند.

ج. نقاط بیرونی دایره واحد است.

نیم صفحات. منظور از نیم صفحه فوچانی (باز) مجموعه تمام نقاطی به صورت $x + iy = z$ است که در آن $y > 0$. مشابهًا، شرط $y < 0$ نیم صفحه تحتانی، $x > 0$ نیم صفحه راست، و $x < 0$ نیم صفحه چپ را تعریف می کنند.

مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحه مختلط

سرانجام، به تعریف مفاهیمی می پردازیم که از اهمیت کلی برخوردار می باشند و در کارهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. این مطالب به صورت مرجع نیز مفید می باشند.

اصطلاح مجموعه نقاط در صفحه مختلط به معنی هر دسته ای از تعداد متناهی یا نامتناهی نقاط می باشد. مثلاً، جوابهای یک معادله درجه دوم، نقاط روی یک خط، و نقاط داخل یک دایره مجموعه می باشند.

مجموعه S را باز گویند اگر هر نقطه S همسایگی ای داشته باشد که هر نقطه از آن متعلق به S باشد. به عنوان مثال، نقاط درونی یک دایره یا یک مربع و همین طور نقاط نیم صفحه راست $x > 0$ مجموعه باز را تشکیل می دهند.

مجموعه باز S را همیند گویند هرگاه هر دونقطه دلخواه آن را بتوان با خط شکسته ای که از تعداد متناهی پاره خط تشکیل شده است، به قسمی که تمام آنها متعلق به S باشد، به هم وصل کرد. یک مجموعه همیند باز را دامنه می نامند. ازاینرو قرص باز (۲) و طوق باز (۳) هر کدام یک دامنه می باشند. یک مربع باحذف یک قطر یک دامنه نیست، زیرا این مجموعه همیند نیست (چرا؟).

متهم مجموعه S در صفحه مختلط مجموعه تمام نقاطی از صفحه مختلط می باشد که متعلق به S نیست. مجموعه S را در صفحه مختلط بسته گویند هرگاه متهم آن باز باشد. مثلاً، نقاط داخل و روی دایره یکه یک مجموعه بسته («قرص یکه بسته» ر. ک. مثال ۲) را تشکیل می دهند، زیرا متهم آن، یعنی $|z| > 1$ باز است.

نقطه کرانه ای مجموعه S نقطه ای است که هر همسایگی آن هم شامل نقاطی است که به S متعلق هستند و هم شامل نقاطی است که به S تعلق ندارند. به عنوان مثال، نقاط کرانه ای یک طوق، نقاط واقع بر روی دو دایره کرانه ای آن طوق هستند. واضح است که هرگاه مجموعه S باز باشد، آنگاه هیچ نقطه کرانه ای به S تعلق ندارد؛ چنانچه S بسته باشد در این صورت هر نقطه کرانه ای به S

تعلق دارد.

ناحیه مجموعه‌ای است که از یک دامنه و برخی یا تمام نقاط کرانه‌ای آن دامنه تشکیل یافته است. (یادآوری می‌کنیم که برخی از مؤلفین اصطلاح «ناحیه» را برای آنچه ما دامنه می‌خوانیم [به تبعیت از اصطلاح متعارف امروزی] استفاده می‌کنند و دیگران بین این دو اصطلاح تمایزی قائل نیستند.)

تاکنون با مفاهیم اعداد مختلط و صفحه مختلط (درست شبیه شروع حساب دیفرانسیل وانتگرال، بحث درباره اعداد حقیقی و خط حقیقی) آشنا شدیم. در بخش‌های آینده به حساب دیفرانسیل مختلط خواهیم پرداخت.

مسائل بخش ۳.۱۲

مجموعه‌های زیر را مشخص نموده و آنها را رسم کنید.

$$\frac{1}{3} < |z - a| < 6.3 \quad |z + 1| > 2.2 \quad |z - 4i| = 4.1$$

$$\operatorname{Re} z \geq -1.6 \quad 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}.5 \quad -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi.4$$

$$\operatorname{Im} z^i = 2.9 \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}.8 \quad |z - 1| \leq |z + 1|.7$$

$$\left| \frac{2z - i}{-iz - 2} \right| \leq 1.12 \quad \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| = 4.11 \quad \left| \frac{z + i}{z - i} \right| = 1.10$$

۴.۱۲ حد، مشتق، تابع تحلیلی

آنالیز مختلط رابطه نزدیکی باتوابع مختلطی دارد که در برخی دامنه مشتقپذیر هستند. بنابراین در ابتدا به توابع مختلط می‌پردازیم و بعد از آن مفاهیمی چون حد و مشتق در فضای مختلط را بیان می‌کنیم. این بحث شبیه مفاهیمی است که در حساب دیفرانسیل حقیقی بیان می‌شوند.

تابع مختلط

در آغاز از حساب دیفرانسیل وانتگرال یادآور می‌شویم که یک تابع حقیقی f که بر مجموعه S از اعداد حقیقی (معمولایک بازه) تعریف شده، قاعده‌ای است که به هر x در S یک عدد حقیقی $f(x)$ نسبت می‌دهد. $(x, f(x))$ رامقدار تابع f در x می‌نامند.

حال در مجموعه اعداد مختلط، S یک مجموعه از اعداد مختلط می‌باشد. و یک تابع f تعریف شده بر S قانونی است که به هر Z در S یک عدد مختلط W نسبت دهد. W رامقدار f در Z می‌نامند.

دراین صورت می نویسیم

$$w = f(z).$$

اینجا z در S تغییر می کند و متغیر مختلط نامیده می شود. مجموعه S را دامنه تعریف f می نامند.

مثال. $w = f(z) = z' + 3z$ یک تابع مختلط می باشد که به ازای هر z تعریف شده است؛

یعنی، دامنه S تمام صفحه مختلط می باشد.

مجموعه همه مقادیر تابع f را یرد f می نامند.

w عدد مختلطی است که آن را به صورت $w = u + iv$ می نویسیم، که در آن u و v به ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی w می باشند. حال w وابسته به $y = x + iy$ است. بنابراین w تابع حقیقی از x و y می شود و همین طور v . از اینرو می توان نوشت

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

این رابطه نشان می دهد که تابع مختلط $f(z)$ با دوتابع حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ ، که هریک به دو متغیر حقیقی x و y وابسته می باشند، هم ارز است.

مثال ۱. تابع یک متغیر مختلط

هرگاه $w = f(z) = z' + 3z$ ، آنگاه u و v را طوری باید که $w = u + iv$ و مقدار w را به ازای $z = 1 + 3i$ محاسبه کنید.

$$\text{حل. } v = 2xy + 3y \text{ و } u = \operatorname{Re} f(z) = x' - y' + 3x.$$

$$f(1+3i) = (1+3i)' + 3(1+3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i.$$

این مطلب نشان می دهد که $-5 = 15$ و $15 = 15$.

مثال ۲. تابع یک متغیر مختلط

فرض کنید $\bar{z} = 2iz + 6\bar{z}$ و $w = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$ را در $i = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ باید.

حل. $f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy) = 6x - 2y + 2i(x + iy)$

۹- این مطلب یک جمله استاندارد است. در بیشتر موارد، دامنه تعریف یک مجموعه باز و همبند می باشد (طبق آنچه در بخش ۱۲.۳.۳ تعریف شد): موارد استانداری بشرط در کاربردها پیش می آید.

در نوشته های مربوط به آنالیز مختلط گاه روابطی به کار می رود که ممکن است به یک مقدار z بیش از یک مقدار w نظیر کنند، و بر حسب عادت چنین رابطه ای را تابع می نامند («تابع چند مقداری»). ما این قرارداد را نمی پذیریم بلکه فرض می کنیم تمام توابعی که به کار می بینیم روابطی تک مقداری هستند؛ یعنی، توابع درجهت مرسوم: به هر z در S تنها یک مقدار $w = f(z)$ متناظر شود. (اما، البته، چند z ممکن است با یک مقدار $w = f(z)$ متناظر شود، درست شبیه در حساب دیفرانسیل و انتگرال، (z) به مفهوم مقدار آ در Z است، اما به غلط مصطلح شده است که به آن تابع (z) ای می گویند (به جای تابع z)، بدین طریق نمادی راهم که برای متغیر مستقل به کار می برد معرفی می کنند).

$$\text{همچنین، } v(x, y) = 2x - 6y$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i.$$

حد، پیوستگی

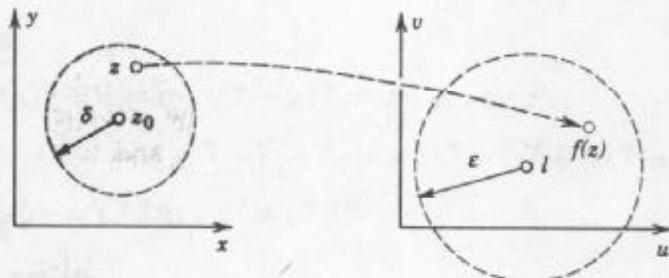
گویند تابع $f(z)$ وقتی Z به سمت z_0 میل می کند دارای حد است و می نویستند

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l. \quad (1)$$

هرگاه $f(z)$ یک همسایگی از z_0 (احتمالاً به جز در خود z_0) تعریف شده باشد و همچنین مقدار $f(z)$ به ازای هر مقداری از z که به اندازه کافی به z_0 نزدیک باشد هرقدر که بخواهیم به آن نزدیک شوند؛ یعنی، به طور جامعتر، به ازای هر عدد مثبت حقیقی ϵ بتوان یک عدد حقیقی مثبت δ پیدا کرد به طوری که به ازای تمام مقادیر $z \neq z_0$ واقع در فرسن $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم (شکل ۲۹۷)

$$|f(z) - l| < \epsilon; \quad (2)$$

یعنی، به ازای هر $z \neq z_0$ واقع در فرسن δ مقدار f در فرسن (۲) قرار گیرد.



شکل ۲۹۷. حد

به ظاهر، این تعریف شبیه تعریفی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال اعداد حقیقی داشتیم، ولی یک اختلاف بزرگی وجود دارد. در واقع در حالت حقیقی، x فقط در امتداد خط حقیقی به x میل می کرد، در اینجا، بنابر تعریف حد، z_0 می تواند از هر امتدادی در صفحه مختلط به z_0 میل کند. توجه به این مطلب در محاسبات مربوط به حد بسیار ضروری است.

چنانچه حدی وجود داشته باشد، این حد منحصر به فرد است (ر. ل. مساله ۲۸).

تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گویند هرگاه $f(z)$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (3)$$

توجه کنید که بنا به تعریف حد ازاین مطلب لازم می‌آید که $f(z)$ لااقل در یک همسایگی Z_0 معین باشد. $f(z)$ را در یک دامنه پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه از آن دامنه پیوسته باشد.

مشتق

مشتق تابع مختلط f در نقطه Z_0 را با $f'(Z_0)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(Z_0 + \Delta z) - f(Z_0)}{\Delta z} \quad (4)$$

مشروط بر آنکه ین حد موجود باشد. در این صورت تابع f را در نقطه Z_0 مشتق پذیر گوئیم. چنانچه قرار دهیم $Z = Z_0 + \Delta z$ و می‌توان نوشت

$$f'(Z_0) = \lim_{z \rightarrow Z_0} \frac{f(z) - f(Z_0)}{z - Z_0}. \quad (4')$$

حال از این تعاریف به یک نتیجه مهم می‌رسیم. به خاطر داشته باشیم که تعریف حد ایجاد می‌کند که $f(z)$ اقلاً در یک همسایگی Z_0 تعریف شده باشد و Z_0 در $(4')$ می‌تواند از هر مسیری در صفحه مختلط به Z_0 میل کند. نسبت $(4')$ همیشه به مقدار معینی میل می‌کند و تمام این مقادیر مشخص باهم مساوی می‌باشند. این مطلب در بررسیهای بعدی ما اهمیت زیادی دارد.

مثال ۳. مشتقپذیری . مشتق

تابع $f(z) = z^2$ به ازای تمام مقادیر Z مشتقپذیر بوده و دارای مشتق $f'(z) = 2z$ می‌باشد زیرا

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

قواعد مشتقپذیری توابع درست شیوه قواعد حساب دیفرانسیل حقیقی است و اثبات قضایای مربوطه کم و بیش شبیه هم هستند. مثلاً

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (f + g)' = f' + g', \quad (cf)' = cf',$$

و قواعد زنجیره‌ای و توانهای صحیح $(z^n)' = nz^{n-1}$ ، در مورد توابع مختلط نیز برقرارند. همچین قضیه ارتباط مشتقپذیری با پیوستگی تابع حقیقی، یعنی هرگاه $f(z)$ در نقطه Z_0 مشتقپذیر باشد، آنگاه f در آن نقطه پیوسته است (ر. ک. مساله ۳۰) نیز برقرار است.

مثال ۴. \bar{z} مشتقپذیر نیست.

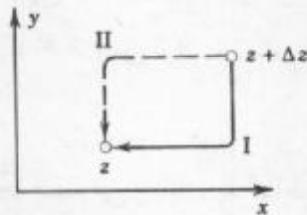
توجه به این مطلب حائز اهمیت است که توابع ساده‌زیادی وجود دارند که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارند. به عنوان مثال، تابع $f(z) = \bar{z} = x - iy$ دارای چنین خاصیتی می‌باشد. در واقع، هرگاه قرار دهیم $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ، می‌یابیم

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(\bar{z} + \Delta \bar{z}) - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (5)$$

هرگاه $\Delta y = \Delta x = 0$ ، آنگاه مقدار فوق برابر ۱ است. اگر $\Delta x = 0$ ، آنگاه نسبت فوق برابر ۱ - می شود. از اینرو (۵) از مسیر I شکل ۲۹۸ به ۱ + و از مسیر II شکل ۲۹۸ به ۱ - میل می کند. لذا بنا به تعریف، حد (۵) وقتی که $\Delta z \rightarrow 0$ در هیچ Z ی وجود ندارد.

این مثال ممکن است تعجب آور باشد که یک تابع همواره پیوسته هیچ جامشتقپذیر نباشد.

ولی این موضوع صرفاً نشان دهنده این مطلب است که مشتقپذیری یک تابع نیاز به بررسی دقیقتر دارد. ایده اثبات (میل کردن مسیرهای متمايز) اساسی است و مجدداً در بخش آتی از آن استفاده می شود.



شکل ۲۹۸ . مسیرها در (۵)

تابع تحلیلی

تابع تحلیلی توابعی هستند که در برخی دامنه ها مشتقپذیر هستند، چنین توابعی را در حساب دیفرانسیل و همگرایی مختلط به کار می گیریم. این توابع اساس کار در آنالیز مختلط می باشند. بررسی مقدماتی آنها در این بخش صورت می پذیرد.

تعريف (تحلیلی بودن)

تابع f را در دامنه D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتقپذیر باشد.

تابع f را در نقطه z_0 واقع در D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد. (ر. ک. بخش ۱۲ . ۳).

از این به بعد وقتی از تابع تحلیلی صحبت می کنیم منظور تابعی است که در دامنه ای مشتقپذیر است.

از اینرو تحلیلی بودن $f(z)$ در نقطه z_0 بدين معنا است که $f(z)$ در هر نقطه از یک همسایگی z_0 (منجمله خود z_0 زیرا، بنا به تعریف، نقطه ای از تمام همسایگی هایش می باشد) مشتق داشته باشد. انگیزه تعریف مفهوم تحلیلی بودن این واقعیت است که از نظر عملی اینکه تابعی صرفاً در یک نقطه z_0 مشتقپذیر باشد ولی در هیچ همسایگی آن نقطه مشتق نداشته باشد جالب نیست. مساله ۲۶ مثالی از این نوع می باشد.

یک اصطلاح مدون برای تحلیلی در D ، هلوویخت در D است.

مثال ۵. چند جمله ایها، توابع گویا

توانهای صحیح $1, z, z^2, \dots$ و کلیتر از آن، چند جمله ایها، یعنی توابعی به صورت

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

که در آنها c_0, c_1, \dots, c_n مقادیر ثابت مختلط هستند. در تمام صفحه مختلط تحلیلی می باشند.

نسبت دو چند جمله ای $g(z)$ و $h(z)$ ، یعنی

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

را تابع گویا می نامند. تابع f مفروض در تمام صفحه مختلط، به جز نقاطی که در معادله $h(z) = 0$ صدق می کنند، تحلیلی است؛ در اینجا فرض برآن است که عاملهای مشترک توابع g و h را حذف نموده ایم. کسرهای جزئی

$$\frac{c}{(z - z_0)^m} \quad (c \neq 0)$$

که در آن c و z_0 اعداد مختلط و m عدد صحیح مثبت می باشند، تابع گویای خاص می باشند، این کسرها بجز در z_0 در تمام صفحه مختلط تحلیلی می باشد. در جبر ثابت شده است که هر تابع گویا را می توان به صورت یک حاصل جمع از چند جمله ایها (که می تواند صفر هم باشد) و تعداد متناهی توابع کسری نوشت.

مفاهیمی که در این بخش ارائه شد، بسیار شبیه مفاهیم ارائه شده در حساب دیفرانسیل حقیقی است، مهمترین موضوع مفهوم تابع تحلیلی است. در واقع، آنالیز مختلط منحصر آبه مفهوم تابع تحلیلی می پردازد، و اگر چه بسیاری از توابع ساده غیر تحلیلی می باشند، مجموعه متعدد و عظیم توابع تحلیلی که باقی می ماند شاخه ای از ریاضیات را به وجود می آورد که از جنبه نظری زیباترین و از دیدگاه عملی مفیدترین شاخه ریاضی می باشد.

۴.۱۲ مسائل بخش

مطلوب است محاسبه $f(-4+2i)$ ، $f(-i)$ ، $f(3+i)$ که در آن $f(z)$ برابر است با

$$\frac{1}{z^3 - 3} \quad \frac{1}{1-z} \quad z^2 + 2z + 1$$

مطلوب است محاسبه قسمتهای حقیقی و موهومی هر یک از توابع زیر

$$f(z) = z^2 + 4z - 1, \quad f(z) = 2z^2 - 3z - 5, \quad f(z) = \frac{z}{1+z}$$

فرض کنید که Z در ناحیه R واقع در صفحه Z تغییر می کند. ناحیه ای را (به طور دقیق) در صفحه w بیابید که مقادیر متناظر $w = f(z)$ در آن قرار گیرد، و این دوناحیه را به طور هندسی نشان دهید.

$$f(z) = z^r, |\arg z| \leq \frac{1}{4}\pi. \quad ۹ \quad f(z) = \frac{1}{z}, \operatorname{Re} z > 0. \quad ۱۰ \quad f(z) = z^r, |z| > ۳. \quad ۱۱$$

در هر یک از مسائل زیر، آیا $f(z)$ در \mathbb{C} با فرض $|z| = ۰$ پیوسته است؟

$$\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}. \quad ۱۲$$

$$\frac{\operatorname{Re}(z^r)}{|z^r|}. \quad ۱۱$$

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}. \quad ۱۰$$

مشتق هر یک از توابع زیر را باید.

$$\frac{i}{(1-z)^r}. \quad ۱۵$$

$$\frac{z^r - ۴}{z^r + ۱}. \quad ۱۴$$

$$(z^r + i)^r. \quad ۱۳$$

$$\frac{z^r}{(z+i)^r}. \quad ۱۸$$

$$\frac{iz + ۲}{3z - 6i}. \quad ۱۷$$

$$\frac{z+i}{z-i}. \quad ۱۶$$

مشتق هر یک از توابع زیر در نقاط داده شده باید.

$$2i \text{ در } \frac{1}{z^r}. \quad ۲۱ \quad ۳ - 2i \text{ در } (z^r - i)^r. \quad ۲۰$$

$$-i \text{ در } \frac{z+i}{z-i}. \quad ۱۹$$

$$2i \text{ در } (2+iz)^r. \quad ۲۴$$

$$\frac{1+i}{z^r - 2z}. \quad ۲۳$$

$$-i \text{ در } z^r - 2z. \quad ۲۲$$

۲۵. نشان دهید که $f(z) = \operatorname{Re} z$ در هیچ جا مشتقپذیر نیست.

۲۶. نشان دهید که $|z| = ۰$ فقط در $f(z) =$ مشتقپذیر است؛ از این‌رو در هیچ جا تحلیلی نیست.

راهنمایی. از رابطه $|z + \Delta z|^r = (z + \Delta z)(\bar{z} + \bar{\Delta z})$ استفاده کنید.

۲۷. ثابت کنید که (۱) با دو رابطه زیر معادل است:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$$

۲۸. هرگاه $f(z)$ موجود باشد، آنگاه نشان دهید که این حد منحصر به فرد است.

۲۹- هرگاه z_1, z_2, \dots اعداد مختلط باشند به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ و همچنین $f(z)$ در a پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a).$$

۳۰. هرگاه $f(z)$ در \mathbb{C} مشتقپذیر باشد، آنگاه نشان دهید که $f(z)$ در \mathbb{C} پیوسته است.

۱۲.۵ معادلات کوشی - ریمان

در این بخش کوشش می‌کنیم معیار یا آزمون جالبی برای تحلیلی بودن تابع مختلط

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

بیاییم. اگر بخواهیم به طور غیر دقیق صحبت کنیم، تابع f در دامنه D تحلیلی است اگر و فقط اگر

مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در سراسر D در دو معادله زیر صدق کنند

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (1)$$

در اینجا $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ (و مشابه آن برای v) نمادهایی هستند که برای مشتقان جزئی بکار گرفته می‌شوند. صورت دقیق مطالب فوق در قضایای ۱ و ۲ به شرح زیر ارائه می‌شوند. معادلات (۱) را

معادلات کوشی - ریمان می‌نامند. این معادلات از معادلات بسیار مهم این فصل هستند.

مثال: $f(z) = z' = x' - y' + 2ixy$ به ازای هر z تحلیلی است، و $y' - x' = 2xy$

در (۱) صدق می‌کنند؛ یعنی $v_y = 2x = u_x$ و همینطور $v_x = -2y = -u_y$. مثالهای بیشتری متعاقباً ارائه خواهند شد.

قضیه ۱ (معادلات کوشی - ریمان)

فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در یک همسایگی نقطه $z = x + iy$ تعریف شده و پیوسته باشد و در خود z مشتقپذیر باشد، آنگاه مشتقان جزئی مرتبه اول u و v در آن نقطه وجود دارد و در معادلات کوشی - ریمان (۱) صدق می‌کنند.

بنابراین هر گاه $f(z)$ در یک دامنه D تحلیلی باشد، مشتقان جزئی مزبور وجود داشته و در تمام نقاط D در (۱) صدق می‌کنند.

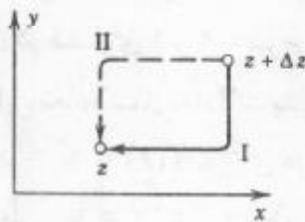
اثبات. بنابراین هر گاه $f'(z)$ موجود می‌باشد. طبق تعریف مشتق مقدار (z) f' برابر است با

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (2)$$

ایده اثبات بسیار آسان می‌باشد. بنابراین حد در صفحه مختلف (ر. ک. بخش ۱۲ . ۴) می‌توان Δz را از هر مسیر دلخواهی واقع در یک همسایگی z به سمت صفر میل داد. از این رو می‌توان دو مسیر I و II را در شکل ۲۹۹ انتخاب نمود و نتایج یکسان به دست آورد. با مقایسه قسمتهای حقیقی، اولین معادله کوشی - ریمان و با مقایسه قسمتهای موهومی، معادله دیگر در (۱) به دست می‌آید. جزئیات

۱۰- آگوستین لوئیس - کوشی Augustion - Louis Cauchy (ر. ک. بخش ۲ . ۶) و ریاضیدانان آلمانی، برنهارد ریمان Bernhard Riemann (۱۸۲۶ - ۱۸۶۶) و کارل وایراشتراس Karl Weierstrass (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷) همچنین ر. ک. بخش ۱۴ . ۶) که بنیانگذار آنالیز مختلف می‌باشند. ریمان تزدکرای خود (در سال ۱۸۵۱) زیرنظر گاووس (ر. ک. بخش ۴ . ۵) در Gottingen گذراند. او از سال ۱۸۵۴ تا زمان مرگش، که تنها ۳۹ سال داشت به امر تدریس در آنجا اشتغال داشت. او انتگرال را در کلاس درس خود در ارتباط با کارش روی سری فوريه معرفی کرد. او روش‌های جدید در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی ایجاد نمود و همکاریهای اساسی در تئوری اعداد و فیزیک ریاضی داشته است. او همچنین هندسه ریمانی را که پایه ریاضی نظری نسبیت اینشتن است توسعه بخشید. آثار وی انگیزه ایده‌های زیادی در ریاضیات نوین (خصوصاً، در توبولوژی و آنالیز تابعی) شد. برای اطلاع بیشتر به مرجع زیر را مراجعه کنید.

نکنیکی به قرار زیر است.



شکل ۲۹۹. مسیرها در (۲)

می توان نوشت $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. با توجه به آن (۲) به صورت زیر در می آید

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (3)$$

با انتخاب مسیر I در شکل ۲۹۹ نخست فرض می کنیم $\Delta y \rightarrow 0$ و سپس $\Delta x \rightarrow 0$. بعد از صفر شدن Δy داریم $\Delta z = \Delta x$ ، آنگاه (۳) ، هرگاه دو جمله را برحسب u و دو جمله دیگر را برحسب v بنویسیم، چنین می شود

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

چون $(z')'$ موجود می باشد، دو حد حقیقی اخیر وجود دارند. بنابراین مشتق $(z')'$ از $f(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت و بر حسب x می باشد. بنابراین مشتق $(z')'$ از $f(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$f'(z) = u_x + iv_x. \quad (4)$$

مشابهآ، هرگاه مسیر II در شکل ۲۹۹ را انتخاب کنیم. نخست فرض کنیم $\Delta x \rightarrow 0$ و سپس $\Delta y \rightarrow 0$. وقتی Δx صفر شود، داریم $\Delta z = i\Delta y$ ، و از (۳) می پاییم

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}.$$

چون $(z')'$ موجود است، حد های طرف راست موجود بوده و مشتقهای جزئی u و v بر حسب y می باشد، با توجه به اینکه $i = -\frac{1}{i}$ داریم

$$f'(z) = -iu_y + v_y. \quad (5)$$

بنابراین وجود مشتق $(z')'$ وجود چهار مشتق جزئی در (۴) و (۵) را نتیجه می دهد. بامساوی قراردادن قسمتهای حقیقی (۴) و (۵) باهم اولین معادله کوشی-ریمان (۱) به دست می آید. و بامساوی قراردادن

قسمتهاي موهمي آنها تساوي دیگر حاصل می شود. اين اثباتها برای قسمت اول قضيه و توجه به تعريف تحليلي بودن قسمت دوم را نتيجه می دهد.

چنانچه خواهيم دید فرمولهای (۴) و (۵) فرمولهای عملی برای محاسبه مشتقات می باشند.

مثال ۱. معادلات کوشی - ریمان

تابع با ضابطه $z = f(z)$ به ازاي تمام مقادير z تحليلي است. به آسانی نتيجه می شود که اين تابع در معادلات کوشی - ریمان صدق می کنند.

برای $f(z) = \bar{z} = x - iy$ داریم $x = u$ و $y = v$. مشاهده می کنیم که معادله دوم کوشی - ریمان برقرار است، يعني $u_y = -v_x = 0$ اما معادله اول برقرار نیست. زیرا $u_x = 1 \neq v_y = -1$ در نتيجه $\bar{z} = f(z)$ تحليلي نیست.

تحت شرایطی معادلات کوشی - ریمان بنیادي می باشند زیرا آنها نه تنها برای تحليلي بودن يك تابع لازم بلکه تحت شرایطی کافی نیز می باشند. در ارتباط با آن قضيه زیرا داریم.

قضيه ۲ (معادلات کوشی - ریمان)

هرگاه دوتابع پيوسته حقيقی $(x,y)u$ و $(x,y)v$ از دو متغير حقيقی x و y داراي مشتقات جزئی مرتبه اول پيوسته ای باشند که در دامنه ای مثل D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند، آنگاه تابع مختلط $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در D تحليلي است.

اثبات شبیه اثبات قضیه ۱ می باشد و ما از اثبات آن صرفنظر می کنیم (ر. ک. ضمیمه ۴).

قضایای ۱ و ۲ در عمل از اهمیت زیادی برخوردار می باشند زیرا به کمک معادلات کوشی - ریمان می تواند دریافت که تابع مختلط تحليلي است یا نه.

مثال ۲. معادلات کوشی - ریمان

آیا $z = f(z)$ تحليلي است؟

حل. داریم $x' = u$ و $y' = v$ و ازانجا

$$u_x = 3x' - 3y' , \quad v_y = 3x' - 3y'$$

$$u_y = -6xy , \quad v_x = 6xy.$$

مشاهده می کنیم که معادلات کوشی - ریمان به ازاي هر z برقرار است. لذا بنا به قضیه ۲، به ازاي تمام مقادير z تحليلي است.

مثال ۳. تعیین تابع تحليلي با قسمت حقيقی مفروض

در اينجا به نوع ديگري از مسائل می پردازيم که با استفاده از معادلات کوشی - ریمان حل می شوند.

تابع تحليلي f را چنان بيايد که قسمت حقيقی آن $x' - y' = u$ باشد.

حل. بنا به اولين معادله کوشی - ریمان داریم

$$u_x = 2x - 1 = v_y.$$

حال با انتگرالگیری نسبت به y می‌یابیم

$$v = 2xy - y + k(x).$$

نظر به اینکه انتگرالگیری نسبت به y است، عدد ثابت می‌تواند حداً کثر تابعی از x باشد. (برای اطمینان اگر از v_y را محاسبه کنید به همان نتیجه از انتگرالگیری می‌رسید.) از v و معادله دوم کوشی - ریمان داریم

$$u_y = -v_x = -2y + \frac{dk}{dx}.$$

از طرفی با توجه به $x' - y' - u = x^r - y^r$ داریم $u_y = -2y$. با مقایسه، می‌یابیم $\frac{dk}{dx} = 0$ ، بنابراین عددی ثابت می‌باشد که باید حقیقی باشد (چرا؟). در نتیجه داریم

$$f(z) = u + iv = x^r - y^r - x + i(2xy - y + k).$$

این مطلب را می‌توان بر حسب z بیان نمود؛ یعنی،

مثال ۴. تابع تحلیلی با قدر مطلق ثابت، تابعی است ثابت.

معادلات کوشی - ریمان نیز در به دست آوردن خواص عمومی توابع تحلیلی به ما کمک می‌کند.

به عنوان مثال، نشان دهید که هرگاه $f(z)$ در دامنه D تحلیلی و در D ،

ثابت $= k = |f(z)|$ باشد، آنگاه $f(z)$ در D ثابت است.

حل. با توجه به فرض داریم $k^r + v^r = |f(z)|$ با مشتقگیری می‌یابیم

$$uu_x + vv_x = 0, uu_y + vv_y = 0.$$

حال با به کار گیری $v_x = -u$ در معادله اول و $v_y = u$ در معادله دوم، داریم

$$(a) uu_x - vu_y = 0, (b) uu_y + vu_x = 0. \quad (6)$$

با ضرب نمودن طرفین روابط (6a) در u و (6b) در v و با جمع نمودن دو رابطه حاصل عبارت uv_y

حذف می‌گردد. مشابهآ، برای حذف u ، روابط (6a) را در $-v$ و (6b) را در u ضرب نموده و روابط

حاصل را با هم جمع کرده، می‌یابیم

$$(u^r + v^r)u_x = 0, (u^r + v^r)u_y = 0.$$

هرگاه $u^r + v^r = 0$ ، آنگاه $u = v = 0$ بنا بر این $f = 0$. هرگاه $u^r + v^r \neq 0$ ، آنگا

$u_x = u_y = 0$ ، هم اکنون با به معادلات کوشی - ریمان داریم $v_x = v_y = 0$. با توجه به نتایج

حاصل می‌یابیم ثابت $= u$ و ثابت $= v$ ، در نتیجه f ثابت است.

یادآور می‌شویم که هرگاه صورت قطبی $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را به کار ببریم و فرض

کنیم $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ، آنگاه معادلات کوشی - ریمان به صورت زیر در می‌آیند

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta , \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \quad (r > 0) . \quad (7)$$

معادله لاپلاس - توابع همساز

یکی از دلایل اصلی بررسی آنالیز مختلط در ریاضیات مهندسی به این دلیل است که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی در معادله لاپلاس صدق می نمایند. این معادله از معادلات مهم فیزیکی بوده و در نیروی جاذبه ، الکترواستاتیک ، جریان سیال ، معادله گرمایش و نظایر آن کاربرد دارد(ر.ک. فصلهای ۱۱ و ۱۷).

قضیه ۳ (معادله لاپلاس)

فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد، آنگاه u و v در D ، به ترتیب ، در معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (9)$$

صدق کرده و دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D می باشد.

اثبات. با مشتفگیری از طرفین $v_y = u_x$ نسبت به x و از $v_x = -u_y$ نسبت y می یابیم

$$u_{xx} = v_{yx} , \quad u_{yy} = -v_{xy} . \quad (10)$$

بعداً ثابت خواهیم کرد (در بخش ۱۳ . ۶) که مشتق تابع تحلیلی خود تحلیلی است. این مطلب ایجاب می کند که u و v داری مشتقات جزئی مرتبه از هر مرتبه باشند. علی الخصوص مشتقات دوم مختلط این توابع باهم برابرند، یعنی

$$v_{yx} = v_{xy} .$$

از جمع طرفین روابط (۱۰) رابطه (۸) به دست می آید. بطور مشابه، رابطه (۹) با مشتفگیری از $v_y = u_x$ نسبت به y و از $v_x = -u_y$ نسبت به x و تفریق نتایج حاصل از همدیگر، با استفاده از تساوی $u_{xy} = u_{yx}$ به دست می آید.

جوابهایی از معادله لاپلاس را که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشند، توابع همساز، و نظریه جوابهای معادله لاپلاس را نظریه پتانسیل می نامند(ر.ک. بخش ۱۱ . ۱۱). بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همساز می باشند.

چنانچه دوتابع همساز $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در یک دامنه D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند، یعنی u و v قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی f در D باشند، آنگاه v را تابع همساز

مزدوج تابع u در D نامند (البته، اصطلاح «مزدوج» در تعریف مزدوج مختلف عدد مختلف بکار گرفته شده تفاوت دارد).

مزدوج یک تابع همساز را می‌توان از معادلات کوشی - ریمان به دست آورد و چگونگی انجام این کار را با ذکر یک مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۵. تابع همساز مزدوج

نشان دهید که $u = x^r - y^r - y$ در تمام صفحه مختلف همساز است و تابع همساز مزدوج v را از u باید.

با محاسبه مستقیم داریم $\nabla^r u = 0$. از طرفی $u_y = -2y - 1$ و $u_x = 2x$. بنابراین مزدوج v از این باید در معادلات زیر صدق کند

$$v_y = u_x = 2x, \quad v_x = -u_y = 2y + 1.$$

با انتگرالگیری از معادله اول نسبت به y و مشتقگیری از نتیجه حاصل نسبت به x ، می‌یابیم

$$v = 2xy + h(x), \quad v_x = 2y + \frac{dh}{dx}.$$

با مقایسه مشاهده می‌کنیم که $\frac{dh}{dx} = 1$. این مطلب نتیجه می‌دهد که $h(x) = x + c$. از این رو $v = 2xy + x + c$ (که در آن c عدد حقیقی دلخواه می‌باشد) تابع همساز مزدوج u مفروض است. تابع تحلیلی متناظر به صورت زیر می‌باشد

$$f(z) = u + iv = x^r - y^r - y + i(2xy + x + c) = z^r + iz + ic.$$

آیا کار انجام شده شبیه کاری است که در مثال ۳ ارائه شده است؟ مطلب را توضیح دهید. معادلات کوشی - ریمان مهمترین معادلات در این فصل می‌باشند. رابطه آنها با معادله لاپلاس جایگاه ویژه‌ای را در مهندسی و کاربردهای فیزیکی که در بخش ۱۷ به آن می‌پردازیم، برای این معادلات باز می‌کند.

مسائل بخش ۵.۱۲

آیا توابع زیر تحلیلی می‌باشند؟ [۱) یا (۷) را به کار برد].

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y). \quad ۳ \quad f(z) = \operatorname{Re}(z^r). \quad ۲ \quad f(z) = z^k. \quad ۱$$

$$f(z) = z - \bar{z}. \quad ۶ \quad f(z) = \frac{1}{1-z}. \quad ۵ \quad f(z) = \frac{i}{z^r}. \quad ۴$$

$$f(z) = \operatorname{Arg} z. \quad ۹ \quad f(z) = \frac{1}{1-z^r}. \quad ۸ \quad f(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z. \quad ۷$$

$$f(z) = e^x(\sin y - i \cos y). \quad ۱۲ \quad f(z) = z^r - \bar{z}^r. \quad ۱۱ \quad f(z) = z + \frac{1}{z}. \quad ۱۰$$

آیا توابع زیر همساز هستند؟ اگرچنان است، تابع تحلیلی متناظر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ برای توابع همساز داده شده را باید.

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} . ۱۵$$

$$v = xy . ۱۴$$

$$u = xy . ۱۳$$

$$u = \sin x \cosh y . ۱۸$$

$$u = x^2 - 3xy^2 . ۱۷$$

$$v = \frac{1}{x^2 + y^2} . ۱۶$$

$$v = (x^2 - y^2)^2 . ۲۱$$

$$v = i \ln|z| . ۲۰$$

$$u = e^x \cos 2y . ۱۹$$

اعداد a, b, c را طوری باید که توابع داده شده زیر همساز باشند و همساز مزدوج آنها را باید.

$$u = \sin x \cosh cy . ۲۴$$

$$u = \cos bx \cosh y . ۲۳$$

$$u = c^{yx} \cos ay . ۲۲$$

۲۵. هرگاه v تابع همساز مزدوج تابع همساز u باشد، آنگاه نشان دهید که u تابع همساز مزدوج v است.

۲۶. نشان دهید که علاوه بر روابط (۴) و (۵) روابط زیر نیز برقرار هستند

$$f'(z) = u_x - iu_y , f'(z) = v_y + iv_x . \quad (۱۱)$$

۲۷. فرمولهای (۴)، (۵)، و (۱۱) کاربردهای متنوع دارند. درستی این مطلب را با محاسبه (z') به کمک یکی از فرمولهای فوق نشان دهید.

۲۸. نشان دهید که هرگاه $f(z)$ تحلیلی و $\operatorname{Re} f(z)$ ثابت باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

۲۹. (مشتق متعدد با صفر) با استفاده از فرمول (۴)، نشان دهید که یک تابع تحلیلی، که مشتق آن متعدد با صفر است، تابعی ثابت می باشد.

۳۰. معادلات کوشی - ریمان را در مختصات قطبی (۷) از (۱) به دست آورید.

۱۲. تابع نمایی

در باقیمانده این بخش به مهمترین توابع مقدماتی مختلط، یعنی توابع نمایی، مثلثاتی، لگاریتم، و نظایر آن می پردازیم. رفتار این توابع به ازای $x = z$ درست همانند رفتارشان برای توابع حقیقی است. این توابع دارای کاربردهای متنوع بوده و متعلمهین باید با دقت بیشتری به بررسی آنها پردازنند.

مطلوب این بخش را با تابع نمایی e^z که به صورت $\exp z$ نوشته می شود شروع می کنیم.

e^z یکی از مهمترین توابع تحلیلی است. تعریف e^z بر حسب تابع حقیقی $\cos y, \sin y, e^x$ و به صورت زیر بیان می شود

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) . \quad (۱)$$

برای تابع نمایی e^z داریم^{۱۱}

الف) اگر $x = z$ ، آنگاه رفتار e^z مانند رفتار e^x است.

ب) e^z تابعی قائم ، یا به عبارتی دیگر تابع تحلیلی به ازای تمام مقادیر z است.

ج) مشابه حساب و دیفرانسیل حقیقی ، مشتق برابر خودش است ، یعنی

$$(e^z)' = e^z. \quad (2)$$

در واقع با توجه به تعریف e^z و فرمول (۲) بخش ۱۲.۵. به ازای هر z داریم

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x + i(e^x \sin y)_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

برخی خواص دیگر e^z دارای خواص جالب دیگری نیز می‌باشد. نخست به ازای هر دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ نشان می‌دهیم که

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \quad (3)$$

در واقع ، بنا به (۱) داریم

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(cos y_1 + isin y_1)e^{x_2}(cos y_2 + isin y_2),$$

و از آنجا

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[cos(y_1+y_2) + isin(y_1+y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

به ازای $x = z_2 - iy$ داریم

$$e^z = e^x e^{iy}. \quad (4)$$

به علاوه ، به ازای $y = iz$ می‌یابیم

$$e^{iy} = cos y + isin y. \quad (5)$$

این فرمول به فرمول اویلر موسوم است. با توجه به نتیجه حاصل ، صورت قطبی عدد مختلط $z = r(cos \theta + isin \theta)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$z = re^{i\theta}. \quad (6)$$

از طرفی با توجه به (۵) می‌یابیم

$$|e^{iy}| = |cos y + isin y| = \sqrt{cos^2 y + sin^2 y} = 1. \quad (7)$$

یعنی ، تابع نمایی به ازای نمایی موهومی محض ، قدر مطلقی برابر یک دارد. این نتیجه را متعلم باید همواره به خاطر داشته باشد. با توجه به (۷) و (۱) می‌یابیم

۱۱- این تعریف به طور نسبی از تو صیف ساده‌ای حاصل می‌شود. همچنین e^z را می‌توان با سری آشنازی $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ با تعریف z به جای x تعریف کرد، اما برای تبلیغ به این هدف نخست باید سریهای مختلط بررسی شوند. که این ارتباط در بخش ۱۴.۴ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

مثال ۱. توصیف برخی خواص تابع نمایی

محاسبه مقادیر از روی (۱) بدون اشکال صورت می‌پذیرد. مثلاً

$$e^{1/4 - 0/\pi i} = e^{1/4} (\cos 0/6 - i \sin 0/6) = 4/055(0/825 - 0/565i) = 3/347 - 2/290i$$

$$|e^{1/4 - 0/\pi i}| = e^{1/4} = 4/055, \quad \operatorname{Arg} e^{1/4 - 0/\pi i} = -0/6.$$

نظر به اینکه $\sin 2\pi = 0$ و $\cos 2\pi = 1$ ، با توجه (۵) داریم

$$e^{\pi i} = 1. \quad (9)$$

به علاوه ، با استفاده (۱) ، (۵) و یا (۶) می‌یابیم

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{-\frac{\pi i}{4}} = -i, \quad e^{-\pi i} = 1. \quad (10)$$

برای توصیف (۳) ، با ضرب دو عبارت

$$e^{r+i} = e^r (\cos 1 + i \sin 1), \quad e^{r-i} = e^r (\cos 1 - i \sin 1)$$

می‌یابیم

$$e^r e^i (\cos r 1 + \sin r 1) = e^r = e^{(r+i)+(r-i)}.$$

نهایتاً از $0 \neq e^x$ ، به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ داریم

$$e^z \neq 0.$$

تابع e^z یک تابع تمام است که در هیچ جا صفر نیست. e^z تابعی متناوب با دوره $2\pi i$ است. در

واقع به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ داریم

$$e^{z+r\pi i} = e^z$$

که این خواص اساسی از (۱) و متناوب بودن $\cos y$ و $\sin y$ نتیجه می‌شود [این مطلب همچنین از (۳)

و (۹) نیز حاصل می‌شود]. از این رو $e^z = w$ تمام مقادیر خود را در نوار افقی به عرض 2π (شکل

(۳۰۰)

$$-\pi < y \leq \pi$$

اختیار می‌کند. این نوار نامتناهی را ناحیه بنیادی e^z می‌نامند.

مثال ۲. جوابهای یک معادله

کلیه جوابهای معادله زیر را باید.

$$e^z = 3 + 4i.$$

حل. $e^x = 5$. $|e^z| = e^x = 5$. در نتیجه $x = \ln 5 = 1/609$ قسمت حقیقی همه جوابها است. از

می یابیم

$$e^x \cos y = 3, e^x \sin y = 4, \cos y = 0/6, \sin y = 0/8, y = 0/927.$$

$$\therefore z = 1/609 + 0/927i \pm 2n\pi i; n = 0, 1, 2, \dots$$

بنابراین معادله $3 + 4i = e^z$ به علت متناوب بودن تابع e^z دارای بینهایت جواب به صورت فوق است. همه این جوابها بر روی خط $x = 1/609$ به فاصله 2π از یکدیگر قرار دارند.

خلاصه. توجه متعلمین را به این نکته جلب می کنیم که بسیاری از خواص $e^z = \exp z$ بجز خاصیت متناوب بودن با دوره تناوب $2\pi i$ همانند تابع حقیقی e^x است.

مسائل بخش ۶.۱۲

۱. با استفاده از معادلات کوشی - ریمان نشان دهید که e^z به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است.

e^z را در هریک از موارد زیر به صورت $|e^z| = u + iv$ بنویسید و در هر حالت $|e^z|$ را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{2} - \frac{1}{2}i \cdot 5 & 2 + 5\pi i \cdot 4 & 1+i \cdot 3 & 3 + \pi i \cdot 2 \\ -\frac{9\pi i}{2} \cdot 9 & -1+1/4i \cdot 8 & (1+i)\pi \cdot 7 & \frac{\sqrt{\pi}i}{2} \cdot 6 \end{array}$$

قسمتهای حقیقی و موهومی هریک از توابع نمایی زیر را محاسبه کنید.

$$e^{-rz}.13 \quad e^{-\pi z}.12 \quad e^{z^r}.11 \quad e^{-z^r}.10$$

هریک از اعداد مختلط زیر را به صورت قطبی (۶) بنویسید.

$$3 + 4i \cdot 17 \quad \sqrt{z}.16 \quad \sqrt{i}, \sqrt{-i}.15 \quad 1+i \cdot 14$$

مطلوب است محاسبه تمام مقادیر z که به ازای آنها

$$\text{Re } e^{rz} = 0.21 \quad e^z = \overline{e^z}.20 \quad |e^{-z}| < 1.19 \quad 18. e^z \text{ حقیقی باشد}$$

تمام جوابهای معادلات زیر را باید و برخی از آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید.

$$e^z = 0.25 \quad e^z = -3 + 4i \cdot 24 \quad e^z = -2 \cdot 23 \quad e^{rz} = 3 \cdot 22$$

۲۶. نشان دهید که تابع $u = e^{xy} \cos\left(\frac{x'}{2} - \frac{y'}{2}\right)$ همساز است و همساز مزدوج آن را بیابید.

۲۷. تمام مقادیر k را طوری بیابید که به ازای آنها تابع $f(z) = e^x (\cos ky + i \sin ky)$ تحلیلی باشد.

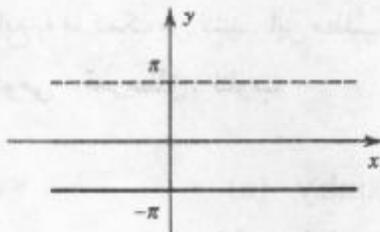
۲۸. نشان دهید که $f(z) = e^{\bar{z}}$ در هیچ جا تحلیلی نیست.

۲۹. جالب است بدانیم که $f'(z) = f(z)$ به طور یکتا با دو خاصیت e^x و $f(x + i0) = f(x)$ است.

مشخص می شود، که در آن f تابعی تام فرض شده است. درستی این مطلب را ثابت کنید. راهنمایی.

فرض کنید g تام با دو خاصیت مذکور باشد و نشان دهد که $\frac{g}{f} = 0$.

۳۰. تنها با استفاده از معادلات کوشی - ریمان، قضیه مورد نظر در مساله ۲۹ را اثبات کنید.



شکل ۳۰. ناحیه بنیادی تابع نمایی e^z در صفحه Z

۷.۱۲ توابع مثلثاتی، توابع هیپربولیک

درست مانند e^x که از تعمیم e^z به مختلط به دست می آید، توابع مثلثاتی مختلط نیز با بسط توابع مثلثاتی حقیقی حاصل می شوند. برای تفهیم این مطلب، با استفاده از فرمولهای اویلر (بعش ۶.۱۲) داریم

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

با جمع و تفریق روابط فوق، توابع حقیقی کسینوسی و سینوسی به صورت زیر به دست می آیند

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

باز توجه به نتایج فوق، $\sin z$ و $\cos z$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}); \quad z = x + iy. \quad (1)$$

همینطور تعاریف زیر را می آوریم

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (2)$$

و

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}. \quad (3)$$

چون e^z تام است، لذا $\sin z$ ، $\cos z$ تام می باشند. $\sec z$ و $\tan z$ تام نیستند؛ این توابع جز در نقاطی که $\cos z$ صفر است، و $\csc z$ و $\cot z$ جز در نقاطی که $\sin z$ صفر است تحلیلی می باشند.

مشتقات توابع فوق عبارت اند از

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z, \dots \quad (4)$$

درستی این مشتقات را می‌توان از تساوی $e^z)' = e^z$ و (۱) تا (۳) نتیجه گرفت.

معادلات (۱) درستی فرمول اویلر را به ازای عدد مختلط Z نشان می‌دهد، یعنی داریم

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (5)$$

قسمتهای حقیقی و موهومی $\cos z$ و $\sin z$ در محاسبه مقادیر مورد نیاز می‌باشند، همچنین

این مقادیر در نمایش خواص توابع به ما کمک می‌کنند. این مطلب را با یک مثال شرح می‌دهیم.

مثال ۱. قسمتهای حقیقی و موهومی . قدرمطلق . تناوب

نشان دهید که

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (a) \quad (6)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (b)$$

و

$$|\cos z|^r = \cos^r x + \sinh^r y \quad (a) \quad (7)$$

$$|\sin z|^r = \sin^r x + \sinh^r y \quad (b)$$

و برخی از کاربردهای این فرمولها را بیان کنید.

حل. با توجه به (۱) می‌بایس

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x - \frac{1}{2}i(e^y - e^{-y})\sin x = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x \end{aligned}$$

زیرا

$$\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}); \quad (8)$$

و نشان می‌دهد که (۶a) برقرار است. (۶b) نیز مشابه آن به دست می‌آید. از (۶a) و $\cosh^r y = 1 + \sinh^r y$ می‌بایس

$$|\cos z|^r = \cos^r x(1 + \sinh^r y) + \sin^r y \sinh^r y.$$

چون $1 = \cos^r x + \sin^r y$ ، با توجه به آن (۶a) به اثبات می‌رسد. مشابهآن (۶b) به دست می‌آید.

به عنوان مثال، $i \cos(2 + 3i) = \cos 2 \cosh 3 - i \sin 2 \sinh 3 = -4/109 - 9/109i$

با توجه به فرمولهای (۶) ملاحظه می‌شود که $\sin z$ و $\cos z$ درست همانند مباحث حقیقی، متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشند. با توجه به نتایج فوق متناوب بودن $\tan z$ و $\cot z$ با دوره تناوب π حاصل می‌شوند.

فرمول (۷) نقطه تمایز اساسی بین توابع حقیقی و مختلط سینوسی و سینوسی می باشد؛ از طرفی در اعداد حقیقی داشتیم که $| \sin x | \leq |\cos x|$ و $|\sin x| \leq 1$ در حالی که توابع کسینوس و سینوس مختلط کراندار نیستند و هنگامی که $y \rightarrow \infty$ ، قدر مطلق آنها به سمت بینهایت میل می کند. مثلاً اگر $y \rightarrow \infty$ ، آنگاه باتوجه به (۷) می باییم $\sinh y \rightarrow \infty$.

مثال ۲. جواب معادلات. صفرهای $\sin z$ و $\cos z$

معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\cos z = 0$ (در حالی که در مجموعه اعداد حقیقی ریشه ندارد!)

$$\cos z = 0 \quad (ب)$$

$$\sin z = 0 \quad (ج)$$

حل. (الف) با ضرب نمودن در e^{iz} ، از (۱) می باییم $e^{iz} - 10e^{iz} + 1 = 0$ ، که یک معادله درجه دوم بر حسب e^{iz} می باشد، که جوابهای آن تاسه رقم اعشار عبارت اند از

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = 5 \pm \sqrt{25-1} = \begin{cases} 9/899, \\ 0/101. \end{cases}$$

. $x = 2n\pi$ ، $y = \pm 2/292$ و از آنجا $e^{ix} = 1$ ، $e^{-y} = 0/101$ یا $e^{-y} = 9/899$
لذا جواب به صورت $z = \pm 2n\pi \pm 2/292i$ ، که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ ، حاصل می شود. آیا این جواب را از روی (۶a) می توان به دست آورد؟

(ب) بنابراین (۷a) داریم $\sinh y = 0$ و $\cos x = 0$ درنتیجه $y = 0$ و جواب عبارت است از

$$z = \pm \frac{1}{2}(2n+1)\pi ; n = 0, 1, 2, \dots$$

(ج) بنابراین (۷) داریم $\sinh y = 0$ و $\sin x = 0$ درنتیجه جواب به صورت $z = 2n\pi$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$

می باشد. از این‌رو صفرهای $\cos z$ و $\sin z$ همان صفرهای توابع سینوس و کسینوس حقیقی می باشند.

فرمولهای کلی توابع مثلثاتی پیوسته حقیقی برای مقادیر مختلط نیز برقرارند. این مطلب

فی البداهه از تعاریف نتیجه می شوند. خصوصاً به قواعد مجموع

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \quad (۹)$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$$

و فرمول

$$\cos' z + \sin' z = 1 \quad (۱۰)$$

اشارة می کنیم. برخی فرمولهای مفیدتر در مجموعه مسائل ارائه می شوند.

توابع هیپربولیک

توابع کسینوس و سینوس هیپربولیک متغیر مختلط z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \quad (11)$$

که با تعاریف متناظر در توابع حقیقی مطابقت دارد [ر. ک. (۸)]. این توابع در تمامی صفحه تحلیلی هستند. با مشتقگیری می‌یابیم

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z. \quad (12)$$

توابع هیپربولیک دیگر به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \quad (13)$$

توابع هیپربولیک و مثلثاتی به هم وابسته‌اند. هرگاه در (۱۱) iz را جایگزین z کنیم و از (۱۲) استفاده کنیم، می‌یابیم

$$\cosh iz = \cos z, \quad \sinh iz = i \sin z. \quad (14)$$

همینطور داریم

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z. \quad (15)$$

مسائل بخش ۷.۱۲

۱. نشان دهید که $\sinh z, \cosh z, \sin z, \cos z$ توابع تام می‌باشند.

۲. به کمک مشتقگیری نشان دهید که توابع $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$ همساز هستند.

هر یک از عبارات زیر را به صورت $u + iv$ بتوانید

$$\sin 10i.5 \quad \sin(1/7 + 1/5i).4 \quad \cos(1/7 + 1/5i).3$$

$$\cos(\pi + \pi i).8 \quad \sin(\sqrt{2} - 4i).7 \quad \cos 10i.6$$

$$\cos(2/1 - 0/2i).11 \quad \sin(3 + 2i).10 \quad \cos 3\pi i.9$$

نشان دهید که

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

عبارات زیر را به شکل $u + iv$ محاسبه کنید.

$$\sinh(2 + i).15 \quad \sinh(4 - 3i).14 \quad \cosh(-2 + 3i).13$$

تمام جوابهای معادلات زیر را باید.

$$\sin z = 1000.18 \quad \cos z = 3i.17 \quad \cosh z = 0.16$$

$$\cosh z = \frac{1}{2} \cdot 21 \quad \sin z = \cosh^2 z \cdot 20 \quad \sin z = i \sinh z \cdot 19$$

۲۲. تمام مقادیر z که به ازای آنها (الف) $\cos z$ ، (ب) $\sin z$ دارای مقادیر حقیقی می‌باشند را باید.

۲۳. با استفاده از (۱۵) و پاسخ یکی از مسائل فوق، مقدار $\cosh(-1/5 + 1/7i)$ را به دست آورید.

۲۴. مطلوب است محاسبه $\operatorname{Im} \tan z$ و $\operatorname{Re} \tan z$ و $\tan z$.

۲۵. ثابت کنید که $\cos z$ یک تابع زوج، یعنی به ازای هر z ، $\cos(-z) = \cos z$ و $\sin z$ یک تابع فرد، یعنی به ازای هر z ، $\sin(-z) = -\sin z$ هستند.

$$26. \text{ نشان دهید که } \sin(\pi - z) = \sin z \cos z = \sin(z + \frac{1}{2}\pi).$$

۲۷. نشان دهید که $\cosh z$ و $\sinh z$ توابع متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشند.

۲۸. با استفاده از (۹) و (۱۵) نشان دهید که

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$$

۲۹. درستی هر یک از تساویهای زیر را ثابت کنید.

$$\cos' z + \sin' z = 1, \quad \cos' z - \sin' z = \cos 2z,$$

$$\cosh' z - \sinh' z = 1, \quad \cosh' z + \sinh' z = \cosh 2z.$$

۳۰. نشان دهید که $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ و $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$ و نتیجه بگیرید

که توابع کسینوس و سینوس مختلط در تمام صفحه مختلط کراندار نیستند.

۱۲. لگاریتم . توان عمومی

به عنوان آخرین توابع این بخش به معرفی تابع لگاریتمی مختلط می‌پردازیم. این تابع نسبت به از تابع لگاریتم حقیقی بسیار پیچیده تر است. رفتار این تابع در طول تاریخ ریاضیات بسیاری اوقات باعث تعجب ریاضیدانان شده است. اگر شما هم در مطالعه این قسمت با مشکل مواجه شدید حوصله کنید و با دقت بیشتری عمل کنید.

لگاریتم طبیعی عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت $\ln z$ (گاهی اوقات $\log z$) نمایش داده و به صورت تابع معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود، یعنی $w = \ln z$ ، به ازای هر $z \neq 0$ ، با رابطه

$$e^w = z$$

تعريف می شود. (قابل توجه است که تساوی فوق به ازای $z = r e^{i\theta}$ می یابیم) چنانچه قرار دهیم $w = u + iv$ و $e^w = e^{u+iv} = r e^{i\theta}$.

حال با توجه به بخش ۱۲.۶ ملاحظه می کنیم که e^{u+iv} دارای قدر مطلق e^u و آرگومان v می باشد. که اینها باید با قدر مطلق و آرگومان طرف راست رابطه فوق برابر باشد، یعنی

$$e^u = r, v = \theta.$$

از $e^u = r$ می یابیم $u = \ln r$ ، که در آن $|z| = \ln r$ لگاریتم طبیعی حقیقی عدد مثبت است. از این‌رو $w = u + iv = \ln z$ برابر است با

$$\ln z = \ln r + i\theta \quad (r = |z| > 0, \theta = \arg z). \quad (1)$$

حال به قسمت حساس مساله می‌رسیم. چنین مفاهیمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی موجود نیست. نظر به اینکه آرگومان تنها با مضارب صحیح 2π مشخص می‌شوند، لذا لگاریتم طبیعی مختلف $\ln z (z \neq 0)$ بینهایت مقداری است.

مقدار $\ln z$ را که متناظر با مقدار اصلی $Arg z$ (ر. ک. بخش ۱۲.۲) را با $\ln z$ نمایش می‌دهیم و مقدار اصلی $\ln z$ می‌نامیم. بنابراین به ازای $z \neq 0$ داریم

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \quad (2)$$

یکتایی $\arg z$ به ازای $(z \neq 0)$ ایجاب می‌کند که $\ln z$ همانند لگاریتم در دستگاه حقیقی تک مقداری باشد. چون مقادیر دیگر $\arg z$ به اندازه مضارب صحیح 2π اختلاف دارند، در این صورت مقادیر عبارت اند از $\ln z$

$$\ln z = \ln|z| + 2n\pi i; \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3)$$

قسمتهای حقیقی $\ln z$ و $\ln z$ یکسان می‌باشند و تفاوت قسمتهای موهومی آنها مضارب 2π است. چنانچه z حقیقی و مثبت باشد، آنگاه $\arg z = 0$ و $\ln z$ با لگاریتم طبیعی حقیقی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموخته ایم یکی می‌شود. هرگاه z حقیقی و منفی باشد آنگاه $\arg z = \pi$ و

$$\ln z = \ln|z| + \pi i.$$

یادآوری می‌کنیم که لگاریتم طبیعی اعداد حقیقی منفی در حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف نمی‌شود.

مثال ۱ . لگاریتم طبیعی . مقدار اصلی

داریم

$$\ln 1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$$

$$\text{Ln} 1 = 0$$

$$\ln 4 = 1/386294 \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln} 4 = 1/386294$$

$$\ln(-1) = \pm \pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots$$

$$\text{Ln}(-1) = \pi i$$

$$\ln(-4) = 1/386294 \pm (2n+1)\pi i$$

$$\text{Ln}(-4) = 1/386294 + \pi i$$

$$\ln i = \frac{\pi i}{2}, -\frac{3\pi i}{2}, \frac{5\pi i}{2}, \dots$$

$$\text{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$$

$$\ln(-4i) = 1/386294 - \frac{\pi i}{2} \pm 2n\pi i, \dots$$

$$\text{Ln}(-4i) = 1/386294 - \frac{\pi i}{2}$$

$$\ln 4i = 1/386294 + \frac{\pi i}{2} \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln} 4i = 1/386294 + \frac{\pi i}{2}$$

$$\ln(3 - 4i) = \ln 5 + i \arg(3 - 4i)$$

$$\text{Ln}(3 - 4i) = 1/609438 - 0/927295i$$

$$= 1/609438 - 0/927295i \pm 2n\pi i$$

روابط آشنایی که درباره لگاریتم طبیعی به کارمی بردهم برای مقادیر مختلط نیز برقرارند، یعنی

$$(a) \quad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad (b) \quad \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2. \quad (4)$$

اما این روابط را به این ترتیب باید شناخت که هر مقدار از یک طرف با یکی از مقادیر طرف دیگر برابر است.

مثال ۲ . تشریح روابط تابعی (۴) در دستگاه اعداد مختلط

فرض کنید

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1.$$

اگر فرض کنیم

$$\ln z_1 = \ln z_2 = \pi i.$$

آنگاه (۴a) برقرار است، مشروط بر آنکه بنویسیم $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = 2\pi i$ ، این تساوی درمورد مقدار اصلی $\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln 1 = 0$ برقرار نیست.

از (۱) و $r = e^{\ln r}$ ، برای های حقیقی مثبت ، همانطوری که انتظار داشتیم ، می‌بایس
 $e^{\ln z} = z$. (۵a)

اما ، به جهت آنکه $\arg(e^z) = y \pm 2n\pi$ چند مقداری است ، داریم
 $\ln e^z = z \pm 2n\pi i$. (۵b)

فرمول (۳) ، به ازای هر عدد صحیح نامنفی ثابت n ، یک تابع را تعریف می‌کند . ثابت کردیم که هر چنین توابعی ، به خصوص مقدار اصلی $\ln z = z$ ، به جز در 0 و محور حقیقی منفی (جایی که در آن قسمت موهومی تابع حتی پیوسته نیست و جهشی به اندازه 2π دارد) تحلیلی است . انجام این کار را با اثبات اینکه

(۶) در (۳) ثابت و z عدد حقیقی منفی و صفر را شامل نیست

پی می‌گیریم . در (۱) داریم $\ln z = u + iv$ ، که در آن

$$u = \ln r = \ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v = \arg z = \arctan \frac{y}{x} + c,$$

که در آن c یک ثابت (یک مضرب از $2n\pi$) می‌باشد . حال مشتقات جزئی u و v را محاسبه کرده و می‌بایس

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x},$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

بنابراین معادلات کوشی - ریمان بجز در مبداء مختصات برقرارند . حال با به کار بردن فرمول (۴) بخش ۱۲.۵ به نتیجه موردنظر می‌رسیم ؟ یعنی

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

توانهای عمومی

توانهای عمومی عدد مختلط $z = x + iy$ با فرمول زیر تعریف می‌شود

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (z \neq 0, c).$$
(۷)

چون $\ln z$ بینهایت مقداری است ، z^c در حالت کلی ، چند مقداری خواهد بود . مقدار خاص

$$z^c = e^{c \ln z}$$

را مقدار اصلی z^c می نامند.

چنانچه ... $c = n = 1, 2, \dots$ ، در آن صورت z^n تک مقداری است و با توان n ام معمولی یکی می باشد. همینطور به ازای ... $-2, -1, c = 0$ وضعیت مشابهی داریم.

$$\text{چنانچه } \frac{1}{n} \text{ که در آن } \dots, 3, 2, n = 0, \text{ آنگاه}$$

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \ln z} \quad (z \neq 0),$$

به نمایی که مشخص شده، می توان مضارب $\frac{2\pi i}{n}$ را افزود و بدین ترتیب n مقدار متمایز برای ریشه n ام

حاصل می شود که با نتیجه بخش ۱۲.۲ مطابقت می نماید. هرگاه $c = \frac{p}{q}$ ، نسبت دو عدد صحیح مثبت باشد، وضعیت مشابهی وجود دارد، و z^c یک تعداد متناهی مقادیر متمایز دارد. به هر حال، هرگاه c اصم یا عدد مختلط محض باشد، آنگاه z^c به طور نامتناهی چند مقداری است.

مثال ۳. توان عمومی

$$i^i = e^{i \ln i} = \exp(i \ln i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4}i \pm 2n\pi i\right)\right] = e^{-\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi}.$$

تمام این مقادیر حقیقی هستند و مقدار اصلی ($i = 0$) برابر است با $e^{-\frac{\pi}{4}}$. به طور مشابه می توان نوشت

$$(1+i)^{2-i} = \exp[(2-i)\ln(1+i)] = \exp\left[(2-i)\left\{\ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i\right\}\right]$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4} \pm 2n\pi} \left[\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + i \cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) \right].$$

قرارداد چنین است که به ازای عدد حقیقی مثبت x عبارت z^c به معنی $e^{c \ln x}$ باشد که در آن x لگاریتم طبیعی حقیقی مقدماتی است (یعنی، بنا به تعریف، مقدار اصلی $(x > 0)$ است). همچنین، هرگاه $z = e^c$ ، یعنی پایه لگاریتم طبیعی باشد، $z^c = e^c$ بنا به قرارداد مقدار یکتای حاصل از (۱) بخش ۱۲.۶ به دست می آید.

با توجه به (۷) مشاهده می کنیم که به ازای هر عدد مختلط a ،

$$a^z = e^{z \ln a}. \quad (8)$$

تاکنون به معرفی توابع مختلط موردنیاز در کارهای کاربردی پرداختیم که برخی از آنها (e^z ، $\sinh z$ و $\cosh z$ ، $\sin z$ ، $\cos z$ و $\tanh z$ ، $\cot z$ ، $\tan z$) تام (بخش ۱۲.۶) ، برخی از آنها ($\ln z$) یک تابع بینهایت مقداری است و $(\coth z)$ به جز در برخی نقاط خاص تحلیلی، و یکی از آنها ($\ln z$) یک تابع بینهایت مقداری است و مقدار اصلی آن بجز در مبداء و نیمه محور حقیقی منفی تحلیلی است.

مسائل بخش ۸.۱۲

۱. درستی محاسبات در مثال ۱ را تحقیق کنید. برخی از مقادیر $\ln(z - 4i)$ را در صفحه مختلط مشخص کنید.
۲. درستی تساوی (۴) را به ازای $-z_1 = z_2$ بررسی کنید.
۳. با استفاده از صورت قطبی معادلات کوشی - ریمان (ر. ک. بحث ۱۲.۵) ثابت کنید که $\ln z$ تحلیلی است.
۴. درستی روابط (۵a) و (۵b) را ثابت کنید.

مقدار اصلی $\ln z$ را محاسبه کنید چنانچه در آن z برابر باشد با

$$\begin{array}{llll} 2/5 + 3/8i \cdot 9 & -3 - 4i \cdot 7 & -4 \cdot 6 & 1+i \cdot 5 \\ 0/6 + 0/8i \cdot 12 & -16/0 + 0/1i \cdot 11 & -16/0 - 0/1i \cdot 10 & -100 \cdot 9 \end{array}$$

تمام مقادیر عبارتها زیر را باید و برخی از آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید.

$$\begin{array}{llll} \ln(-0/0i) \cdot 16 & \ln(-7) \cdot 15 & \ln e \cdot 14 & \ln 1 \cdot 13 \\ \ln(1/3 + 2/8i) \cdot 20 & \ln(-e^{-i}) \cdot 19 & \ln(e^{ri}) \cdot 18 & \ln(0/8 - 0/6i) \cdot 17 \end{array}$$

مطلوب است حل معادلات زیر

$$\ln z = 2 + \frac{1}{4}\pi i \cdot 23 \quad \ln z = -2 - \frac{3}{2}i \cdot 22 \quad \ln z = 3 - i \cdot 21$$

$$\ln z = \sqrt{2} + \pi i \cdot 26 \quad \ln z = 0/3 + 0/7i \cdot 25 \quad \ln z = (2 - \frac{1}{2}i)\pi \cdot 24$$

$$\ln z = -5 + 0/0i \cdot 28 \quad \ln z = 4 - 3i \cdot 27$$

مطلوب است مقدار اصلی هر یک از عبارات زیر

$$2^{ri} \cdot 32 \quad 3^{2-i} \cdot 31 \quad (1+i)^i \cdot 30 \quad i^{\frac{1}{r}} \cdot 29$$

$$(-5)^{r-i} \cdot 36 \quad (5 - 2i)^{r+ni} \cdot 35 \quad (1+i)^{1-i} \cdot 34 \quad (1-i)^{1+i} \cdot 33$$

$$(3 + 4i)^{\frac{1}{r}} \cdot 38 \quad (2 - i)^{1+i} \cdot 37$$

با به تعریف، سینوس معکوس که با نماد $w = \sin^{-1} z$ نمایش داده می شود و به معنی $\sin w = z$ می باشد. کسینوس معکوس را که با نماد $w = \cos^{-1} z$ نمایش می دهد، رابطه ای است که در تساوی $\cos w = z$ صدق می کند. تانژانت معکوس، کتانژانت معکوس، سینوس هیپربولیک معکوس و سایر توابع معکوسها به طریقی مشابه تعریف و بیان می شوند (توجه کنید که همه این روابط چند مقداری هستند). با استفاده از نمایش نمایی $\sin w = \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i}$ و نمایشها مشابه برای $\cos w$ و سایر نسبتها مثلاً نشان دهید که

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) . \quad .40 \quad \sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) . \quad .39$$

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) . \quad .42 \quad \cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) . \quad .41$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} . \quad .44 \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z} . \quad .43$$

.45. نشان دهید که $w = \sin^{-1} z$ بینهایت مقداری است ، و چنانچه w یکی از این مقادیر باشد ، بقیه مقادیر به صورت $w, \pm 2n\pi$ و $\pi - w, \pm 2n\pi$ می باشند که در آن $n = 0, 1, \dots$. (مقدار اصلی $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ مقداری است که برای آن $v \geq 0$ هرگاه $w = u + iv = \sin^{-1} z$ هرگاه $v > 0$.)

۹.۱۲ نگاشت توسط توابع خاص. اختیاری

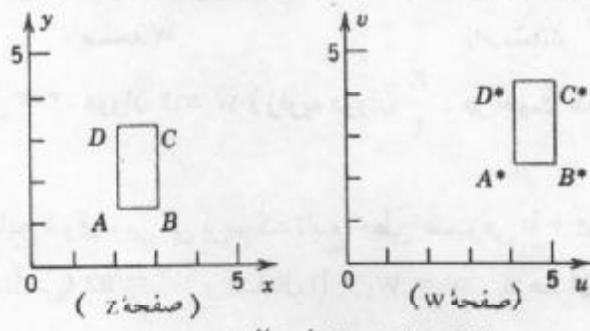
در این بخش ، به طور هندسی ، توابع مقدماتی تحت عنوان نگاشتها مورد بحث قرار می گیرند. این موضوع سبب تفہیم بیشتر توابع می گردد. خواص کلی نگاشت توابع تحلیلی در فصل ۱۶ ، و کاربردهای آنها در فصل ۱۷ ارائه می شوند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم که نمودار تابع $y = f(x)$ را در صفحه xy می توان ترسیم نمود. برای تابع مختلط

$$w = u + iv = f(z) \quad (z = x + iy)$$

نیاز به دو صفحه است. یکی از این صفحات ، صفحه z است ، که در آن مقادیر z مشخص می شوند ، و دیگری صفحه w که در آن مقادیر متناظر $w = f(z)$ وارد می شوند. در این روش تابع f مفروض به هر نقطه z از دامنه تعریف $w = f(z)$ را از صفحه w مربوط می سازد. f را نگاشت دامنه D به توی صفحه w می نامند. به ازای هر نقطه z در D نقطه $w = f(z)$ را نقش w نسبت به تابع f نامند. به طور کلی نقاط منحنی C واقع در D به نقشهای خود واقع بر یک منحنی واقع در صفحه w تبدیل می شوند. برای مجموعه نقاط دیگر D وضعیت مشابهی وجود دارد.

هدف بعدی شرح زیر می باشد. با مشخص کردن تک تک نقاط و تصاویر آنها نمی توان یک



شکل ۳۰۱. انتقال $w = z + 2 + i$

دید کلی نسبت به خواص نگاشت یک تابع مفروض پیدا کرد. برای این منظور بهتر است به مطالعه نمودارو نواحی و تصاویر آنها، بام بحث روی نحنی های ساده معروف (برای مثال، خطوط مستقیم موازی یا دایره متحده مرکز) و تصاویر آنها پرداخته شود. این روش برای برخی توابع مقدماتی که از نظر کاربردی با اهمیت هستند با ارائه چند مثال تشریح خواهند شد.

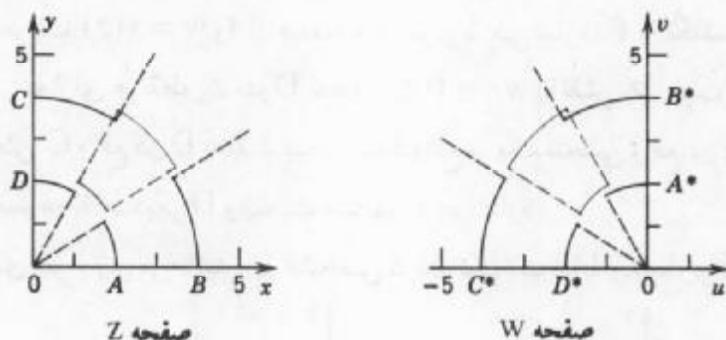
توابع خطی. توانهای صحیح مثبت z

مثال ۱. نگاشت $w = az + b$

به طور هندسی، به بررسی خواص نگاشت تابع خطی $w = az + b$ پردازید.

حل. هرگاه $a = 1$ ، نگاشت $w = z + b$ یک انتقال است. این نگاشت هر نقطه را درجهت b به اندازه $|b|$ انتقال می دهد. ازاین‌رو هر شکل و تصویر آن با یکدیگر هم ارز می باشند. شکل ۳۰۱ به عنوان یک مثال ارائه شده است. $w = b$ نگاشت همانی $z = 0$ را نتیجه می دهد که هر نقطه را بروی خودش می نگارد.

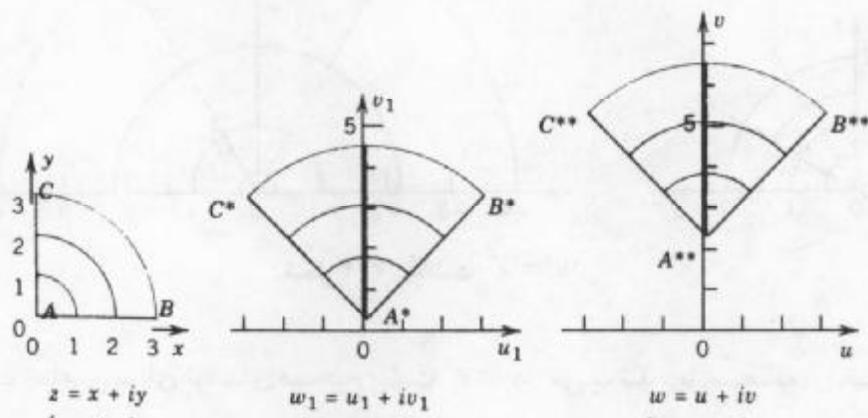
هرگاه $b = 0$ ، می باییم که $w = az$ و $a = e^{i\alpha}$ داریم $|a| = 1$. به ازای α دورانی به اندازه زاویه α می باشد. شکل ۳۰۲ یک مثال درین سوردر انشان می دهد. به ازای a حقیقی، که در آن $a < 0$ ، انقباضی یکنواخت و به ازای $a > 0$ ، ابساطی یکنواخت به دست می آید. (درباره a حقیقی منفی وضع چگونه است؟ شرح دهید!)



شکل ۳۰۲. دوران $w = iz$ (زاویه دوران $\frac{\pi}{2}$ ، درجهت عکس عقربه های ساعت)

با آمیختن توابع فوق، پی می برم که تابع خطی عمومی $w = az + b$ ترکیبی است از دوران، ابساط (یا انقباض) $w_1 = az$ و انتقال $w_2 = w_1 + b$. به عنوان مثال، شکل ۳۰۳، یک

دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت، ابسطاً به اندازه $\sqrt{2}|1+i| = \sqrt{2}$ و انتقالی قائم به طرف بالا رانشان می دهد.



شکل ۳۰۳. تبدیل خطی $w = u + iv = (1+i)z + 2i$ ، مرکب از دوران و ابسط

$$w = w_1 + 2i \quad w_1 = u_1 + iv_1 = (1+i)z$$

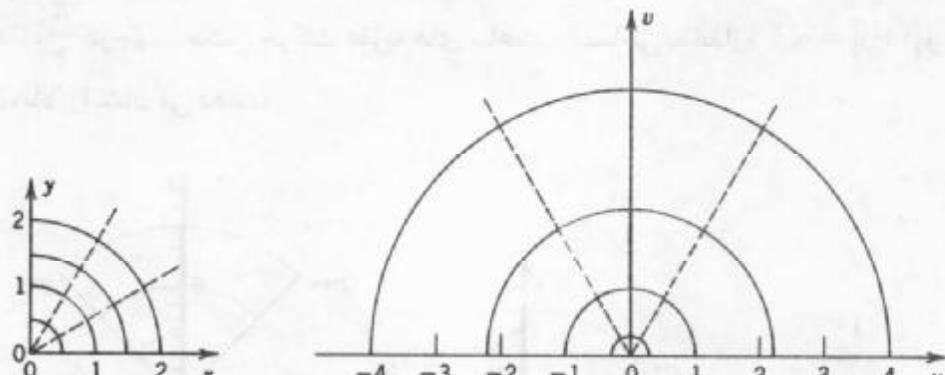
مثال ۲. نگاشت $w = z^r$

نقش دایره ثابت $|z| = r$ ، شعاعهای ثابت $\theta = \theta_0$ ، نواحی $1 \leq |z| \leq \frac{r}{\cos \theta_0}$ و $\frac{\pi}{r} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{r}$ را تحت نگاشت $w = z^r$ بیابید.

حل. با توجه به مختصات قطبی می یابیم

$$w = Re^{i\theta} = z^r = r^r e^{ri\theta} \quad (z = re^{i\theta}).$$

این مطلب نشان می دهد که هر دایره $|z| = r$ بر روی دایره $|w| = r^r$ ، و هر شعاع $\theta = \theta_0$ بر روی شعاع $\phi = 2\theta_0$ و همینطور نواحی مورد نظر بر روی نواحی $1 \leq |w| \leq r^{\frac{2\theta_0}{r}}$ و $\frac{\pi}{r} < \phi < \frac{\pi}{r} + 2\theta_0$ در صفحه w نگاشته می شوند (ر.ک. شکل ۳۰۴). دایره و شعاعها یکدیگر را تحت زوایای قائم قطع می کنند و نگاشت $w = z^r$ این زوایا را بدون تغییر منتقل می کند، در هر صورت نگاشت $w = z^r$ هر زاویه واقع در صفحه z را که راس آن در مبدأ مختصات نباشد بدون تغییر به صفحه w منتقل می کند. یک وضعیت استثنایی وقتی پیش می آید که $w' = 2z$ داریم $w = z^r$ که در $z = 0$ برابر صفر است. در چنین نقطه ای، یعنی در مبدأ مختصات نگاشت $w = z^r$ ، هر زاویه با این راس را به دو برابر افزایش می دهد. این موضوع و قضیه مربوطه در فصل ۱۶ مورد بحث و بررسی قرار می گیرند.

شکل ۳۰۴. نگاشت $w = z^n$

مثال ۲ حالت خاصی برای توانهای صحیح مثبت $w = z^n$ می‌باشد. با استفاده از مختصات قطبی داریم

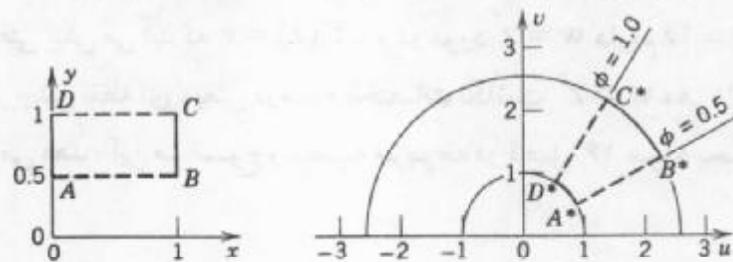
$$w = Re^{i\phi} = z^n = r^n e^{in\theta}.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $w = z^n$ دواویر $r = |z|$ را بر روی دواویر $|w| = r^n$ و شعاعهای $\theta = n\phi$ بر روی شعاعهای $\theta = n\theta$ می‌نگارد. به عنوان مثال، نگاشت $w = z^n$ اندازه زاویه به راس مبدأ مختصات را ضمن انتقال سه برابر می‌کند. همینطور $w = z^n$ ناحیه زاویه‌ای $\frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$ را بر روی نیمه فوقانی صفحه w می‌نگارد.

شکل ۳۰۵. نگاشت تعریف شده توسط $w = z^n$

توابع نمایی و لگاریتمی

همانطوری که در مثالهای قبل مشاهده شد، خواص مختلف نگاشتها با بررسی منحنیها و نواحی که نقشهای شان را بدون محاسبه بلکه تنها با توجه به خواص تابع مورد نظر به دست آورده، مورد بحث قرار دادیم. این موضوع بحث ما را در سراسر این قسمت نیز تشکیل می‌دهد.

شکل ۳۰۶. تبدیل $w = e^z$ [مثال ۳، قسمت (ب)]

مثال ۳. تابع نمایی $w = e^z$

نقش هریک از منحنیها و نواحی زیر را به کمک نگاشت $w = e^z$ به دست آورید.

(الف) خطوط مستقیم با فاصله ثابت $= x = \text{const}$ و $y = \text{const}$

$$(b) \text{ مستطیل } 1 \leq x \leq 0, 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$(c) \text{ ناحیه بنیادی } -\pi < y \leq \pi$$

$$(d) \text{ نوار افقی } 0 \leq y \leq \pi$$

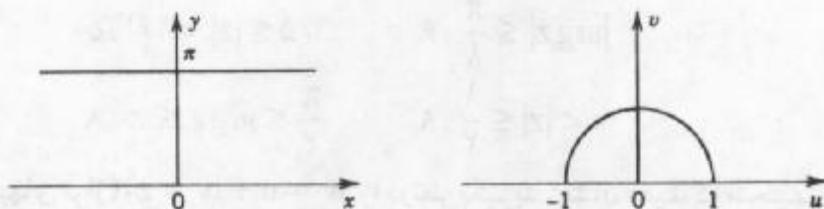
حل. (الف) با مراجعه به بخش ۶.۱۲ پی می برمی که $|w| = e^x$ و $\arg w = y$. لذا $x = \arg w$ بر روی

دایره $|w| = e^x$ و $y = \arg w$ بر روی شاعر $y = \arg w$ نگاشته می شوند.

(ب) با توجه به قسمت (الف) پی می برمی که هر مستطیل با ابعاد موازی با محورهای مختصات بر روی ناحیه محصور بین شاعرها و دوایر نگاشته می شود. شکل ۳۰۶ را ملاحظه کنید.

(ج) ناحیه بنیادی مورد نظر بر روی تمامی صفحه w (که در طول محور حقیقی منفی بردیه شده است) فاقد مبدأ 0 ، نگاشته می شود. به طور کلی، هر نوار افقی که بین دو خط موازی c و $y = c + 2\pi$ محصور شده است، بر روی تمام صفحه w فاقد مبدأ نگاشته می شود. این موضوع بیانگر این واقعیت است که $w = e^z$ متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می باشد.

(د) نوار $\pi \leq y \leq 0$ بر روی نیمه فوقانی صفحه w نگاشته، نیمه راست ($x > 0$) بر روی خارج دایره واحد $|w| = 1$ و نیمه چپ ($x < 0$) بر روی داخل، فاقد صفر، نگاشته می شود (شکل ۳۰۷).



شکل ۳۰۷. نگاشت $w = e^z$ [مثال ۳، بخش (د)]

حال به نگاشت لگاریتم طبیعی می پردازیم. در بحث مربوط به آن اصول و ایده اساسی زیر را به کار می گیریم. خواص معکوس نگاشت $w = f(z)$ را با تعویض صفحات z و w از روی خود نگاشتها می توان به دست آورد. چون لگاریتم طبیعی $w = u + iv = \ln z$ رابطه معکوس تابع نمایی است، از مثال ۳، قسمت (ج) نتیجه می گیریم که $w = \ln z$ به ازای $z \neq 0$ (مقدار اصلی $\ln z$) صفحه

(که در طول قسمت منفی محور حقیقی بریده شده است و با حذف $z = 0$) را بروی نوار $\pi \leq v < -\pi$ از صفحه w می‌نگارد. چون نگاشت

$$w = \ln z + 2\pi i$$

به اندازه $2\pi i$ (به طور قائم به طرف بالا) با $w = \ln z$ اختلاف دارند، این نگاشت صفحه z (بریده شده در طول نیم محور حقیقی منفی با حذف مبداء) را بروی نوار $-\pi < v < 3\pi$ می‌نگارد. به طور مشابه برای هر نگاشت بینهایت مقداری

$$w = \ln z = \ln z \pm 2n\pi i \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

مطلوب فوق برقرار است. نوارهای افقی متناظر به عرض 2π (نقش صفحه z تحت این نگاشتها) کلاً صفحه w را بدون آنکه دارای قسمت مشترک باشد می‌پوشاند. خواننده می‌تواند قسمتهای دیگر مثل ۳ را بحسب نگاشت $w = \ln z$ ، با تعویض نقش‌های z و w بررسی کند.

خواص نگاشت توابع دیگر (مثلثاتی، هیپربولیک، توابع کسری خطی و نظایر آنها) در فصل ۱۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

مسائل بخش ۹.۱۲

نگاشت $z + 1 - i = w$ را در نظر بگیرید. تصاویر هریک از منحنيها و نواحی مفروض را یافته و رسم کنید.

$$|z + 1| \leq 1.3 \quad y = -2, 0, 2, 4, 2 \quad x = 0, 1, 2, 3, 1$$

نقش هریک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ یافته و رسم کنید.

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{6} \quad 1/5 \leq |z| < 2/1.5 \quad |z| \leq 3.4$$

$$0 < |z| \leq \frac{1}{2}, 9 \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi, 8 \quad |z| > 4.7$$

۱۰. (منحنيهای تراز) $w = u + iv = z^2$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که منحنيهای تراز u ، یعنی منحنيهای ثابت $= u$ در صفحه z هذلولیهای با مجانبهای $x = \pm y$ هستند برخی از آنها را رسم کنید.

۱۱. منحنيهای تراز ثابت $= v$ را در مساله ۱ بباید و برخی از آنها را رسم کنید.

۱۲. نشان دهید که $z^2 = w = u + iv$ ، خط $x = c$ را بروی سهمی $(c^2 - u)^2 = v^2$ می‌نگارد

و نمودار آنها را به ازای $c = 2, 1, \frac{1}{2}, 0$ رسم کنید.

۱۳. مطلوب است نقش خط $k = w$ تحت نگاشت $w = u + iv = z^2$.

نقش منحنيها و نواحی زیر را تحت نگاشت $\frac{1}{z} = w$ ، که در آن $z \neq 0$ یافته و رسم کنید.

$$y > 0.16 \quad |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1.15 \quad |z| < 1.14$$

نقش نواحی زیر را تحت نگاشت $w = e^z$ یافته و رسم کنید.

$$0 < y < \pi, \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1.19 \quad x = 0.18 \quad |y| \leq \pi, z \leq 1.17$$

$$|y| < b, |x| < a. 20$$

مسائل و پرسش‌های دوره‌ای فصل ۱۲

۱. تعریف ضرب اعداد مختلط در ابتداء عجیب به نظر می‌رسد. علت این کار برای چیست؟
۲. ضرب یک عدد مختلط در آن نقطه نظر هندسی به چه معنی ای است؟
۳. اگر $|z| \neq 0$ مفروض باشند، آیا عدد مختلط $\tan\left(\frac{y}{x}\right) |z| e^{i\theta}$ به طور یکتا مشخص می‌شود؟
۴. مقدار اصلی آرگومان یک عدد مختلط به چه معنا است؟
۵. نامساوی مثلثی چیست؟ مفهوم هندسی آن چگونه است؟
۶. فرمول دموآور چیست و کاربرد آن در کجا است؟
۷. جمله « $f(z)$ در دامنه D تحلیلی است » به چه معنا است؟ جمله « $f(z)$ در یک نقطه تحلیلی است » به چه مفهوم است؟ یک دامنه چیست؟
۸. آیا $|z|, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ تحلیلی هستند؟ چرا؟
۹. تحلیلی بودن چگونه بررسی می‌شود؟
۱۰. تعریف مشتق درست مانند تعریف مشتق در حساب حقیقی است، اما یک تفاوت بزرگ وجود دارد. آن تفاوت را شرح دهید.
۱۱. آیا ممکن است یکتابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد بدون آنکه در آن نقطه تحلیلی باشد؟
۱۲. تابع تام چیست؟ مثالهای نقض بیاورید؟
۱۳. e^z چگونه تعریف می‌شود؟ نوار بنیادی چیست؟
۱۴. کدام خواص e^z با e^x مشابه است؟ یک تفاوت عمده کدام است؟ آیا تفاوت دیگری می‌شناسید؟
۱۵. ارتباط $z = \cos z + i \sin z$ با e^{iz} به چه طرقی است؟
۱۶. آیا معادله $\sin z = -100$ دارای جواب است؟
۱۷. در چه زمینه‌ای لگاریتم مختلط ازلگاریتم حقیقی پیچیده تراست؟
۱۸. چگونه تعریف می‌شود؟ $\ln z$.
۱۹. درباره $\sqrt[3]{z}, \sqrt[4]{z}, \sqrt[5]{z}$ چه مطالعی به خاطر دارید؟
۲۰. هرگاه مقادیر $\sqrt[n]{z}$ را بدانید، چگونه از آنها مقادیر $\sqrt[n]{z}$ را برای هر n به دست می‌آورید؟

هریک از عبارات زیر را به صورت $x+iy$ محاسبه کنید.

$$\frac{25}{(3+4i)^2} \cdot 24$$

$$\frac{6+i}{2-3i} \cdot 23$$

$$(1+i)^5 \cdot 22$$

$$(-2+6i)^3 \cdot 21$$

$$\frac{23+2i}{2-2/5i} \cdot 28$$

$$\frac{(1+i)^6}{(1-i)^4} \cdot 27$$

$$\frac{202}{10-i} \cdot 26$$

$$\frac{52/5-12/5i}{3-i} \cdot 25$$

هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$\operatorname{Re} \frac{-4-6i}{(1+i)^5} \cdot 32$$

$$\operatorname{Re} \frac{16+2i}{3+2i} \cdot 31$$

$$\operatorname{Im} \frac{2-i}{4-3i} \cdot 30$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2+i} \cdot 29$$

$$\frac{4}{|V-\pi i|} \cdot 36$$

$$\left| \frac{13-17i}{17+13i} \right| \cdot 35$$

$$\left| \frac{iz}{\bar{z}} \right| \cdot 34$$

$$\left| \frac{(3+4i)^2}{(3-4i)^2} \right| \cdot 33$$

مطلوب است محاسبه هر یک از عبارات زیر

$$\sqrt{-1} \cdot 40$$

$$\sqrt{-8-6i} \cdot 39$$

$$\sqrt{3+4i} \cdot 38$$

$$\sqrt{-i} \cdot 37$$

هریک از اعداد مختلط زیر را در مختصات قطبی بنویسید.

$$\frac{\sqrt{10}}{3+i} \cdot 43$$

$$17+4i \cdot 42$$

$$-6+6i \cdot 41$$

منحنیها و نواحی ذیل را در صفحهٔ مختلط مشخص کنید.

$$2 < |z+i| < 3 \cdot 46 \quad |z+1-3i| = \frac{1}{2} \cdot 45$$

$$\operatorname{Re}(z^r) \leq 1 \cdot 48 \quad \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z \cdot 47$$

تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را طوری بیابید که

$$u = e^{x^r-y^r} \cos 2xy \cdot 50 \quad v = \frac{y}{x^r+y^r} \cdot 49$$

$$u = x^r - 2xy - y^r \cdot 52 \quad u = \cos x \cosh y \cdot 51$$

آیا توابع زیر همساز هستند؟ چنانچه جواب مثبت باشد، همساز مزدوج آنها را بیابید.

$$\sin x \cosh y \cdot 56 \quad x^r - 3xy^r \cdot 55 \quad e^{\frac{x}{r}} \cos \frac{1}{r}y \cdot 54 \quad x^ry^r \cdot 53$$

مشتق هریک از توابع داده شده را در نقاط موردنظر بیابید.

$$i^{\frac{1}{r}} e^z \cdot 58 \quad \frac{2}{z} \operatorname{d}r+i \cdot 57$$

$$4-3i \operatorname{cosh} z \cdot 60 \quad 3+2i \operatorname{sin} z \cdot 59$$

خلاصه فصل ۱۲ اعداد مختلط. توابع تحلیلی مختلط

یک عدد مختلط دارای نمایشی به شکل یکی از صورتهای زیر است

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (1)$$

که در آن $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ، $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ و بحث مربوط به آنها در بخش‌های ۱۰.۱۲ و ۱۰.۲ ارائه شده است.

تابع مختلط f با ضابطه $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در دامنه D تحلیلی گوئیم هرگاه در همه جای D دارای مشتق (بخش ۴.۱۲)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2)$$

باشد. همچنین، $f(z)$ در نقطه z تحلیلی گوئیم هرگاه در یک همسایگی z (نه تنها در خود z) دارای مشتق باشد.

هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد، آنگاه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در همه جای D ، در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند (بخش ۵.۱۲)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

در این صورت u و v نیز به ازای تمام نقاط D ، در معادله لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (4)$$

صدق می‌کنند. هرگاه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ پیوسته و دارای مشتق‌ات جزئی پیوسته در D و در این ناحیه در معادلات (۳) صدق کنند، آنگاه $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در D تحلیلی است. بخش ۱۲.۵ را ملاحظه کنید. (توصیف بیشتر معادله لاپلاس و تجزیه و تحلیل در فصل ۱۷ ارائه شده است).

تابع نمایی مختلط (بخش ۶.۱۲)

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (5)$$

تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است، اگر $x = 0$ (یا $y = 0$)، آنگاه تابع نمایی مختلط به e^x تبدیل می‌شود، و دارای مشتق e^z است.

تابع مثلثاتی عبارت اند از (بخش ۷.۱۲)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (6)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$\cot z = \frac{1}{\tan z}$ و $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ توابع هیپربولیک به صورت زیر می‌باشند.

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos iz, \quad (7)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -i \sin iz,$$

و برای شناخت سایر توابع به متن درس مراجعه شود. تابع Tam تابعی است که در تمام نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد. توابع (5) تا (7) Tam می‌باشند.

لگاریتم طبیعی عبارت است از (بخش ۱۲. ۸.)

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (\arg z = \theta, z \neq 0) \quad (8)$$

$$= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \pm 2n\pi i \quad (n = 0, 1, \dots),$$

که در آن $\operatorname{Arg} z$ مقدار اصلی $\arg z$ است، یعنی $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$. ملاحظه می‌کنیم که $\ln z$ بینهایت مقداری است. با انتخاب $n = 0$ مقدار اصلی $\ln z$ از $\operatorname{Ln} z$ به دست می‌آید؛ که برابر است با $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$.

توانهای عمومی به صورت زیر تعریف می‌شوند (بخش ۱۲. ۸.)

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (z \neq 0, c \text{ مختلط}). \quad (9)$$

تابع مختلط $w = f(z) = z^c$ نگاشتی از ناحیه ای واقع در صفحه z را بتوی ناحیه ای در صفحه w تعریف می‌کند. نگاشتهای داده شده با (5)، (8)، و برخی دیگر در بخش ۹. ۱۲ مورد بحث قرار گرفتند (توصیف بیشتر این نگاشتها با توابع تحلیلی در فصل ۱۶ ارائه خواهد شد).

فصل ۱۳

انتگرال‌گیری مختلط

انتگرال‌گیری در صفحه مختلط به دو دلیل با اهمیت است:

۱. در کاربردها با انتگرال‌های حقیقی ای مواجه هستیم که محاسبه آنها به روش‌های معمولی در حساب انتگرال حقیقی ممکن نیست ولی چنین انتگرال‌هایی را با انتگرال‌گیری مختلط می‌توان محاسبه نمود.

۲. برخی از خواص اساسی توابع تحلیلی که اثبات شان به روش‌های دیگر خالی از اشکال نیست می‌توان با انتگرال‌گیری اثبات نمود. وجود مشتقات مراتب بالاتر توابع تحلیلی یکی از این خواص می‌باشد.^۱

در این فصل به تعریف و تشریح انتگرال‌های مختلط می‌پردازیم. مهمترین نتیجه‌ای که می‌گیریم قضیه انتگرال کوشی (بخش ۱۳. ۳) است. که فرمول مهم انتگرال کوشی (بخش ۱۳. ۵) از آن نتیجه می‌شود. در بخش ۱۳. ۶ ثابت می‌کنیم که اگر تابعی تحلیلی باشد، از هر مرتبه‌ای دارای مشتق است.

این مطلب بدان معنی است که رفتار توابع تحلیلی مختلط بسیار ساده‌تر از رفتار توابع حقیقی با متغیر حقیقی است.

(انتگرال‌گیری به کمک قضیه مانده‌ها و کاربرد آن در محاسبه انتگرال‌های حقیقی در فصل ۱۵

۱- در سال ۱۹۶۱ بدون انتگرال‌گیری یا روش‌های معادل توسط

P. Porcelli and E. H. Cannell, Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 76. P. 177- 181]

برای رسیدن به آن از قضیه توبولوژی که توسط جی. تی. وای بورن G.T. Whyburn ارائه شده استفاده شده است.

مورد بررسی قرار می‌گیرند.)

پیشیاز این فصل : فصل ۱۲.

مراجع : ضمیمه ۱ ، قسمت D.

جواب مسائل : ضمیمه ۲.

۱۳. ۱. انتگرال روی خط در صفحه مختلط

همانند حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی ، بین انتگرال‌های معین و انتگرال‌های نامعین با توابع اولیه فرق می‌گذاریم. یک انتگرال نامعین تابعی است که مشتق آن در یک ناحیه با تابع تحلیلی مفروضی برابر باشد. در بسیاری اوقات برای محاسبه انتگرال‌های نامعین مختلط می‌توان از خواص متناظر در حساب انتگرال حقیقی استفاده نمود.

برای تعریف انتگرال‌های معین ، یا انتگرال‌های روی خط توابع مختلط $f(z)$ ، که در آن $y = x + iz$ ، آشنایی با منحنیها در صفحه مختلط ضروری به نظر می‌رسد.

مسیر انتگرال‌گیری . در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی ، بر یک بازه (یک پاره خط) از خط حقیقی انتگرال‌گیری می‌شود. در انتگرال معین (انتگرال روی خط) مختلط ، در طول یک منحنی C در صفحه مختلط انتگرال می‌گیرند. منحنی C را که برآن انتگرال‌گیری صورت می‌پذیرد را **مسیر انتگرال‌گیری** می‌نامند.

هر منحنی را می‌توان به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) ; \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

نمایش داد که در آن t یک پارامتر حقیقی است. به عنوان مثال ،

$$z(t) = t + 3it \quad (0 \leq t \leq 2)$$

نمایش قسمتی از خط $x^3 = y$ می‌باشد(این قسمت را رسم کنید!) همینطور

$$z(t) = 4\cos t + 4i\sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

نمایش دایره $|z| = 4$ می‌باشد ، و مثالهای دیگر متعاقباً ارائه می‌شوند.

منحنی C را هموار گویند هرگاه در هر نقطه دارای مشتقی پیوسته و غیر صفر باشد

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t).$$

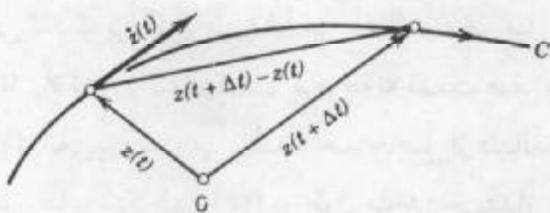
به طریق هندسی این بدان معنی است که C در همه جا به طور پیوسته دارای خط مماس است که به

۲- در واقع در طول یک قسمت (یک قوس) از یک منحنی ، اما برای سادگی کار از لفظ «منحنی» به جای هردی آنها استفاده می‌کنیم. دانشجویان آشنا به بخش ۹.۱ توجه خواهند نمود که بحث فعلی شبیه بحثی است که در بخش ۹.۱ آمده است.

صورت

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

تعريف می شود (شکل ۳۰۸).

شکل ۳۰۸. بردار سرعت $\dot{z}(t)$ یک منحنی C در صفحه مختلط با $z(t)$ مفروض.پیکان مشخص شده برمنحنی جهت مثبت (جهت افزایش t) را نشان می دهد.

تعريف انتگرال روی خط مختلط

مباحث این قسمت مشابه قسمتهای مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است. منحنی همار C ، مفروض در شکل (۱) را در صفحه مختلط وتابع پیوسته f با ضابطه (z) که (دست کم) در تمام نقاط C تعریف شده باشد را در نظر می گیریم. حال فاصله $a \leq t \leq b$ را که در (۱) معرفی شد توسط نقاط

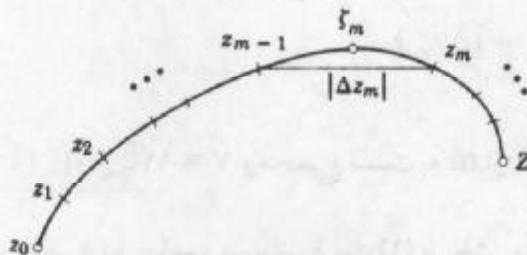
$$t_0 (= a), t_1, \dots, t_{n-1}, t_n (= b),$$

که در آن $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ افزای می کنیم. این افزای سبب افزای C توسط نقاط (شکل ۳۰۹)

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n (= z),$$

که در آن $z_j = z(t_j)$ می شود. هر قسمت از منحنی های جزء C یک نقطه دلخواه انتخاب می کنیم. این نقطه را $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ می نامیم که بر منحنی C به ترتیب بین z_1 و z_2 ، z_2 و z_3 ، z_n و z_{n-1} ، \dots ، z_r انتخاب می شوند. هم اکنون مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \quad (2)$$



شکل ۳۰۹. انتگرال روی خط مختلط

که در آن

$$\nabla Z_m = z_m - z_{m-1}.$$

این مطلب را به ازای هر $n = 2, 3, \dots$ به طور کاملاً مستقل اعمال می‌کنیم، و این کار را طوری انجام می‌دهیم که بزرگترین $|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$ وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل کند؛ این مطلب ایجاب می‌کند که بزرگترین $|\Delta z_m|$ نیز به سمت صفر میل کند زیرا این مقدار نمی‌تواند از طول کمال C از z_m تا z_{m-1} تجاوز کند و کمان مربوطه به سمت صفر میل می‌کند زیرا طول قوس منحنی هموار C بر حسب α تابعی پیوسته می‌باشد. حد حاصل از دنباله اعداد مختلط S_1, S_2, \dots, S_n را انگرال روی خط (یا به طور ساده انگرال $f(z)$ در طول منحنی جهت‌دار C) که مسیر انگرال‌گیری نامیده می‌شود) می‌نامند و با نماد

$$\int_C f(z) dz \quad (3)$$

نمایش می‌دهند. اگر C یک مسیر بسته باشد (که نقطه انتهای z بر نقطه ابتدای z منطبق شده باشد، مانند یک دایره یا یک منحنی به شکل 8. ما در بحث خود از نماد استاندارد

$$\oint_C f(z) dz \quad (4)$$

نیز استفاده می‌کنیم.

مثال‌های مربوط به این قسمت در بخش آتی ارائه خواهند شد.

مفروضات عمومی. همه مسیرهای انگرال‌گیری انگرال‌ها روی خط مختلط تکه‌ای هموار می‌باشند، یعنی از تعداد متناهی منحنی هموار که از انتها به هم‌دیگر متصل شده‌اند، تشکیل شده‌اند.

وجود انگرال روی خط مختلط^۳

باتوجه به پیوسته بودن f و به طور تکه‌ای هموار بودن C وجود انگرال (3) حاصل می‌شود.

$$\text{همانند فصل قبل می‌نویسیم } f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{و قرار می‌دهیم} \\ \Delta z_m = \Delta x_m + i \Delta y_m = \zeta_m + i \eta_m$$

در آن صورت (2) ممکن است به صورت زیر نوشته شود

$$S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i \Delta y_m) \quad (4)$$

که در آن $v = v(\xi_m, \eta_m)$ ، $u = u(\xi_m, \eta_m)$ و مجموع نسبت به m از ۱ تا n انجام می‌پذیرد. حال

۳- اگر نخواهیم به انگرال‌های خط حقیقی توصل جوییم، می‌توانیم فرمول (1) در بخش بعد را تعریف انگرال خط مختلط بگیریم.

می توان S_n را به صورت چهار مجموع زیر تفکیک نمود:

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i \left[\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m \right].$$

این مجموعها حقیقی اند. چون f پیوسته است، لذا u و v نیز پیوسته می باشند. بنابراین، اگر n به طرقی که گفته شد به سمت بینهایت میل کند، در آن صورت بزرگترین Δx_m و Δy_m به سمت صفر میل می کنند و هریک از چهار مجموع فوق یک انتگرال روی خط حقیقی خواهند شد. بنابراین داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i \left[\int_C u dy + \int_C v dx \right]. \quad (5)$$

این موضوع نشان می دهد که تحت مفروضات فوق (یعنی f بر C پیوسته و C تکه ای هموار) انتگرال روی خط (۳) وجود دارد و مقدار آن مستقل از انتخاب افزای و نقاط میانی x_m است.

سه خاصیت اساسی انتگرال روی خط مختلط

فهرست سه ویژگی انتگرال روی خط مختلط کاملاً با ویژگیهای انتگرالهای معین حقیقی (وانگرالهای روی خط حقیقی) مشابه می باشند و بلا فاصله از تعریف نتیجه می شوند.

۱. انتگرالگیری یک اپراتور خطی است، یعنی از مجموع دو یا چند تابع می توان جمله به جمله انتگرال گرفت، و ضرایب ثابت را می توان از زیر علامت انتگرال خارج نمود، در واقع

$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz. \quad (6)$$

۲. اگر C به دو قسمت C_1 و C_2 تجزیه شود (شکل ۳۱۰)، آنگاه داریم

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \quad (7)$$



شکل ۳۱۰. تقسیم جزئی مسیر [فرمول (۱۷)]

۳. اگر جهت انتگرالگیری را عوض کنیم، مقدار انتگرال در یک منها ضرب می شود

$$\int_C f(z) dz = - \int_{Z}^z f(z) dz; \quad (8)$$

در اینجا مسیر C با نقطه انتهای Z و همان مسیر قبلی است، در طرف چپ از Z تا z ، و در طرف راست از Z تا z انتگرالگیری می شود.

روشهای انتگرال‌گیری و مثالهایی از نتایج انتگرال‌ها در بخش بعدی ارائه می‌شوند و مسائل در انتهای آن بخش ارائه خواهد شد.

۱۳. ۲ دو روش انتگرال‌گیری . مثالها

انتگرال‌گیری مختلط روشی نیرومند برای محاسبه انتگرال‌ها می‌باشد. ابتدا به دو روش به انتگرال‌گیری مختلط پرداخته، و روشهای دیگر در این فصل و فصل ۱۵ ارائه می‌شوند.

روش اول: استفاده از نمایش مسیر

این روش برای هر تابع مختلط پیوسته قابل استفاده است.

قضیه ۱ (انتگرال‌گیری با استفاده از مسیر)

هرگاه C یک مسیر تکه‌ای هموار باشد، که با $z = z(t)$ ، که در آن $a \leq t \leq b$ نمایش داده شده باشد، همچنین $f(z)$ یک تابع پیوسته بر C باشد، آنگاه

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt ; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

اثبات. بنابر (۵) بخش ۱.۱۳ ، طرف چپ تساوی (۱) بر حسب انتگرال‌ها روی خط حقیقی مفروض می‌باشد، و نشان می‌دهیم که طرف راست (۱) برابر (۵) بخش ۱.۱۳ است. داریم $z = x + iy$ و $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$. برای سادگی قرار می‌دهیم $v = v[x(t), y(t)]$ و $u = u[x(t), y(t)]$. از طرفی داریم $dx = \dot{x} dt$ و $dy = \dot{y} dt$. با توجه به این نتایج از (۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt &= \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt \\ &= \int_C [u dx - v dy + i(u dy + v dx)]. \end{aligned}$$

عبارت آخر در تساوی فوق برابر (۵) بخش ۱.۱۳ می‌باشد. این نتیجه موردنظر ما بوده و بدین طریق اثبات کامل می‌شود.

گامها در به کارگیری قضیه ۱

(الف) ارائه مسیر C به صورت $z(t)$ ، که در آن $a \leq t \leq b$.

$$(ب) محاسبه مشتق \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} .$$

(ج) جایگزینی $z(t)$ به ازای هر z در $f(z)$ (یا $x(t)$ به جای x و $y(t)$ به جای y).

(د) از $f[z(t)] \dot{z}(t)$ بر حسب t از a تا b انتگرال می‌گیریم.

مثال ۱ . یک نتیجه اساسی: انتگرال $\frac{1}{z}$ روی دایرهٔ واحد

نشان دهید که

(۲). C دایره واحد، انتگرالگیری خلاف حرکت عقربه های ساعت نتایج حاصله نتیجه بسیار جالبی است و کاربردهای متعدد دارد.

حل. دایره واحد C (ر. ک. بخش ۱۲. ۳) را می توان به صورت

$$z(t) = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

نمایش داد. انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت با افزایش t از 0 تا 2π متناظر می باشند. با مشتقگیری می یابیم

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t.$$

از طرفی $\frac{1}{z(t)}$. با استفاده از نتایج و جایگزینی کردن آنها در انتگرال می یابیم

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t) dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

که همان نتیجه مورد نظر است.

با بکارگیری فرمول اویلر (بخش ۶. ۱۲) می یابیم $z(t) = e^{it}$ و از آنجا

$$dz = ie^{it} dt \quad \text{و از آنجا} \quad \frac{1}{z(t)} = e^{-it}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

مثال ۲. انتگرال توانهای صحیح

فرض کنید $f(z) = (z - z_0)^m$ که در آن m عددی صحیح و z_0 یک عدد مختلط ثابت است. انتگرال این تابع در طول دایره C که شعاع آن ρ و مرکزش z_0 است (شکل ۳۱۱) را درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت باید.

حل. C را می توان به صورت

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ارائه داد. در این صورت می یابیم

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad dz = i\rho e^{it} dt.$$

و از آنجا

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt.$$

با استفاده از فرمول اویلر (۵) بخش ۱۲. ۶ طرف راست فرمول فوق برابر است با

$$i\rho^{m+1} \left[\int_0^{2\pi} \cos(m+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(m+1)t dt \right].$$

به ازای $m = -1$ داریم $i\rho^{m+1} = 2\pi i$ است.

به ازای هر عدد صحیح $-m \neq -1$ مقدار هر دو انتگرال فوق برابر صفر می‌شوند. بنابراین داریم

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1), \\ 0 & (m \neq -1). \end{cases} \quad (3)$$

وابسته به مسیر. حال به مهمترین واقعیت رسیدیم. هرگاه انتگرال تابع f با ضابطه $f(z)$ از یک نقطه z_0 تا نقطه z در طول مسیرهای متمایز مفروض باشد، عموماً انتگرال‌ها دارای مقادیر متمایزی خواهند بود. به بیان دیگر، انتگرال روی خط مختلط نه فقط به نقاط انتهایی مسیر، بلکه عموماً به خود مسیر نیز وابسته است. مثال بعدی این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۳. انتگرال یک تابع غیرتحلیلی . وابسته به مسیر

انتگرال $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(t + i)$ از $z_0 = 0$ تا $z_1 = 1 + i$ را برای مسیرهای زیر باید.

(الف) در طول مسیر C ترسیم شده در شکل ۳۱۲.

(ب) در طول مسیر C_1 که از مسیرهای C و C_2 تشکیل شده است.

حل. (الف) C را می‌توان به صورت

$$z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

نمایش داد. با توجه به آن می‌توان نوشت

$$f[z(t)] = z(t) = t, \quad \dot{z}(t) = 1 + i.$$

وازانجا

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+i) dt = \frac{1}{2}(1+i).$$

(ب) C_1 را می‌توان به صورت

$$z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

نمایش داد. لذا بر C_1 می‌باشیم

$$f[z(t)] = x(t) = t, \quad \dot{z}(t) = 1.$$

همچنین C_2 را می‌توان به شکل

$$z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1).$$

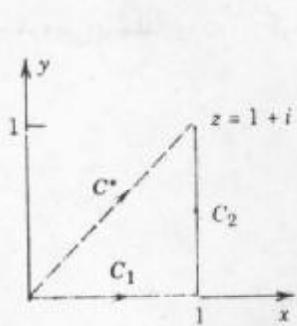
نمایش داد. بنابراین بر C_2 داریم

$$f[z(t)] = x(t) = 1, \quad \dot{z}(t) = i.$$

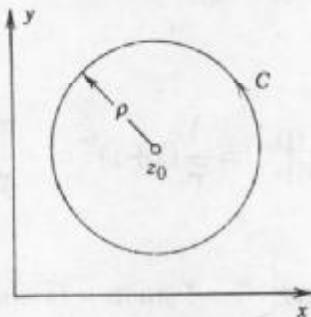
با استفاده از (۷) بخش ۱۳. ۱ می‌باشیم

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 1 \cdot idt = \frac{1}{2} + i.$$

مشاهده می کنیم که این نتیجه با نتیجه حاصل از (الف) تفاوت دارد.



شکل ۳۱۲. مسیرهای مثال ۳



شکل ۳۱۱. مسیر مثال ۲

روش دوم: انتگرالگیری نامعین

در حساب دیفرانسیل و انتگرالهای حقیقی، چنانچه به ازای یک $f(x)$ پیوسته مفروض، $F(x)$ را طوری بیابیم که $F'(x) = f(x)$ ، در آن صورت بنا به اولین قضیه بنیادی؛ انتگرال به صورت زیر محاسبه می شود

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)].$$

این روش را در قضیه بعدی تحت شرایطی برای توابع تحلیلی مختلط تعمیم می دهیم، و دقیقاً مشابه با روش بحث شده در حساب انتگرال حقیقی می باشد. در بحث زیر تابع $F(z)$ را طوری می یابیم که مشتق $(F'(z))'$ برابر با تابع مفروض $f(z)$ باشد. اغلب فرمولهای مشتقگیری توابع حقیقی در یافتن $F(z)$ به کار گرفته می شود.

قضیه ۲ (انتگرالگیری نامعین توابع تحلیلی)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده^۴ D تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال نامعینی از $f(z)$ در دامنه D وجود دارد، یعنی، تابعی تحلیلی ای مانند $f(z)$ وجود دارد به طوری که در D ، $F'(z) = f(z)$ ، و برای هر مسیر در D که دو نقطه z_1 و z_0 از D به هم وصل می کند داریم

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad [F'(z) = f(z)]. \quad (4)$$

(توجه کنید که به جای نوشتمن منحنی C در زیر علامت انتگرال می توان از $\int_{z_0}^{z_1}$ تا z_1 انتگرالگیری کرد زیرا مقدار انتگرال از مسیر انتگرالگیری مستقل است.)

این قضیه در بخش ۱۳.۴ (با استفاده از قضیه انتگرال کوشی، که در بخش بعدی بحث می شود) اثبات خواهد شد.

^۴- D را همبند ساده نامند اگر هر منحنی پسته ساده واقع در D (یعنی، منحنی بسته ای در D که خود را قطع نمی کند) فقط شامل نقاط D باشد.

اگر $f(z)$ تام باشد (ر. ک. بخش ۱۲. ۶)، می‌توان بجای ناحیه D صفحه مختلط (که مطمئناً همبند ساده می‌باشد) را به کار گرفت.

مثال ۴.

$$\int_{\circ}^{1+i} z^r dz = \frac{1}{r} z^r \Big|_{\circ}^{1+i} = \frac{1}{r} (1+i)^r = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$$

مثال ۵.

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z dz = \sin z \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = \sqrt{2} \sin \pi i = \sqrt{2} i \sinh \pi = \sqrt{2} / \sqrt[4]{e^{\pi i}}.$$

مثال ۶.

$$\int_{\lambda+i\pi}^{\lambda-2\pi i} e^z dz = \sqrt{2} e^z \Big|_{\lambda+i\pi}^{\lambda-2\pi i} = \sqrt{2} (e^{\lambda-\frac{2\pi i}{2}} - e^{\lambda+\frac{\pi i}{2}}) = 0.$$

زیرا e^z متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشد.

مثال ۷.

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{z} = \text{Ln}i - \text{Ln}(-i) = \frac{i\pi}{2} - (-\frac{i\pi}{2}) = i\pi.$$

در اینجا D ، صفحه مختلط بجز صفر و محور حقیقی منفی (که در این نقاط z تحلیلی نیست)، که به وضوح یک دامنه همبند ساده است، می‌باشد.

مثال ۸. همبند ساده پودن دامنه در قضیه ۲ ضروری است.

در معادله (۴) با قرار دادن $z_1 = z_0$ می‌یابیم $F(z_0) - F(z_0) = 0$ ؛ یعنی انتگرال در طول

هر منحنی بسته صفر است اما (ر. ک. . مثال ۱)

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (\text{روی دایره واحد در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت})$$

گرچه $\frac{1}{z}$ در طوق $\frac{3}{2} < z < \frac{1}{2}$ تحلیلی است؛ ولی این دامنه همبند ساده نیست.

کرانی برای قدر مطلق انتگرالها

اغلب اوقات لازم است که قدر مطلق انتگرال روی خط مختلط را تخمین بزنیم. فرمول

اساسی عبارت است از

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad (5), \quad (\text{نامساوی})$$

که در آن L طول مسیر C و M عدد ثابتی است که در هر نقطه z از C داریم $|f(z)| \leq M$. بنابراین مجموع S را در نظر می‌گیریم. بنابراین نامساوی مثلثی تعمیم یافته (۶)

بخش ۱۲. ۱ می یابیم

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \leq \sum_{m=1}^n |f(\zeta_m)| |\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|.$$

که در آن $|\Delta z_m|$ طول وتری است که نقاط انتهایی آن z_{m-1} و z_m می باشند، به شکل ۳۰۹ بخش ۱۳. ۱ مراجعه کنید. از اینرو، L ، مجموع طرف راست طول خط شکسته ای مرکب از پاره خطهای است که نقاط انتهایی آنها $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = Z$ می باشند. هرگاه n طوری به سمت بینهایت میل کند که بزرگترین $|\Delta z_m|$ به سمت صفر میل کند (مانند بخش ۱۳. ۱). آنگاه بنا به تعریف طول منحنی، L به سمت L طول منحنی C ، میل می کند. از این موضوع نامساوی (۵) نتیجه می شود.
از روی (۵) نمی توان گفت که قدر مطلق انتگرال چقدر به ML نزدیک است و مقدار واقعی آن چقدر است. اما این موضوع سبب نمی شود که در کاربردهایی از (۵) چنانچه خواهیم دید استفاده نکنیم، در هر صورت چگونگی انجام کار را با ارائه یک مثال روشن می کنیم.

مثال ۹. تخمین یک انتگرال

مطلوب است محاسبه کردن بالای قدر مطلق انتگرال

$$\int_C z' dz$$

که در آن C یک پاره خط از $i + 1$ تا i می باشد.

حل. با توجه به اینکه $|f(z)| = |z'| \leq 2$ و بر $C = \sqrt{2}$ داشته باشیم

$$\left| \int_C z' dz \right| \leq 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

قدر مطلق انتگرال برابر است با (در. ک. مثال ۴)

$$\left| -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \right| = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0.9428.$$

مسائل بخش‌های ۱۰. ۱۳ و ۱۲. ۱

مطلوب است نمایش $z = z(t)$ از پاره خط با نقاط انتهایی

$$z = -4 + 5i \quad z = -3 + 2i. 2$$

$$z = 1 + 2i \quad z = 0. 1$$

$$z = 5 + 10i \quad z = 0. 4$$

$$z = 3 + 5i \quad z = 4 + 2i. 3$$

$$z = 9 - 5i \quad z = 1 - i. 6$$

$$z = -7 + 38i \quad z = -4i. 5$$

چه منحنيهایی با توابع زیر نشان داده می شوند؟

$$3 - it; \quad -1 \leq t \leq 1. 8$$

$$(1 + 2i)t; \quad 0 \leq t \leq 3. 7$$

$$2+i+3e^{it} ; \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad ۱۰$$

$$1-i-2e^t ; \quad 0 \leq t \leq \pi. \quad ۹$$

$$t+2it^2 ; \quad -2 \leq t \leq 2. \quad ۱۲$$

$$t+2t^2i ; \quad -1 \leq t \leq 2. \quad ۱۱$$

$$t+t^{-1}i ; \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 5. \quad ۱۴$$

$$\cos t + 2i \sin t ; \quad -\pi < t < \pi. \quad ۱۳$$

منحنیهای زیر را به شکل $z(t) = z(t)$ نمایش دهید.

$$|z-i|=2. \quad ۱۶$$

$$|z-3+4i|=4. \quad ۱۵$$

$$(2, 4) \text{ تا } (0, 0) \text{ از } y = x^2. \quad ۱۸$$

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ تا } y = \frac{1}{x}. \quad ۱۷$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36. \quad ۲۰$$

$$x^2 + 4y^2 = 4. \quad ۱۹$$

با استفاده از قضیه ۱، $\int_C f(z) dz$ را محاسبه کنید و با استفاده از قضیه ۲، نتیجه حاصل را مطابقت دهید.

پاره خطی است که از $-1 - i$ تا $i + 1$ ادامه دارد. $\quad ۲۱$

پاره خط مساله. $\quad ۲۲$

نیم دایره $|z| = 2$ که از $-2i$ تا $2i$ در نیمه صفحه راست واقع است. $\quad ۲۳$

کران مثلثی بارتوس $0, 1, i$ (درجت حرکت عقربه های ساعت). $\quad ۲۴$

مطلوب است محاسبه $\int_C f(z) dz$ ، که در آن

دایره واحد (درجت عکس حرکت عقربه های ساعت). $\quad ۲۵$

سهی $y = x^2$ از 0 تا 1 . $\quad ۲۶$

دایره C ، $f(z) = \operatorname{Im} z. \quad ۲۷$

پاره خطی از i تا $1+i$. $\quad ۲۸$

دایره $|z - 1| = 4$ (درجت حرکت عکس حرکت عقربه های ساعت). $\quad ۲۹$

پاره خطی از 0 تا i . $\quad ۳۰$

پاره خط قائم از πi تا 0 . $\quad ۳۱$

هر مسیر از 0 تا πi . $\quad ۳۲$

هر مسیر از 0 تا $\frac{\pi i}{6}$. $\quad ۳۳$

کران مربعی به رتوس $0, 1, 1+i$ و i (درجت حرکت عقربه های ساعت). $\quad ۳۴$

مربع مذکور در مساله. $\quad ۳۴$

مربع مذکور در مساله. $\quad ۳۶$

سهی $y = x^2$ از 0 تا 1 . $\quad ۳۷$

$$38. \quad \text{درجهت حرکت عقربه های ساعت} \quad |z - 1| = \frac{1}{2} \quad \text{دایره } C, f(z) = (z - 1)^{-1} - (z - 1)^{-2}$$

$$39. \quad \text{نیم دایره } C \text{ نیم دایره } \pi i \text{ از } |z| = \pi \text{ تا } \pi i \text{ واقع در نیمه صفحه راست.}$$

$$40. \quad \text{هرمسیر از } \frac{\pi i}{4} \text{ در قرص واحد.} \quad C, f(z) = \sec^2 z$$

$$41. \quad \text{مطلوب است محاسبه } \int_C \operatorname{Im}(z^2) dz \text{ از } 0 \text{ تا } 4i + 2 \text{ در طول (الف) پاره خط، (ب) محور } x \text{ تا 2 و سپس به طور قائم تا } 2 + 4i, \text{ (ج) سهمی } y = x.$$

$$42. \quad \text{مطلوب است محاسبه } \int_C (z^{-1} + z^2) dz \text{ از } 1 \text{ تا } -1 \text{ در طول (الف) نیم دایره واحد فوقانی (ب) نیم دایره واحد تحتانی.}$$

43. مطلوب است محاسبه $\int_C |z| dz$ از $i : z = -i$ تا $A : z = -i$ در طول (الف) پاره خط AB ، (ب) دایره واحد که در نیمه صفحه چپ واقع است، (ج) دایره واحد که در نیمه صفحه راست واقع است.

44. فرمول (۶) بخش ۱۳.۱ را ثابت کنید.

45. درستی فرمول (۶) بخش ۱۳.۱ را به ازای $k_1 f_1 + k_2 f_2 = 3z - z^2$ ، که در آن C نیمه فوقانی دایره یکه از 1 تا -1 است، تحقیق کنید.

46. درستی فرمول (۷) بخش ۱۳.۱ را در مورد $\int_C f(z) dz$ تحقیق کنید، که در آن C دایره واحد، C_1 نیمه فوقانی، و C_2 نیمه تحتانی آن می باشند.

47. درستی (۸) بخش ۱۳.۱ را به ازای $f(z) = z$ در حالتی که C پاره خطی از $-1 - i$ تا $1 + i$ است تحقیق کنید.

با استفاده از نامساوی ML (۵)، کرانهای بالای انتگرالهای زیرین را باید، که در آنها C پاره خطی است که از 0 تا $4i + 3$ ادامه دارد.

$$48. \quad \int_C e^z dz, \quad \int_C \ln(z+1) dz$$

۴۹. در مساله ۴۹ با تجزیه C به دو قوس، کران بهتری برای انتگرال باید.

۱۳. ۳ قضیه انتگرال کوشی

انتگرال روی خط تابع f نه تنها به نقاط انتهایی بلکه معمولاً به انتخاب مسیر انتگرالگیری هم بستگی دارد (ر. ک. بخش ۱۳.۲). ولی ما در این بخش با ارائه قضیه بسیار جالبی (قضیه ۲) به بررسی انتگرالهایی می پردازیم که به مسیر انتگرالگیری بستگی ندارند. یکی از قضایای مهم این بخش قضیه

انتگرال کوشی (قضیه ۱) است که بر طبق آن انتگرال برخی از توابع بر روی هر مسیر بسته، صفر است. برای بیان قضیه کوشی به دو مفهوم زیر نیاز داریم:

۱. مسیر بسته ساده ، مسیر بسته ای است (شکل ۱۳.۱) که خودش را قطع نکرده یا بر خودش مماس نباشد (شکل ۳۱۳). برای مثال دایره یک منحنی ساده و منحنی به شکل ۸ یک منحنی غیر ساده می باشد.



شکل ۳۱۳. مسیرهای بسته

۲. دامنه D واقع در صفحه مختلط را دامنه همبند ساده نامند (بخش ۱۲.۳) اگر هر مسیر بسته ساده در D فقط شامل نقاط D باشد. دامنه ای که همبند ساده نباشد به یک ناحیه همبند چندگانه موسوم است. به عنوان مثال، داخل یک دایره («قرص مستدير»)، بیضی، یا مربع همبند ساده هستند. به طور کلی داخل یک منحنی بسته ساده همبند ساده است. یک طوق (بخش ۱۲.۳) همبند چندگانه (به بیان دقیقتر، همبند دوگانه^۵) است. در شکل ۳۱۴ مثالهای بیشتری ارائه شده اند.

یادآوری می کنیم که بنا به تعریف،تابع یک رابطه تک مقداری است (ر. ک. بخش ۱۲.۴)، حال قضیه انتگرال کوشی را در ذیل ارائه می گردد. این قضیه را گاهی اوقات قضیه کوشی - گورسانیز می نامند.

قضیه ۱. قضیه انتگرال کوشی

هرگاه $f(z)$ در دامنه کراندار همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر مسیر بسته ساده C واقع در D (ر. ک. شکل ۳۱۵)،

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (1)$$

۵- یک دامنه کراندار (یعنی، ناحیه به طور کامل در داخل دایره ای قرار داشته باشد) را همبند p گانه نامند هرگاه کران آن مرکب از p مجموعه همبند بسته که با هم هیچ نقطه مشترکی ندارند باشد. در مورد طوق داریم $p = ۲$ ، زیرا کران آن از دو دایره که دارای نقطه مشترکی نیستند تشکیل شده است.

قبل از اثبات قضیه، به ارائه چند مثال برای تفهیم بهتر مطلب می‌پردازیم. یک مسیر بسته ساده را بعضی اوقات کانتور و انتگرال روی چنین مسیری را انتگرال کانتور می‌نامند. بنابراین، در (۱) و مثالهای زیر مسیرهای آنها کانتور می‌باشند.

مثال ۱. برای هر مسیر بسته C داریم

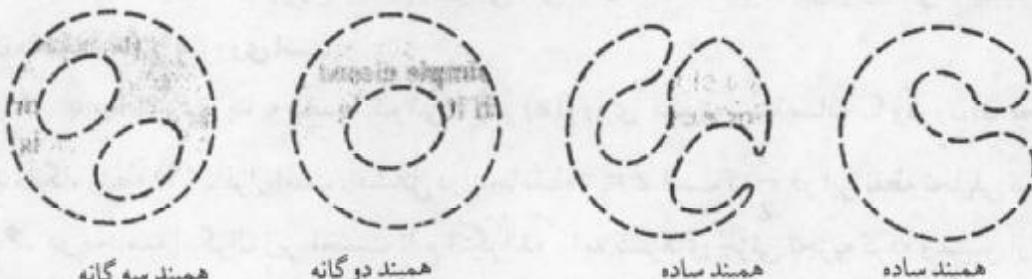
$$\oint_C e^z dz = 0 \quad , \quad \oint_C \cos z dz = 0 \quad , \quad \oint_C z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

زیرا توابع انتگرالهای فوق به ازای هر z ، تحلیلی می‌باشند.

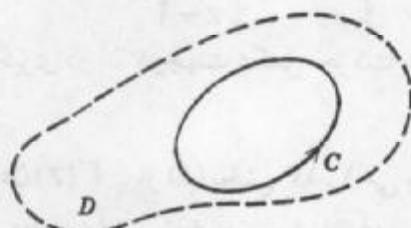
مثال ۲.

$$\oint_C \sec z dz = 0 \quad , \quad \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

که در آنها C دایره واحد، $z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$ در نقاط $\dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ تحلیلی نیست، اما همه این نقاط در خارج C قرار دارند؛ یعنی روی C یا داخل C قرار ندارند. برای انتگرال دوم وضعیت مشابهی وجود دارد، که تابع زیر علامت انتگرال در $z = \pm 2i$ خارج C تحلیلی نیست.



شکل ۳۱۴. نواحی همبند ساده و همبند چندگانه



شکل ۳۱۵. قضیه انتگرال کوشی

مثال ۳.

$$\oint_C \bar{z} dz = 2\pi i$$

(که در آن C دایره واحد و مسیر انتگرالگیری بر آن در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است). البته نتیجه فوق دلیل بر نادرست بودن قضیه انتگرال کوشی نیست زیرا تابع $\bar{z} = f(z)$ یک تابع غیر تحلیلی است و قضیه انتگرال کوشی برای توابع تحلیلی برقرار بود و در اینجا نمی‌توان این قضیه را

به کار گرفت.

مثال ۴.

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 0,$$

که در آن C دایره واحد است. این نتیجه از قضیه کوشی نتیجه نمی‌شود، زیرا $\int_C f(z) dz = 0$ در $z = 0$ تحلیلی نیست. بنابراین شرط این که f در D تحلیلی باشد یک شرط کافی برای برقراری (۱) است و یک شرط لازم نیست.

مثال ۵.

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

که در آن انتگرال‌گیری روی دایره واحد درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام گرفته است (ر.ث. بخش ۱۳. ۲). درون طبقه $\frac{1}{z}$ در آن $|z| < \frac{1}{2}$ تحلیلی است، قرار دارد، اما این دامنه همبند ساده نیست، بنابراین از قضیه کوشی نمی‌توان استفاده نمود. درنتیجه شرط همبند ساده بودن دامنه D کاملاً ضروری است.

به بیان دیگر، بنا به قضیه کوشی، اگر $f(z)$ روی مسیر بسته ساده C و درون آن تحلیلی باشد، آنگاه رابطه (۱) برقرار است. مشکل در اینجا نقطه $z = 0$ است که در این نقطه تحلیلی نیست.

مثال ۶. در محاسبه انتگرال زیر نخستتابع انتگرال‌ده را به کسرهای جزئی تجزیه کرده و سپس از قضیه انتگرال کوشی استفاده کنید.

$$\oint_C \frac{Vz - 6}{z^2 - 2z} dz = \oint_C \frac{3}{z} dz + \oint_C \frac{4}{z-2} dz = 3 \times 2\pi i + 0 = 6\pi i$$

که در آن C دایره واحد و انتگرال‌گیری در آن درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت صورت پذیرفته است.

اثبات کوشی با فرض پیوسته بودن $(z')f'$. از (۵) بخش ۱. ۱۳ می‌یابیم

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dz).$$

چون $f(z)$ در D تحلیلی است، مشتق آن $(z')f'$ در D موجود می‌باشد. پیوسته بودن $(z')f'$ و (۵) بخش ۱۲. ۵ ایجاب می‌کند که u و v دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در D باشند. بنابراین می‌توان از قضیه گرین (بخش ۹. ۴) (با u و v - به جای F_1 و F_2) استفاده کرد و نتیجه گرفت

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

که در آن R ناحیه‌ای است که با C محصور شده است. معادله دوم کوشی-ریمان (بخش ۱۲. ۵)

نشان می دهد که انتگرال طرف راست همواره صفر است. درنتیجه انتگرال طرف چپ صفر است. به همین روش با استفاده از معادله اول کوشی - ریمان نتیجه می شود که انتگرال آخر در فرمول فوق صفر است، و بدین ترتیب اثبات کوشی به اتمام می رسد.

اثبات گورسا بدون در نظر گرفتن پیوستگی $f'(z)$ کارنسبتاً پیچیده ای است. اثبات گورسا را به متعلم واگذار می کنیم. این اثبات در ضمیمه ۴ ارائه شده است.

مستقل از مسیر، تغییر شکل مسیر

در بخش ۱۳.۱ آموختیم که اگر انتگرال تابع f از Z_1 تا Z_2 را به دست آوریم. عموماً جواب حاصل نه فقط به Z_1 و Z_2 ، بلکه به شکل هندسی مسیر وابسته است. ولی برای توابع تحلیلی وضع چنین نیست، یعنی اگر $f(z)$ در D تحلیلی و C یک مسیر دلخواه از Z_1 تا Z_2 واقع در D باشد، آنگاه انتگرال $\int f(z) dz$ در مسیر D وابسته نبوده بلکه تنها به Z_1 و Z_2 وابسته است. درستی این موضوع در قضیه زیر مورد بررسی قرار می گیرد.

قضیه ۲ (مستقل از مسیر)

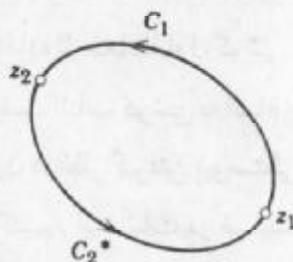
هرگاه $f(z)$ در دامنه همیند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال $\int f(z) dz$ مستقل از مسیر در D است.

اثبات. فرض کنید Z_1 و Z_2 دونقطه دلخواه در D باشند. همانند شکل ۳۱۶، دو مسیر C_1 و C_2 در D را از Z_1 تا Z_2 که هیچ نقطه مشترک دیگری ندارند درنظر می گیریم. خلاف جهت مسیر C_2 را با نماد C_2^* نمایش می دهیم (شکل ۳۱۷). انتگرال از Z_1 روی C_1 تا Z_2 و روی C_2^* برگشت به Z_1 به دست می آوریم. مجموع دو مسیر C_1 و C_2^* یک مسیر بسته ساده است و قضیه کوشی را می توان تحت مفروضات قضیه پیشین به کار گرفت و نتیجه گرفت

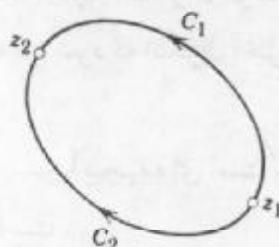
$$\oint_C f(z) dz = - \oint_{C_2^*} f(z) dz \quad \text{واز آنجا} \quad \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2^*} f(z) dz = 0 \quad (2')$$

- ادوارد گورسا EDOUARD GOURSAT (۱۸۵۸ - ۱۹۳۶)، ریاضیدان فرانسوی است. کوشی قضیه خود را در سال ۱۸۲۵ مبشر کرد. رفع این شرط توسط گورسا کاملاً مhem است (مقاله زیر را بینید).

Transactions Amer. Math. Soc., Vol. 1, 1900 ()، به عنوان مثال، در ارتباط با این واقعیت که مشتقات توابع تحلیلی نیز تحلیلی است، که در آینده بحث خواهد شد. گورسا همچنین کار بسیار اساسی در معادلات با مشتقات جزئی انجام داده است.



شکل ۳۱۷. فرمول (۲)

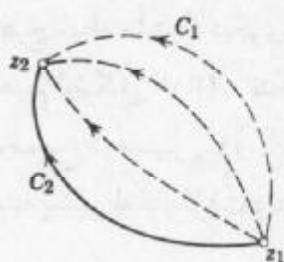


شکل ۳۱۶. فرمول (۲)

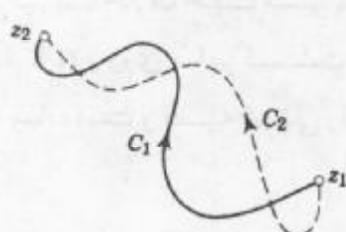
هر گاه جهت انتگرال‌گیری در طول Z_1 تا Z_2 را عوض کنیم، آنگاه مقدار انتگرال در ۱- ضرب می‌شود که بنابراین انتگرال $\int f(z) dz$ برابر C_1 و C_2 با هم برابرند، یعنی (شکل ۳۱۹)

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz. \quad (2)$$

توجه کنید که اثبات قضیه فوق برای مسیرهایی ارائه شده است که تنها در نقاط انتهایی مشترک هستند. برای مسیرهایی که دارای تعداد متناهی نقاط مشترک باشند، قضیه را می‌توان برای هر حلقه به کار گرفت و نتیجه گرفت که قضیه برای چنین مسیرهایی نیز برقرار است (شکل ۳۱۸). ولی برای مسیرهایی که دارای بینهایت نقطه مشترک هستند اثبات به سادگی صورت نمی‌پذیرد و برای اثبات قضیه نیاز به مفروضات اضافی دارند که از بحث ما بیرون است.



شکل ۳۱۹. تغییر شکل پیوسته مسیر



شکل ۳۱۸. مسیرهای با تعدادی نقاط مشترک

اصل تغییر شکل مسیر. انگیزه مستقل از مرز بودن نتیجه زیر را به دست می‌دهد. می‌توان تصور کرد که مسیر C_2 در (۲) از روی مسیر C_1 با یک تغییر شکل پیوسته به دست آمده است. (شکل ۳۱۹) دو تا از این مسیرهای مابین تعداد نامتناهی مسیر را نشان می‌دهد. نتیجه می‌گیریم که در یک انتگرال می‌توانیم تغییر شکل پیوسته ای به مسیر انتگرال‌گیری بدهیم (نقاط انتهایی را ثابت نگه می‌داریم)؛ تا زمانی مسیر تغییر شکل یافته از نقطه ای که در آن $f(z)$ تحلیلی نیست نگذرد، مقدار انتگرال روی خط تحت تغییر شکل تغییر نمی‌کند. این مطلب به اصل تغییر شکل مسیر موسوم می‌باشد.

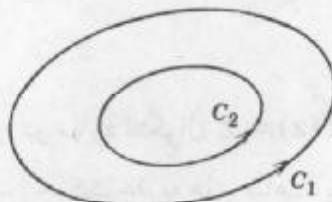
قضیه کوشی برای دامنه های همبند چندگانه

قضیه کوشی را می توان برای دامنه های همبند چندگانه نیز به کار گرفت. ابتدا این قضیه را برای دامنه همبند دوگانه D که با منحنی بیرونی C_1 و داخلی C_2 (شکل ۳۲۰) محصور می باشد را شرح می دهیم. هرگاه $f(z)$ در هر دامنه D ، که شامل D به عنوان منحنیهای کرانه ای است تحلیلی باشد، آنگاه داریم که (شکل ۳۲۰)

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz, \quad (3)$$

که هر دو انتگرال در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت محاسبه می شوند.

اثبات. بنابر برشهای \tilde{C}_1 و \tilde{C}_2 (شکل ۳۲۱)، D را به دو دامنه همبند ساده D_1 و D_2 که $f(z)$ در آنها و بر کرانه هایشان تحلیلی است. بنابراین انتگرال کوشی روی سراسر کرانه D (درجتی که در شکل ۳۲۱ با پیکان نشان داده شده است)، و همچنین روی کرانه D_2 ، همین طور جمع آنها برابر صفر است. در این مجموع، انتگرالها روی برشهای \tilde{C}_1 و \tilde{C}_2 با هم حذف می شود زیرا انتگرال روی آنها



شکل ۳۲۰. مسیرها در (۳)

در هر دو جهت مختلف محاسبه شده است و انتگرالگیری روی C_1 درجهت خلاف حرکت عقربه های ساعت و بر C_2 درجهت حرکت عقربه های ساعت (ر. ک. شکل ۳۲۱) صورت می پذیرد. از اینرو با

تغییر جهت انتگرالگیری روی C_2 داریم

$$\oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz = 0$$

و (۳) نتیجه می شود و بدین طریق قضیه به پایان می رسد.



شکل ۳۲۲. دامنه همبند دوگانه

شکل ۳۲۱. دامنه همبند دوگانه

در مورد دامنه‌های همبند بالاتر اثبات قضیه برهمین منوال می‌باشد. مثلاً برای دامنه همبند سه گانه از سه برش \tilde{C}_1 ، \tilde{C}_2 ، و \tilde{C}_3 استفاده می‌شود (شکل ۳۲۲). با جمع کردن انتگرال‌ها، انتگرال‌ها روی برشها، همانند قبیل، حذف می‌شود و مجموع انتگرال‌ها روی C (درجت عکس حرکت عقریه‌های ساعت) و C_1 ، C_2 ، C_3 (درجت حرکت عقریه‌های ساعت) صفر می‌باشد. لذا انتگرال روی C با مجموع انتگرال‌ها روی C_1 و C_2 برابر است، که در آنها هر سه جهت منحنی درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت در نظر گرفته شده‌اند.

مثال ۷. یک نتیجه اساسی: انتگرال توانهای صحیح

از (۳) و مثال (۲) بخش ۲۰.۱۳، نتیجه می‌گیریم که

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}$$

و عدد صحیح

در اینجا C مسیر بسته ساده‌ای است که نقطه z_0 درون آن قرار دارد و انتگرال‌گیری درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت صورت می‌پذیرد.

مسائل بخش ۳۰.۱۳

۱. درستی قضیه انتگرال کوشی را در مورد انتگرال $\int f(z) dz$ روی کران مستطیلی با رئوس $-1 - i$ ، $1 + i$ ، $1 + 1 + i$ ، $-1 + i$ که درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت پیموده می‌شود، تحقیق کنید.

۲. درستی قضیه (۲) را با انتگرال‌گیری از $\sin z$ از 0 تا $\pi(i+1)$ در موارد زیر اثبات کنید.
 (الف) روی قطعه ای از 0 تا $\pi(i+1)$ تحقیق کنید.
 (ب) روی محور X از 0 تا π و آنگاه مستقیم بالا تا $\pi(i+1)$.

۳. درستی نتیجه مثال ۳ را تحقیق کنید.

۴. برای کدام کانتور C درستی تساویهای زیر از قضیه کوشی حاصل می‌شود.

$$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + 9} dz = 0 \quad (\text{ب}) \quad \oint_C \frac{\cos z}{z^2 - z^4} dz = 0 \quad (\text{ب}) \quad \oint_C \frac{dz}{z} = 0 \quad (\text{الف})$$

۵. آیا از صفر بودن انتگرال در مثال ۴ می‌توان نتیجه گرفت که این انتگرال روی کانتور مساله ۱ نیز صفر است؟

۶. آیا از مثال ۲ می‌توان نتیجه گرفت که انتگرال $\int_{-4}^1 \frac{1}{z^2 + 4} dz$ روی هریک ازدوایر زیر صفر است؟ دلیل بیاورید.

$$|z - 2| = 3 \quad (\text{ب}) \quad |z - 2| = 2 \quad (\text{الف})$$

در هر مورد مقدار انتگرال $\int f(z) dz$ را روی یک دایره واحد درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت

باید. آیا قضیه کوشی را می‌توان برای آنها به کار گرفت؟ چرا؟

$$f(z) = \operatorname{Im} z . \quad 9$$

$$f(z) = e^z . \quad 10$$

$$f(z) = |z| . \quad 11$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi z - 3} . \quad 12$$

$$f(z) = \frac{1}{z} . \quad 13$$

$$f(z) = \bar{z} . \quad 14$$

$$f(z) = \tan z . \quad 15$$

$$f(z) = z^r \sec z . \quad 16$$

$$f(z) = \frac{1}{z^r + 2} . \quad 17$$

$$f(z) = \frac{1}{|z|^r} . \quad 18$$

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید (راهنمایی). در صورت لزوم، تابع زیر علامت انتگرال را به صورت کسرهای جزئی بنویسید.

$$\int_C \frac{dz}{z-i} . \quad 19$$

(درجہت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

$$\int_C \frac{dz}{z - \frac{1}{2}\pi i} . \quad 20$$

(درجہت حرکت عقربه‌های ساعت)

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz . \quad 21$$

(درجہت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) و ۳ (درجہت حرکت عقربه‌های ساعت)

$$\int_C \frac{2z-1}{z^r-z} dz . \quad 22$$

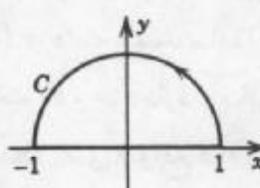
کانتور در شکل ۳۲۳

$$\int_C \frac{dz}{z^r-1} . \quad 23$$

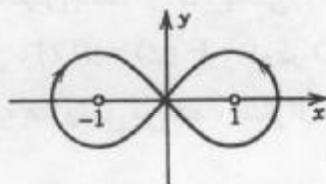
کانتور در شکل ۳۲۴

$$\int_C \operatorname{Re} z dz . \quad 24$$

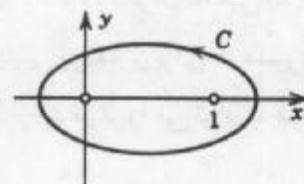
کانتور در شکل ۳۲۵



شکل ۳۲۵. مساله ۲۴



شکل ۳۲۴. مساله ۲۳



شکل ۳۲۳. مساله ۲۲

عبارت است از دایره (الف) $|z-i|=1$ ، (ب) $|z+i|=1$ (در جهت عکس عقربه‌های ساعت)

عبارت است از دایره $|z-2+3i|=1$ (درجہت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

$$\text{عبارت است از (الف) } C, \oint_C \frac{2z+1}{z^r+z} dz. \quad 27$$

جهت حرکت عقربه های ساعت)

$$\text{عبارت است از دایره } |z+1| = 1 \quad (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) \quad 28$$

$$C, \oint_C \frac{2z+1}{z^r-z} dz. \quad 29$$

عقبه های ساعت)

$$C, \oint_C \operatorname{Re}(z^r) dz. \quad 30$$

عقبه های ساعت)

۴. وجود انتگرال نامعین

در این بخش مختصر با استفاده از قضیه انتگرال کوشی وجود انتگرال نامعین $F(z)$ از تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ را ثابت می کنیم. به موجب این قضیه می توان انتگرال‌های روی خط را با انتگرال‌های نامعین محاسبه کرد و با جایگذاری حدود انتگرال‌گیری می باییم (ر. ک. بخش ۱۳. ۲).

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad [F'(z) = f(z)], \quad (1)$$

که در آن $F(z)$ انتگرال نامعین $f(z)$ است، یعنی، همانطوری که اشاره شد $F'(z) = f(z)$. در اغلب کاربردها تابع $F(z)$ را می توان از روی فرمولهای مشتقگیری به دست آورد.

قضیه ۱ (وجود انتگرال نامعین)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد (ر. ک. بخش ۱۳. ۳)، آنگاه انتگرال نامعین $F(z)$ از $f(z)$ در دامنه D وجود دارد - بنابراین، $F'(z) = f(z)$ - که در D تحلیلی بوده، و برای هر مسیری در D که دو نقطه z_1 و z_2 واقع در D را به هم وصل می کند، انتگرال $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ را می توان با فرمول (1) محاسبه نمود.

اثبات. اگر شرایط قضیه انتگرال کوشی برقرار می باشند، آنگاه انتگرال روی خط تابع f از z_1 تا z_2 مستقل از مسیر واقع در D می باشد. اگر z را ثابت فرض کنیم، آنگاه این انتگرال که تابعی از z است به $F(z)$ نمایش می دهیم

$$F(z) = \int_{z_1}^z f(z') dz'. \quad (2)$$

این انتگرال به طور یک انسخن می شود. نشان می دهیم که $F(z)$ در D تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$. چگونگی انجام این کار به شرح زیر می باشد. نخست نسبت تفاضلی زیر را تشکیل

می دهیم

$$\begin{aligned}\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*) dz^* - \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z^*) dz^*.\end{aligned}\quad (3)$$

سپس با کم کردن $f(z)$ از طرفین (3) نشان می دهیم که عبارت حاصل وقتی $\Delta z \rightarrow 0$ ، به سمت صفر میل می کند. جزئیات کار در زیر ارائه شده اند.

را ثابت فرض می کنیم. با این فرض $z + \Delta z$ را در D طوری انتخاب می کنیم که پاره خطی که نقاط انتهایی آن z و $z + \Delta z$ است در D قرار داشته باشد (شکل ۳۲۶). این مطلب شدنی است زیرا D یک دامنه است، بنابراین شامل یک همسایگی از z می باشد. این پاره خط را به عنوان یک مسیر انتگرالگیری در (3) درنظر می گیریم. به علت ثابت بودن z و آنچه $f(z)$ می توان نوشت

$$\int_z^{z+\Delta z} f(z) dz^* = f(z) \int_z^{z+\Delta z} dz^* = f(z) \Delta z.$$

از این رو

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dz^*.$$

بنابراین لم و از (3) انتگرال یکتای زیر به دست می آید

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^*.$$

چون $f(z)$ تحلیلی است، پس پیوسته است. در نتیجه به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض، عددی مانند $\delta > 0$ می توان یافت به طوری که از $|z^* - z| < \delta$ نامساوی $|f(z^*) - f(z)| < \epsilon$ حاصل شود. بنابراین، با فرض $\delta < |\Delta z|$ ، مشاهده می کنیم که نامساوی ML (بخش ۱۳.۲) به صورت زیر در می آید

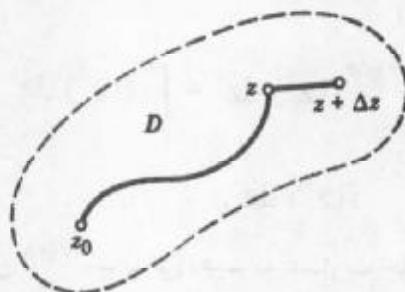
$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^* \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \epsilon |\Delta z| = \epsilon.$$

بنابراین تعریف حد و مشتق، این موضوع نشان می دهد که

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

چون z در D یک نقطه دلخواه می باشد، بنابراین $F(z)$ در D تحلیلی بوده، و انتگرال نامعین یا تابع اولیه $f(z)$ در D می باشد. این انتگرال نامعین چنین نوشته می شود

$$F(z) = \int f(z) dz.$$



شکل ۳۲۶. مسیر انتگرال‌گیری

همچنین، هرگاه $f(z) - G(z) = F(z) - G'(z) = 0$ در نتیجه D ثابت است (ر.ث. مساله ۲۹ در مسائل بخش ۱۲.۵). یعنی، دو انتگرال نامعین تابع $f(z)$ تنها یک مقدار ثابت باهم تفاوت ندارند. بنابراین در (۱) می‌توان از هر انتگرال نامعین $f(z)$ استفاده کرد. بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

مثالهای انتگرال نامعین و مسائل اضافی در بخش ۱۳.۲ ارائه شده‌اند.

مسائل بخش ۱۳.۴

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-i}^{pi} e^z dz . ۳$$

$$\int_{-i}^{1+i} z^i dz . ۲$$

$$\int_i^{3+i} z dz . ۱$$

$$\int_{-i}^i \sin z dz . ۶$$

$$\int_{-pi}^{pi} e^{\tau z} dz . ۵$$

$$\int_{-pi}^{\pi} \sin^i z dz . ۴$$

$$\int_{-i}^i \sinh \pi z dz . ۹$$

$$\int_{-pi}^{pi} \cos z dz . ۸$$

$$\int_{-pi}^{\pi} \cosh^3 z dz . ۷$$

$$\int_{-pi}^{\pi} z \cos z dz . ۱۲$$

$$\int_{-1}^1 z \cosh z^i dz . ۱۱$$

$$\int_{\pi}^{\pi i} \sin 2z dz . ۱۰$$

$$\int_i^{pi} (z^i - 1)^i dz . ۱۵$$

$$\int_{-1+i}^1 z^i e^z dz . ۱۴$$

$$\int_1^i z e^z dz . ۱۳$$

۱۳.۵ فرمول انتگرال کوشی

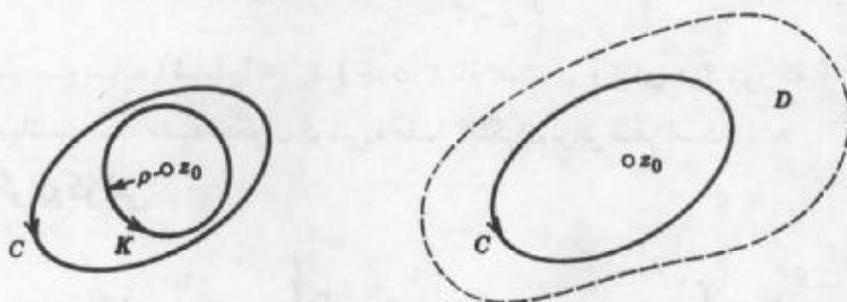
مهمترین نتیجه قضیه انتگرال کوشی فرمول انتگرال کوشی است. این فرمول برای محاسبه انتگرال‌ها (مثالهای ذیل) مفید است. نکتهٔ حائز اهمیت آن است که از فرمول انتگرال کوشی یکی از جالبترین نتایج در توابع تحلیلی حاصل می‌شود. بر طبق این قضیه می‌توان نشان داد که یک تابع تحلیلی از هر مرتبه دارای مشتق است (۱۳.۶). این نتیجه در اثبات نمایش به صورت سری تیلور (بخش ۱۴.۴) و سایر موارد مفید است. فرمول انتگرال کوشی و اثبات آن به شرح زیر ارائه می‌گردد.

قضیه ۱ (فرمول انتگرال کوشی)

فرض کنید $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد. آنگاه به ازای هر نقطه z_0 و هر مسیر بسته ساده C واقع در D که z_0 را شامل باشد (شکل ۳۲۷)،

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (1), \text{ (فرمول انتگرال کوشی)}$$

که در آن انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت انجام می گیرد.



شکل ۳۲۸. اثبات فرمول انتگرال کوشی

شکل ۳۲۷. فرمول انتگرال کوشی

اثبات. با نوشتند $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ و با جایگزینی در طرف چپ فرمول (۱) و با توجه به اینکه ضریب ثابت $f(z_0)$ را می توان از زیر علامت انتگرال خارج کرد، می یابیم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (2)$$

ازمثال ۷ بخش ۱۳.۳. با $m = -1$ ، می یابیم که جمله اول طرف راست برابر $2\pi i f(z_0)$ است.

بنابراین (۱) وقتی برقرار است که انتگرال دوم در (۲) صفر باشد. حال چگونگی صفر شدن آن را نشان می دهیم.تابع زیر علامت این انتگرال، بجز در z_0 ، تحلیلی است. لذا بنا به اصل تغییر شکل مسیر (بخش ۱۳.۳) می توان C را با دایره کوچک K به شعاع ρ و به مرکز z_0 بدون آنکه مقدار انتگرال تغییر کند، عوض کرد (شکل ۳۲۸)، چون $f(z)$ تحلیلی است، لذا پیوسته است. بنابراین به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض، عددی مانند δ موجود است به طوری که به ازای هر z از قرص $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. اگر $\rho < \delta$ شعاع دایره K را کوچکتر از δ انتخاب کنیم، آنگاه در هر نقطه از K نامساوی

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

را داریم. محیط دایره K برابر $2\pi\rho$ است. از اینرو، بنابر نامساوی $M\ell$ از بخش ۱۳.۲ به صورت زیر در می آید

انتگرال‌گیری مختلف

$$\left| \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

چون می‌توانیم $(*)$ را هر قدر که بخواهیم کوچک اختیار کنیم، نتیجه می‌گیریم که آخرین انتگرال در طرف راست (2) دارای مقدار صفر است. و بدین‌طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۱. فرمول انتگرال کوشی

$$\oint_C \frac{e^z}{z - 2} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2$$

برای هر کانتور (مسیر بسته ساده) شامل $z_0 = 2$ (چون e^z تام است)، و برای هر کانتور که $z_0 = 2$ در خارج آن قرار گرفته باشد، بنابراین انتگرال کوشی، مقدار انتگرال برابر صفر است.

مثال ۲. فرمول انتگرال کوشی

$$\oint_C \frac{z^2 - 6}{2z - i} dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^2 - 3}{z - \frac{1}{2}i} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2}z^2 - 3 \right] \Big|_{z=\frac{1}{2}i} = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$$

(نقطه $i/2$ در داخل C قرار دارد).

مثال ۳. انتگرال‌گیری روی کانتورهای مختلف
انتگرال

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$

درجہت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز هریک از نقاط زیر را بیابید.

$$z = \frac{1}{2} \quad (\text{ب}) \qquad z = 1 \quad (\text{الف})$$

$$z = i \quad (\text{د}) \qquad z = -1 + \frac{1}{2}i \quad (\text{ج})$$

حل. برای تفہیم بهتر مساله، نقاطی که در آن $g(z)$ تحلیلی نیست مشخص می‌کنیم و آنها را در داخل کانتورها مشخص می‌کنیم (شکل ۳۲۹). این نقاط -1 و 1 می‌باشند مشاهده می‌کنیم که (b) همانند (f) بنابراین تغییر شکل مسیر، یک نتیجه یکسان به دست می‌دهد. و (d) ، بنابراین قضیه انتگرال کوشی، برابر صفر است. ابتدا (f) و بعداً آن (g) را مورد بررسی قرار می‌دهیم

(f) در اینجا $z_0 = 1$ ، در نتیجه در (1) داریم $z - z_0 = z - 1$. بنابراین می‌نویسیم

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)};$$

لذا

$$f(z) = \frac{z^r + 1}{z + 1}.$$

واز (۱) می‌بایسم

$$\oint_C \frac{z^r + 1}{z^r - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \left[\frac{z^r + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = 2\pi i.$$

(ج) $g(z)$ همانند قبل است، ولی $f(z)$ تغییر می‌کند، زیرا در اینجا باید $-z$ به جای z قرار گیرد.(۱) را اختیار کرد. این مطلب ضریب $z - z_0 = z + 1$ را در (۱) نتیجه می‌دهد. لذا باید نوشت

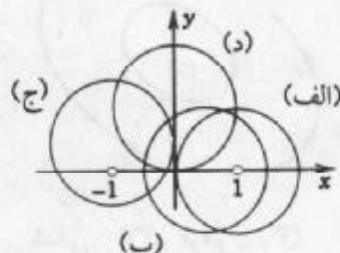
$$g(z) = \frac{z^r + 1}{z - 1} \frac{1}{z + 1};$$

بنابراین

$$f(z) = \frac{z^r + 1}{z - 1}$$

در نتیجه

$$\oint_C \frac{z^r + 1}{z^r - 1} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \left[\frac{z^r + 1}{z - 1} \right]_{z=-1} = -2\pi i.$$



شکل ۳۲۹. مثال ۳

مثال ۴. استفاده از کسرهای جزئی

انتگرال $\int_C \frac{1}{z^r - 1} dz$ را روی دایره $|z| = \sqrt[3]{2}$ (درجہت عکس حرکت عقریه‌های ساعت) بباید.

حل. $\tan z$ در نقاط $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ تحلیلی نیست، اما همه این نقاط در خارج کانتور قرار

دارند. $\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(z^r - 1)^{-1}}$ نیز در نقاط ۱ و -۱ تحلیلی نیست. برای به دست آوردن

انتگرالها از صورت (۱)، باتنهایک نقطه تکین در داخل C که تابع زیر علامت انتگرال در آنجا تحلیلی نیست، از کسرهای جزئی

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

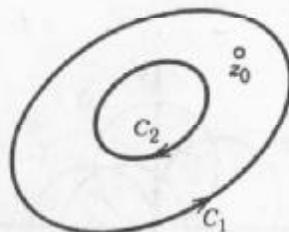
استفاده می‌کنیم. از این مطلب و (۱) می‌باییم

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz &= \frac{1}{2} \left[\oint_C \frac{\tan z}{z-1} dz - \oint_C \frac{\tan z}{z+1} dz \right] \\ &= \frac{\pi i}{2} [\tan 1 - \tan(-1)] = \pi i \tan 1 = \pi / 78.5i. \end{aligned}$$

در مورد دامنه‌های همبند چندگانه می‌توان مانند بخش ۱۳.۱۳ عمل نمود. به عنوان مثال، اگر $f(z)$ روی C_1 و در دامنهٔ حلقه‌ای شکل محسوسه به C_1 و C_2 (شکل ۳۳۰) تحلیلی و z_0 نقطه دلخواهی از این دامنه باشد، آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad (3)$$

که در آن انتگرال خارجی (روی C_1) درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت و داخلی درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، همانطور که در شکل ۳۳۰ آمده، انجام می‌گیرند.



شکل ۳۳۰. فرمول (۳)

مسائل بخش ۱۳

ازتابع $\frac{1}{z^2 - 1}$ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی هریک ازدوایر زیر انتگرال بگیرید.

$$|z+3|=1.4 \quad |z+1|=1.3 \quad |z-1|=1.2 \quad |z-i|=1.1$$

ازتابع $\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی هریک ازدوایر زیر انتگرال بگیرید.

$$|z+i|=1.8 \quad |z|=\frac{1}{2}, 7 \quad |z-i|=1.6 \quad |z-2i|=2.5$$

ازتابع زیر درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ واحد انتگرال بگیرید.

$$\frac{e^z - 1}{z}, 12 \quad \frac{z+2}{z-2}, 11 \quad \frac{e^z}{z}, 10 \quad \frac{\cos z}{z}, 9$$

$$\frac{e^{rz}}{2z-i} \cdot 16, \quad (x-\pi)^{-1} \cos z \cdot 15, \quad \frac{\sin z}{2z} \cdot 14, \quad \frac{z^r}{2z-i} \cdot 13$$

از توابع زیر روی کانتور داده شده C (درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت یا درجهت مشخص شده) انتگرال بگیرید .

$$|z| = C, \text{ عبارت است از دایره } |z| = 3 \cdot 17$$

$$C, \text{ عبارت است از کرانه مثلثی با رئوس } -1, 1, \text{ و } i \cdot 18$$

$$C, \text{ عبارت است از کرانه مثلثی با رئوس } -1, 1, \text{ و } -i \cdot 19$$

$$C, \text{ عبارت است از بیضی دلخواهی به کانونهای } 0 \text{ و } \pi i \cdot 20$$

$$|z-4|=C, \text{ عبارت است از دایره } |z-4|=2 \cdot 21$$

$$C, \text{ مرکب از کرانه مثلثی با رئوس } -\frac{1}{2}i, 1, -\frac{1}{2}i \cdot 22. \quad \text{ (درجهت عکس }$$

$$\text{ حرکت عقربه های ساعت) و } \frac{1}{|z|} = |z| \text{ (درجهت حرکت عقربه های ساعت) } \cdot 23$$

$$C, \text{ مرکب از } |z|=3 \text{ (درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت) و } \frac{e^{z^r}}{(z-1-i)z} \cdot 24$$

$$C, \text{ مرکب از کرانه مربعی به رئوس } \pm 3, \pm 3i \text{ (درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت) و } \pm 1, \pm i \text{ (درجهت حرکت عقربه های ساعت) } \cdot 24$$

$$25. \text{ نشان دهید که برای هر مسیر بسته ساده } C \text{ شامل } z_1 \text{ و } z_2, \text{ که نقاط دلخواه می باشند، داریم}$$

$$\oint_C (z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1} dz = 0.$$

۱۳.۶ مشتقات توابع تحلیلی

در این بخش با استفاده از فرمول انتگرال کوشی ، می خواهیم نشان دهیم که یک تابع تحلیلی از هر مرتبه دارای مشتق است . این موضوع خیلی شگفت انگیز است ، چنین قضیه ای در تابع حقیقی موجود نیست . در واقع ، اگر یک تابع حقیقی مشتقپذیر باشد ، در مورد وجود مشتقات مرتبه دوم و بالاتر نمی توان نتیجه ای گرفت . بنابراین توابع تحلیلی مختلط رفتاری ساده تر از توابع حقیقی که مشتقپذیر هستند ، دارند .

قضیه ۱ (مشتقات یک تابع تحلیلی)

اگر $f(z)$ در دامنه D تحلیلی باشد، آنگاه f در D از هر مرتبه ای دارای مشتق است. همه این مشتقات نیز در D تحلیلی می باشند. مشتقات تابع $f(z)$ در نقطه ای مانند z_0 از D برابر است با

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^1} dz, \quad (1')$$

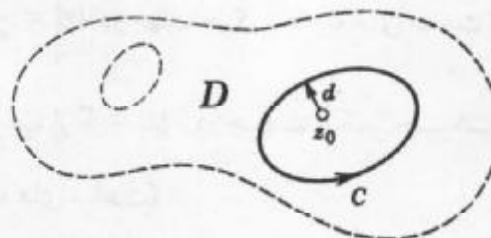
$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \quad (1'')$$

و در حالت کلی

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (1)$$

که در آن C ، $n = 1, 2, \dots$ مسیر بسته ساده دلخواهی واقع در D است که z_0 را در بر می گیرد و منحنی C درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شود (شکل ۳۳۱).

تیصره: برای به خاطر سپردن (۱) بد نیست درنظر داشته باشید که این فرمول با مشتقگیری از فرمول کوشی (۱)، بخش ۵.۱۳، در زیر علامت انتگرال نسبت به z به دست می آید.



شکل ۳۳۱. قضیه ۱ و اثبات آن

اثبات قضیه ۱. (۱') را ثابت می کنیم. از تعریف زیر شروع می کنیم

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

در طرف راست رابطه فوق، با به کار بردن فرمول انتگرال کوشی برای $f(z_0 + \Delta z)$ و $f(z_0)$ عبارت فوق به صورت زیر در می آیند

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right].$$

با یکی کردن دو انتگرال واقع در کروشه و مخرج مشترک گرفتن تابع زیر علامت انتگرال کسر حاصل به صورت $f(z)\{z - z_0 - [z - (z_0 + \Delta z)]\} = f(z)\Delta z$ در می آید. با انجام چنین اعمالی Δz حذف شده و می یابیم

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz.$$

حال نشان می دهیم که چنانچه Δz به سمت صفر میل کند (۱۷) حاصل می شود. برای انجام این کار، چنین می نویسیم

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz$$

با استفاده از نامساوی ML (بخش ۲۰.۱۳) نشان می دهیم که انتگرال طرف راست، وقتی $\Delta z \rightarrow 0$ به سمت صفر میل می کند.

برای این منظور توجه می کنیم که به دلیل تحلیلی بودن، تابع f بر C پیوسته است، لذا قدر مطلق آن کراندار است، یعنی عددی مثل K موجود است به طوری که به ازای هر z ، $|f(z)| \leq K$. هم اکنون فرض کنید d کوتاه ترین فاصله z تا منحنی C باشد (ر. ک. شکل ۳۳۱)، در این صورت به ازای هر z واقع بر C داریم

$$\cdot \frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2} \text{ و از آنجا } |z - z_0| \geq d$$

علاوه بر آن، اگر $\frac{d}{2} \leq |\Delta z|$ ، آنگاه به ازای هر z از C نامساوی زیر را داریم

$$\cdot \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{d}, \text{ و از آنجا } |z - z_0 - \Delta z| \geq \frac{d}{2}$$

فرض کنید L طول منحنی C باشد. آنگاه بنا به نامساوی ML ، اگر $|\Delta z| \leq \frac{d}{2}$ ، آنگاه

$$\left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| \leq K|\Delta z| \frac{2}{d} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

هرگاه $\Delta z \rightarrow 0$ ، آنگاه عبارت فوق به سمت صفر میل می کند و بدین طریق (۱۷) به اثبات می رسد.

توجه کنید که ما از فرمول انتگرال کوشی (۱) بخش ۱۳.۵ استفاده کرده ایم، اما اگر همه دانسته های ما درباره $f(z)$ این بود که می توان $(z_0)f'(z_0)$ را به صورت (۱)، بخش ۱۳.۵ نمایش داد، آنگاه با توجه به آنچه گفته شد وجود مشتق $(z_0)f'(z_0)$ از $f(z)$ به اثبات می رسید. این مطلب بنابر پیوستگی و اتمام این اثبات ضروری است. زیرا این مطلب ایجاب می کند که (۱۷) را می توان با برهان مشابه با f' به جای f ثابت کرد و فرمول کلی (۱) را به استقراء به دست آورد.

مثال ۱. محاسبه انتگرالهای روی خط

از (۱۷)، به ازای هر کانتور که نقطه πi را در بر بگیرد (درجہت عکس حرکت عقربه های ساعت) داریم

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - \pi i)} dz = 2\pi i (\cos z)' \Big|_{z=\pi i} = -2\pi i \sin \pi i = 2\pi \sinh \pi.$$

مثال ۲. از (۱'')، به ازای هر کانتور شامل نقطه $-i$ (درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت) داریم

$$\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^2} dz = \pi i (z^4 - 3z^2 + 6)'' \Big|_{z=-i} = \pi i [12z^2 - 6] \Big|_{z=-i} = -18\pi i.$$

مثال ۳. بنابر (۱'')، به ازای هر مسیر بسته ساده (کانتور) که نقطه ۱ در داخل و نقاط $\pm 2i$ در خارج آن

قرار دارند (درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت) داریم

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z^2+4)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2+4} \right)' \Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{e^z(z^2+4) - e^z 2z}{(z^2+4)^2} \Big|_{z=1} = \frac{6e\pi}{25} \approx 12.050i.$$

قضیه ۱ در رسیدن به نتایج کلی از توابع تحلیلی حائز اهمیت است. با استفاده از آن به اثبات عکس قضیه انتگرال کوشی می‌پردازیم.

قضیه مررا^۷

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D پیوسته باشد و همچنین به ازای هر مسیر بسته در D

$$\oint_C f(z) dz = 0, \quad (2)$$

آنگاه $f(z)$ در D تحلیلی است.

اثبات. در بخش ۱۳.۴ نشان دادیم که اگر $f(z)$ در D تحلیلی باشد، آنگاه

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

در D تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$. برای اثبات این قضیه فقط از پیوستگی $f(z)$ و این خاصیت که انتگرال آن روی هر مسیر بسته در D صفر است استفاده کردیم و از این مفروضات نتیجه گرفتیم که $F(z)$ تحلیلی است. بنا به قضیه ۱، مشتق $F(z)$ تحلیلی است، یعنی $f(z)$ در D تحلیلی است، و قضیه مررا به اثبات می‌رسد.

نامساوی کوشی. قضیه ۱ نیز به نامساوی مهمی که دارای کاربردهای متعدد است منجر می‌گردد. برای به دست آوردن این نامساوی، در (۱) فرض می‌کنیم که C دایره‌ای به شعاع R و مرکز Z_0 باشد. با بکارگیری نامساوی ML (بخش ۱۳.۲)، با $M \leq |f(z)|$ بر C ، باتوجه به (۱) می‌یابیم

۷- جیاچنیتو مررا (GIACINTO MORERA) (۱۸۵۶-۱۹۰۹)، ریاضیدان ایتالیایی، که در زنوا و تورین کار کرده است.

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

از نامساوی بالا نامساوی کوشی به دست می آید

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}. \quad (3)$$

به عنوان اولین کاربرد مهم از این نامساوی، به اثبات یک قضیه مشهور از توابع تحلیلی (تعریف شده در بخش ۱۲.۶) می پردازیم.

قضیه لیوویل *

اگر تابع تام $f(z)$ همواره به ازای هر z مطلقاً کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

اثبات. با توجه به مفروضات قضیه، $|f(z)|$ کراندار است، یعنی به ازای هر z ، $|f(z)| < K$. با استفاده از (۳) داریم $\frac{K}{r} > |f'(z_0)|$. چون $f(z)$ تام است، لذا می توان z را به هر اندازه که بخواهیم بزرگ اختیار نمود و نتیجه گرفت که $f'(z_0) = 0$. چون z_0 دلخواه است، پس به ازای هر z داریم $f'(z) = 0$ ، و از آنجا $f(z)$ ثابت است (ر. ک. مساله ۲۹ در مسائل بخش ۱۲.۵). بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

با ارائه قضیه فوق به پایان فصل ۱۳ می رسیم در این فصل به بحث در مورد انتگرال‌گیری مختلط پرداختیم. در انتگرال‌گیری به روش مختلط با مطالبی مواجه شدیم که متناظر با آنها در توابع حقیقی موجود نبودند. بحث بیشتر در مورد انتگرال‌گیری در فصل ۱۵، که فصل ۱۴ پایه و اساس برای آن است، ارائه می شود.

مسائل بخش ۱۳

از توابع زیر درجهٔ عکس حرکت عقریه‌های ساعت روی دایرهٔ $|z|=2$ انتگرال بگیرید. (۱۰ در مسائل ۱۰ و ۱۲ تا ۱۵ عددی صحیح و مثبت است. a در مسائل ۱۲ و ۱۶ یک عدد دلخواه می باشد.)

$$\begin{array}{lll} \frac{\cos z}{z^4}, ۴ & \frac{e^{\pi z}}{z^3}, ۳ & \frac{z^r}{(z-i)^2}, ۲ \\ \frac{\sin \pi z}{z^r}, ۸ & \frac{z^r}{(z+1)^r}, ۷ & \frac{e^{z^r}}{(z-1)^r}, ۶ \\ \frac{e^{az}}{z^{n+1}}, ۱۲ & \frac{e^{z^r}}{z^r}, ۱۱ & \frac{e^z}{z^n}, ۱۰ \\ & & \frac{e^z \sin z}{z^r}, ۹ \end{array}$$

- ر. ک. بخش ۸.۵، زیرنویس ۱۶.

$$\frac{\sinh az}{z^r} \cdot ۱۶ \quad \frac{\cos z}{z^{r_n}} \cdot ۱۵ \quad \frac{\sin z}{z^{r_n}} \cdot ۱۴ \quad \frac{z^n}{(z+1)^{n+1}} \cdot ۱۳$$

از (f(z) روی کانتور C (درجهت عکس حرکت عقریه های ساعت یا در جهت مشخص شده) انتگرال بگیرید.

$$C, f(z) = z^{-r} \tan \pi z \cdot ۱۷$$

$$|z - 1 - i| = 2 \text{ دایره } C, f(z) = z^{-r} e^{\frac{z}{r}} \cdot ۱۸$$

$$2 \text{ کرانه مثلثی با رئوس } i \text{ و } -i, C, f(z) = \left(z - \frac{\pi}{2} \right)^{-r} \cot z \cdot ۱۹$$

$$|z - 5| = 3 \text{ دایره } C, f(z) = (z - 4)^{-r} \ln z \cdot ۲۰$$

$$C, f(z) = \frac{e^{z^r}}{z(z - 2i)} \cdot ۲۱$$

(درجهت حرکت عقریه های ساعت) و $|z| = 1$ (درجهت عکس حرکت عقریه های ساعت)

$$C, f(z) = \frac{\ln(z + 3) + \cos z}{(z + 1)^r} \cdot ۲۲$$

۲۳. هرگاه $f(z)$ ثابت نبوده و به ازای هر مقدار Z (متاهمی) تحلیلی باشد، و M و R اعداد حقیقی مثبت دلخواه باشند) صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشند). نشان دهید که مقادیری از Z وجود دارند به قسمی که $|f(z)| > M$ و $|z| > R$ راهنمایی. از قضیه لیوویل استفاده کنید.

۲۴. اگر $f(z)$ یک چند جمله ای از درجه $n > 0$ و M یک عدد حقیقی مثبت دلخواه باشد (صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشد)، نشان دهید که عدد حقیقی مثبت R موجود است به قسمی که به ازای هر $|f(z)| > M$ ، $|z| > R$

۲۵. نشان دهید که $e^z = f(z)$ خاصیتی را که در مساله ۲۳ بیان شد دارا می باشد، اما دارای خاصیتی که در مساله ۲۴ ذکر شد نیست.

۲۶. قضیه بنیادی جبر را ثابت کنید: اگر $f(z)$ که ثابت نیست یک چند جمله ای بر حسب Z باشد، آنگاه لااقل یک عدد مختلط Z موجود است، به طوری که $f(z) = 0$. راهنمایی. فرض کنید که به ازای هر

$$\frac{1}{f} \neq 0, z \text{ و نتیجه حاصل از مساله ۲۳ را در مورد } \frac{1}{f} = g \text{ به کار برد.}$$

پرسشها و مسائل دوره ای برای فصل ۱۳

۱. اگر منحنی C به صورت $z = z(t)$ نمایش داده شده باشد، تغییر هندسی $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ چیست؟

۲. در تمام این فصل چه مفروضاتی درباره مسیرهای انتگرال‌گیری در نظر گرفته شده است؟

۳. اگر از $\frac{1}{Z}$ درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت انتگرال بگیرید به چه نتیجه ای می رسید؟
۴. درمورد $\frac{1}{Z^m}$ ، که در آن ... $m = 2, 3, \dots$ ، چطور؟
۵. روش‌های انتگرالگیری در این فصل را بیان نموده و برای هر کدام یک مثال ارائه کنید.
۶. کدام روش انتگرالگیری از این فصل، فقط برای توابع تحلیلی به کار گرفته شد؟ و در حالت کلی درمورد توابع مختلط پیوسته کدام روش به کار رفته است؟
۷. کدامیک از قضایای این بخش از بقیه مهمتر است؟ چرا؟ از حافظه خود برای بیان آن استفاده کنید.
۸. منظور از مستقل از مسیر چیست؟
۹. اصل تغییر شکل مسیر چیست؟ یک مثال بیاورید.
۱۰. ناحیه همبند دوگانه چیست؟ ارتباط آن با قضیه کوشی چقدر است؟
۱۱. اگر انتگرال تابع f روی دایره واحد برابر ۲ و روی دایره ۲ $= |z|$ برابر ۱ باشد، چرا $f(z)$ در تمام نقاط واقع در طوق محصور شده بین این دوایر می تواند تحلیلی نباشد؟
۱۲. نامساوی ای را که از کران بالایی برای قدر مطلق یک انتگرال به دست آمد، توضیح دهید. آیا این مساله فقط برای توابع تحلیلی به کار گرفته می شود یا در حالت کلی برقرار است؟
۱۳. تابع تحلیلی f در دامنه D یک تابع مشتقپذیر در D است. آیا این تابع دارای مشتقات مراتب بالاتر در D است؟ همین سوال را برای تابع حقیقی $f(x)$ یعنی مشتقپذیر بر بازه ای از محور حقیقی پاسخ دهید.
۱۴. آیا تساوی $\operatorname{Re} \int_C f(z) dz = \int_C \operatorname{Re} f(z) dz$ هموار برقرار است؟
۱۵. با استفاده از قضیه لیوویل، نشان دهید که e^z و $\cos z$ در صفحه مختلط کراندار نیستند. از توابع زیر بر روی مسیرهای داده شده انتگرال بگیرید.
۱۶. از z^2 تا -4 روی هر مسیر دلخواه
۱۷. $z + \frac{1}{z}$ درجهت حرکت عقربه های ساعت روی دایره واحد
۱۸. درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $r = |z|$ از $-i$ تا i روی دایره واحد در نیم صفحه راست
۱۹. $|z|$ از $-i$ تا i روی دایره واحد در نیم صفحه راست
۲۰. $|z - 2i| = \frac{\pi}{2}$ درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $\frac{\ln z}{(z - 2i)^2}$

۲۱. $\int_{\pi i}^{14+3\pi i} e^z dz$ در امتداد مسیر دلخواه

$$|z|^{\frac{e^z}{z}} \cdot 22.$$

$$|z|^{\frac{z}{\bar{z}}} \cdot 23.$$

$$\frac{z}{z^2 + 1} \cdot 24.$$

۲۵. $z^{-r} \tan z$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت روی هر کانتور شامل مبداء مختصات

۲۶. $5 \cos iz - \pi$ در امتداد محور حقیقی از $-\pi$ تا π

۲۷. $\cosh z$ از 0 تا 1 در امتداد محور موهومی

$$|z - i| \cdot 28.$$

۲۹. $|z| + z$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره واحد

$$\frac{3z + 5}{z + 1} \cdot 30.$$

۳۱. $2\pi i - \pi i$ از $e^z \cos(e^z)$ در امتداد هر مسیر دلخواه

$$\frac{e^z}{z} \cdot 32.$$

روی دایره $1/|z| = 0$

۳۳. $z \cos z$ از 0 تا πi روی هر مسیر دلخواه

$$|z - i| = 2 \cdot 34.$$

$$\frac{1}{z^2 + 4} \cdot 35.$$

۳۶. $z^{-r} \cosh z$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره واحد

$$\frac{2z^r - 3}{z(z - 1 - i)} \cdot 37.$$

عقبه‌های ساعت روی دایره $1/|z| = 0$

۳۸. $(z - i)^{-r} (z^r + \sin z)$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت روی هر بیضی با کانونها $\pm 2i$

$$|z - 1| = 0 \cdot 39.$$

$$|z| = 2 \cdot 40.$$

خلاصه فصل ۱۳ انتگرالگیری مختلط

انتگرال روی خط مختلط تابع f روی مسیر C به صورت زیر نمایش داده می شود (بخش ۱۳. ۱) .
 $\oint_C f(z) dz$ ، یا اگر C بسته باشد با $\int_C f(z) dz$

هر انتگرال را می توان با استفاده از معادله $(z(t)) = z$ از $t \in [a, b]$ که در آن $a \leq t \leq b$ (بخش ۱۳. ۲) محاسبه نمود :

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad (1) \quad (\dot{z} = \frac{dz}{dt})$$

به عنوان روشی دیگر ، اگر $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد (بخش ۱۳. ۳) ، آنگاه یک تابع $F(z)$ در D وجود دارد به طوری که $F'(z) = f(z)$ و به ازای هر مسیر C در D از نقطه z_1 تا نقطه z_2 داریم (بخش‌های ۱۳. ۲ و ۱۳. ۴)

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad [F'(z) = f(z)] . \quad (2)$$

بر طبق قضیه انتگرال کوشی ، اگر $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد ، آنگاه به ازای هر مسیر بسته C واقع در D (بخش ۱۳. ۳) داریم

$$\oint_C f(z) dz = 0 . \quad (3)$$

تحت مفروضات یکسان و به ازای هر z_0 از D و یک مسیر بسته C واقع در D شامل z_0 که زیر مجموعه D می باشد ، فرمول انتگرال کوشی

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (4)$$

را داریم . علاوه بر آن $f(z)$ در D از هر مرتبه دارای مشتق است و همه این مشتقات در D تابع تحلیلی هستند و (بخش ۱۳. ۶)

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz ; n = 1, 2, \dots . \quad (5)$$

این قضایا ، قضیه مردا (عکس قضیه انتگرال کوشی) و نامساوی کوشی را تیجه می دهند (بخش ۱۳. ۶) .

فصل ۱۲

سریهای توانی، سریهای تیلور، سریهای لوران

بخش ۱۴. ۱. شامل مفاهیم اساسی و آزمونهای همگرایی سریهای مختلط می‌باشد. مطالب ارائه شده شبیه نتایج متناظر در سریها حقیقی هستند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال درباره آنها بحث شده است. متعلمینی که با موضوع بخش ۱۴. ۱ آشنا هستند، می‌توانند از این بخش به عنوان مرجع استفاده کنند و کار را با بخش ۱۴. ۲. شروع نمایند که یک بحث کلی از سری توانی را به دست می‌دهد.

در شروع بخش ۱۴. ۳. توضیح این مطلب که چرا سری توانی نقش اساسی در آنالیز مختلط و کاربرد آن دارد، می‌پردازیم. دلیل این اهمیت آن است که هر سری توانی نمایش دهنده یک تابع تحلیلی (قضیه ۵، بخش ۳. ۱۴) است و بالعکس، هر تابع تحلیلی را می‌توان با سری توانی، که به سری تیلور مشهور می‌باشد، نمایش داد (درست مانند سری در حساب دیفرانسیل و انتگرال؛ ر. ک. بخش ۱۴. ۴.). بخش ۱۴. ۵. به روش‌های عملی برای به دست آوردن این سریها اختصاص دارد. در بخش ۱۴. ۶. به همگرایی یکنواخت این سری و دیگر سریها می‌پردازیم.

سری لوران (بخش ۱۴. ۷.) یک سری از توانهای صحیح مثبت و منفی z (یا $z - z_0$) می‌باشد. این سریها در دسته بنده نقاط تکین (بخش ۱۴. ۸.) به ما کمک می‌کند و منجر به یک روش انتگرالگیری عمومی ظرفی می‌گردد («انتگرالگیری به روش مانده‌ها» در فصل بعدی به توضیح آن خواهیم پرداخت).

پیشیازهای این فصل: فصلهای ۱۲ و ۱۳.

بخش‌هایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: بخش‌های ۱۴. ۶، ۱۴. ۵، و ۱۴. ۸ (واز بخش ۱۴. ۱. فقط به عنوان مرجع استفاده شود).

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۴. دنباله‌ها، سریها، آزمونهای همگرایی

در این بخش به تعریف مفاهیم اساسی مربوط به دنباله‌ها و سریهای مختلف می‌پردازیم و درباره آزمونهای همگرایی و اگرایی بحث خواهیم کرد. این مطلب خیلی شبیه تعاریف و قضایای مربوط به دنباله و سریهای حقیقی استند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها آشنا شده‌ایم. چنانچه با این مطالب بیشتر آشنایی دارید و این طور فکر می‌کنید که آزمون نسبت در اعداد مختلف هم برقرار است، از این بخش صرفنظر کنید و به سراغ بخش ۱۴. ۲ بروید.

دنباله‌ها

تعاریف بنیادی شبیه تعاریف پایه‌ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. یک دنباله نامتناهی یا، به اختصار یک z_n دنباله با متناظر قرار دادن هر عدد صحیح مثبت با یک Z_1, Z_2, \dots موسوم به یک جمله دنباله حاصل می‌شود و به صورت $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ یا به اختیار $\{Z_n\}$ نمایش داده می‌شود. بعضی اوقات ممکن است دنباله با صفر، یعنی با اعداد صحیح دیگر آغاز شود، مثلاً هر یک از Z_0, Z_1, \dots, Z_n یک دنباله استند.

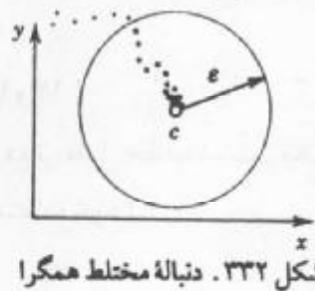
دنباله حقیقی، دنباله‌ای است که جملاتش حقیقی باشند.

همگرایی. دنباله همگرای Z_1, Z_2, \dots دنباله‌ای است که دارای حد c باشد و برای آن می‌نویستند $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$ یا به اختصار $\rightarrow c$. بنا به تعریف حد دنباله، این بدان معنی است که به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$(1) |z_n - c| < \epsilon;$$

به طریق هندسی می‌توان گفت که هر جمله z_n با $n > N$ درون قرص بازی به شعاع ϵ و به مرکز c قرار داشته (شکل ۳۳۲) و تنها تعدادی متناهی از جمله‌های z_n درون قرص قرار نمی‌گیرند] در مورد دنباله حقیقی، تعبیر هندسی (۱)، بدین مضمون است که هر جمله z_n با $n > N$ درون بازه بازی به طول 2ϵ و یک نقطه میانی حقیقی c روی خط حقیقی قرار دارد؛ ر. ک. شکل ۳۳۳].

دنباله واگرا دنباله‌ای است که همگرا نباشد.



شکل ۳۳۲. دنباله مختلف همگرا

مثال ۱. دنباله های همگرا و واگرا

دنباله های همگرا به سمت صفر است. دنباله های $\left\{ \frac{i^n}{n} \right\} = \left\{ i, -\frac{1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$ دنباله های با جمله عمومی $z_n = (1+i)^n = \left\{ z_n \right\}$ و $\left\{ i^n \right\} = \left\{ i, -1, -i, 1, \dots \right\}$ واگرا هستند.



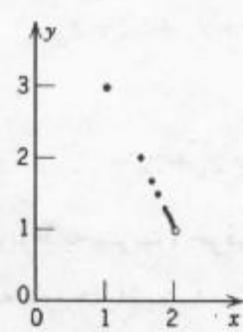
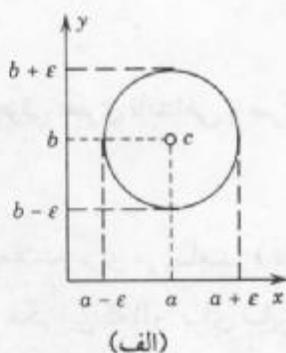
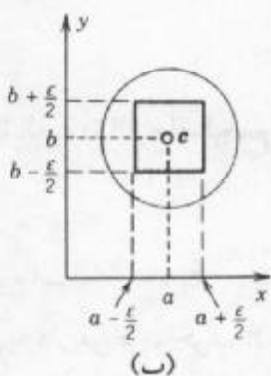
شکل ۳۳۳. دنباله حقیقی همگرا

مثال ۲. دنباله همگرا

دنباله $\left\{ z_n \right\}$ با $z_n = x_n + iy_n = 2 - \frac{1}{n} + i(1 + \frac{2}{n})$ عبارت است از (ر. ک. شکل ۳۳۴) $1 + 3i, \frac{3}{2} + 2i, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i, \frac{7}{4} + \frac{3}{2}i, \dots$. این دنباله همگرا است و حد آن برابر $i + 2 = c$ است. درواقع، در (۱)، وقتی $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ داریم

$$|z_n - c| = \left| \frac{2n-1}{n} + i \frac{n+2}{n} - (2+i) \right| = \left| -\frac{1}{n} + \frac{2i}{n} \right| = \frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon.$$

علاوه بر آن مشاهده می کیم که دنباله $\{x_n\}$ ، قسمت حقیقی دنباله مختلط، به $c = \operatorname{Re} c$ و دنباله $\{y_n\}$ ، قسمت موهومی، یعنی به سمت $\operatorname{Im} c = 1$ همگرا است. این مطلب گویای این واقعیت است که همگرایی یک دنباله مختلط می تواند از روی دو دنباله حقیقی قسمتهای حقیقی و موهومی حاصل شود. این موضوع در قضیه زیر ارائه می شود.



شکل ۳۳۵. اثبات قضیه ۱

شکل ۳۳۴. مثال ۲

قضیه ۱ (دنباله قسمتهای حقیقی و موهومی)

دنباله Z_1, Z_2, \dots, Z_n از اعداد مختلط $z_n = x_n + iy_n$ (که در آن $n = 1, 2, \dots$) همگرا است اگر و فقط اگر دنباله قسمتهای حقیقی x_1, x_2, \dots و دنباله قسمتهای موهومی y_1, y_2, \dots به a و b همگرا باشد.

اثبات . اگر $\epsilon < |z_n - c|$ ، آنگاه $|x_n - a| < \epsilon$ و $|y_n - b| < \epsilon$ درون دایره‌ای به شعاع ϵ و به مرکز c قرار دارد به طوری که داریم (شکل ۳۳۵ الف)

$|x_n - a| < \epsilon$ ، $|y_n - b| < \epsilon$.
از این و همگرایی $c \rightarrow z_n$ همگرایی $a \rightarrow x_n$ و $b \rightarrow y_n$ را ایجاب می‌کند .

بر عکس ، اگر $a \rightarrow x_n$ و $b \rightarrow y_n$ ، آنگاه وقتی $\infty \rightarrow n$ ، آنگاه به ازای $\epsilon > 0$ مفروض می‌توان N را به اندازه‌ای بزرگ انتخاب کرد که ، به ازای هر $n > N$ ، داشته باشیم

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

این دونامساوی ایجاب می‌کنند که $z_n = x_n + iy_n$ در مربعی به مرکز c و به ضلع ϵ قرار دارد . بنابراین z_n باید در داخل دایره‌ای به شعاع ϵ و به مرکز c قرار گیرد (شکل ۳۳۵ ب) . بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد .

سریها

به ازای یک دنباله مفروض $Z_1, Z_2, \dots, Z_m, \dots$ دنباله‌ای به صورت یک مجموع به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_r &= z_r + z_r \\ S_n &= z_1 + z_r + \dots + z_n \end{aligned} \quad (2)$$

این دنباله به دنباله حاصلجمع‌های جزئی سری نامتناهی یا سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_r + \dots \quad (3)$$

موسوم است . z_1, z_r, \dots را جملات سری می‌نامند . (در بحث مربوط به سریها ، حرفی که برای جمع به کار می‌بریم حرف n است ، مگر این که n را برای سایر مقاصد به کاربرده باشیم .)

سری همگرا سری‌ای است که دنباله حاصل از حاصلجمع‌های جزئی آن همگرا باشد ، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

عدد S را مجموع یا مقدار سری می‌نامند و به صورت زیر می‌نویستند

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots .$$

سری و اگر سری ای است که همگرا نباشد.

اگر جملات S_n را از (۳) حذف کنیم، عبارت باقیمانده به صورت زیر است

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \dots . \quad (4)$$

این عبارت را باقیمانده سری (۳) بعداز جمله z_n می نامند. به وضوح، اگر سری (۳) همگرا و دارای مجموع S می باشد، آنگاه

$$. R_n = S - S_n \quad S = S_n + R_n$$

حال بنا به تعریف همگرایی داریم $S_n \rightarrow S$ ، بنابراین $R_n \rightarrow 0$. در کاربردها، وقتی S مجھول باشد و یک تقریب R_n از S را محاسبه می کنیم، در آن صورت $|R_n|$ برابر قدر مطلق خطا است، و $R_n \rightarrow 0$ بدان معنی است که می توان با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، تا هر اندازه که مایل باشیم R_n را کوچک اختیار کنیم.

یک کاربرد از قضیه ۱ برای مجموعهای جزئی بلا فاصله از ارتباط همگرایی سری مختلف و دو سری حقیقی از قسمتهای حقیقی و موهومی از روی نتیجه زیر حاصل می شود.

قضیه ۲ (قسمتهای حقیقی و موهومی)

سری (۳) با $S = x_m + iy_m$ همگرا به $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ است اگر و فقط اگر $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ به مقدار v همگرا باشند.

آزمونهای برای همگرایی و واگرایی سریها

آزمونهای همگرایی در مجموعه اعداد مختلف دقیقاً شبیه آزمونهای همگرایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال می باشند. قبل از آنکه یک سری را مورد استفاده قرار دهیم باید مطمئن شویم که آن سری همگرا است، بدین منظور آزمونهای را به کار می گیریم تا به همگرا بودن و یا واگرا بودن سری اطمینان حاصل کنیم.

واگرایی را اغلب می توان خیلی ساده به کمک قضیه زیر نشان داد.

قضیه ۳ (واگرایی)

هرگاه سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = 0$. از این رو هر سری که در آن این رابطه برقرار نباشد، واگرایی است

این اثبات. اگر $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا به S باشد، آنگاه، از داریم

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_m - S_{m-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m - \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = S - S = 0.$$

توجه! $\rightarrow z_m$ شرط لازم برای همگرایی است اما کافی نیست، مثلاً سری همساز $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ در شرط فوق صدق می‌کند، اما با توجه به آنچه در حساب دیفرانسیل و انگرال آموختیم و اگر این باشد (ر. ک.)، برای مثال مرجع [۱۲] در ضمیمه ۱).

قضیه ۴ (اصل همگرایی کوشی برای سریها)

سری $\dots + z_r + z_1$ همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض بتوان N را (که در حالت کلی به ε بستگی دارد) طوری یافت که به ازای هر $n > N$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon. \quad (5)$$

اثبات این قضیه را به خواننده و اگذار می‌کنیم (اثبات در ضمیمه ۴ آمده است).

همگرایی مطلق سری $\dots + z_r + z_1$ را همگرای مطلق نامند هرگاه سری حاصل از قدر مطلق جملات آن، یعنی سری

$\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| = |z_1| + |z_r| + \dots$ همگرا باشد.

اگر سری $\dots + z_r + z_1$ همگرا باشد و سری $\dots + |z_r| + |z_1|$ و اگر باشد، آنگاه سری $\dots + z_r + z_1$ را همگرای مشروط می‌نامند.

مثال ۳. سری همگرای مشروط

سری $\dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ همگرا، ولی سری حاصل از سری قدر مطلق جملات آن که سری همساز است و اگرا می‌باشد. بنابراین سری مورد نظر یک سری مشروط است.

هرگاه یک سری همگرای مطلق باشد، آن سری همگرا است.

این مطلب به سادگی از اصل کوشی (مسئله ۱۴) نتیجه می‌شود. اصل کوشی آزمون همگرایی عمومی زیر را نیز نتیجه می‌دهد.

قضیه ۵ (آزمون مقایسه)

اگر به ازای سری مفروض $\dots + z_r + z_1$ بتوان سری همگرای $\dots + b_r + b_1$ که جملات آن اعداد حقیقی نامنفی هستند طوری یافت که به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|z_n| \leq b_n$$

آنگاه سری مفروض مطلقاً همگرا و در نتیجه همگرا است.

اثبات. چون سری $\dots + b_r + b_1$ همگرا است، بنا به اصل کوشی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض N را طوری می‌توان یافت که به ازای هر $n > N$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon.$$

از این نامساوی، $|z_r| \leq b_r$ ، $|z_1| \leq b_1$ ، ... نتیجه می شود که به ازای همان n و p ها $|z_{n+1}| + \dots + |z_{n+p}| \leq b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$. بنابراین، مجدداً بنا به اصل کوشی، سری $\dots + |z_r| + |z_1| + \dots + z_1$ همگرا است، درنتیجه سری $\dots + z_1$ همگرا است.

کاربرد خوبی از این روش در سری هندسی است که به شرح زیر ارائه می گردد.

قضیه ۶ (سری هندسی)

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \dots$$

به ازای $|q| < 1$ همگرا به مجموع $\frac{1}{1-q}$ و به ازای $|q| \geq 1$ واگرا می باشد.

اثبات. اگر $|q| \geq 1$ ، آنگاه $|q^m| \geq |q|$ و از قضیه ۳ واگرایی در این حالت حاصل می شود.

حال اگر فرض کنیم $|q| < 1$ ، آنگاه n امین حاصل جمع جزئی عبارت است از

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n.$$

باتوجه به این مطلب داریم

$$qS_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}.$$

از تفریق دورابطه، بیشتر جملات سمت راست دو به دو حذف می شوند، و از طرف چپ داریم

$$S_n - qS_n = (1-q)S_n = 1 - q^{n+1}.$$

حال $0 \neq 1 - q \neq 0$ زیرا $q \neq 1$ و می توان از رابطه فوق S_n را پیدا کرد:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}. \quad (6)$$

حال اگر $\infty \rightarrow n$ ، آنگاه به ازای $|q| < 1$ داریم $\infty \rightarrow q^{n+1} \rightarrow 0$ و درنتیجه جمله آخر وقتی $\infty \rightarrow n$ ، حذف می شود. لذا سری همگرا و دارای حاصل جمع $\frac{1}{1-q}$ است. بدین ترتیب قضیه به اثبات می رسد.

آزمون نسبت

ما بین آزمونهای موجود برای تشخیص همگرایی و واگرایی سریها آزمون نسبت بیشتر از همه کاربرد دارد. این آزمون با مقایسه با سری هندسی حاصل می شود.

قضیه ۷ (آزمون نسبت)

سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ را درنظر می‌گیریم. هرگاه عددی طبیعی مثل N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q < 1 \quad (n > N) \quad (7)$$

(که در آن q یک عدد ثابت است)، آنگاه سری موردنظر مطلقاً همگرا است و اگر به ازای هر $n > N$

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1 \quad (n > N), \quad (8)$$

آنگاه سری مذبور واگرا است.

اثبات. اگر نامساوی (8) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $n > N$ داریم $|z_{n+1}| \geq |z_n|$ ، باتوجه به آن و اگرایی سری از قضیه ۳ نتیجه می‌شود.

اگر نامساوی (7) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $n > N$ در حالت خاص، $|z_{n+1}| \leq |z_n|$ ، $n > N$ در حالت کلی، $\left| z_{N+p} \right| \leq \left| z_{N+1} \right| q^{p-1}$ ، ازین رو $|z_{N+1}| \leq |z_{N+2}|q, |z_{N+2}| \leq |z_{N+3}|q \leq |z_{N+1}|q^2$ و در حالت کلی، $|z_{N+r}| \leq |z_{N+1}|(1 + q + q^2 + \dots)$.

هم اکنون مطلقاً همگرا بودن سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ از آزمون مقایسه و سری هندسی، به دلیل آنکه $q < 1$ است، حاصل می‌شود.

توجه! نامساوی (7) ایجاب می‌کند که $1 < \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ ، ولی ازین نامساوی همگرایی نتیجه نمی‌شود. به

عنوان یک مثال نقصی یک سری همساز را با خاطر می‌آوریم و باتوجه به آن داریم $1 < \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{n}{n+1}$.

مشاهده می‌کنیم که نامساوی فوق برقرار است ولی می‌دانیم که سری همساز واگرا است. بنابراین

$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < q$ برای همگرایی یک شرط لازم است.

قضیه ۸ (آزمون نسبت)

اگر سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ طوری باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L, \quad (9)$$

آنگاه

(الف) سری مطلقاً همگرا است اگر $L < 1$.

(ب) سری واگرا است اگر $L > 1$.

(ج) به ازای $L = 1$ این آزمون همگرایی و یا واگرایی سری را توجه نمی دهد.

اثبات. (الف) در (۹) قرار می دهیم $k_n = \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1 - b$. با توجه به تعریف

حد، k_n باید به $1 - b$ امیل کند. یعنی عددی مثل N موجود است به طوری که به ازای هر $n > N$ داریم $k_n \leq q = 1 - \frac{b}{2} < 1$ ، $n > N$ قضیه ۷ نتیجه می شود.

(ب) به طور مشابه، به ازای $L = 1 + c > N$ و به ازای هر $n > N$ به قدر کافی بزرگ

داریم $k_n \geq 1 + \frac{c}{2}$ ، که واگرایی سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ از روی قضیه ۷ نتیجه می شود.

(ج) از سری همساز نسبت $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n}{n+1}$ واز آنچه $L = 1$ و سری واگرا است. و حال آنکه

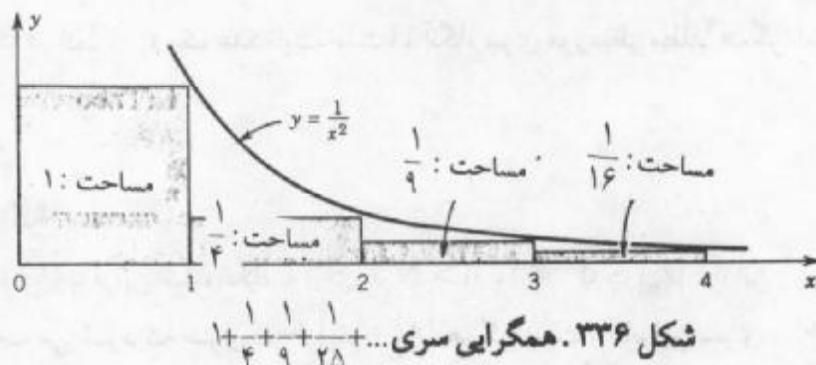
به ازای سری

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

داریم $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n^r}{(n+1)^r} = \frac{n^r}{(n+1)^r}$ ولی این سری با توجه به مطالب زیر یک سری همگرا است. در واقع

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n},$$

در نتیجه دنباله S_1, S_2, \dots یک دنباله کراندار و صعودی یکنواست (چون جملات سری همگی مثبت هستند). دو خاصیت حاصل برای همگرایی دنباله حقیقی S_1, S_2, \dots کافی می باشند.



این موضوع تایید گفته های ما است که به ازای $L = 1$ ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد.

مثال ۴. آزمون نسبت

آیا سری زیر همگرا است یا واگرایی؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!} = 1 + (100+75i) + \frac{1}{2!}(100+75i)^2 + \dots$$

حل. بنا به قضیه ۸، سری موردنظر همگرا است، زیرا

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{|100+75i|^{n+1} n!}{|100+75i|^n (n+1)!} = \frac{|100+75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \rightarrow L = 0.$$

مثال ۵. قضیه ۷ کلی تراز قضیه ۸ است.

آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = i + \frac{1}{2} + \frac{i}{4} + \frac{1}{16} + \frac{i}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

حل. نسبت قدر مطلقهای جملات متوالی سری برابر $\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ می باشد. از این رو همگرایی از قضیه ۷ نتیجه می شود. چون دنباله این نسبتها دارای حد نمی باشد، لذا قضیه ۸ را نمی توان به کار گرفت و برای همگرایی باید از قضیه ۷ استفاده کرد.

آزمون ریشه

آزمون ریشه یکی دیگر از آزمونهایی است که در تشخیص همگرایی و یا واگرایی سریها کاربردهای متنوع دارد. آزمون نسبت ساده تر و آزمون ریشه عمومی تر است.

قضیه ۹ (آزمون ریشه)

سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ را در نظر می گیریم. هرگاه عددی طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1 \quad (10)$$

(که در آن q یک عدد ثابت است)، آنگاه سری موردنظر مطلقاً همگرا است. اگر به ازای هر $n > N$

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1, \quad (11)$$

آنگاه سری واگرا است.

اثبات. اگر (10) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر N $|z_n| \leq q^n < 1$ ، از این رو با مقایسه با سری هندسی نتیجه می شود که سری $\dots + |z_1| + |z_2| + \dots$ همگرا است. بنابراین سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ مطلقاً همگرا است. اگر (11) برقرار باشد، آنگاه به ازای تعدادی نامتناهی n $|z_n| \geq 1$. هم اکنون واگرایی سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ از قضیه ۳ نتیجه می شود. بدین ترتیب قضیه به اثبات می رسد.

توجه! معادله (10) ایجاب می کند $1 < \sqrt[n]{|z_n|}$ ، اما همگرایی را ایجاب نمی کند، مثلاً سری همساز در

نامساوی $1 < \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ صدق می کند ولی واگرا می باشد.

اگر دنباله حاصل از ریشه ها در (۱۰) و (۱۱) همگرا باشند، قضیه زیر را داریم

قضیه ۱۰ (آزمون ریشه)

اگر سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ طوری باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L, \quad (12)$$

آنگاه

(الف) به ازای $L < 1$ ، سری مطلقاً همگرا است.

(ب) به ازای $L > 1$ ، سری واگرا است.

(ج) به ازای $L = 1$ همگرایی یا واگرایی سری از روی این آزمون حاصل نمی شود.

اثبات. اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه (۸) است.

(الف) فرض کنید $1 < L = 1 - a^*$. آنگاه بنا به تعریف حد، عددی مثل N^* موجود است به

طوری که به ازای هر $n > N^*$ داریم $1 < \sqrt[n]{|z_n|} < 1 - \frac{1}{2}a^*$. بنابراین به ازای هر $n > N^*$

$|z_n| < q^n$. حال با مقایسه با سری هندسی نتیجه می شود که سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ مطلقاً همگرا است.

(ب) اگر $1 > L$ ، همچنین به ازای هر n به قدر کافی بزرگ داریم $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$. بنابراین

به ازای این n ها، $|z_n| > 1$. حال قضیه ۳ ایجاب می کند که سری $\dots + z_1 + z_2 + \dots$ واگرا باشد.

(ج) برای سری واگرای همساز و همچنین سری همگرای $\dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$

می باییم $1 = L$. درستی این ادعای را می توان از \rightarrow و $\frac{(Ln)}{n}$ مشاهده نمود.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \ln n}} \rightarrow \frac{1}{e^0}, \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{n} \ln n}} \rightarrow \frac{1}{e^0}$$

مشاهده نمود.

مثال ۶. آزمون ریشه

آیا سری زیر همگرا است یا واگرایی؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + 3} (4 - i)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} (4 - i) + \frac{1}{19} (4 - i)^2 - + \dots$$

حل. بنا به قضیه ۱۰ ، سری فوق واگرا است، زیرا

$$\sqrt[n]{\frac{|(4-i)^n|}{2^n + 3}} = \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n + 3}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n + 3}} \rightarrow L = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1.$$

در اینجا به پایان بحث مفاهیم اساسی و حقایق مربوط به سریهای مختلط و آزمونهای همگرایی می‌رسیم. اساس کار در مورد سریها در بخش‌های بعدی ارائه خواهد شد.

مسائل بخش ۱.۱۴

دبالة ها

آیا دبالة‌های داده شده زیر کراندار هستند؟ همگرا چطور؟ نقاط حدی آنها را بیابید.

$$z_n = \frac{(-1)^n}{n+i} \cdot 3 \quad z_n = e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot 2 \quad z_n = (-1)^n + 2i \cdot 1$$

$$z_n = \frac{\pi}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n\pi} \cdot 6 \quad z_n = (3i)^n - (1+i)^n \cdot 5 \quad z_n = \frac{(3+4i)^n}{n!} \cdot 4$$

$$z_n = i^n \cos n\pi \cdot 9 \quad z_n = \frac{n\pi}{1+2in} \cdot 8 \quad z_n = (-1)^n + \frac{i}{n} \cdot 7$$

۱۰. (یکتائی حد) نشان دهید که اگر دبالة‌ای همگرا باشد، حد آن یکتا است.

۱۱. اگر دبالة ... z_1, z_2, \dots همگرا و حد آن ۱ و دبالة z_1^*, z_2^*, \dots همگرا به حد i باشد، آنگاه نشان دهید که دبالة ... $z_1 + z_2^*, z_2 + z_3^*, \dots$ همگراست و دارای حد $i+1$ باشد.

۱۲. نشان دهید که تحت مفروضات مساله ۱۱ دبالة $z_1 z_1^*, z_2 z_2^*, \dots$ همگرا است و حد آن برابر با ۱ است.

۱۳. نشان دهید که دبالة مختلط ... z_1, z_2, \dots کراندار است اگر و فقط اگر دو دبالة متناظر قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی آن کراندار باشند.

سریها

۱۴. (همگرایی مطلق) نشان دهید که اگر یک سری همگرای مطلق باشد، آنگاه سری مفروض همگرا است.

آیا سریهای زیر همگرا هستند یا واگرایی؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \cdot 17 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-i}{3n+2i} \cdot 16 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+200i)^n}{n!} \cdot 15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{rn} + i^{rn}}{n!} \cdot 20 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ni}{9}\right)^n n^r \cdot 19 \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \cdot 18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n} \cdot 23$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+7i)^{4n}}{(2n)!} \cdot 22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n} \cdot 21$$

۲۴. فرض کنید که $1 < q$ ، درنتیجه بنا به آزمون نسبت (قضیه ۷) سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا است. نشان دهید که باقیمانده $\dots + z_{n+1}$ درنامساوی $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots$ صدق می کند. (راهنمایی). از این حقیقت استفاده کنید که آزمون نسبت مقایسه ای بین سری $z_1 + z_2 + \dots$ با سری هندسی است.

۲۵. با استفاده از مساله ۲۴ ، تعداد جمله هایی را که برای محاسبه مجموع S سری مساله ۲۳ باخطایی نه بیش از ۵٪ کفايت می کنند به دست آورید و S را با چنین دقتی محاسبه کنید.

۲.۱۴ سریهای توانی

سری توانی، که مختصرآ در مورد آن در ابتدای فصل صحبت شد یکی از مهمترین سریها در آنالیز مختلط است.

یک سری توانی بر حسب توانهای $z - z_0$ سری به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1)$$

می باشد که در آن z متغیر است، a_0, a_1, \dots ثابتی های هستند که به ضرایب سری موسوم اند و z عدد مختلط ثابتی است که مرکز سری نامیده می شود.

حالت $z = z_0$ ، حالت خاصی از سری توانی بر حسب توانهای z می باشد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (2)$$

رفتار همگرایی سری توانی

در بخش قبل در مورد سری با جملات ثابت مطالعی ارائه شد. وهم اکنون اگر جمله های یک سری متغیر باشند، یعنی توابعی از متغیر z (مثلًا یک سری توانی از z باشند)، آنگاه چنانچه z مقدار مشخصی را اختیار کند، جملات سری نیز مقادیر معینی اختیار می کنند، و در آن صورت همه تعاریف و مطالب بخش قبل در این حالت قابل به کارگیری هستند. واضح است که به ازای چنین سریهایی که جملات شان توابعی از z هستند حاصل جمع های جزئی باقیمانده ها، و مقدار سری توابعی از z خواهد بود. معمولاً چنین سری ای به ازای برخی مقادیر z ، مثلًا به ازای مقادیر z واقع در درون یک

ناحیه، همگرا و به ازای دیگر مقادیر z واگرا است. در حالت کلی، چنین نواحی ای می‌توانند پیچیده باشند برای یک سری توانی این مطلب ساده است. در واقع، با توجه به قضیه زیر مشاهده می‌کنیم که (۱) در تمام نقاط یک قرص به مرکز z_0 یا در تمام صفحه یا فقط در مرکز z_0 که در چنین حالتی (۱) عملاً بلا استفاده است می‌تواند همگرا باشد. موضوع را با ارائه سه مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱. همگرایی در یک قرص. سری هندسی

سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

به ازای $|z| < 1$ همگرا و به ازای $|z| \geq 1$ واگرا است. (قضیه ۶، بخش ۱۴.۱ را ملاحظه کنید.)

مثال ۲. همگرایی به ازای هر z

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

به ازای هر z مطلقاً همگرا است. در واقع، با توجه به آزمون نسبت، به ازای هر z مشخص، اگر $\rightarrow \infty$ n ، آنگاه داریم

$$\left| \frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0.$$

مثال ۳. همگرا فقط در مرکز (سری پوج)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

فقط در $z = 0$ همگرا است و به ازای هر $z \neq 0$ واگرا است. در واقع با توجه به آزمون نسبت، به ازای $z \neq 0$ می‌یابیم

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1)|z|$$

که تنها به ازای $z = 0$ برابر صفر و در نتیجه سری همگرا و به ازای سایر z ها به بینهایت واگرا است. وازانجا سری مورد نظر واگرا است.

هر سری توانی به صورت (۱) در مرکز خود همگرا است زیرا یک سری توانی به ازای $z = 0$ به تک جمله a_0 تبدیل می‌شود. اگر این نقطه، تنها نقطه همگرایی نباشد، در نتیجه (۱) لااقل در یک نقطه دیگر مانند $z_1 \neq 0$ نیز همگرا است، آنگاه (۱) به ازای هر z که فاصله اش از z_1 کمتر از R باشد همگرا است.

قضیه ۱ (همگرایی سری توانی)

اگر سری توانی (۱) در نقطه $z = z_0 \neq z_1$ همگرا باشد، این سری به ازای هر z که فاصله اش از z_0 کمتر از z_1 باشد، یعنی به ازای هر z که $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ مطلقاً همگرا است (ر. ک. شکل ۳۳۷).

اگر (۱) در یک نقطه $z = z_2$ واگرا باشد، آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله اش از z_0 بیشتر از z_2 باشد، یعنی به ازای هر z که $|z - z_0| \geq |z_2 - z_0|$ واگرا است (ر. ک. شکل ۳۳۷).



شکل ۳۳۷. قضیه ۱

اثبات. چون سری (۱) به ازای z_1 همگرا است. قضیه ۳ بخش ۱۴.۱ نشان می‌دهد که $a_n(z_1 - z_0)^n \rightarrow 0$.

این مطلب ایجاب می‌کند که به ازای $z = z_1$ جملات سری (۱) کراندار باشند، یعنی به ازای هر $n = 0, 1, \dots$

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < M.$$

با ضرب و تقسیم نمودن عبارت داخل قدر مطلق واقع در طرف چپ بر $(z_1 - z_0)^n$ می‌یابیم

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left| a_n(z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n. \quad (۳)$$

حال با توجه به فرض نتیجه $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < \left| z - z_0 \right|$ می‌شود که $1 < \left| z - z_0 \right| < \left| z_1 - z_0 \right|$. از اینرو سری

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$$

آزمون مقایسه بخش ۱۴.۱ نتیجه می‌شود که سری (۱) وقتی که $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ همگرا است.

اگر گزاره دوم از قضیه فوق نادرست باشد، آنگاه سری در یک z_2 ای همگرا می‌شود به طوری که z_2 در نامساوی $|z_2 - z_0| > |z_1 - z_0|$ صدق می‌کند. لذا همگرایی در z_2 متناقض با فرض واگرایی در z_2 است.

شعاع همگرایی سری توانی

مثالهای ۲ و ۳ بیان می کنند که سری توانی ممکن است به ازای تمام مقادیر z با فقط به ازای $z_0 = z$ همگرا باشد. فعلاً این دو مورد را کنار می گذاریم. بنابراین، اگر سری توانی (۱) مفروض باشد، می توانیم کلیه z های واقع در صفحه مختلط را که به ازای آنها سری همگرا است مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنید R کوچکترین عدد حقیقی ای باشد که حداقل فاصله هریک از نقاط مذکور از z_0 باشد، به عبارت دیگر، R شعاع کوچکترین دایره ای به مرکز باشد که شامل همه نقاطی است که سری در آنها همگرا است، آنگاه قضیه ۱ همگرایی سری، به ازای تمام z واقع در این دایره را ایجاب می نماید، یعنی به ازای تمام z هایی که در ناساوای

$$|z - z_0| < R \quad (4)$$

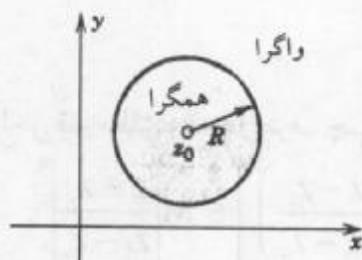
صدق کنند سری همگرا است. و چون R کوچکترین عدد ممکن است، سری به ازای تمام z هایی را که در رابطه

$$|z - z_0| > R$$

صدق می کنند، و اگر است. دایره

$$|z - z_0| = R$$

را دایره همگرایی و شعاع R را شعاع همگرایی (۱) می نامند (ر. ک. شکل ۳۳۸).



شکل ۳۳۸. دایره همگرایی

برای وارد کردن موارد $R = \infty$ و $z_0 = \infty$ به شرح زیر قرار می گذاریم: بدان معنی می گیریم که سری به ازای هر z یا بر کل صفحه مختلط همگرا است (مانند مثال ۲).

$R = \infty$ به آن معنی است که سری تنها در $z = z_0$ همگرا است مانند مثال ۳.

اینها تنها نماد گذاریهای مفید هستند و معنی دیگری ندارند.

به ازای سری توانی حقیقی (۱) بر حسب توانهای x^n با ضرایب و مرکز حقیقی، فرمول

(۴) دارای بازه همگرایی $R < |x - x_0|$ به طول $2R$ بر روی محور حقیقی می باشد.
به منظور پرهیز از درک نادرست ، هیچ قاعده کلی برای همگرایی سری توانی (۱) بر روی دایره همگرایی در دست نیست . چون یک سری توانی (۱) ممکن است در برخی نقاط واقع بر دایره همگرایی همگرا و در برخی نقاط دیگر واگرا باشد . با اینه یک مثال موضوع را روشن می سازیم .

مثال ۴ . رفتار بر روی دایره همگرایی

بر روی دایره همگرایی (در هر سه سری ذیل شعاع همگرایی برابر R می باشد)

$$\sum \frac{z^n}{n} \text{ در همه جا همگرا است زیرا } \frac{1}{n} \text{ همگرا است .}$$

$$\sum \frac{z^n}{n} \text{ بنا به آزمون لایپیتز ، در } -1 \text{ همگرا است ولی در } 1 \text{ واگرا است .}$$

شعاع همگرایی R سری توانی (۱) رامی توان از روی ضرایب سری به صورت زیر تعیین نمود .

قضیه ۲ (شعاع همگرایی R)

فرض کنید دنباله $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots$ همگرا بوده و حد آن برابر L باشد .

اگر $L^* = L$ ، آنگاه $R = \infty$ ، یعنی سری توانی (۱) به ازای هر z همگرا است .

اگر $L^* \neq L$ (از این‌رو $L^* > L$) ، آنگاه

$$(5) \text{، (فرمول کوشی - آدامار)} \quad R = \frac{1}{L^*}$$

اگر $\infty > L^*$ ، آنگاه $R = \infty$ (یعنی سری فقط در مرکز z_0 همگرا است) .

اثبات . جملات سری (۱) به شکل $Z_n = a_n(z - z_0)^n$ می باشند . از این رو با توجه به آزمون نسبت

(قضیه ۸ بخش ۱۴.۱) داریم

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0|;$$

یعنی

$$L = L^* |z - z_0|.$$

اگر $L^* = L$ ، آنگاه به ازای هر z داریم $R = L$ ، و آزمون نسبت همگرایی را به ازای هر z تضمین

۱- به نام ریاضیدان فرانسوی ، ا.ل. کوشی A. L. CAUCHY (ر.ک. زیرنویس بخش ۶.۲) و ژاک آدامار JACQUES HADAMARD (۱۸۶۳-۱۹۶۳) . آدامار توزیعهای بنیادی را در قضایای سری توانی بنا نهاد و تا آخر عمر روی معادلات با مشتقهای جزئی کار کرد .

می کند. فرض کنیم $L^* = L^* |z - z_0| < \frac{1}{L}$. اگر آنگاه $|z - z_0| > \frac{1}{L}$ و سری بنا به آزمون

نسبت همگرا است. بنابر تعريف، این موضوع نشان می دهد که $\frac{1}{L} \geq R$ ، شعاع همگرایی سری

(۱) است و بدین طریق (۵) به اثبات می رسد. اگر $\infty \rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ به ازای هر $z \neq z_0$ و هر n به

قدر کافی بزرگی داریم $1 \geq \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right|$ و درنتیجه واگرایی سری (۱)، به ازای هر $z \neq z_0$ از قضیه ۷ بخش

۱۴. ۱. نتیجه می شود. بدین طریق اثبات به پایان می رسد.

تبصره: اگر $L^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$ می یابیم

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (6)$$

این مطلب پذیرفته است، زیرا اگر a_n به سرعت به سمت صفر میل کند، آنگاه $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ از نظر میانگین

بزرگ خواهد شد (چرا؟) و سری در یک قرص بزرگ همگرا می گردد. اگر a_n به کندی به سمت صفر

میل کند، آنگاه $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ بطور نسبی کوچک خواهد شد. سری در یک قرص نسبتاً کوچک همگرا می گردد.

اگر L^* موجود نباشد، فرمولهای (۵) و (۶) کارانی خواهند داشت، اما بسط قضیه ۲ هنوز امکان پذیر است، همانطوری که در مثال ۶ (در ذیل) توصیف خواهیم نمود.

مثال ۵. شعاع همگرایی

R ، شعاع همگرایی سری توانی زیر را باید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z - 3i)^n.$$

حل. از (۵) داریم

$$L^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)![n+1]!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4, R = \frac{1}{L^*} = \frac{1}{4}.$$

لذا سری فوق در قرص باز $\left| z - 3i \right| < \frac{1}{4}$ به شعاع $\frac{1}{4}$ و به مرکز $3i$ همگرا است.

مثال ۶. تهمیم قضیه ۲

R ، شعاع همگرایی سری توانی زیر را باید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n + \frac{1}{2^n} \right] z^n = 3 + 2^{-1}z + (2 + 2^{-1})z^2 + 2^{-2}z^3 + (2 + 2^{-1})z^4 + \dots$$

حل. چون دنباله نسبتهاي $\frac{1}{2}(2+2^{-1}), \frac{1}{2^2}(2-2^{-2}), \dots$ همگرانيست، از قضيه ۲ نمي توان نتيجه گرفت. مي توان نشان داد

$$R = \frac{1}{\bar{L}}, \quad \bar{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (5^*)$$

اين موضوع نيز دراينجا كمكى به ما نخواهد كرد، زيرا $\sqrt[n]{|a_n|}$ همگرانيست. چون شواهد نشان

مي دهنند كه اين سري دارای دونقطه حدی $\frac{1}{2}$ و ۱ است. علاوه برآن مي توان نشان داد كه ،

$$R = \frac{1}{\bar{I}} \quad (5^{**})$$

كه درآن \bar{I} بزرگترین نقطه حدی دنباله است. دراينجا $\bar{I} = 1$ ، درنتيجه $R = 1$ و سري به ازاي $|z| < 1$ همگرا است.

مسائل بخش ۲۰.۱۴

مرکز و شعاع همگرائي هر يك از سريهاي توانی زير را يابيد.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^n z^{4n} . ۳$	$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi^n (z - i)^n . ۲$	$\sum_{n=0}^{\infty} (z + 4i)^n . ۱$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n} . ۶$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 4i)^n}{5^n} . ۵$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n!} . ۴$
$\sum_{n=0}^{\infty} (4z - 4i)^n . ۹$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z + 1)^n . ۸$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{4n}}{n!} (z + i)^n . ۷$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi n)!}{(n!)^r} (z + \pi i)^n . ۱۲$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n n^r}{2^n} z^{r_n} . ۱۱$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{rn} (n!)^r} z^{r_n} . ۱۰$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+r}}{(n+1)(n+r)} . ۱۵$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 1)^n}{n^n} . ۱۴$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{r_n+1}}{(2n+1)!} . ۱۳$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z - 1)^{rn} . ۱۸$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n - 1} z^{rn} . ۱۷$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z + 2)^n . ۱۶$

۱۹. نشان دهيد كه اگر سري توانی $\sum a_n z^n$ دارای شعاع همگرائي R (كه متناهي فرض شده است) باشد، آنگاه سري توانی $\sum a_n z^{rn}$ دارای شعاع همگرائي \sqrt{R} است.

۲۰. آیا سری توانی بر حسب توانهای z وجود دارد که در $z = 3 + 10i$ همگرا و در $z = 3 - 6i$ واگرا باشد؟ (دلیل بیاورید).

۱۴. ۳ نمایش توابع به صورت سری توانی

در این بخش بنا داریم که به نمایش توابع به صورت سری توانی پردازیم (قضیه ۵). خواهیم دید که سری توانی نسبت به اعمال جمع و ضرب، مشتقگیری و انتگرالگیری که کاربردهای متنوع در آنالیز مختلط دارند رفتار مناسبی دارند.

برای ساده تر کردن مطالب این بخش فرض می کنیم $z = z_0$ و می نویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1)$$

چنین فرضی هیچ مشکلی ایجاد نخواهد کرد زیرا اگر بسط بر حسب $z - z_0$ مورد نظر باشد، آنگاه با فرض $z = z_0$ به (۱) می رسیم.

اگر یک سری توانی دلخواه (۱) دارای شاعع همگرایی غیر صفر باشد، آنگاه مجموع چنین سری ای تابعی از z ، یعنی به صورت $f(z)$ است. در این صورت می نویسیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R). \quad (2)$$

و گوئیم که (۲) به صورت یک سری توانی نمایش داده شده است و یا به صورت یک سری توانی بسط داده شده است. به عنوان مثال، سری هندسی بسط تابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ است که در داخل دایره واحد $|z| = 1$ همگرا است (مثال ۱ بخش ۱۴. ۲ را ملاحظه کنید).

کار بعدی نشان دادن یکتاپی چنین نمایش است، یعنی نشان می دهیم که یک تابع آرانمی توان با دو سری متمایز که مرکزشان یکی است نمایش داد. اگر $f(z)$ را به یک سری توانی با مرکز z_0 بسط دهیم، این بسط یکتا است. این واقعیت مهم غالباً در آنالیز حقیقی و مختلط به کار می رود. این نتیجه را به صورت زیر (قضیه ۲، در ذیل) می آوریم.

قضیه ۱ (پیوستگی مجموع یک سری توانی)

تابع f که با (۲) معرفی شده به ازای $z_0 > R$ در $z = z_0$ پیوسته است.

اثبات. بنا به تعریف پیوستگی باید نشان دهیم که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = a_0,$$

یعنی باید نشان دهیم که به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که از

$|f(z) - a_0| < \delta$ نامساوی تیجه می شود. بنا به قضیه ۱ بخش ۲.۱۴، سری (۲) به ازای $R > |z|$ به طور مطلق همگرا است. لذا سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|r^n \quad (r > 0)$$

همگرا است. فرض کنید مقدار سری برابر S باشد. آنگاه به ازای $r \leq |z| < \infty$ می یابیم

$$|f(z) - a_0| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1} \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = |z|S.$$

نتیجه حاصله به ازای $\delta < |z|$ کمتر از ϵ است، که در آن $r > \delta$ هم از $\frac{\epsilon}{S}$ کوچکتر است. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

حال از این قضیه به راحتی می توان قضیه یکتایی مورد نظر را به دست آورد (مجدداً بدون آنکه به کلیت موضوع خللی وارد شود فرض می کنیم $a_0 = z_0$)

قضیه ۲ (قضیه همانی سری توانی)

هرگاه سریهای توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

به ازای $R < |z|$ ، که مثبت است، همگرا بوده و به ازای هر z دارای مقادیر یکسان باشند، آنگاه سریهای مذبور یکسان هستند، یعنی به ازای هر $n = 0, 1, \dots, m$ داریم

$$a_n = b_n.$$

اثبات. روش استقراء را به کار می بریم. بنا به مفروضات قضیه داریم $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ ($|z| < R$).

بنا به قضیه ۱ مجموع این دو سری توانی در $z = 0$ پیوسته هستند. بنابراین $a_0 = b_0$ ، یعنی روش استقراء به ازای $n = 0$ برقرار است. حال فرض می کنیم که $a_n = b_n$ به ازای $n = 0, 1, \dots, m$ برقرار باشد، و نشان می دهیم که به ازای به جای m نیز برقرار است. برای اثبات از طرفین تساوی فوق $a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \dots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \dots$ جمله اول را که باتوجه به فرض استقراء برابر هستند نیز حذف می کنیم و حاصل را بعداز تقسیم بر z^{m+1} می یابیم

$$a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \dots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \dots$$

مجدداً با توجه به قضیه ۱ هریک از این سریهای توانی تابعی را نمایش می دهند که در $z = 0$ پیوسته است. بنابراین $a_{m+1} = b_{m+1}$ و بدین ترتیب استقراء به پایان رسیده و قضیه به اثبات می رسد.

هر سری توانی نمایش یک تابع تحلیلی است. این مطلب، بعد از یک مقدمه سازی کوتاه، به

عنوان هدف اصلی در این بخش مطرح می‌شود. در بخش بعدی خواهیم دید که، بر عکس، هر تابع تحلیلی رامی توان با یک سری توانی (موسوم به سری تیلور) نمایش داد. این موضوع کاملاً شگفت‌انگیز است و این دو نتیجه نشان دهنده اهمیت سری توانی در آنالیز مختلط می‌باشد.

جمع و تفریق جمله به جمله دو سری توانی به شاعرهای همگرایی R_1 و R_2 یک سری توانی با شاعر همگرایی حداقل برابر می‌نماییم $R_1 \leq R_2$. راتیوچه می‌دهد. اثبات. با جمع (یا تفریق) جمله به $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm S^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S^*$ جمله حاصل جمع‌های جزئی S_n و S^* و با استفاده از فرمول نتیجه حاصل می‌شود.

ضرب جمله به جمله دوسری توانی

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots$$

و

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = b_0 + b_1 z + \dots$$

به معنی ضرب هر جمله از سری اول در هر جمله سری دوم است و برای به دست آوردن نتیجه ضرب حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع کرده برحسب توانهای z مرتب می‌کنیم. این نتیجه یک سری توانی است، که به حاصل‌ضرب کوشی دو سری موسوم می‌باشد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) z^n.$$

بدون اثبات خاطرنشان می‌کنیم که این سری توانی به ازای هر z ای که در داخل دایره‌های همگرایی هر دو سری مفروض باشد، به طور مطلق همگرا است و مجموع ضرب کوشی آنها برابر با $(S(z)g(z)) = f(z)g(z)$ است. برای اثبات، به مرجع [DV] که درضمیمه ۱ آمده است، مراجعه کنید. مشتقگیری و انگرالگیری جمله به جمله از سری توانی، همانطوری که بعداً نشان خواهیم داد، مجاز می‌باشد. سری مشتق سری توانی (۱) رامی توان با مشتقگیری جمله به جمله از (۱) به دست آورد، یعنی

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots \quad (3)$$

قضیه ۳ (مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی)

شعاع همگرایی سری مشتق یک سری توانی همان شاعر همگرایی سری اصلی است. اثبات. این مطلب از (۵) بخش ۲۰۴ نتیجه می‌شود. در واقع

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

اگر حد عبارت آخر موجود نباشد، باتوجه به این مطلب که وقتی $\infty \rightarrow n$ داریم $1 \rightarrow \sqrt[n]{n}$ ، نتیجه از (۵۰) بخش ۱۴. ۲ حاصل می شود. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

مثال ۱. کاربردی از قضیه ۳

R ، شعاع همگرایی، سری داده شده را با به کارگیری قضیه ۳ باید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{2} z^n = z^1 + 3z^2 + 6z^3 + 10z^4 + \dots$$

حل. با دوبار مشتقگیری جمله به جمله از سری هندسی و با ضرب $\frac{z^1}{z}$ درنتیجه حاصل، سری مفروض به دست می آید. بنابراین بنا به قضیه ۳ داریم $R = 1$.

قضیه ۴ (انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \dots$$

که از انتگرالگیری جمله به جمله سری $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ حاصل می شود دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۳ می باشد.

حال با استفاده از قضیه ۳ به عنوان یک ابزار، می توان نتیجه اصلی این بخش را بنا نهاد:

قضیه ۵ (تابع تحلیلی . مشتقات توابع تحلیلی)

هر سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر R در تمام نقاط داخلی دایره همگرایی خود تابع تحلیلی را بیان می کند. مشتقات این تابع با مشتقگیری جمله به جمله از سری اصلی حاصل می شود. تمام سریهایی که بدین طریق حاصل می شوند دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی می باشند. بنابراین، باتوجه به عبارت اول، هر یک از آنها یک تابع تحلیلی را نمایش می دهد.

اثبات. (الف) سری توانی دلخواه (۱) را با شعاع همگرایی مثبت R درنظر می گیریم. فرض می کنیم $f(z)$ حاصل جمع سری مفروض و $f'(z)$ حاصل جمع سری مشتق آن باشد؛ از این رو

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{و} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (4)$$

نشان می دهیم که $f(z)$ تحلیلی و دارای مشتق $f'(z)$ در داخل دایره همگرایی است. این عمل را با توجه

به اینکه به ازای هر z ثابت که $R < |z| \leq \Delta z$ نسبت تفاضلی $\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ به سمت

$f(z)$ میل می‌کند، انجام می‌دهیم. ابتدا با جمع جمله به جمله از (۴) داریم

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1} \right]. \quad (5)$$

توجه می‌کنیم که جمع با اندیس ۲ شروع می‌شود، چون جمله ثابت از محاسبه تفاضل $f(z + \Delta z) - f(z)$ به دست می‌آید و جمله خطی وقتی که $f(z)$ را از نسبت تفاضلی کم کنیم حاصل می‌شود.

(ب) ادعا می‌کنیم که سری واقع در (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Delta z \left[(z + \Delta z)^{n-1} + 2z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + (n-1)z^{n-2} \right]. \quad (6)$$

اثباتی از آن در ضمیمه ۴ آمده است.

(ج) (۶) را در نظر می‌گیریم. در داخل کروشه $|z| \leq R$ جمله وجود دارد که بزرگترین ضریب در بین آنها $n-1$ است. چون $(n-1) < n(n-1) \leq R$ ، مشاهده می‌کنیم که به ازای $|z + \Delta z| \leq R$ ، قدر مطلق این سری نمی‌تواند از

$$|\Delta z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n(n-1) R^{n-1}$$

تجاوز کند. این سری با a_n به جای $|a_n|$ سری مشتق دوم (۲) در $z = R$ است و بنابر قضیه ۳ و قضیه ۱ بخش ۲۰ نیز مطلقاً همگرا است. بنابراین سری اخیر همگرا است. فرض کنید $K(R)$ حاصل جمع آن باشد. آنگاه می‌توان نتیجه را به صورت زیر نوشت

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f'(z) \right| \leq |\Delta z| K(R).$$

با فرض $|z + \Delta z| \leq R$ و با توجه به اینکه $f(z)$ در هر نقطه ای واقع در داخل دایره همگرا بوده است و مشتق آن با سری مشتق نشان داده می‌شود. همین حکم در مورد مشتقات بالاتر به روش استقرای ثابت می‌شود. بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

خلاصه. نتایج به دست آمده در این بخش نشان می‌دهند که سریهای توانی بسیار مفید هستند. از سریهای توانی می‌توان جمله به جمله مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری نمود (قضایای ۳ و ۴). قضیه ۵، یکی از قضایای بسیار مهم در مورد سریهای توانی در آنالیز مختلط می‌باشد: حاصل جمع یک چنین سری ای (با شاعر همگرا بودن) که یک تابع تحلیلی است و از هر مرتبه دارای مشتق است و همه این مشتقها توابع تحلیلی هستند. ولی این تنها قسمتی از مطلب است.

در بخش آتی خواهیم دید، بر عکس، هر تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ را می‌توان با سری توانی

نمایش داد.

مسائل بخش ۳. ۱۴

شعاع همگرایی سریهای داده شده زیر را به دو روش (الف) مستقیماً از فرمول کوشی - آدامار (بخش ۲.۱۴)، (ب) با استفاده از قضیه ۳ یا قضیه ۴ و یک سری با ضرایب ساده تر بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} (z+1)^{2n} \cdot ۳ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n \cdot ۲ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} (z-i)^n \cdot ۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} z^n \cdot ۶ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n(n+1)}{v^n} z^{2n} \cdot ۵ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n+1} \cdot ۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} z^{n+1} \cdot ۹ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n} \right]^{-1} z^{n+k} \cdot ۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n(n+1)(n+2)} z^n \cdot ۷$$

۱۰. در اثبات قضیه ۳، ادعا کردیم که وقتی $\infty \rightarrow n$ داریم $\sqrt[n]{n} = ۱$. این مطلب را ثابت کنید. راهنمایی . قرار دهید $c_n > \sqrt[n]{n} = ۱ + c_n$ ، که در آن $0 < c_n < 1$ و نشان دهید که وقتی $\infty \rightarrow n$ داریم $0 < c_n \rightarrow 0$.

۱۱. با استفاده از (الف) حاصلضرب کوشی، (ب) عمل مشتقگیری یک سری مناسب نشان دهید که $(1-z)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$.

۱۲. با به کارگیری قضیه ۲ برای $(1+z)^p (1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ اعداد صحیح مثبت هستند نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^r \binom{p}{n} \binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}$$

۱۳. اگر در (۱)، $f(z)$ زوج باشد، نشان دهید که به ازای همه n های فرد داریم $a_n = 0$ (از قضیه ۲ استفاده کنید).

۱۴. (اعداد فیبوناچی) اعداد فیبوناچی با فرمول بازگشتی زیر تعریف می شوند.

$a_0 = ۱, a_1 = ۱$ نمایش دهید که اگر سری توانی $\dots + a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ به صورت سری توانی باشد، آنگاه ضرایب این سری توانی اعداد فیبوناچی

تابع $F(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ به صورت سری توانی باشد، اگر سری توانی اعداد فیبوناچی هستند و بر عکس. راهنمایی : از $1 = f(z)(1-z-z^2)$ شروع کنید و قضیه ۲ را به کار ببرید.

۱۵. اثبات حاصل جمع و تفریق جمله به جمله سری توانی مشخص شده در متن را بنویسید.

۲- لئونارد پیترزا LEONARD OF PISA، مشهور به فیبوناچی FIBONACCI (= فرزند بوناکیو) (۱۱۸۰-۱۲۵۰) یک ریاضیدان ایتالیایی بود.

۴-۱۴ سری تیلور

همانطوری که در قضیه ۵ بخش ۳.۳ دیدیم، حاصل جمع هر سری توانی (با شعاع همگرایی مثبت) یکتابع تحلیلی است. حال بر عکس می خواهیم نشان دهیم که هرتابع تحلیلی f رامی توان با سری توانی نمایش داد، که این سری توانی، معروف به سری تیلور ($f(z)$) می باشد و وضعیت آن به همان شکلی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آمده است. برای رسیدن کافی است به جای x ، Z ، Z^* جایگزین شود.

با قرار دادن Z و Z^* به ترتیب به جای Z_0 و Z^* در فرمول انتگرال کوشی می یابیم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*. \quad (1)$$

Z در داخل C قرار دارد، برای آن که یک دایره به شعاع r و به مرکز Z_0 در آن همسایگی در نظر گرفته ایم.

Z^* متغیر مختلط انتگرالگیری است (شکل ۳۳۹). هدف بعدی مابسط $\frac{1}{Z^* - Z}$ واقع در (۱) بر حسب توانهای $Z - Z_0$ می باشد، برای این منظور چنین می نویسیم

$$\frac{1}{Z^* - Z} = \frac{1}{(Z^* - Z_0) - (Z - Z_0)} = \frac{1}{(Z^* - Z_0)(1 - \frac{Z - Z_0}{Z^* - Z_0})}. \quad (2)$$

برای استفاده بعدی توجه می کنیم که چون Z^* روی C قرار دارد، در حالی که Z در داخل C است، داریم

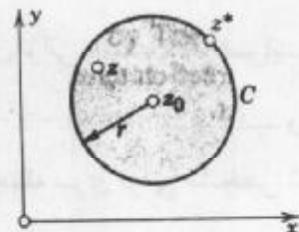
$$\left| \frac{Z - Z_0}{Z^* - Z_0} \right| < 1. \quad (2*)$$

بنابراین می توان سری هندسی به کار گرفت. لذا داریم

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1), \quad (3*)$$

وازانجا می یابیم

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}. \quad (3)$$



شکل ۳۳۹. فرمول کوشی (۱)

با به کار بردن (۳) به ازای $q = \frac{z - z_0}{z^* - z_0}$ در طرف راست (۲) می‌یابیم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{z^* - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^n \right] \\ + \frac{1}{z^* - z} \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^{n+1}.$$

این مقدار را در (۱) قرار می‌دهیم. از آنجا که توانهای $z - z_0$ وابسته به متغیر انگرال‌گیری z^* نمی‌باشند، درنتیجه می‌توان آنها را از زیر علامت انگرال خارج نمود، بنابراین به دست می‌آوریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z_0} dz^* + \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)} dz^* + \dots \\ \dots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* + R_n(z), \quad (4)$$

که در آن جمله آخر طبق فرمول

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)} dz^* \quad (5)$$

مفروض می‌باشد. با استفاده از فرمولهای انگرال کوشی (۱) بخش ۱۳.۶ برای مشتقات، می‌یابیم

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots \\ \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z). \quad (6)$$

این نمایش به فرمول تیلور^۳ موسوم می‌باشد. $R_n(z)$ را باقیمانده می‌نامند. چون تابع تحلیلی $f(z)$ مشتق از تمام مراتب دارد، می‌توان n را در (۶) به دلخواه بزرگ گرفت. اگر n به سمت بینهایت میل کند، از (۶) سری توانی

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m \quad (7)$$

حاصل می‌شود. این سری را سری تیلور $f(z)$ با مرکز z_0 می‌نامند. حالت خاصی از (۷) با مرکز $z_0 = 0$ به سری مکلورن^۴ مشهور می‌باشد.

^۳- بروک تیلور BROOK TAYLOR (۱۶۸۵-۱۷۳۱)، ریاضیدان انگلیسی است که فرمول بالا را برای توابع یک متغیره حقیقی کشف کرد.

^۴- کالین مکلورن COLIN MACLAURIN (۱۶۹۸-۱۷۴۸)، ریاضیدان اسکاتلندی استاد دانشگاه ایدنبرو بود.

بدیهی است، سری (۷) همگرا بوده و $f(z)$ را نمایش خواهد داد اگر و فقط اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \quad (8)$$

برای اثبات (۸) از (۵) استفاده می کنیم. چون Z^* بر روی C قرار دارد، در حالی که در داخل C است (شکل ۳۳۹) داریم $|z^* - z| > 0$. چون $f(z)$ در داخل C و روی C تحلیلی است،

نتیجه می شود که قدر مطلق $\frac{f(z^*)}{z^* - z}$ کراندار است، مثلاً به ازای هر Z^* واقع بر C داریم

$$\left| \frac{f(z^*)}{z^* - z} \right| \leq M.$$

همچنین، r شعاع C ، و C دارای طولی برابر $2\pi r$ است. بنابراین با به کار بردن نامساوی ML (بخش ۱۳.۲) در مورد (۵) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} |R_n| &= \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)} dz^* \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = M r \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^{n+1}. \end{aligned}$$

چون Z در داخل C واقع است، در طرف راست رابطه فوق داریم، $|z - z_0| < r$. بنابراین

$\frac{|z - z_0|}{r} < 1$ در نتیجه طرف راست رابطه فوق وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل می کند. بدین طریق برای هر Z ای که در داخل C باشد (۸) به اثبات می رسد. بنابراین قضیه ۲ از بخش قبل، نمایش $f(z)$ به صورت (۷) یکتا است، به این معنی که (۷) تنها سری توانی به مرکز Z_0 است که تابع مفروض آن را نمایش می دهد، نتایج حاصل را می توان به شرح زیر جمع بندی کرد:

قضیه ۱ (قضیه تیلور)

فرض کنید $f(z)$ در یک دامنه D تحلیلی و همچنین Z_0 نقطه دلخواهی واقع در D باشد. آنگاه تنها

یک سری توانی به مرکز Z_0 وجود دارد که $f(z)$ را نمایش می دهد. این سری به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n; \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (9)$$

می باشد. این نمایش در بزرگترین قرص بازی که مرکز آن Z_0 است و در D واقع می باشد معتبر است. $R_n(z)$ باقیمانده (۹)، را می توان به صورت (۵) نمایش داد. ضرایب (۹) در نامساوی

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (10)$$

صدق می کند که در آن M ماکزیمم $|f(z)|$ روی دایره $|z - z_0| = r$ است.

نامساوی (۱۰) از نامساوی کوشی (۳)، بخش ۱۳.۶، نتیجه می شود. با توجه به فرمول

(۱) بخش ۱۳.۶ فرمول زیر برای محاسبه ضرایب a_n مذکور در (۹) حاصل می‌شود

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (9)$$

که در آن انتگرال در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیر بسته ساده که شامل z_0 به عنوان یک نقطه درونی صورت می‌پذیرد.

عملای، (۸) بدان معنی است که به ازای همه z هایی که (۹) به ازای آنها همگرا باشد، n امین مجموع جزئی $f(z)$ را با هر دقت دلخواهی تقریب خواهد زد؛ تنها کاری که ما باید انجام دهیم این است که n را به هر اندازه که می‌خواهیم بزرگ اختیار کنیم.

نقاط تکین تابع تحلیلی f نقاطی است که در آن $f(z)$ خاصیت تحلیلی بودن خود را ازدست می‌دهد. به عبارت دقیق‌تر، نقطه $z = c$ را نقطه تکین $f(z)$ نامند اگر $f(z)$ در $z = c$ مشتقپذیر نباشد، ولی در هر قرص به مرکز c شامل نقاطی باشد که $f(z)$ در آنها مشتقپذیر است. همچنین گوئیم $f(z)$ در نقطه $z = c$ تکینی دارد. مثالها : $\frac{1}{1-z}$ در $z = 1$ و $\tan z$ در $z = \dots, \dots, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$ تکینی دارند.

با استفاده از این مفهوم می‌توان گفت که $f(z)$ حداقل یک نقطه تکین روی دایره همگرا بیست (۹) دارد.

سری تیلور برخی توابع مهم

این مطالب از روی خواص مشابه با جابجایی X با z مختلف مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال حاصل می‌شوند. می‌توانید بگوئید چرا؟ (جواب. ضریب فرمولها یکسان هستند.)

مثال ۱. سری هندسی

فرض کنید $f(z) = \frac{1}{1-z}$. آنگاه داریم $f^{(n)}(0) = n!$ و $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$. بنابراین بسط

مکلورن $\frac{1}{1-z}$ یک سری هندسی به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1). \quad (11)$$

$z = 1$ یک نقطه تکین برای $f(x)$ و این نقطه روی دایره ای که به شعاع واحد می‌باشد قرار دارد.

مثال ۲. توابع نمایی

- شعاع همگرا بیست (۹) در حالت کلی برابر است با فاصله z_0 از نزدیکترین نقطه تکین $f(z)$ ، اما ممکن است این شعاع بزرگ‌تر باشد، به عنوان مثال برای $z = \ln x$ کلیه نقاط نیم محور حقیقی منتهی نقاط تکین هستند، و فاصله $z_0 = -1$ از آن محور برابر ۱ است، در حالی که شعاع همگرا بیست (۹) $z = \ln x$ با مرکز $i + 1 = -1$ برابر $\sqrt{2}$ است.

چنانچه آموختیم تابع نمایی e^z (بخش ۱۲.۶) به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است، و $(e^z)' = e^z$.
بنابراین در (۹) با قراردادن $z = iy$ سری مکلورن تابع نمایی e^z به صورت زیر حاصل می‌شود

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (12)$$

سری مذبور از جایگزین کردن z به جای x در سری ملکورن e^x نیز حاصل می‌شود.
علاوه بر آن، با قراردادن $iy = z$ در (۲) و با جداسازی قسمتهای حقیقی و موهومی سری (ر. ک. قضیه ۲. بخش ۱۴.۱) به دست می‌آوریم

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

چون سریهای سمت راست سریهای مکلورن توابع حقیقی $y \cos y$ و $y \sin y$ هستند، می‌بایم

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (13)$$

که همان فرمول معروف اویلر می‌باشد. در واقع، می‌توان (۱۲) را برای تعریف e^z به کار برد و از (۱۲) پی به خواص اساسی e^z برد. به عنوان مثال، فرمول دیفرانسیلی $(e^z)' = e^z$ (به راحتی از مشتقگیری جمله به جمله (۱۲) به دست می‌آید).

مثال ۳. توابع مثلثاتی و هذلولوی

با قرار دادن (۱۲) در (۱)، بخش ۱۲.۷ به دست می‌آوریم

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad (14)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots .$$

به طور مشابه داریم

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad (15)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots .$$

مثال ۴. لگاریتم

از (۹) نتیجه می‌شود

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad (|z| < 1). \quad (16)$$

با قرار دادن $z = -1$ و ضرب کردن دو طرف نتیجه حاصل در $1 - z$ می‌بایم

$$-\ln(1-z) = \ln \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad (|z| < 1). \quad (17)$$

با جمع کردن دو سری می‌یابیم

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2(z + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \dots) \quad (|z| < 1). \quad (18)$$

در بخش بعدی برخی روش‌های عملی برای به دست آوردن سری تیلور که از محاسبات پیچیده مشتقات در (۹) اجتناب می‌شود، را بیان خواهیم کرد.

در رابطه با بخش قبلی

بحثهای مطرح شده در بخش قبل به خوبی با بخش حاضر به صورت زیر در ارتباط هستند:

قضیه ۲.

هر سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر، سری تیلور تابعی است که با آن سری توانی نمایش داده می‌شود.

اثبات. سری توانی دلخواهی با شعاع همگرایی مثبت R را در نظر می‌گیریم و مجموع آن را $f(z)$ می‌نامیم. بنابراین

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

از قضیه ۵، بخش قبل می‌یابیم

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \dots$$

و به طور کلی

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + (n+1)n\dots 3.2a_{n+1}(z - z_0)^n + \dots; \quad |z - z_0| < R$$

همه این سریها در فرض $|z - z_0| < R$ همگرا می‌باشند و توابع تحلیلی را نمایش می‌دهند. بنابراین این توابع، بنا به قضیه ۱ از بخش قبل، در $z = z_0$ پیوسته می‌باشند. اگر قرار دهیم $z = z_0$ می‌یابیم

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = a_1, \dots, \quad f^{(n)}(z_0) = n!a_n, \quad \dots$$

چون این فرمولها همانند فرمولهای قضیه تیلور می‌باشند، اثبات کامل است.

توضیح. مقایسه با توابع تحلیلی

یک خاصیت شکفت انگیز توابع تحلیلی مختلط این بود که آنها از هر مرتبه دارای مشتق بودند، در این قسمت به خاصیت جالب دیگری برخوردم و آن این است که همواره آنها را می‌توان به صورت (۹) نمایش داد و چنین خواصی معمولاً در توابع حقیقی برقرار نیستند. توابع حقیقی ای موجود اند که از

هر مرتبه دارای مشتق بوده ولی قابل نمایش به صورت توانی نیستند. برای این منظور تابع زیر را ارائه می‌کنیم.

تابع $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع را نمی‌توان با سری مکلورن نمایش داد زیرا تمام مشتقات آن در $x=0$ برابر صفر هستند.

مسائل بخش ۴.۱۴

سری تیلور هریک از توابع زیر را در نقاط داده شده به عنوان مرکز بباید. شعاع همگرایی آنها را تعیین کنید. (مسائل بیشتری از این در بخش بعد، بعد از بحث روش‌های عملی ارائه خواهد شد.)

$$1. \sin \pi z, 2. 2i, e^{iz}, 3. 0, e^{-z}$$

$$4. \frac{1}{1-z}, 5. \frac{\pi}{2}, \sin z, 6. -\frac{\pi}{2}, \cos z$$

$$7. 1, \ln z, 8. i, \frac{1}{1-z}, 9. -1, \frac{1}{1-z}, 10. -1, z^2, 11. 2i, \sin(z-2i)$$

$$12. 1, z^3 - z^2 + 1, 13. 0, \sin^2 z, 14. 0, \cos^2 z, 15. \frac{\pi}{2}, \cos(z - \frac{\pi}{2})$$

مسائل ۱۶ تا ۲۶ بیان می‌کنند که چگونه می‌توان خواص توابع را از روی خواص سری مکلورن آنها به دست آورد.

۱۶. با استفاده از (۱۲)، ثابت کنید $(e^z)' = e^z$.

۱۷. (۱۴) و (۱۵) را از (۱۲) به دست آورید. از قضیه تیلور، (۱۶) را نتیجه بگیرید.

۱۸. با استفاده از (۱۴)، نشان دهید که $\cos z$ زوج و $\sin z$ فرد است.

۱۹. با استفاده از (۱۵) نشان دهید که به ازای هر $x = z$ که در آن x عددی حقیقی است، $\cosh z \neq 0$.

۲۰. با استفاده از (۱۴) نشان دهید که به ازای هر $z \neq 0$ موهومی محض، $\sin z \neq 0$.

۲۱. با استفاده از (۱۴) نشان دهید که $(\cos z)' = -\sin z$ و $(\sin z)' = \cos z$.

۲۲. با استفاده از (۱۴) نشان دهید که $\cos z + i \sin z = e^{iz}$ به سری مکلورن منجر می‌شود.

۲۳. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z=0$ تعریف نشده است. $(f(z))^\circ$ را طوری تعریف کنید که $f(z)$ تابعی تام شود (دلیل بیاورید).

۲۴. با مشتقگیری از (۱۶)، مشتق $\ln(1+z)$ را بباید.

۲۵. روابط (۱۴) و (۱۵)، بخش ۱۲. رایین توابع سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی از نمایش (۱۴) و (۱۵) را به دست آورید.

۲۶. سری مکلورن $\cosh^r z$ را از مساله ۱۴ به دست آورید.

مسائل ۲۷ تا ۳۰ مربوط به تابع خطا $\text{erf } z$ (وابسته به توزیع نرمال در بخش‌های ۲۳ و ۲۴)، انتگرال سینوسی $S(z)$ و انتگرال‌های فرنل $C(z)$ می‌باشند. این توابع خاص غیرمقدماتی به صورت انتگرال تعریف می‌شوند. این توابع را نمی‌توان با روش‌های معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال ارزیابی کرد. این انتگرال‌ها ندرتاً در کارهای ماکاربرد دارند بدینجهت آنها را در اینجا مذکور می‌شویم. سری مکلورن توابع زیر را با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری مکلورن تابع زیر علامت انتگرال محاسبه کنید.

$$S(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \quad .28 \qquad \text{erf } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad .27$$

$$C(z) = \int_0^z \cos t^2 dt \quad .30 \qquad S(z) = \int_0^z \sin t^2 dt \quad .29$$

۱۴. ۵ سریهای توانی : روش‌های عملی

در بیشتر موارد، محاسبه ضرایب سری تیلور به کمک فرمول قضیه تیلور پیچیده وقت گیراست. روش‌های بهتر و سریعتری برای تعیین ضرایب سری تیلور وجود دارند. چگونگی به کارگیری این روش‌ها را با ارائه چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱. جایگزینی

سری مکلورن تابع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ را بایابید.

حل. با قراردادن z^2 به جای در (۱۱)، بخش ۱۴. ۴ می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\ &= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \end{aligned} \quad (1) \quad (|z| < 1).$$

مثال ۲. انتگرال‌گیری

سری مکلورن تابع $f(z) = \tan^{-1} z$ را بایابید.

$$\text{حل. داریم } f'(z) = \frac{1}{1+z^2}, \text{ با انتگرال‌گیری جمله به جمله از (۱) و با استفاده از } f(0) = 0 \text{ می‌یابیم}$$

۶- آگوستن فرنل AUGUSTIN FRESNEL (۱۷۸۸-۱۸۲۷)، فیزیکدان فرانسوی، که به بخاطر کارهایش در اپتیک معروف است.

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \quad (|z| < 1);$$

این سری مقدار اصلی $z = u + iv = \tan^{-1} w$ را، که به ازای آن داریم $\frac{\pi}{2} < |u| < \pi$ ، نمایش می‌دهد.

مثال ۳. بسط توابع با استفاده از سری هندسی

تابع $\frac{1}{c - bz}$ را، که در آن $c \neq 0$ و $b \neq 0$ ، بر حسب توانهای $a - z$ بسط دهید.

حل. به منظور به دست آوردن توانهای $a - z$ ، ابتدا از عبارت جبری ساده زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{c - bz} = \frac{1}{c - ab - b(z - a)} = \frac{1}{(c - ab) \left[1 - \frac{b(z - a)}{c - ab} \right]}.$$

هم اکنون با توجه به فرمول (۱۱) بخش ۴.۱۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{1}{c - bz} &= \frac{1}{c - ab} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b(z - a)}{c - ab} \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(c - ab)^{n+1}} (z - a)^n \\ &= \frac{1}{c - ab} + \frac{b}{(c - ab)^2} (z - a) + \frac{b^2}{(c - ab)^3} (z - a)^2 + \dots . \end{aligned}$$

این سری به ازای $|z - a| < \frac{|c - ab|}{|b|}$ همگرا است.

مثال ۴. سری دوجمله‌ای، تحویل به کسرهای جزئی

سری تیلور تابع زیر را به مرکز $z_0 = 1$ باید

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^2 + z^2 - 8z - 12}.$$

حل. تابع گویای مورد نظر را نخست به صورت مجموع کسرهای جزئی نمایش می‌دهیم و سپس سری دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z)^m} &= (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n \\ &= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \dots \end{aligned} \tag{۲}$$

را به کار می‌بریم. چون تابع سمت چپ در $-1 = z_0$ نکینی دارد، سری در قرص $1 < |z| < \infty$ همگرا است. تابع $f(z)$ را به صورت

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3+(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)}$$

با

$$f(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}(z-1)\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(z-1)}$$

می نویسیم. هم اکنون با استفاده از سری دوجمله‌ای می‌یابیم

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z-1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z-1}{2}^n.$$

دو سری سمت راست را می‌توان جمله به جمله جمع نمود. چون ضریب دوجمله‌ای در سری اول

$$\text{برابر با } (-1)^n(n+1) \text{ است، می‌یابیم} \quad \frac{(-2)(-3)\dots(-[n+1])}{n!} = (-1)^n(n+1).$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n} \right] (z-1)^n = -\frac{1}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 - \dots.$$

چون $z = 3$ نزدیکترین نقطه تکین $f(z)$ به مرکز $z = 1$ است، سری در قرص $|z-1| < 2$ همگرا است.

مثال ۵. موارد استعمال معادلات دیفرانسیل

سری مکلورن $\tan z = f(z)$ را باید.

حل. داریم $f'(z) = \sec^2 z$ و بنابراین، چون $f(0) = 0$ ، داریم

$$f'(z) = 1 + f'(z), \quad f'(0) = 1.$$

نظر به اینکه $f(0) = 0$ ، با مشتقگیری متوالی می‌یابیم

$$f'' = 2ff', \quad f''(0) = 0,$$

$$f''' = 2f'^2 + 2ff'', \quad f'''(0) = 2, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$f^{(4)} = 6f'f'' + 2ff''', \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)} = 6f''^2 + 12f'f''' + 2ff^{(4)}, \quad f^{(5)}(0) = 16, \quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{2}{15},$$

ونظایر آن. از این رو نتیجه می‌گیریم

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right). \quad (3)$$

مثال ۶. ضرایب نامشخص

سری مکلورن $\tan z$ را با استفاده از سریهای مکلورن $\cos z$ و $\sin z$ (بخش ۴.۱۴) باید.

حل. چون $\tan z$ تابعی فرد است، بسط موردنظر به صورت زیر می‌باشد

$$\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$$

با استفاده از $\sin z = \tan z \cos z$ وارد کردن بسطهای آنها می‌یابیم

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = (a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots).$$

چون $\tan z$ در همه جا، به جز در $\dots, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$ تحلیلی است، سری مذکور آن در

فرض $\frac{\pi}{2} < |z|$ همگرا است، و برای این z ها می‌توان حاصلضرب کوشی را برای دو سری سمت راست تشکیل داد (ر. ک. بخش ۱۴. ۳)، یعنی دو سری را جمله به جمله درهم ضرب می‌کنیم و سری حاصل را بر حسب توانهای z مرتب می‌کنیم. بنابر قضیه ۲ بخش ۱۴، ضرایب هر توان z در دو طرف باهم مساوی هستند. این مطلب به

$$1 = a_0, \quad \frac{1}{3!} = -\frac{a_1}{2!} + a_2, \quad \frac{1}{5!} = \frac{a_1}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_3,$$

وغیره منجر می‌گردد. از این رو مانند قبل داریم $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{15}$ و الی آخر.

مسائل بخش ۱۴

سری مذکور نتوابع زیر را باید و شاع همگرایی آنها را تعیین کنید.

$$\begin{array}{ccc} \frac{z+2}{1-z^3} \cdot 3 & \frac{1}{1-z^2} \cdot 2 & \frac{1}{1+z^4} \cdot 1 \\ \frac{1}{(z+3-4i)^6} & \sin 2z^5 \cdot 5 & \frac{1}{(1-z)^4} \cdot 4 \\ \frac{2z^7+15z+34}{(z+4)^7(z-2)} \cdot 9 & e^{z^7} \int_0^z e^{-t^7} dt \cdot 8 & \frac{e^{z^7}-1}{z^7} \cdot 7 \end{array}$$

سری تیلور هریک از توابع زیر را در نقطه داده شده به عنوان مرکز باید و شاع همگرایی آنها را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ccc} -2i, \frac{1}{(z+i)^7} \cdot 12 & 1+i, \frac{1}{z} \cdot 11 & 1, \frac{1}{z} \cdot 10 \\ -1, \frac{1+z-\sin(z+1)}{(z+1)^7} \cdot 15 & 1-i, (z+i)^7 \cdot 14 & i, z^2+z^7-z \cdot 13 \\ \frac{1}{2}, \sin \pi z \cdot 18 & \frac{\pi i}{2}, \cosh z \cdot 17 & -\pi i, e^z \cdot 16 \end{array}$$

سچمله اول غیر صفر سری تیلور هریک از توابع زیر را در نقطه داده شده به عنوان مرکز باید و شاع همگرایی آنها را تعیین نمائید.

$$\frac{\pi}{4}, \tan z \cdot 21 \quad 0, \frac{\cos 2z}{1-4z^2} \cdot 20 \quad 0, e^{z^7} \sin z \cdot 19$$

$$-1, \frac{4-6z}{2z^2-3z+1}, 24 \quad 0, \cos\left(\frac{z}{3-z}\right), 23 \quad 0, \frac{e^z}{\cos z}, 22$$

۲۵. (اعداد اویلر) سری مکلورن

$$\sec z = E_0 - \frac{E_1}{1!} z + \frac{E_2}{4!} z^4 - + \dots \quad (4)$$

معرف اعداد اویلر E_n است. نشان دهید که $E_0 = 1$, $E_1 = -\frac{1}{2}$, $E_2 = \frac{5}{4}$, $E_3 = -\frac{61}{4}$, $E_4 = \frac{5}{2}$.

۲۶. (اعداد برنویلی) سری مکلورن

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots \quad (5)$$

اعداد برنویلی B_n را تعریف می‌کند. با استفاده از روش ضرایب نامعین نشان دهید که

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (6)$$

۲۷. با استفاده از (۱)، (۲)، بخش ۷.۱۲، و (۵) نشان دهید که

$$\tan z = \frac{2i}{e^{iz} - 1} - \frac{4i}{e^{4iz} - 1} - i = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n(2^n - 1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}. \quad (7)$$

۲۸. با بسط $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ و انتگرالگیری، نشان دهید که

$$\sin^{-1} z = z + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{z^3}{3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \frac{z^5}{5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) \frac{z^7}{7} + \dots \quad (|z| < 1).$$

نشان دهید که این سری مقدار اصلی z را نمایش می‌دهد (تعریف مقدار اصلی در مساله ۴۵،

بخش ۷.۸ آمده است).

۲۹. آیا شاع همگرایی در مثال ۳ همان است که از صورت تابع داده شده انتظار داریم؟

۳۰. سری مکلورنی باید که تابع متناظر بیش از یک نقطه تکین روی دایره همگرایی داشته باشد.

۶. همگرایی یکنواخت

می‌دانیم که سریهای توانی به طور مطلق همگرا می‌باشند (بخش ۲.۱۴، قضیه ۱) و، به عنوان یک خاصیت اساسی دیگر، اینکه نشان می‌دهیم که آنها همگرایی یکنواخت می‌باشند. چون همگرایی یکنواخت عمومیتری برخوردار است، برای مثال، در ارتباط با انتگرالگیری جمله به جمله سریها، به طور کامل آن را توضیح خواهیم داد.

برای تعریف همگرایی یکنواخت یک سری، فرض می‌کنیم که جملات سری توابع $f_n(z)$ باشند، یعنی

- جداول مربوطه را در مرجع [۱]، ضمیمه ۱ ملاحظه کنید.

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots \quad (1)$$

(برای حالت خاص $f_m(z) = a_m(z - z_0)^m$ سری (1) یک سری توانی است). فرض کنیم که این سری به ازای هر z واقع در ناحیه G همگرا باشد. حاصل جمع این سری را $S(z)$ می‌نامیم و n امین مجموع جزئی آن را با $S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$ نمایش می‌دهیم؛ با توجه به این مفروضات می‌بایس

همگرای در G بدان معنی است که اگر $z = z_0$ یک نقطه واقع در G باشد، آنگاه بنا به تعریف همگرایی به ازای هر عدد مثبت ϵ عددی مثل $N_\epsilon(\epsilon)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N_\epsilon(\epsilon)$ داشته باشیم

$$|S(z_0) - S_n(z_0)| < \epsilon.$$

همینطور اگر z یک نقطه دیگر در G باشد، آنگاه به ازای همان ϵ مفروض برای z عددی مانند $N_\epsilon(\epsilon)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N_\epsilon(\epsilon)$ داشته باشیم

$$|S(z) - S_n(z)| < \epsilon$$

و همینطور برای بقیه نقاط واقع در G از این رو، به ازای یک $\epsilon > 0$ مفروض، با هر z واقع در G یک عدد $N_\epsilon(\epsilon)$ متناظر قرار می‌گیرد. این عدد به مانعی گوید که چه تعداد جمله (به کدام n نیاز داریم) برای یک z نیاز داریم تا $|S(z) - S_n(z)| < \epsilon$ کوچکتر از ϵ کنیم. این موضوع سرعت همگرای را می‌سنجد.

$N_\epsilon(\epsilon)$ کوچک به معنی همگرای سریع و $N_\epsilon(\epsilon)$ بزرگ به معنی همگرای کند می‌باشند. حال اگر بتوانیم یک $N(\epsilon)$ بزرگتر از تمام این $N_\epsilon(\epsilon)$ ها پیدا کنیم، گوئیم که همگرای سری (1) در G یکنوا است.

تعریف (همگرای یکنواخت)

سری (1) با مجموع $S(z)$ را به طور یکنواخت همگرا در ناحیه G نامند هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ یک عدد $N(\epsilon) = N_\epsilon(\epsilon)$ مستقل از z موجود باشد، به طوری که به ازای هر $n > N(\epsilon)$ و هر z در G واقع داشته باشیم

$$|S(z) - S_n(z)| < \epsilon.$$

همگرای یکنواختی است که همیشه به مجموعه ای نامتناهی از صفحه Z مربوط می‌باشد.

مثال ۱ . سری هندسی

نشان دهید که سری هندسی $1 + z + z^2 + \dots$ (الف) در هر قرص پسته $|z| < r$ همگرای یکنواخت

است، (ب) در کل قرص همگرایی $|z| < r$ همگرایی یکنواخت نیست.
 حل. (الف) به ازای Z واقع در قرص بسته داریم $|z - Z| \geq |1 - z|$. با توجه به این موضوع داریم که
 $\frac{1}{|1 - z|} \leq \frac{1}{|1 - r|}$. از این رو (۳) یا (۳*) از بخش ۱۴.۴ با $z = q$ را به خاطر بیاورید)

$$|S(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

چون $r > 1$ ، می‌توان طرف راست را با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، کوچک نمود، و چون طرف راست به Z (واقع در قرص بسته مورد نظر) بستگی ندارد. بنابراین همگرایی یک همگرایی یکنواخت است.

(ب) به ازای عدد حقیقی K (مهم نیست که چقدر بزرگ باشد) و n مفروض همواره می‌توان یک Z در قرص $|z| < r$ برای سادگی با انتخاب z به اندازه کافی نزدیک به ۱، طوری یافت که

$$\left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} > K.$$

بنابراین هیچ $N(\epsilon)$ ای نمی‌توان یافت که $|S(z) - S_n(z)|$ بر سراسر قرص مورد نظر از $\epsilon > 0$ کوچکتر باشد. بنا به تعریف، این مطلب نشان می‌دهد که همگرایی سری هندسی در $|z| < r$ یکنواخت نیست. این مثال اذعان می‌دارد که برای یک سری توانی، همگرایی یکنواخت ممکن است در نزدیکی دایره همگرایی آشفته شود که درستی این مطلب را قضیه زیر تایید می‌کند.

قضیه ۱ (همگرایی یکنواخت سری توانی)

سری توانی

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad (2)$$

با شعاع همگرایی غیر صفر R ، در هر قرص مستدير $r < R$ به شعاع $|z - z_0| \leq r$ همگرایی یکنواخت است.

اثبات. به ازای $r \leq |z - z_0|$ و هر عدد صحیح مثبت n و p داریم

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| \leq |a_{n+1}|r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}|r^{n+p}. \quad (3)$$

حال، بنابراین از اصل همگرایی کوشی (بخش ۱۴.۱) نتیجه می‌شود که، به ازای یک $\epsilon > 0$ مفروض، می‌توان $N(\epsilon)$ ای یافت به قسمی که به ازای هر $n > N(\epsilon)$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|a_{n+1}|r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}|r^{n+p} < \epsilon.$$

از این نامساوی و (۳) می‌یابیم

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| < \epsilon$$

که به ازای هر Z ای واقع در قرص Γ ، $|Z - Z_0| > N(\varepsilon)$ و $p = 1, 2, \dots, n$ برقرار است. چون $N(\varepsilon)$ مستقل از Z است، این مطلب همگرایی یکنواخت را نشان می‌دهد، و قضیه به اثبات می‌رسد. قضیه ۱ به نیاز فوری ما که مربوط به یک سری توانی است، ارزش می‌دهد. مابقی این بخش را می‌توان برای تفهیم عمیق تراز مفهوم همگرایی مطلق، به شرح زیر فراهم نمود.

خواص سریهای به طور یکنواخت همگرا (اختیاری)

همگرایی یکنواخت اهمیت اصلی خود را از دو واقعیت زیر به دست می‌آورد.

۱. اگر یک سری از جملات پیوسته، به طور یکنواخت همگرا باشد، حاصل جمع آن نیز پیوسته است (قضیه ۲، به شرح زیر).
۲. تحت همان مفروضات، انتگرالگیری جمله به جمله مجاز است (قضیه ۳).

این مطالب نتایج دو سوال زیر است:

۱. چگونه ممکن است یک سری همگرا با جملات پیوسته دارای یک حاصل جمع ناپیوسته باشد؟ (مثال ۲).
۲. در انتگرالگیری جمله به جمله کجا اشکال پیش می‌آید؟ (مثال ۳).

یک سوال طبیعی دیگر عبارت است از:

۳. رابطه بین همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت چیست؟ جواب شگفت‌آور این است که هیچ رابطه ای بین شان نیست (مثال ۴).

در ذیل به شرح و توضیح سوالات فوق پرداخته و برای آنها پاسخی می‌باشیم.

چنانچه آموختیم مجموع هر تعداد متناهی از توابع پیوسته یک تابع پیوسته است. ولی مثال ۳ نشان می‌دهد که این موضوع برای یک سری نامتناهی نادرست است حتی اگر همگرایی مطلق برقرار باشد و حال آنکه اگر یک سری حاصل از تابع پیوسته به طور یکنواخت همگرا باشد، حاصل جمع سری نیز پیوسته است. در این ارتباط قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲ (پیوستگی حاصل جمع)

فرض کنید سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

در یک ناحیه G همگرای یکنواخت بوده و حاصل جمع آن برابر $F(z)$ باشد و همچنین فرض کنید هر جمله $f_m(z)$ در نقطه‌ای مانند Z_1 واقع در G پیوسته باشد، آنگاه تابع $F(z)$ نیز در Z_1 پیوسته است. اثبات. فرض کنید (z_n) ، n حاصل جمع جزئی سری و $R_n(z)$ باقیمانده متناظر به آن باشد، یعنی

$$S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n, \quad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots$$

از آنجایی که سری همگرای یکنواخت است، به ازای یک $\epsilon > 0$ مفروض می‌توان یک $n = N(\epsilon)$ پیدا کرد به طوری که به ازای تمام z های متعلق به G داشته باشیم

$$|R_N(z)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

چون $S_N(z)$ مجموع تعداد متناهی تابع است که همگی در Z_1 پیوسته می‌باشند، این مجموع در Z_1 پیوسته است. از این رو می‌توان یک $\delta > 0$ ای پیدا کرد به طوری که به ازای تمام z های متعلق به G در $\delta < |z - z_1|$ واقع می‌باشد، داشته باشیم

$$|S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

با استفاده از $F = S_N + R_N$ و نامساوی مثلثی (بخش ۱۲.۱۲)، به ازای چنین z هایی داریم

$$|F(z) - F(z_1)| = |S_N(z) + R_N(z) - [S_N(z_1) + R_N(z_1)]|$$

$$\leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |R_N(z)| + |R_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

این مطلب بیانگر این واقعیت است که $f(z)$ در Z_1 پیوسته است، و بدین طریق قضیه به اثبات میرسد.

مثال ۲. سری ای از جملات پیوسته با مجموع ناپیوسته

سری زیر را در نظر بگیرید

$$x^r + \frac{x^r}{1+x^r} + \frac{x^r}{(1+x^r)^r} + \frac{x^r}{(1+x^r)^r} + \dots \quad (x \text{ حقیقی است})$$

از فرمول (۳۰)، بخش ۱۴.۴، برای یک حاصل جمع هندسی متناهی با $q = \frac{1}{1+x^r}$ استفاده می‌کنیم،

$$\text{درنتیجه } \frac{1}{1-q} = \frac{1+x^r}{x^r}$$

$$S_n(x) = 1 + x^r - \frac{1}{(1+x^r)^n}.$$

شکل جالب ۳۴۰ نشان می‌دهد «که چه اتفاقی در حال رخ دادن است. مشاهده می‌کنیم که اگر $x \neq 0$ ، مجموع سری عبارت است از

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1 + x^r,$$

اما به ازای $x = 0$ و به ازای هر n داریم

$$S_n(0) = 1 - 1 = 0,$$

درنتیجه

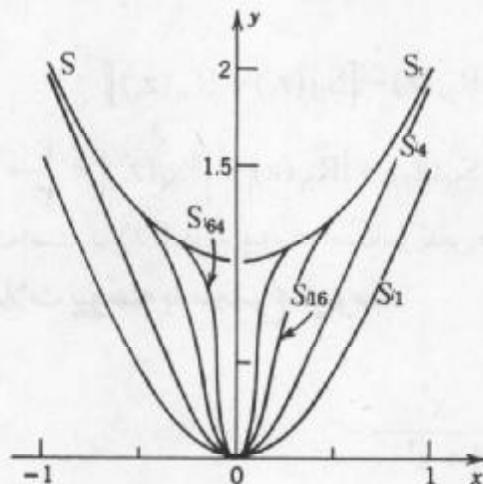
$$S(0) = 0.$$

بنابراین نتیجه تعجب آور این است که هر چند تمام جملات سری توابع پیوسته اند مجموع آنها (در $x = 0$) ناپیوسته است و حتی همگرایی سری به طور مطلق است (چون جملات نامتفقی هستند، بنابراین این جملات با قدر مطلق خودشان برابرند!).

حال قضیه ۲ بیان می کند که همگرایی نمی تواند در یک فاصله شامل نقطه $x = 0$ ، همگرای یکنواخت باشد. می توان درستی این مطلب را نیز به طور مستقیم تحقیق کرد. درواقع، به ازای $\epsilon \neq 0$ باقیمانده دارای قدر مطلق

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

می باشد و مشاهده می کنیم که به ازای یک $\epsilon < 1$ مفروض نمی توان یک N تنها وابسته به ϵ یافت. می شود به طوری که به ازای هر $n > N(\epsilon)$ و هر x ، یعنی در بازه $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ، داشته باشیم $|R_n| < \epsilon$.



شکل ۳۴°. مجموعهای جزئی مثال ۲

انتگرالگیری جمله به جمله (اختیاری)

این دومین موضوع در ارتباط با همگرای یکنواخت است، و برای احتیاط موضوع را با یک مثال شروع می کنیم.

مثال ۳. سری ای که انتگرالگیری جمله به جمله برای آن امکان پذیر نیست فرض کنید

$$u_m(x) = mx e^{-mx^2}$$

و سری زیر را در بازه $0 \leq x \leq 1$ درنظر می گیریم

$$f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

امین حاصل جمع جزئی عبارت است از

$$S_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n.$$

بنابراین سری دارای حاصلجمع

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

با توجه به آن می‌باییم

$$\int_0^1 F(x) dx = 0.$$

از طرفی، با انتگرالگیری جمله به جمله و با استفاده از $f_1 + f_2 + \dots + f_n = S_n$ داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx.$$

حال $u_n = S_n$ و عبارت سمت راست به صورت زیر درمی‌آید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2},$$

که برابر صفر نیست. این موضوع نشان می‌دهد که اگر از سری جمله به جمله از $x = 0$ تا $x = 1$ انتگرال بگیریم مقدار حاصل با انتگرال مجموع حاصل برابر نیست.

سری ای را که در مثال ۳ آمده است در بازه انتگرالگیری همگرای یکنواخت نیست، واکنون

ثابت می‌کنیم که از یک سری همگرای مطلق از توابع پیوسته می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

قضیه ۳ (انتگرالگیری جمله به جمله)

فرض کنید

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته در ناحیه G باشد و همچنان فرض کنید یک مسیر دلخواه واقع در G باشد. آنگاه سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_C f_m(z) dz = \int_C f_0(z) dz + \int_C f_1(z) dz + \dots \quad (4)$$

همگرا است و حاصلجمع آن برابر $\int_C F(z) dz$ می‌باشد.

اثبات. از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $F(z)$ پیوسته است. فرض کنید $S_n(z)$ امین حاصلجمع جزئی سری مفروض و $R_n(z)$ باقیمانده متناظر با آن باشد. آنگاه $F = S_n + R_n$ و با انتگرالگیری،

$$\int_C F(z) dz = \int_C S_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz.$$

فرض کنید L طول مسیر C باشد. چون سری مفروض همگرای یکنواخت است، به ازای هر $\epsilon > 0$

مفروض عددی مانند N می‌توان طوری پیدا کرد که به ازای هر $n > N$ و هر z واقع در G داشته باشیم

$$|R_n(z)| < \frac{\epsilon}{L}.$$

با به کارگیری نامساوی ML (بخش ۱۳.۲)، به ازای هر $n > N$ می‌یابیم

$$\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon.$$

چون $R_n = F - S_n$ ، این بدین معنی است که به ازای هر $n > N$ داریم

$$\left| \int_C F(z) dz - \int_C S_n(z) dz \right| < \varepsilon.$$

بنابراین، سری (۴) همگرا است و مجموعی برابر آنچه در قضیه بیان شد دارد و بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

قضایای ۲ و ۳ مشخصه دوتا از مهمترین خاصیتهای سریهای همگرای یکنواخت می‌باشد.

نظر به اینکه روند مشتقگیری و انتگرالگیری معکوس یکدیگر می‌باشند، از قضیه ۳ به سادگی می‌یابیم که از یک سری همگرا می‌توان جمله به جمله مشتقگیری کرد، مشروط بر اینکه جملات سری مفروض مشتقات پیوسته داشته باشند و سری حاصل همگرای یکنواخت باشد، به طور دقیقت، قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۴ (مشتقگیری جمله به جمله)

فرض کنید سری ... + $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots$ در ناحیه G همگرا بوده و $F(z)$ مجموع این سری باشد. همچنین فرض کنید که سری ... + $f'_0(z) + f'_1(z) + f'_2(z) + \dots$ در G همگرای یکنواخت بوده و جملات این سری در G پیوسته باشند. آنگاه به ازای هر z واقع در G داریم

$$F'(z) = f'_0(z) + f'_1(z) + f'_2(z) + \dots$$

اثبات این قضیه چندان دشوار نیست و به عنوان یک تمرین به متعلم واگذار می‌شود (مساله ۱۸).

آزمونی برای همگرای یکنواخت (اختیاری)

معمولًا همگرای یکنواخت را بنا به آزمون مقایسه ذیل اثبات می‌کنند.

قضیه ۵ (آزمون M و ایراشتراس^۴ برای همگرای یکنواخت)

سری ای به صورت (۱)، در ناحیه G از صفحه Z را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که یک سری همگرا با جملات ثابت،

-۸- کارل وایرشتراس KARL WEIERSTRASS (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷)، ریاضیدان بزرگ آلمانی، که آنالیز مختلط را بر پایه سری توانی بنا نهاد (ر. ک. زیرنویس بخش ۱۲.۵). همچنین، او تحقیقات جالبی در زمینه های حساب دیفرانسیل و انتگرال، حساب تغییرات، نظریه تقریب، هندسه دیفرانسیل انجام داده است. اگر وایرشتراس در سال ۱۸۴۱ (منظر شده در سال ۱۹۸۴) مفهوم همگرای یکنواخت را ارائه نموده اند، اولین موضوع منتشر شده در این ارتباط توسط ج. ج. استوکس G.G.STOKES (ر. ک. بخش ۹.۹) در سال ۱۸۴۷ و فیلیپ لودویگ فون سایدل PHILIPP LUDWIC VON SEIDEL صورت پذیرفت.

$$M_0 + M_1 + M_r + \dots \quad (5)$$

موجود باشد که به ازای هر Z متعلق به G و هر $m = 0, 1, \dots$ داشته باشیم

$$|f_m(z)| \leq M_m$$

آنگاه سری (1) در G همگرای یکنواخت است.

اثبات این قضیه به عنوان یک تمرین در مقاله ۱۷ از معلم خواسته شده است.

مثال ۴. آزمون M وایرشتراس

آیا سری زیر در هر قرص $|z| \leq R$ همگرای یکنواخت است؟

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m + 1}{m^r + \cosh m|z|}.$$

حل. بنا به آزمون M وایرشتراس و همگرایی سری عددی (ر. ک. بخش ۱۴.۱)، در اثبات قضیه ۸) نتیجه می‌شود که سری مفروض همگرای یکنواخت است زیرا

$$\left| \frac{z^m + 1}{m^r + \cosh m|z|} \right| \leq \frac{|z|^m + 1}{m^r} \leq \frac{2}{m^r}.$$

عدم وجود ارتباط بین همگرایی مطلق و یکنواخت

در پایان حقایق تعجب آوری را نشان می‌دهیم که سری ای وجود دارد که همگرای مطلق است ولی همگرای یکنواخت نیست، و دیگر آنکه سری ای وجود دارد که همگرای یکنواخت است ولی همگرای مطلق نیست و درنتیجه هیچ رابطه ای بین این دو مفهوم وجود ندارد.

مثال ۵. عدم وجود ارتباط بین همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت

همانطوری که نشان دادیم، سری مثال ۲ همگرای مطلق است ولی همگرای یکنواخت نیست. از طرفی دیگر، سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{x^r + m} = \frac{1}{x^r + 1} - \frac{1}{x^r + 2} + \frac{1}{x^r + 3} - \dots$$

که در آن x یک عدد حقیقی است، روی خط حقیقی، همگرای یکنواخت است ولی همگرای مطلق نیست.

اثبات. بنا به آزمون معروف لایپیتز حساب دیفرانسیل و انتگرال (ر. ک. ضمیمه A۳.۳)، باقیمانده R از قدر مطلق اولین جمله اش تجاوز نمی‌کند، چون یک سری با جملات متناوب داریم که قدر مطلق‌های آن یک دنباله صعودی یکنواخت با حد صفر را تشکیل می‌دهند. بنابراین، به ازای $\epsilon > 0$ مفروض ویرای تمام x ‌ها، داریم که اگر $\frac{1}{\epsilon} = N(\epsilon)$ ، آنگاه

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^r + n + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

این موضوع به علت اینکه $N(\varepsilon)$ از x مستقل است همگرایی یکنواخت را نشان می‌دهد. همگرایی مطلق نیست زیرا

$$\left| \frac{(-1)^{m-1}}{x^r + m} \right| = \frac{1}{x^r + m} > \frac{k}{m}$$

(یک ثابت مناسب) و $\sum \frac{1}{m^k}$ واگرا است.

مسائل بخش ۶.۱۴

ثابت کنید که سریهای زیر در نواحی داده شده به طور یکنواخت همگرا می‌باشند.

$$|z| \leq 10^{\circ}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{rn+1}}{(2n+1)!}. \quad 2$$

$$|z| \leq 0/999, \sum_{n=0}^{\infty} z^{rn}. \quad 1$$

$$|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r}. \quad 4$$

$$|z| \leq 0/56, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^r} z^{rn}. \quad 3$$

$$|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n |\pi z|}{n(n+1)}. \quad 6$$

$$|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|z|}{n^r}. \quad 5$$

$$|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r \cosh n|z|}. \quad 8$$

$$|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n^r + |z|}. \quad 7$$

$$2 \leq |z| \leq 3, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{|z|^{rn} + 2}. \quad 10$$

$$|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n |z|}{n(n+1)}. \quad 9$$

سریهای توانی ذیل به ازای چه مقادیر z همگرای یکنواخت هستند؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{n!}. \quad 12$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^{rn}}{3^n}. \quad 11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{2} (2z+i)^n. \quad 14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n} z^n. \quad 13$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n \tanh n) z^{rn}. \quad 16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^r} (z-i)^n. \quad 15$$

۱۷. آزمون M وایرشتراس (قضیه ۵) را ثابت کنید.

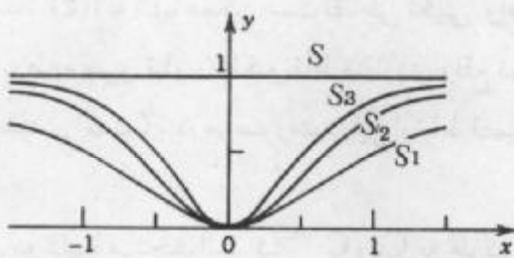
۱۸. قضیه ۴ را با استفاده از قضیه ۳ نتیجه بگیرید.

۱۹. اگر سری (۱) در ناحیه G همگرای یکنواخت باشد، نشان دهید که در هر قسمتی از G همگرایی یکنواخت است. آیا عکس این مطلب درست است؟

۲۰. ناحیه همگرایی سری مثال ۲ را وقتی که جای x متغیر مختلط z قرار گیرد به طور دقیق بیابید.

۲۱. کوچکترین عدد صحیح n را طوری مشخص کنید که به ازای آن در مثال ۱، اگر $|R_n| \geq x = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ داشته باشیم $1/n < 0.5$. از نظر هندسی محاسبه $\frac{1}{1-x}$ به کمک سری هندسی با خطای مطلقی کمتر از $1/5$ به چه معنایی است؟

۲۲. نشان دهید که مقدار سری $\sum_{m=1}^{\infty} (1+x)^{-m}$ به ازای $x \neq 0$ برابر ۱ و به ازای $x = 0$ صفر است. با محاسبات حاصل جمعبای جزئی S_1, S_2, S_3 تحقیق کنید که آنها دارای نمودارهای هستند که در شکل ۳۴۱ آمده‌اند. و S_1, S_2, S_3 را محاسبه و نمودار آنها را نیز رسم کنید.



شکل ۳۴۱. حاصل جمعبای S و حاصل جمعبای جزئی در مساله ۲۲

معادله گرما. نشان دهید که (10) ، بخش ۱۱.۵، با ضرایب (11) ، به ازای هر $t > 0$ جواب معادله گرما است، فرض کنید $f(x) \leq x \leq L$ پیوسته بوده و همچنین در تمام نقاط داخلی آن بازه از یک طرف مشتق داشته باشد. برای پاسخ به سوال فوق به شرح زیر عمل کنید.

۲۳. نشان دهید که $|B_n|$ کراندار است، یعنی به ازای هر $K > |B_n|$ واز آنجا نتیجه بگیرید که به ازای $t \geq t_0$ داریم $|u_n| < Ke^{-\lambda_n t_0}$. و سپس به کمک آزمون وایرشتراس، ثابت کنید سری (10) نسبت به x و t وقتی $t \geq t_0$ و $x \leq L$ همگرای یکنواخت است. با استفاده از قضیه ۲ نشان دهید که $u(X,t)$ وقتی $t \geq t_0$ ، پیوسته است و بنا براین به ازای $t \geq t_0$ در شرایط کرانه‌ای (2) صدق می‌کند.

۲۵. نشان دهید که اگر $t \geq t_0$ ، آنگاه داریم $\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < \lambda_n K e^{-\lambda_n t_0}$ و سری عبارات سمت راست، بنا به آزمون نسبت، همگرا است. با استفاده از این موضوع، آزمون وایرشتراس، و قضیه ۴ نتیجه بگیرید که از سری (10) می‌توان جمله به جمله نسبت به x مشتق گرفت و مجموع سری حاصل برابر $\frac{\partial u}{\partial t}$ است. نشان دهید که از (10) می‌توان دومرتبه نسبت به x مشتق گرفت و مجموع سری حاصل

برابر $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است. به کمک این موضوع و نتیجه مساله ۲۳ نتیجه بگیرید که (10) به ازای هر $t \geq t_0$ جوابی برای معادله گرما است. (اثبات اینکه (10) در شرایط اولیه مفروض صدق می‌کند را می‌توان در

مرجع [C۱۲] ضمیمه ۱ یافت.

۷.۴ سری لوران

در کاربردها لازم است که تابع $f(z)$ حول نقاطی که در آنها تحلیلی نیست، اما در آنها تکین (همانند تعریف بخش ۷.۴) است بسط داد. قضیه تیلور را در چنین مواردی نمی‌توان به کار برد و در اینجا نیاز به سری جدیدی داریم که به سری لوران موسوم است. این سری شامل توانهای صحیح مثبت و منفی بر حسب $z - z_0$ و در یک طوق (محصور بین دو دایره به مرکز z_0) تحلیلی است، یک سری همگرا می‌باشد. $f(z)$ نه تنها ممکن است نقاطی تکینی واقع در خارج دایره بزرگتر داشته باشد (که این خاصیت جدیدی است). در هر صورت در این ارتباط قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱. قضیه لوران

اگر $f(z)$ روی دو دایره متحدد مرکز C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان با سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1)$$

$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

نمایش داد. ضرایب سری لوران فوق به صورت انتگرال^۹ بوده و عبارت اند از

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^*, \quad (2)$$

هریک از این انتگرال‌ها روی مسیر بسته ساده دلخواهی مانند C که در طوق قرار دارد و دایره داخلی را در میان می‌گیرد درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته می‌شود (شکل ۳۴۲).

این سریها همگرا است و $f(z)$ را در طوقی باز نمایش می‌دهد که از طوق داده شده به دست می‌آید اگر دایره C_1 را آنقدر بزرگ کنیم و دایره C_2 را آنقدر کوچک کنیم که هریک از دو دایره به نقطه‌ای که در آن $f(z)$ تکین است برسند.

۹- یادآوری می‌کنیم که بنا به تعریف تحلیلی بودن، این بدان معنا است که $f(z)$ در دامنه‌ای شامل طوق محصور به دو دایره کرانه‌ای تحلیلی است.

این قضیه به پاد ریاضیدان و مهندس فرانسوی، پیر آلفونس لوران FIERRE ALPHONSH LAURENT (۱۸۱۳-۱۸۵۴)، که در سال ۱۸۴۳ این مطلب را انتشار داد به نام او نامگذاری شده است.

۱۰- متغیر انتگرالگیری را با Z نشان دادیم زیرا Z در $f(z)$ به کار گرفته شده است.

در یک حالت خاص مهم که z_* تنها نقطهٔ تکین $f(z)$ در داخل C است، آنگاه همگرایی بر کل فرص به جز در z_* حاکم است.

تبصرهٔ بدیهی است که به جای (۱) و (۲) می‌توان نوشت (نمایش b_n با a_n)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_*)^n \quad (1')$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_*)^{n+1}} dz^*. \quad (2')$$

اثبات قضیهٔ لوران. فرض کنید z_* نقطه‌ای دلخواه در طوق موردنظر باشد. آنگاه از فرمول انتگرال کوشی [(۳) در بخش ۱۴. ۵] نتیجه می‌شود

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*. \quad (3)$$

که جهت انتگرال‌گیری روی C_1 و همچنین روی C_2 درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت است. حال این انتگرال‌ها را به روشی شبیه آنچه در بخش ۱۴. ۴ مشاهده کردیم تبدیل می‌کنیم. انتگرال اول دقیقاً از همان نوع انتگرال (۱)، بخش ۱۴. ۴ می‌باشد، در نتیجه دقیقاً همان نتیجه را به صورت

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n \quad (4)$$

با ضرایب [ر. ک. (۹)]، بخش ۱۴. ۱۴. انتگرال‌گیری درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت]

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{(z^* - z_*)^{n+1}} dz^* \quad (5)$$

به دست می‌دهد. در اینجا می‌توان C را جایگزین C_1 نمود (ر. ک. شکل ۳۴۲)، بنا به اصل تغییر شکل مسیر، چون z_* نقطه‌ای است که در آن تابع زیر علامت انتگرال (۵) تحلیلی نیست، و نقطه‌ای از طوق نیست. این مطلب فرمول a_n از (۲) را ثابت می‌کند.

حال نوبت به انتگرال دوم در (۳) می‌رسد و فرمول برای b_n را از آن به دست خواهیم آورد. چون z_* در طوق واقع است، این نقطه در خارج مسیر C قرار دارد. بنابراین وضعیت متفاوتی نسبت به انتگرال اول وجود دارد. حال نکته اساسی این است که به جای (۲) در بخش ۱۴. ۴ داریم

$$\left| \frac{z^* - z_*}{z - z_*} \right| < 1; \quad (6)$$

در نتیجه، باید $(z - z^*)/(z^* - z_*)$ را بر حسب توانهای $(z^* - z_*)/(z - z_*)$ بسط دهیم تا سری حاصل همگرا باشد.

می‌یابیم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{(z - z_0)(1 - \frac{z^* - z_0}{z - z_0})}.$$

با مقایسه این فرمول با (۲) در بخش ۱۴.۴. تفاوت را حقیقتاً در می‌یابیم. آنگاه در مورد این عبارت و با استفاده از فرمول (۳)، بخش ۱۴.۴.، برای یک سری هندسی متناهی به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z - z_0} \left\{ 1 + \frac{z^* - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0} \right)^n \right\}$$

$$- \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0} \right)^{n+1}.$$

برای آنکه آخرین انتگرال (۳) به دست آید این بسط را در $\frac{-f(z^*)}{(2\pi i)}$ ضرب می‌کنیم و روی C_2 از آن انتگرال می‌گیریم. حال این مطلب به فرمول زیر منجر می‌گردد

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz = \frac{1}{2\pi!} \left\{ \frac{1}{z - z_0} \oint_{C_1} f(z^*) dz^* + \frac{1}{(z - z_0)^2} \oint_{C_1} (z^* - z_0) f(z^*) dz^*$$

$$+ \dots + \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \oint_{C_1} (z^* - z_0)^n f(z^*) dz^* \right\} + R_n^*(z).$$

که در آن جمله آخر از طرف راست به صورت زیر می‌باشد

$$R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^{n+1}} \oint_{C_1} \frac{(z^* - z_0)^{n+1}}{z - z^*} f(z^*) dz^*. \quad (7)$$

همانند قبل انتگرال فوق را می‌توان به جای روی دایره C_2 روی مسیر C گرفت. مشاهده می‌کنیم که در طرف راست، $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ ، همانطوری که در (۲) فرض شده است، در b_n ضرب شده است.

بدین طریق قضیه لوران، مشروط برآنکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^*(z) = 0, \quad (8)$$

به اثبات می‌رسد. حال (۸) را اثبات می‌کنیم. قدر مطلق عبارت $\frac{f(z^*)}{(z - z^*)}$ در (۷) کراندار است، مثلاً

$$\text{به ازای هر } z^* \text{ روی } C_2 \text{ زیرا } \left| \frac{f(z^*)}{z - z^*} \right| < \tilde{M}, \quad C_2 \text{ تحلیلی است، و } z^* \text{ روی }$$

C_2 و z در خارج آن قرار دارد، در نتیجه $|z - z^*| \neq 0$. از اینجا و با استفاده از نامساوی ML (بخش ۱۳.۲. در (۷) می‌یابیم (طول مسیر C_2 $L = C_2$)

$$|R_n^*(z)| \leq \frac{1}{2\pi |z - z_0|^{n+1}} |z^* - z_0|^{n+1} \tilde{M}L = \frac{\tilde{M}L}{2\pi} \left| \frac{z^* - z_0}{z - z_0} \right|^{n+1}.$$

از (۶) می‌یابیم که عبارت سمت راست وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل می‌کند. بدین طریق (۸) به اثبات می‌رسد. بنابراین نمایش (۱) با ضرایب (۲) در طوق مفروض برقرار است.

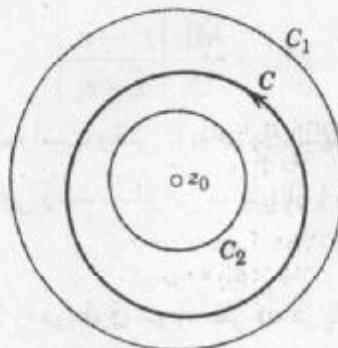
درنهایت همگرایی (۱) را در طوق مورد نظر که در پایان قضیه مشخص شده است ثابت می‌کنیم.

مجموع دو سری (۱) را به ترتیب با $g(z)$ و $h(z)$ ، و شعاعهای C_1 و C_2 را به ترتیب با r_1 و r_2 نمایش می‌دهیم، دراین صورت $f = g + h$. سری اول یک سری توانی است. چون این سری در طوق همگرا است، لذا باید در سراسر قرص محصور به C_1 همگرا بوده و g آن قرص تحلیلی باشد.

اگر قرار دهیم $Z = \frac{z-1}{z-z_0}$ ، دراین صورت سری آخر به یک سری توانی بر حسب Z تبدیل می‌شود. آنگاه طوق \mathbb{D} $= |Z - z_0| < \frac{1}{r_1}$ با طوق $\mathbb{D}' = |Z| < \frac{1}{r_2}$ متناظر شده، سری جدید دراین طوق همگرا می‌باشد و بنابراین، در سراسر قرص \mathbb{D}' نیز همگرا می‌باشد. چون این قرص با $\mathbb{D}' = |Z - z_0| > |z - z_0|$ ، خارج C_2 ، متناظر است، سری مفروض به ازای تمام Z های خارج C_2 همگرا است و h به ازای تمام Z های تحلیلی است.

چون $h + g = f$ ، ازاین رو در تمام نقاط خارج C_1 که f در آنها تکینی دارد g باید تکینی داشته باشد و در تمام نقاط داخل C_1 که f در آنها تکینی دارد h باید تکینی داشته باشد. درنتیجه، اولین سری به ازای تمام Z های واقع در درون دایره ای به مرکز z_0 که شعاعش برابر با فاصله کوچکترین تکینی f در \mathbb{D} خارج از C_1 است، همگرا می‌باشد. به روش مشابه، سری دوم به ازای تمام Z های واقع در خارج از دایره ای به مرکز z_0 که شعاعش برابر است با بزرگترین فاصله تکینی f در داخل C_2 ، همگرا است. دامنه مشترک این دو دامنه همگرایی طوق بازی است که در پایان قضیه مشخص شده است، و بدین طریق، قضیه لوران به اثبات می‌رسد.

یکتایی. سری لوران تابع تحلیلی داده شده $f(z)$ در طوق همگرایی خود منحصر به فرد است (ر. ک. مثاله ۳۵). گرچه $f(z)$ ممکن است در دو طوق متحدد مرکز سریهای لوران متمایز داشته باشد؛ مثلاً زیر را مشاهده کنید. یکتایی مهم است، همانطوری که برای یک سری تیلور با به دست آوردن ضرایب سری حاصل می‌شود، معمولاً از فرمولهای انتگرال (۲) استفاده نمی‌شود بلکه از روش‌های متعدد دیگری نتیجه می‌شود، برخی ازاین روشها در مثالهای زیر تشریح شده‌اند. اگر سری لورانی با چنین



شکل ۳۴۲. قضیه لوران

فرآیندی حاصل شود باید سری لوران تابع مفروض در طوق داده شده ای باشد.

مثال ۱. استفاده از سری مکلورن

سری لوران $z^{-1} \sin z$ به مرکز صفر را باید.

حل. بنابراین (۱۴) بخش ۴.۱۴ می‌بایم

$$z^{-1} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \frac{1}{5040z^7} + \dots \quad (|z| > 0).$$

در اینجا «طوق» همگرایی سراسر صفحه مختلط بدون مبداء مختصات است.

مثال ۲. جایگزینی

سری لوران $z^2 e^z$ به مرکز صفر را باید.

حل. با استفاده از (۱۴)، بخش ۴.۱۴ با قراردادن $\frac{1}{z}$ به جای z به دست می‌آوریم

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \quad (|z| > 0).$$

مثال ۳. عبارت $\frac{1}{1-z}$ را (الف) بر حسب توانهای نامنفی z بسط دهید، (ب) همین تابع را بر حسب توانهای منفی z بسط دهید.
حل.

(الف) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ، این تساوی به ازای $|z| < 1$ برقرار است.

(ب) $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots$ این تساوی به ازای $|z| > 1$ برقرار است.

مثال ۴. بسطهای لوران در طبقهای متعدد مرکز متفاوت

بسطهای لوران $\frac{1}{z^2 - z^4}$ به مرکز صفر را باید.

حل. با ضرب کردن $\frac{1}{z}$ در طرفین روابط موجود در مثال ۳، می‌یابیم

$$\frac{1}{z^r - z^s} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-r} = \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots \quad (0 < |z| < 1), \quad (\text{I})$$

$$\frac{1}{z^r - z^s} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+s}} = - \frac{1}{z^s} - \frac{1}{z^s} - \dots \quad (|z| > 1). \quad (\text{II})$$

مثال ۵. استفاده از کسرهای جزئی

سریهای تیلور ولوران $f(z) = \frac{-2z+3}{z^r - 3z+2}$ به مرکز صفر را باید.

حل. نخست چنین می‌نویسیم

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

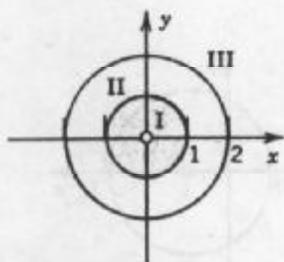
قسمتهای (الف) و (ب) از مثال ۳ به کسر اول مربوط می‌شود. برای کسر دوم داریم

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2(1 - \frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad (|z| < 2), \quad (\text{ج})$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}} \quad (|z| > 1). \quad (\text{د})$$

(آ) از (الف) و (ج)، به ازای $|z| < 1$ معتبر است (ر. ک. شکل (۳۴۳))

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} z + \frac{9}{8} z^2 + \dots$$



شکل ۳۴۳. نواحی همگرایی مثال ۵

(آ) از (ج) و (ب)، به ازای $1 < |z| < 2$ داریم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z + \frac{1}{8} z^2 + \dots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots$$

(آ) مطابق (د) و (ب)، به ازای $|z| > 2$ به دست می‌آوریم

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{5}{z^3} - \frac{9}{z^4} - \dots$$

مثال ۶. سری لوران $\frac{1}{1-z}$ را طوری بیابید که در طوق $\frac{1}{2} < |z| < \frac{1}{4}$ همگرا باشد و ناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

حل. طوق دارای مرکز ۱ می باشد، درنتیجه باید

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z+1)}$$

را بر حسب توانهای $-z$ بسط دهیم، داریم

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{2} \right)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n;$$

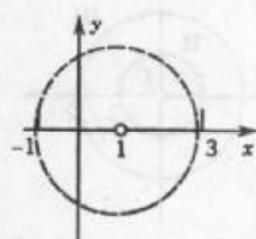
این سری در قرص $|z-1| < \frac{1}{2}$ ، یعنی $2 < |z-1| < \frac{1}{2}$ همگرا می باشد. با ضرب کردن طرفین تساوی فوق

$\frac{1}{z-1}$ در نظر بگیرید، سری مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1} = \frac{-1}{2(z-1)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - \dots$$

ناحیه دقیق همگرایی ناحیه $2 < |z-1| < \frac{1}{2}$ می باشد، شکل ۳۴۴ را ملاحظه کنید. این موضوع با

توجه به اینکه $\frac{1}{z+1}$ از $f(z)$ در -1 در فاصله ۲ از مرکز نقطه تکین سری است، به اثبات می رسد.



شکل ۳۴۴. ناحیه همگرایی مثال ۶

اگر $f(z)$ در قضیه لوران در داخل C_r تحلیلی باشد، آنگاه بنا به قضیه انتگرال کوشی، ضرایب b_n در (۲) صفر هستند، درنتیجه سری لوران به سری تیلور تبدیل می شود. مثالهای ۳(الف) و ۵(I) این مطلب را روشن می سازد.

مسائل بخش ۷.۱۴

توابع زیر را به سریهای لورانی که به ازای $|z| < R$ همگرا باشند بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} \frac{\cosh 2z}{z} . ۳ & \frac{\sin 4z}{z^4} . ۲ & \frac{e^z}{z^4} . ۱ \\ \frac{1 - 2z}{4z - z^4} . ۶ & \frac{1}{z(1+z^4)} . ۵ & \frac{1}{z^4(1-z)} . ۴ \\ \frac{1}{z^4(1+z)^4} . ۹ & \frac{e^{-z^4}}{z^4} . ۸ & z \cos \frac{1}{z} . ۷ \end{array}$$

توابع زیر را به سریهای لورانی که به ازای $|z - z_0| < R$ همگرا باشد بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی را معین کنید.

$$\begin{array}{ll} z_0 = i, \frac{1}{z^4 + 1} . ۱۱ & z_0 = 1, \frac{e^z}{z-1} . ۱۰ \\ z_0 = \pi, \frac{\cos z}{(z-\pi)^4} . ۱۳ & z_0 = 0, z^4 \sinh \frac{1}{z} . ۱۲ \\ z_0 = 1, \frac{z^4 - 4}{z-1} . ۱۵ & z_0 = -2i, \frac{z^4}{(z+2i)^4} . ۱۴ \\ z_0 = -i, \frac{1}{(z+i)^4 - (z+i)} . ۱۷ & z_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{4})^4} . ۱۶ \\ z_0 = -1, \frac{1}{1-z^4} . ۱۸ & \end{array}$$

سری تیلور یا لوران $\frac{1}{1-z}$ به مرکز داده شده را باید.

$$0 < |z - 1| < 2.21 \quad |z| > 1.20 \quad 0 \leq |z| < 1.19$$

با استفاده از کسرهای جزئی، سری لوران $\frac{3z^7 - 6z + 2}{z^7 - 3z^4 + 2z}$ به مرکز داده شده را باید.

$$|z| > 2.24 \quad 1 < |z| < 2.23 \quad 0 < |z| < 1.22$$

سریهای تیلور و لوران هریک از توابع زیر به مرکز $z_0 = z$ را باید و ناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} z_0 = 1, \frac{2}{1-z^4} . ۲۶ & z_0 = 0, \frac{1}{1-z^3} . ۲۵ \\ z_0 = i, \frac{1}{z^4} . ۲۸ & z_0 = 0, \frac{z^4}{1-z^4} . ۲۷ \end{array}$$

$$z_0 = 1, \frac{\sinh z}{(z-1)}. \quad ۳۰$$

$$z_0 = 1, \frac{1}{z}. \quad ۲۹$$

$$z_0 = i, \frac{z^r - 2iz^r}{(z-i)^r}. \quad ۳۲$$

$$z_0 = -\frac{1}{2}\pi, \frac{\sin z}{z + \frac{1}{2}\pi}. \quad ۳۱$$

$$z_0 = 0, \frac{4z-1}{z^r-1}. \quad ۳۳$$

$$z_0 = 0, \tan\left(\frac{1}{z}\right). \quad ۳۴$$

۳۵. ثابت کنید که بسط لوران یک تابع تحلیلی داده شده در طبقی مفروض منحصر به فرد است.

۱۴. تکینیها و صفرها . بینهایت

به زبان عادی، نقطه تکین تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه‌ای مانند z است که $f(z)$ در آن نقطه خاصیت تحلیلی بودن خود را از دست می‌دهد، و صفر تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه‌ای مانند z است که در آن $f(z) = 0$. تعاریف دقیقتر در ذیل ارائه می‌شوند. تکینیها را به کمک سری لوران می‌توان مورد بحث و بررسی قرارداد. این کاری است که در آغاز به آن می‌پردازیم. آنگاه نشان می‌دهیم که صفرها را به کمک سری تیلور می‌توان بررسی کرد.

گوئیم نقطه $z = z_0$ یک نقطه تکین یا یک نقطه منفرد تابع f^{11} است اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی نباشد (احتمالاً حتی در آن نقطه تعریف نشده)، اما هر همسایگی $z = z_0$ شامل نقاطی باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد.

نقطه $z = z_0$ را فقط تکین تنها $f(z)$ نامند اگر $z = z_0$ دارای یک همسایگی بدون تکینیهای دیگر از $f(z)$ را در برداشته باشد. مثال: $\tan z$ دارای تکینیهای تنها در نقاط $\frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$ وغیره است؛

$\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ دارای یک نقطه تکین غیر تنها در صفر است. (توضیح دهید!) نقاط تکین تنها $f(z)$ در $z = z_0$ را می‌توان با سری لوران (بخش ۱۴. ۷) بخشنده.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1)$$

که در مراحل یک همسایگی نقطه تکین $z = z_0$ ، به جز در خود $z = z_0$ ، یعنی در ناحیه‌ای به صورت $|z - z_0| < R$

۱۱- یادآوری می‌کنیم که، بنابر تعریف تابع، یک رابطه تک مقداری است. (ر. ک. بخش ۱۲. ۴).

برقرار است دسته بندی کرد همانطوری که از بخش‌های قبل می‌دانیم، مجموع سری اول در $z = z_0$ تحلیلی است. سری دوم، که از توانهای منفی تشکیل شده است، را قسمت اصلی (۱) می‌نامند.

اگر این قسمت فقط از تعداد نامتناهی جمله تشکیل شده باشد. یعنی قسمت اصلی به صورت

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (b_m \neq 0), \quad (2)$$

باشد، آنگاه نقطه منفرد $f(z)$ در $z = z_0$ را قطب، و m را مرتبه قطب می‌نامند. قطب‌های مرتبه اول به قطب‌های ساده نیز موسوم‌اند.

اگر قسمت اصلی (۱) تعداد نامتناهی جمله داشته باشد، گوئیم که $f(z)$ در $z = z_0$ دارای تکینی اساسی تنها است.

نقاط تکین غیرتنها را در اینجا رها می‌کنیم (ر. ک. مثال فرق).

مثال ۱. قطبها. تکینهای اساسی

تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2} + \frac{3}{(z-2)^3}$$

در $z = z_0$ دارای یک قطب ساده و در $z = 2$ دارای قطبی از مرتبه پنجم است. دوتابع زیر دارای تکینی اساسی تنها در $z = z_0$ هستند

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots,$$

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots.$$

در بخش ۱۴.۷ مثال‌های بیشتری ارائه می‌شود. به عنوان یک نمونه، مثال ۱ نشان می‌دهد

که $\sin z$ دارای قطب مرتبه چهار در $z = z_0$ است و مثال ۴ نشان می‌دهد که $\frac{1}{z^2 - z^4}$ دارای قطب مرتبه سه در $z = z_0$ و یک سری لوران که دارای تعداد نامتناهی توانهای منفی دارد. این یک تناقض نیست، چون این سری به ازای $|z| > 1$ اعتبار دارد؛ که بیان می‌کند که این مطلب کاملاً با اهمیت است که فرض کنیم سری لوران در سراسر همسایگی نقطه منفرد معتبر است.

این دسته بندی تکینهای به قطبها و نقاط تکین اساسی صرفاً کاری صوری نیست، زیرا رفتار یک تابع تحلیلی در همسایگی یک نقطه تکین اساسی کاملاً با رفتار آن در همسایگی یک قطب متفاوت است.

مثال ۲. رفتار در نزدیکی قطب

$$\text{تابع } \frac{1}{z} f(z) \text{ دارای قطب } z = z_0 \text{ است و هرگاه به هر طریق } z \rightarrow z_0, \text{ آنگاه } \infty \rightarrow |f(z)| \rightarrow \infty$$

باتوجه به این مثال داریم

قضیه ۱ (قطبهای)

اگر $f(z)$ تحلیلی بوده و در $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ دارای قطب باشد و هرگاه به هر طریقی $z \rightarrow z_0$ ، داریم $\infty \rightarrow |f(z)|$ (ر. ک. مساله ۱۶).

مثال ۳. رفتار در نزدیکی نقطه تکین اساسی

تابع $f(z) = e^z$ دارای یک نقطه تکین اساسی در $z = 0$ است. این تابع محدودیتی حول محور موهومی ندارد و وقتی از طریق مقادیر حقیقی مثبت به صفر میل می کند به بینهایت میل می کند، ولی وقتی z از طریق مقادیر حقیقی منفی به صفر میل می کند، به سمت صفر میل می کند. این تابع در یک همسایگی به دلخواه کوچک $z = 0$ هر مقدار داده شده ای مانند $c = c_0 e^{i\alpha}$ را به خود نسبت می دهد. در حقیقت، با قراردادن $z = re^{i\theta}$ ، معادله

$$e^z = e^r e^{i\theta} = c_0 e^{i\alpha}$$

را بر حسب r و θ باید حل نمود. با مساوی قراردادن قدر مطلقها و آرگومانها، می یابیم که $c_0 = r$ یعنی

$$\cos \theta = r \ln c_0,$$

و

$$\sin \theta = -\alpha r.$$

از این دو معادله و $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ فرمولهای زیر حاصل می شوند

$$r^2 = \frac{1}{(\ln c_0)^2 + \alpha^2}$$

و

$$\tan \theta = -\frac{\alpha}{\ln c_0}.$$

بنابراین z را می توان با اضافه کردن مضارب $2\pi i$ به دلخواه، بدون آنکه c تغییر کند، کوچک کرد. این مثال ایده ای برای ارائه قضیه پیکارد است.

قضیه ۲ (قضیه پیکارد)^{۱۲}

اگر $f(z)$ تحلیلی بوده و در نقطه z_0 یک تکینی اساسی تنها داشته باشد، آنگاه در هر همسایگی کوچک از z_0 بجز یک مقدار استثنایی، هر مقدار را می تواند اختیار کند.

در مثال ۳، این مقدار استنایی $z = 0$ است. اثبات قضیه پیکارد نسبتاً پیچیده است و در مرجع [D ۱۰] می‌توان این اثبات را یافت.

تکینهای برداشتنی. گوئیم که تابع f یک نقطه تکین برداشتنی در $z = z_0$ دارد اگر این تابع در $z = z_0$ تحلیلی نباشد، اما بتوان با نسبت دادن یک مقدار مناسب $(z - z_0) f(z)$ آن را به یک تابع تحلیلی تبدیل کرد. این نوع نقاط تکین مورد توجه نیستند زیرا همانطور که گفته شد قابل برداشتنی هستند. مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z = 0$ تحلیلی نیست ولی اگر تعریف کنیم $f(0) = 1$ ، آنگاه به یک تابع تحلیلی در $z = 0$ تبدیل می‌شود. بنابراین برای $z = 0$ یک نقطه تکین برداشتنی برای این تابع است.

صفرهای توابع تحلیلی

گوئیم که تابع $f(z)$ ، که در دامنه D تحلیلی است، یک صفر در نقطه $z = z_0$ واقع در D دارد اگر $f(z_0) = 0$ و همچنین گوئیم که $f(z)$ صفری از مرتبه n در نقطه $z = z_0$ دارد اگر $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. صفر f بلکه صفر مشتقات f' ، f'' ، \dots ، $f^{(n-1)}$ نیز باشد و $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. آنگاه z_0 یک صفر مرتبه اول را صفر ساده نیز می‌نامند؛ مثلاً اگر $f'(z_0) = 0$ ولی $f''(z_0) \neq 0$ آنگاه z_0 یک صفر ساده برای $f(z)$ است. برای یک صفر مرتبه دو داریم $f(z_0) = 0$ ، $f'(z_0) = 0$ ولی $f''(z_0) \neq 0$ ، همینطور برای سایر صفرها.

مثال ۴. صفرها

تابع $z^2 + 1$ صفرهای ساده ای در $z = \pm i$ دارد. تابع $z^3 - 1$ صفرهای مرتبه دوم در $z = \pm e^{\pm i\pi/3}$ دارد. تابع $(z - a)^n$ صفری از مرتبه سوم در $z = a$ دارد. تابع e^z صفری ندارد (ر. ک. بخش ۱۲). تابع $\sin z$ صفری ساده ای در $... , \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ دارد. تابع $\sin^2 z$ صفرهای مرتبه دوم در همین نقاط دارند. تابع $1 - \cos z$ صفرهای مرتبه دوم در $... , \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ دارد. مرتبه چهارم در همین نقاط دارند.

سری تیلور در یک صفر. بنا به تعریف، تمام مشتقات $f^{(n)}(z_0)$ در صفری از مرتبه n نقطه $z = z_0$ از $f(z)$ برابر صفراند. بنابراین ضرایب a_0, a_1, \dots, a_n در سری تیلور (۹)، بخش ۴.۱۴، همگی برابر صفر می‌باشند، از آنجایی که $a_n \neq 0$ ، سری زیر حاصل می‌شود

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots \quad (۳)$$

$$= (z - z_0)^n \left[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots \right] \quad (a_n \neq 0).$$

این مطلب مشخص کننده چنین صفری است، زیرا $f(z)$ دارای چنین سری تیلوری است. همانطوری که از مشتقگیری نتیجه می‌شود، این سری دارای صفری از مرتبه n در $z = z_0$ است.

از آنجایی که نقاط تکین غیرتنهای می‌تواند اتفاق بیفتد، برای صفرها قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳ (صفرها)

صفرهای یک تابع تحلیلی $(\neq)(z)$ تنها می‌باشند؛ یعنی، هریک از آنها یک همسایگی دارند که شامل صفرهای دیگری از $f(z)$ نیست.

اثبات. در (۳)، ضریب $"(z - z_0)"$ تنها در $z = z_0$ صفر است. سری توانی در کروشهای [...] (پنا به قضیه ۵، بخش ۱۴.۳) یک تابع تحلیلی را نشان می‌دهد که آن را $g(z)$ می‌نامیم. حال $\neq 0$ $g(z_0) = a_n$ ، نظر به اینکه یک تابع تحلیلی پیوسته است، و از طرفی $g(z)$ پیوسته است، همچنین دریک همسایگی $z = z_0$ $g(z) \neq 0$. بنابراین این موضوع برای $f(z)$ نیز برقرار است. بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

این قضیه با توابع موجود در مثال ۴ تشریح شده است.

قطبهای معمولاً از صفرهای مخرج پدید می‌آیند. (مثال: $\tan z$: قطب‌هایی دارد که در آن $\cos z$ صفر است.) این مطلب یک دلیل خوبی برای اهمیت صفرها است، کلید این ارتباط عبارت است از

قضیه ۴ (قطبهای و صفرها)

هرگاه $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی بوده و دارای یک صفر مرتبه n در $z = z_0$ باشد، آنگاه $\frac{1}{f(z)}$ از مرتبه n در $z = z_0$ دارد.

همچنین موضوع برای $\frac{h(z)}{f(z)}$ نیز صادق است اگر $h(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی باشد و $h(z_0) \neq 0$.

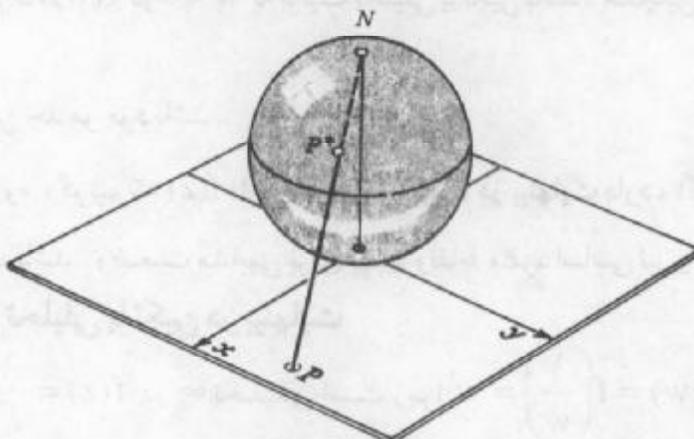
اثبات از (۳) نتیجه می‌شود (ر. ک. مساله ۲۷).

کرهٔ عددی ریمان . بینهایت

مطالعه رفتار توابع تحلیلی $f(z)$ برای $|z|$ های بزرگ یک امر مهم طبیعی با اهمیت عملی است. اگر بزرگ باشد، صفحهٔ مختلط برای نمایش چنین Z ای مناسب نیست و ما در این حالت ترجیح می‌دهیم که اعداد مختلط را روی کره‌ای نمایش دهیم که به وسیلهٔ ریمان پیشنهاد شده و به ترتیب زیر به دست می‌آید.

فرض کنیم S کره‌ای به قطر ۱ باشد که در مبدأ بر صفحهٔ مختلط z مماس است (شکل ۳۴۵). همچنین فرض کنیم N «قطب شمال» S (این نقطهٔ مقابل قطربی است که از نقطهٔ تماس می‌گذرد) باشد. P را نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ مختلط در نظر می‌گیریم. آنگاه پاره خط مستقیمی که دو سرش P و N را در نقطهٔ P^* قطع می‌کند. فرض کنیم P و P^* با هم متاظر باشند. بدین طریق نگاشتی بین نقاط صفحهٔ مختلط و نقاط کره S برقرار می‌گردد و در این تاظر P تصویر نقطهٔ P^*

نسبت به این نگاشت است. اعداد مختلط که تاکنون در صفحه مختلط نمایش داده می شدند حالا قابل نمایش بر کره S هستند. به هر Z واقع در صفحه مختلط، نقطه‌ای روی کره S متناظر قرار می گیرد.



شکل ۳۴۵. کره عددی ریمان

بر عکس، به هر نقطه‌ای روی S عدد مختلطی مانند Z متناظر می گیرد به جز نقطه N که متناظر با هیچ نقطه‌ای از صفحه مختلط نیست. این مطلب به ما امکان می دهد که یک نقطه اضافی را تعریف کنیم که به آن نقطه در بینهایت می نامیم و بانماد ∞ (بینهایت) نمایش می دهیم. صفحه مختلط همراه با نقطه ∞ به صفحه مختلط توسعه یافته موسوم می باشد. صفحه مختلط بدون نقطه ∞ را معمولاً صفحه مختلط متناهی می نامند، یا برخی اوقات برای سادگی یک صفحه مختلط می نامند. حال، اگر نقطه $\infty = Z$ را متناظر با N قرار دهیم، آنگاه نگاشتی یک به یک از صفحه مختلط توسعه یافته بر روی S خواهیم داشت. کره S به کره عددی ریمان مشهور است. نگاشت خاص به کار گرفته شده را تصویر گنجنگاشتی می نامند.

به وضوح، دایره واحد روی «استوا» i S نگاشته می شود. درون دایره واحد با «نیمکره جنوبی» و بیرون آن با «نیمکره شمالی» متناظر است. اعداد Z ای که با قدر مطلقهای بزرگ نزدیک به قطب شمال N تصویر دارند، محورهای x و y (و به طور کلی تمام خطوط مستقیمی که از مبدأ می گذرند) روی «نصف النهار» هانگاشته می شوند، درحالی که دوایری که مرکزشان در مبدأ است روی «مدار» ها تصویر می شوند. می توان نشان داد که هر دایره یا یک خط مستقیم واقع در صفحه Z روی دایره ای واقع بر S نگاشته می شود.

تحلیلی بودن یا تکینی در بینهایت

هر گاه بخواهیم تابع f را به ازای $|z|$ های بزرگ بررسی کنیم، می توانیم قرار دهیم $\frac{1}{w} = z$

در یک همسایگی $w = 0$ مطالعه کنیم. گوئیم $f(z) = g(w)$ تحلیلی یا تکین در بینهایت است هرگاه $g(w)$ در $w = 0$ به ترتیب تحلیلی یا تکین باشد. همچنین تعریف می‌کنیم $g(0) = \lim_{w \rightarrow 0} g(w)$ ، در صورتی که این حد موجود باشد.

به علاوه، گوئیم که $f(z) = 0$ دارای صفر از مرتبه n در بینهایت دارد، اگر $f\left(\frac{1}{w}\right)$ چنان صفری در $w = 0$ داشته باشد. وضعیت مشابهی برای قطبها و نقاط منفرد اساسی نیز وجود دارد.

مثال ۵. توابع تحلیلی یا تکین در بینهایت

تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ در ∞ تحلیلی است زیرا w^z در $w = 0$ تحلیلی است، و $(z)^{\alpha}$ از مرتبه دوم در ∞ دارد. تابع z^{α} در تکین ∞ است و قطبی از مرتبه سه دارد زیرا $g(w) = \frac{1}{w^{\alpha}}$ چنان قطبی در $w = 0$ دارد. تابع نمایی e^z نقطه منفرد اساسی در ∞ دارد. زیرا e^z چنان نقطه منفردی در $w = 0$ دارد. به همین طریق، تابع مثلثاتی $\cos z$ و $\sin z$ نقطه منفرد اساسی در ∞ دارند.

یادآوری می‌کنیم که تابع تام تابعی است که در سراسر صفحه مختلط (متناهی) تحلیلی باشد. از قضیه لیوویل (بخش ۱۳.۶) نتیجه می‌شود که تنها تابع تام کراندار، تابع ثابت هستند، ازین‌رو هر تابع تام غیر ثابت باید بی کران باشد. در نتیجه هر تابع بی کران یک نقطه تکینی در ∞ دارد، و این نقطه تکینی در صورتی که تابع یک چند جمله‌ای باشد از نوع قطب و در غیر این صورت یک نقطه اساسی است. توابع اراته شده در فوق از این نوع هستند.

یک تابع برخه ریخت، تابع تحلیلی ای است که تنها نقاط منفردشان در صفحه متناهی از نوع قطب هستند.

مثال ۶. توابع برخه ریخت

تابع گویا با مخرج غیر ثابت همانند تابع Z ، $\tan Z$ ، $\cot Z$ ، $\sec Z$ و $\csc Z$ از نوع تابع برخه ریخت هستند.

در اینجا به پایان فصل ۱۴ می‌رسیم. در این فصل به سری توانی علی الخصوص سری تیلور که در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز دارای نقش اساسی بوده اند پرداختیم. سری لوران نیز در این فصل مورد بررسی قرار گرفتند. این سریها دارای کاربردهایی جالب و قوی در انتگرالگیری از تابع مختلط دارند.

مسائل بخش ۱۴

تکینها . مکان و نوع نقاط منفرد توابع زیر را ، شامل آنهاست که در بینهایت هستند را تعیین کنید (در مواردی که تکینی از نوع قطب باشند مرتبه آنها را تعیین کنید) .

$$z + \frac{1}{z} . ۳ \quad \frac{1}{(z+a)^r} . ۲ \quad \cot z . ۱$$

$$\frac{\sin^r z}{z^r \cos^r z} . ۶ \quad \frac{\cos^r z}{(z^r - 1)^r} . ۵ \quad \frac{3}{z} - \frac{1}{z^r} - \frac{2}{z^r} . ۴$$

$$\frac{e^z - 1 - z}{z^r} . ۹ \quad \frac{1}{e^{z+i} + z^r} . ۸ \quad \frac{e^{\pi z}}{(z^r - iz + 2)^r} . ۷$$

$$(cos z - sin z)^{-1} . ۱۲ \quad tan\left(\frac{1}{z}\right) . ۱۱ \quad cosh\left(\frac{1}{z^r + 1}\right) . ۱۰$$

$$\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1} . ۱۵ \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} . ۱۴ \quad cos z - sin z . ۱۳$$

۱۶ . درستی قضیه ۱ را به ازای $f(z) = z^{-r} - z^{-1}$ تحقیق کنید . این قضیه را ثابت کنید .

صفرها . مکان و مرتبه صفرهای هریک از توابع زیر را مشخص کنید .

$$z \sin^r \pi z . ۱۹ \quad (z - 16)^n . ۱۸ \quad (z^r - 16)^n . ۱۷$$

$$\cosh^r z . ۲۲ \quad z^{-r} \cos^r \pi z . ۲۱ \quad e^z - e^{rz} . ۲۰$$

$$(1 - \cos z)^r . ۲۵ \quad (z^r - 1)^r (e^{z^r} - 1) . ۲۴ \quad \frac{3z^r - 1}{(z^r - 2iz + 3)^r} . ۲۳$$

۲۶ . هرگاه $f(z)$ صفری از مرتبه n در $z=0$ داشته باشد ، آنگاه نشان دهید که $f'(z)$ صفری از مرتبه $n-1$ به ازای $z=0$ دارد .

قضیه ۴ را ثابت کنید .

۲۸ . اگر $f_r(z)$ در دامنه D تحلیلی بوده و در دنباله ای از نقاط z_n واقع در D همگرا در D باشد ، آنگاه در D نشان دهید که $f_r(z) = f_r(z_n)$.

۲۹ . نشان دهید نقاطی که در آنها تابع تحلیلی غیر ثابت مقدار مفروض k را به خود می گیرد نقاط تنها هستند .

کره عددی ریمان . با فرض اینکه تصویر محور X نصف النهار 0° و 180° فرض می شود ، تصاویر نواحی داده شده زیر بر کره عددی ریمان را توصیف و مشخص کنید .

۳۲. ربع دوم	۳۱. ربع اول	$ z \leq 1.30$
$\frac{1}{2} \leq z \leq 2.35$	۳۴. نیم صفحه تحتانی	$ z > 100.33$

پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۴

۱. سری توانی چیست؟ چرا این سری در آنالیز مختلط بسیار با اهمیت است؟
۲. با استفاده از حافظه خود آزمون نسب، آزمون ریشه، و فرمول کوشی - آدامار را برای شعاع همگرایی بیان کنید.
۳. همگرایی مطلق، همگرایی شرطی، و همگرایی یکنواخت چیست؟
۴. در مورد همگرایی سری توانی چه می‌دانید؟
۵. آیا مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی مجاز است؟ در مورد انتگرال‌گیری چطور؟
۶. سری تیلور چیست؟ ایده به دست آوردن این سری از فرمول انتگرال کوشی چیست؟
۷. سری مکلورن e^z ، $\cosh z$ ، $\sin z$ ، $\cos z$ ، $\sinh z$ را بنویسید.
۸. آیا $\ln z$ سری مکلورن دارند؟ توضیح دهید.
۹. آیا با جایگزینی Z به جای X در سری مکلورن تابع حقیقی $f(x)$ یک تابع تحلیلی حاصل می‌شود؟
۱۰. چند مثالی برای تشریح روش‌های عملی به دست آوردن سری تیلور ارائه کنید.
۱۱. سری لوران چیست؟ درباره همگرایی آن چه می‌دانید.
۱۲. آیا سری تیلور تابع مفروض با مرکز داده شده یکتا است؟ همین سوال را در مورد سری لوران پاسخ دهید.
۱۳. یک نقطه تکینی چیست؟ چه نقشی در ارتباط با همگرایی سری تیلور و سری لوران دارد؟
۱۴. چگونه سری لوران در طبقه بندی نقاط تکینی مورد استفاده قرار می‌گیرد؟
۱۵. قطب چیست؟ یک نقطه تکین اساسی تنها چیست؟
۱۶. آیا یک تابع تمام قطب دارد؟ نقاط تکین اساسی چطور؟
۱۷. صفر یک تابع تحلیلی چیست؟ درباره صفرهای توابع تحلیلی چه می‌دانید؟
۱۸. آیا یک تابع تحلیلی غیر ثابت بدون صفر را می‌شناسید؟
۱۹. تابع برخه ریخت چیست؟ چند مثال بیاورید؟
۲۰. کره‌عددی ریمان چیست؟ چه وقت از آن استفاده می‌شود؟

شعاع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را باید. آیا می‌توانید مقدار آنها را به صورت یک تابع شناخته شده مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)} z^n . \quad 23$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2+i)^n} . \quad 26$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!} . \quad 29$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} . \quad 22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} z^n . \quad 25$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n (z-2i)^{2n} . \quad 28$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-2)^{2n+1} . \quad 21$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} (z-1+2i)^n . \quad 24$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n} . \quad 27$$

سری تیلور هریک از توابع زیر با نقطه داده شده را به عنوان مرکز باید و شعاعهای همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

$$2, \ln z . \quad 32$$

$$2+3i, \frac{1}{z} . \quad 35$$

$$1+i, \frac{1}{4-3z} . \quad 38$$

$$0, e^{-rz} . \quad 31$$

$$-1, \frac{1}{2z-i} . \quad 34$$

$$0, \frac{1}{(1-z)^r} . \quad 37$$

$$\pi i, e^z . \quad 30$$

$$-1, \frac{1}{1-z} . \quad 33$$

$$0, \sin \pi z^r . \quad 36$$

تابع زیر را به سریهای لورانی که به ازای $|z - z_0| < R$ همگرا باشند بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی و نوع تکینی تابع داده شده در $z = R$ مورد نظر را مشخص کنید.

$$z_0 = 0, \frac{1}{z^r - z^s} . \quad 41 \quad z_0 = 0, \frac{1-z^r}{z^r} . \quad 40 \quad z_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{\cos z}{(z - \frac{\pi}{2})^r} . \quad 39$$

$$z_0 = -i, \frac{z+1+i}{(z+i)^r} . \quad 44 \quad z_0 = 0, z^r \cosh \frac{1}{z} . \quad 43 \quad z_0 = 1, \frac{e^z}{(z-1)^r} . \quad 42$$

$$z_0 = 0, \frac{1}{z^r} \sin 2z^r . \quad 46$$

$$z_0 = 0, \frac{\sinh z + \sin z}{z^r} . \quad 48$$

$$z_0 = 1, (z-1)^{-r} \ln z . \quad 45$$

$$z_0 = 0, \frac{1}{z^r} \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt . \quad 47$$

$$z_0 = -i, (z+i)^r \sin \frac{1}{2z+2i} . \quad 50$$

$$z_0 = i, \frac{e^z}{(z-i)^s} . \quad 49$$

خلاصه فصل ۱۴

سریهای توانی، تیلور، و لوران

دبایله‌ها، سریها، و آزمونهای همگرایی در بخش ۱۴.۱ تشریح شده‌اند. منظور از یک سری توانی

سری ای به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1)$$

می باشد، که در آن z_0 مرکز این سری است (بخش ۱۴.۲). سری (۱) به ازای $|z - z_0| < R$ همگرا و به ازای $|z - z_0| > R$ واگرا است. برخی سریهای توانی به ازای مقادیر z همگرا می باشند (در این صورت می نویسیم $\infty = R$). شعاع همگرایی است. همچنین، $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ در صورتی که این حد موجود باشد. سری (۱) همگرای مطلق (بخش ۱۴.۲) و در هر قرص بسته $|z - z_0| \leq r < R$ همگرای یکنواخت (بخش ۱۴.۶) است. اگر $0 < R < |z - z_0|$ یک تابع تحلیلی را نمایش می دهد. مشتقات $f'(z), f''(z), \dots$ با مشتقگیری جمله به جمله از (۱) به دست می آیند، و سریهای حاصل از این مشتقات دارای همان شعاع همگرای R سری (۱) می باشند. (ر. ک. بخش ۱۴.۳).

بر عکس، هر تابع تحلیلی $f(z)$ را می توان بوسیله سری توانی بیان نمود. سری تیلور $f(z)$ همانند سری تیلور در حساب دیفرانسیل و انتگرال به صورت زیر می باشد (بخش ۱۴.۴)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R) \quad (2)$$

اگر $f(z)$ تام (به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است) یا در قرص بازی به مرکز z_0 و شعاع برابر با فاصله r تا نزدیکترین نقطه متفاوت $f(z) = f(z_0)$ نقطه ای که $f(z)$ تحلیلی خود را در آن نقطه از دست می دهد، ر. ک. بخش ۱۴.۸) باشد، آنگاه این سریها به ازای تمام مقادیر z همگرا است. توابع e^z ، $\sin z$ ، $\cos z$ وغیره، مشابه با اینها در حساب دیفرانسیل و انتگرال، دارای سری مکلورن و سری تیلور می باشند (بخش ۱۴.۴).

سری لوران به صورت زیر می باشد (بخش ۱۴.۷)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (3)$$

یا به طور خلاصه تر

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n ; \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*. \quad (3*)$$

این سری در یک طوق باز A به مرکز z_0 همگرا است. تابع f در A تحلیلی است. وجود نقاط تکینی در خارج A بلا مانع است. نخستین سری در (۳) یک سری توانی است. سری دوم به قسمت اصلی سری لوران موسوم می باشد. سری لوران $f(z)$ در طوق داده شده یکتا است، اما $f(z)$ می تواند سریهای لوران متمایزی در طوقهای متفاوت و با یک مرکز داشته باشد.

اگر $f(z)$ یک نقطه تکینی تنها (بخش ۸.۱۴) در $z = z_0$ داشته باشد، سری لوران ($f(z)$) که به ازای $R < |z - z_0| < \infty$ مناسب) همگرا است، می‌تواند در دسته بندی این نقاط تکین مورد استفاده قرار گیرد. چنین نقاطی قطب هستند اگر قسمت اصلی از این سری لوران از عددی متناهی جمله تشکیل شده باشد، در غیر این صورت آنها را نقاط تکینی اساسی (تنها) می‌نامند.

یک قطب را از مرتبه n نامند هرگاه $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ بزرگترین توان منفی قسمت اصلی واقع در (۳) باشد. قطب مرتبه اول را قطب ساده نیز می‌نامند.

به همین طریق، سری تیلور (۲) می‌تواند برای دسته بندی صفرهای $f(z)$ مورد استفاده قرار گیرد.تابع مفروض به صورت (۲) دارای صفری از مرتبه n در z_0 است اگر $f^{(n)}$ و مشتقات $f^{(n-1)}, f'', f''', \dots, f^{(n)}$ همگی در z_0 صفر باشند، و $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. یک صفر مرتبه اول را صفر ساده نیز می‌نامند. (ر. ک. بخش ۸.۱۴).

بخش ۸.۱۴ بحثی در مورد یک صفحه مختلط توسعه یافته می‌باشد، که باضمیمه کردن نقطه ناسره ∞ («بینهایت») به صفحه مختلط به دست می‌آید.

فصل ۱۵

انتگرالگیری به روش مانده‌ها

نظر به اینکه روش‌های مختلفی برای تعیین ضرایب سری لوران (۱)، بخش ۷. ۱۴، بدون استفاده از فرمولهای انتگرال (۲)، بخش ۷. ۱۴ موجود است، از فرمول b_1 می‌توان برای محاسبه انتگرالهای مختلف به نحو پسیار ساده و ظرفی استفاده کرد. b_1 به مانده $(z - z_0)^{-1}$ در $f(z)$ موسوم می‌باشد. این روش کارآمد را می‌توان برای محاسبه انتگرالهای حقیقی معین برخی توابع، همانطور که بعداً در بخش‌های ۱۵. ۳ و ۱۵. ۴ مشاهده خواهیم کرد به کار گرفت.

پیشناز این فصل : فصول ۱۲، ۱۳، ۱۴.

مراجع : ۱. ضمیمه ۱، قسمت D.

جواب مسائل : ضمیمه ۲.

۱۵. ۱. مانده‌ها

ابتدا بیان می‌کنیم که مانده چیست و چگونه برای محاسبه انتگرال زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد .

$$\oint_C f(z) dz.$$

این انتگرال یک انتگرال کانتور بر روی مسیر بسته ساده C می‌باشد.

اگر $f(z)$ همه جا بر C و درون C تحلیلی باشد، آنگاه چنین انتگرالی با توجه به قضیه انتگرال کوشی (بخش ۳. ۱۳)، همانطور که مشاهده کردیم برابر صفر است.

اگر $f(z)$ دارای یک نقطه تکینی در نقطه z_0 و در سایر نقاط واقع بر C و داخل آن تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ دارای سری لورانی به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_r}{(z - z_0)^r} + \dots$$

می‌باشد که به ازای تمام نقاط نزدیک $z = z_0$ (به جز خود $z = z_0$)، در دامنه‌ای به صورت $|z - z_0| < R$ همگرا است. حال انگیزه کلیدی را پی می‌گیریم. ضریب b_1 اولین توان منفی $\frac{1}{z - z_0}$ این سری لوران با فرمول انتگرالی (۲)، بخش ۱۴، به ازای $n = 1$ به دست می‌آید، یعنی

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

اما از آنجاکه سری لوران را می‌توان به روش‌های گوناگون به دست آورد، بدون آنکه لازم باشد برای تعیین ضرایب آن از فرمولهای انتگرالی استفاده کرد (ر. ک. مثالهای بخش ۱۴). بنابراین برای محاسبه انتگرال $\oint_C f(z) dz$ کافی است به یکی از روش‌ها b_1 را محاسبه کرده و با توجه به تساوی زیر به

محاسبه این انتگرال پردازیم

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1. \quad (1)$$

انتگرال‌گیری در آن درجهٔ عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیر بسته ساده C که نقطه $z = z_0$ را در آن دارد، می‌باشد و آن را با نماد

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \quad (2)$$

نمایش می‌دهند.

مثال ۱. محاسبه یک انتگرال به کمک مفهوم مانده

انتگرال تابع $f(z) = z^{-4} \sin z$ روی دایرهٔ واحد C ، درجهٔ عکس حرکت عقربه‌های ساعت را به دست آورید.

حل. از (۱۴) بخش ۱۴. ۴ سری لوران

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!z^2} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

را به دست می‌آوریم که به ازای $|z| > 0$ (یعنی، به ازای تمام مقادیر $z \neq 0$) همگرا است. سری فوق نشان می‌دهد که $f(z)$ در $z = 0$ دارای یک قطب مرتبه سوم است و ماندهٔ متناظر برابر است با

$$b_1 = -\frac{1}{3!}.$$

باتوجه به (۱) داریم

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^4} dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$

مثال ۲. از تابع $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2}$ روی دایرهٔ $C: |z| = \frac{1}{2}$ درجهٔ عکس حرکت عقربه‌های ساعت، انتگرال بگیرید.

حل. عبارت $(1-z)^{-r} - z^{-r}$ نشان می دهد که $f(z)$ در $z=0$ و $z=1$ تکینی دارد. در خارج دایره C و در داخل دایره قرار دارد. بنابراین مانده $f(z)$ در $z=0$ را باید محاسبه کنیم.

به محاسبه سری لوران در $z=0$ می پردازیم. این سری در $|z| < 1$ همگرا است. داریم

$$\frac{1}{z^r - z^r} = \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots \quad (0 < |z| < 1).$$

این سری همان سری (I) مثال ۴ بخش ۷.۶ می باشد. با توجه به بسط فوق مشاهده می کنیم که مانده تابع مورد نظر در $z=0$ برابر ۱ است. با انتگرالگیری درجهت حرکت عقربه های ساعت می یابیم

$$\oint \frac{dz}{z^r - z^r} = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i.$$

تصویر! اگر به اشتباه از سری (II) واقع در مثال ۴، بخش ۷.۶، یعنی

$$\frac{1}{z^r - z^r} = -\frac{1}{z^r} - \frac{1}{z^r} - \frac{1}{z^r} - \dots \quad (|z| > 1)$$

استفاده کنیم، جواب اشتباه صفر را به دست خواهیم آورد، زیرا این سری، جمله $\frac{1}{z}$ ندارد.

دو فرمول برای محاسبه مانده ها در قطبهاي ساده

قبل از اینکه محاسبه انتگرالها را ادامه دهیم، سؤال زیر را مطرح می کنیم. به منظور به دست آوردن مانده ها، آیا باید کل سری را به دست آورد یا راه ساده تری وجود دارد؟ در حالتی که با قطب مواجه باشیم راه خوبی برای محاسبه مانده موجود است. برای قطبها یک فرمول کلی برای محاسبه مانده ها ارائه می کنیم.

چگونه محاسبه مانده را با قطب ساده آغاز می کنیم. برای این منظور فرض کنید $f(z)$ دارای یک قطب ساده در نقطه $z=z_0$ باشد. با توجه به این فرض سری لوران متناظر به صورت زیر در می آید

[ر.ک. (۲) با $n=1$ از بخش ۷.۶]

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_r(z - z_0)^r + \dots \quad (0 < |z - z_0| < R).$$

در اینجا $b_1 \neq 0$ (چرا؟) با ضرب طرفین رابطه فوق در $z - z_0$ می یابیم
 $(z - z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)[a_0 + a_1(z - z_0) + \dots]$.

حال فرض کنیم $z \rightarrow z_0$. در این صورت طرف راست به سمت b_1 میل می کند. با توجه به آن می یابیم

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \quad (3)$$

مثال ۳. مانده در قطب ساده

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{z+i}{z(z+i)} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{z+i}{z(z+i)(z-i)} = \left[\frac{z+i}{z(z+i)} \right]_{z=i} = \frac{1+i}{-2} = -\frac{1}{2}i.$$

برخی اوقات می توان از فرمول دیگری برای محاسبه مانده در قطب ساده استفاده نمود. این فرمول

خیلی اوقات مفید و ساده تر عمل می کند. برای رسیدن به فرمول دوم فرض کنید

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

که در آن $p(z)$ و $q(z)$ توابع تحلیلی هستند، و $p(z_0) \neq q(z_0)$ دارای یک صفر ساده در $z = z_0$ است. با توجه به این مفروضات و بر طبق قضیه ۴ بخش ۱۴.۸ تابع $f(z)$ دارای یک قطب ساده

در $z = z_0$ است. بنا به تعریف صفر ساده، $q(z)$ دارای سری تیلور به صورت

$$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2}q''(z_0) + \dots$$

است. با جایگزینی آن در $f = \frac{p}{q}$ و سپس با قراردادن f در (۳)، می یابیم

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0) \left[q'(z_0) + (z - z_0) \frac{q''(z_0)}{2} + \dots \right]}. \end{aligned}$$

حال مشاهده می کنیم که در سمت راست، عامل $z - z_0$ حذف می شود و عبارت حاصل در مخرج کسر فوق دارای حد $(z_0)'q'$ است. از این رو فرمول دوم محاسبه مانده در قطب ساده عبارت است از

$$\text{Res } f(z) = \text{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (4)$$

مثال ۴. محاسبه مانده در یک قطب ساده با استفاده از فرمول (۴)

$$\text{Res}_{z=i} \frac{az+i}{z(z^2+1)} = \left[\frac{az+i}{3z^2+1} \right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i \quad (\text{مثال ۳ را ملاحظه کنید}).$$

مثال ۵. کاربرد دیگری از فرمول (۴)

قطبهای مانده های متناظر تابع زیر را باید.

$$f(z) = \frac{\cosh \pi z}{z^4 - 1}$$

حل. تابع $p(z) = \cosh \pi z$ تابعی تام بوده و $q(z) = z^4 - 1$ دارای صفرهای ساده در نقاط $1, i, -i, -1$ می باشد. از این رو $f(z)$ در این نقاط دارای قطبی ساده است (و قطبهای دیگری ندارد). چون $\cosh \pi z$ از (۴) مشاهده می شود که مانده ها برابر مقادیر $\frac{\cosh \pi z}{4z^3}$ در این نقاط می باشند،

يعنى

$$\frac{\cosh \pi}{4} = 2/8980, \quad \frac{\cosh \pi i}{4i^3} = \frac{\cos \pi}{-4i} = \frac{-i}{4}, \quad \frac{-\cosh \pi}{4} = \frac{\cosh(-\pi i)}{4(-i)^3} = \frac{i}{4}.$$

فرمولی برای مانده در یک قطب از مرتبه بالا

فرض کنید تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ که در آن دارای یک قطب مرتبه $m > 1$ در نقطه $z = z_0$ است، تحلیلی است. بنا به تعریف قطب (بخش ۱۴.۸) سری لوران $(z - z_0)^m f(z)$ که در یک همسایگی از $z = z_0$ به جز در $z = z_0$ همگرا است، عبارت است از

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_r}{(z - z_0)^r} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

که در آن $b_m \neq 0$. با ضرب طرفین معادله فوق در $(z - z_0)^m$ می‌یابیم

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_r(z - z_0)^{m-r} + b_1(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

مشاهده می‌شود که b_1 ، مانده $(z - z_0)^{m-1}$ در سری تیلور تابع $g(z) = (z - a)^m f(z)$

به مرکز $z = z_0$ است. بنابراین، بنا به قضیه تیلور (بخش ۱۴.۴)،

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

از این رو اگر $f(z)$ دارای یک قطب مرتبه m در $z = z_0$ باشد، آنگاه مانده از فرمول زیر به دست می‌آید

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\}. \quad (5)$$

در حالت خاص، برای قطب مرتبه دو ($m = 2$)، داریم

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^1 f(z)]. \quad (5^*)$$

مثال ۶. مانده در یک قطب از مرتبه بالا

تابع f با ضابطه

$$f(z) = \frac{\Delta \circ z}{(z + 4)(z - 1)^r}$$

دارای یک قطب مرتبه دوم در $z = 1$ است، و از (۵*) مانده متناظر عبارت است از

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z - 1)^1 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{\Delta \circ z}{z + 4} \right) = \Delta.$$

مثال ۷. مانده‌ها از کسرهای جزئی

اگر $f(z)$ تابعی گویا باشد، آنگاه مانده را از نمایش $f(z) = \sum a_n z^n$ بر حسب کسرهای جزئی نیز می‌توان به دست آورد. با توجه به مثال ۶ داریم

$$f(z) = \frac{\Delta \circ z}{(z + 4)(z - 1)^r} = \frac{-\Delta}{z + 4} + \frac{\Delta}{z - 1} + \frac{\Delta}{(z - 1)^r}.$$

مشاهده می‌کنیم که مانده در $z = 1$ همانند قبل برابر ۸ است، و هیمنظور مانده در قطب ساده $-4 = z$ برابر -۸ است.

ممکن است از خود سؤال کنیم که علت این کار چیست؟ برای این منظور نقطه $z = 1$ را در نظر می‌گیریم. عبارت در $z = 1$ تحلیلی است و دارای بسط تیلور در $z = 1$ است و در حقیقت قسمتی از بسط لوران تابع مورد نظر که دارای توانهای نامنفی هستند از این بسط تیلور حاصل می‌شود و قسمت اصلی بسط لوران تابع دارای دو جمله است که در طرف راست آمده است که دارای قطب مرتبه اول در $z = 1$ است. به همین طریق موضوع در $z = -4$ قابل بررسی است.

مثال ۸. انتگرال‌گیری حول قطب مرتبه دوم

از $f(z)$ در مثالهای ۶ و ۷ روی هر مسیر بسته ساده C که $z = 1$ در داخل C و $z = -4$ در خارج آن است، درجهٔ عکس حرکت عقربه‌های ساعت، انتگرال‌گیری کنید (ر. ک. مثالهای ۶ پا ۷).

حل. داریم

$$\oint_C \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} = 2\pi i \cdot 8 = 16\pi i \approx 50/27i.$$

مسائل بخش ۱۵

مانده‌های هر یک از توابع زیر را در نقاط تکین شان بباید.

$\frac{\sin z}{z^3} \cdot 3$	$\frac{4}{z^3} - \frac{1}{z^2} \cdot 2$	$\frac{3}{1-z} \cdot 1$
$\frac{e^z}{(z-\pi i)^5} \cdot 6$	$\frac{z^2}{z^2 - iz + 2} \cdot 5$	$\frac{z^2 + 1}{z^2 - z} \cdot 4$
$\frac{2}{(z^2 - 1)^2} \cdot 9$	$\sec z \cdot 8$	$\cot z \cdot 7$

در هر یک از مسائل زیر مانده را در نقاط تکینی که درون دایره $|z| = 2$ قرار دارند بباید.

$\frac{z-23}{z^2-4z-5} \cdot 12$	$\frac{2z-3}{z^2+2z^3} \cdot 11$	$\frac{z^2}{z^4-1} \cdot 10$
$\frac{2z+6}{(z+1)(z^2+16)} \cdot 15$	$\frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z} \cdot 14$	$\frac{3}{(z^4-1)^2} \cdot 13$

انتگرال‌های زیر را با این فرض که C دایرهٔ واحد است (درجات عکس حرکت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

$$\oint_C \csc 2z dz \cdot 18$$

$$\oint_C \tan z dz \cdot 17$$

$$\oint_C e^{\bar{z}} dz \cdot 16$$

$$\oint_C \frac{z^r + 6}{z^r - 2z} dz . \quad .21$$

$$\oint_C \frac{dz}{\sinh \frac{1}{\pi z}} . \quad .20$$

$$\oint_C \cot z dz . \quad .19$$

$$\oint_C \frac{\tanh(z+1)}{e^z \sin z} dz . \quad .24$$

$$\oint_C \frac{z^r + 2}{4z + \pi} dz . \quad .23$$

$$\oint_C \frac{\sin \pi z}{z} dz . \quad .22$$

۲۵. راه دیگر برای به دست آوردن (۵). رابطه (۵) را بدون استفاده از قضیه تیلور، با $m-1$ مرتبه مشتقگیری از فرمول $(z - z_0)^m f(z)$ به دست آورید.

۲. قضیه مانده

تا اینجا می‌توان انتگرال توابع تحلیلی $f(z)$ را روی منحنی‌های بسته C وقتی که $f(z)$ فقط یک نقطه تکین در داخل C دارد، محاسبه کرد. اکنون خواهیم دید که انتگرال‌گیری به روش مانده را می‌توان به حالتی که $f(z)$ دارای چند نقطه تکین تنها در داخل C است تعمیم داد. انجام این کار به سادگی به شرح زیر صورت می‌پذیرد.

قضیه ۱. قضیه مانده

فرض کنید $f(z)$ تابعی باشد که در داخل مسیر بسته C وروی آن، به جز تعدادی متناهی نقاط تکین z_1, z_2, \dots, z_k واقع در داخل C ، تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z), \quad (1)$$

که در آن انتگرال‌گیری روی مسیر C درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت صورت می‌پذیرد.

اثبات. هریک از نقاط تکین z_j را درون دایره‌ای مانند C_j قرار می‌دهیم؛ شعاع این دوایر را طوری اختیار می‌کنیم که تمام k دایره و C از هم مجزا باشد (شکل ۳۴۶). در این صورت $f(z)$ در دامنه همبند چندگانه D که با C و C_1, C_2, \dots, C_k محدود می‌شود وروی تمام کرانه D تحلیلی است. با توجه به

قضیه انتگرال کوشی می‌یابیم

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_k} f(z) dz = 0, \quad (2)$$

که در آن انتگرال روی C درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت وسایر انتگرال‌ها درجهت حرکت عقریه‌های ساعت گرفته می‌شود (ر.ث. بخش ۱۳.۳). حال جهت انتگرال‌گیری روی

C_k, \dots, C_1 را عوض کرده و با توجه به آن علامت مقادیر این انتگرال‌ها عوض می‌شود، و با توجه به

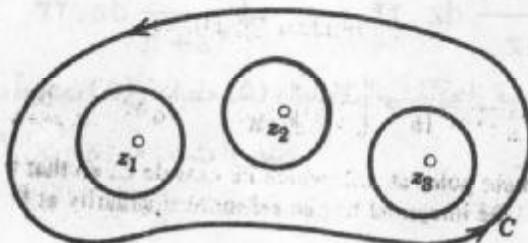
(۲) می‌یابیم

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_k} f(z) dz. \quad (3)$$

که در آن همه انتگرال‌ها درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت گرفته‌اند شوند. درنتیجه، با توجه به

(۱) بخش قبل داریم

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z),$$



شکل ۳۴۶. قضیه مانده

فرمول (۳) منجر به (۱) می‌گردد، و بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

این قضیه مهم در ارتباط با انتگرال‌های موهومند و حقیقی کاربردهای متعددی دارد. نخست به بررسی چند انتگرال مختلط می‌پردازیم.

مثال ۱. انتگرال‌گیری به کمک قضیه مانده

انتگرال زیر را درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت روی هرمسیر بسته ساده C ای که (الف) 0 و ۱ در داخل آن هستند، (ب) 0 در داخل و ۱ در خارج آن قرار دارند، (ج) ۱ در داخل و 0 در خارج آن هستند، (د) 0 و ۱ در خارج آن هستند، محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{4 - 3z}{z^2 - z} dz$$

حل. تابع زیر علامت انتگرال دارای قطب‌های ساده در 0 و ۱، با مانده‌های [بنا به (۳)، بخش ۱۵.۱]،

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{4 - 3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4 - 3z}{z-1} \right]_{z=0} = -4, \quad \operatorname{Res}_{z=1} \frac{4 - 3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4 - 3z}{z} \right]_{z=1} = 1$$

می‌باشد. [این مانده‌ها با (۴)، بخش ۱۵.۱ مطابقت دارد.] درنتیجه جوابها عبارت اند از

$$(الف) -6\pi i, \quad (ب) 2\pi i(-4 + 1), \quad (ج) 2\pi i, \quad (د) صفر.$$

مثال ۲. قطبها و تکنیهای اساسی

انتگرال زیر را در حالتی که C بیضی $x^9 + y^9 = ۹$ است (درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت) محاسبه کنید.

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^2 - 16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz$$

حل. از آنجا که $z^4 - 16 = 0$ در نقاط $\pm 2i$ و ± 2 برقرار بوده، نخستین جمله از تابع زیر علامت انتگرال دارای قطب‌های ساده در $\pm 2i$ است که در داخل C واقع هستند. مانده‌ها در این نقاط عبارت اند از [بنابراین]، بخش ۱۵.۱. با توجه به اینکه

$$[e^{\pi z}] = 1$$

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3} \right]_{z=2i} = -\frac{1}{16}, \quad \operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3} \right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

و همچنین تابع موردنظر دارای قطب‌های ساده در ± 2 است که در خارج C واقع هستند، و درنتیجه به آنها در اینجا نیاز نداریم. دومین جمله از تابع انتگرال دارای یک نقطه تکین اساسی در $z = 0$ ، با مانده $\frac{\pi}{2}$ است که از نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$ze^{\frac{\pi}{z}} = z\left(1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \dots\right) = z + \pi + \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

درنتیجه جواب بنابراین قصبه مانده عبارت است از

$$2\pi i\left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \pi\left(\pi^2 - \frac{1}{4}\right)i = 30/221i.$$

مثال ۳. تاییدی بر یک نتیجه اساسی که قبلًا به دست آمده است.

از $\frac{1}{(z - z_0)^m}$ (عدد صحیح مثبت) درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیر بسته ساده دلخواه C که نقطه $z = z_0$ را در بردارد انتگرال بگیرید.

حل. عبارت $\frac{1}{(z - z_0)^m}$ سری لوران خودش به مرکز $z = z_0$ است که قسمت اصلی این جمله را شامل است، و

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z - z_0} = 1,$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{1}{(z - z_0)^m} = 0 \quad (m = 2, 3, \dots).$$

که با مثال ۲، بخش ۱۳.۲ مطابقت دارد، با توجه به آن می‌بایس

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^m} = \begin{cases} 2\pi i & m = 1, \\ 0 & m = 2, 3, \dots. \end{cases}$$

مسائل بخش ۱۵

از $\frac{15z+9}{z^2 - 9z}$ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیرهای داده شده زیر انتگرال بگیرید.

$$|z + 2 + i| = 3 \cdot 3 \quad |z| = 4 \cdot 2 \quad |z| = 1 \cdot 1$$

$$|z - 1| = 3 \cdot 6 \quad \left|z - \frac{3}{2} + 2i\right| = 2/4 \cdot 5 \quad |z - 3| = 2 \cdot 4$$

هر یک از انتگرهای زیر را در حالتی که C مسیر بسته ساده دلخواه است به طوری که تمام نقاط منفرد در

داخل C قرار دارند (درجات عکس حرکت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{z \cosh \pi z}{z^4 + 13z^2 + 36} dz . \quad 9$$

$$\oint_C \frac{z}{z^4 + 9} dz . \quad 8$$

$$\oint_C \frac{\Delta z}{z^4 + 4} dz . \quad 7$$

$$\oint_C \frac{z^3 \sin z}{4z^4 - 1} dz . \quad 12$$

$$\oint_C \frac{z + e^z}{z^4 - z} dz . \quad 11$$

$$\oint_C \frac{\sinh z}{2z - i} dz . \quad 10$$

هر یک از انتگرال‌های زیر را در حالتی که C دایرهٔ واحد است (درجات عکس عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 5iz} . \quad 15$$

$$\oint_C \frac{\sqrt{z}}{z^4 + 1} dz . \quad 14$$

$$\oint_C \frac{z}{z^4 - 1} dz . \quad 13$$

$$\oint_C \frac{30z^4 - 23z + 5}{(2z-1)^2(3z-1)} dz . \quad 18$$

$$\oint_C \frac{e^{-z^4}}{\sin \sqrt{z}} dz . \quad 17$$

$$\oint_C \frac{e^{-z^4}}{\sin \sqrt[4]{z}} dz . \quad 16$$

$$\oint_C \frac{\sinh z}{4z^4 + 1} dz . \quad 21$$

$$\oint_C e^z \cot \sqrt[4]{z} dz . \quad 20$$

$$\oint_C \cot \frac{z}{\sqrt[4]{z}} dz . \quad 19$$

$$\oint_C \frac{1 - 4z + 5z^4}{(z^4 + 1)(2 - z)} dz . \quad 24$$

$$\oint_C \tan 2\pi z dz . \quad 23$$

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z - \frac{\pi i}{4})^4} dz . \quad 22$$

$$\oint_C \frac{\tan \pi z}{z^4} dz . \quad 27$$

$$\oint_C \coth z dz . \quad 26$$

$$\oint_C \tan \pi z dz . \quad 25$$

$$\oint_C \frac{(z + \sqrt[4]{z})^4}{z^4 + 5z^2 + 5z^4} dz . \quad 30$$

$$\oint_C \frac{e^z}{\cos \pi z} dz . \quad 29$$

$$\oint_C \frac{\cosh z}{z^4 - 3iz} dz . \quad 28$$

۱۵.۳ محاسبه انتگرال‌های حقیقی

در این قسمت به محاسبه برخی از انتگرال‌های حقیقی مورد توجه و پیچیده به کمک قضیه مانده می‌پردازیم.

انتگرال‌های توابعی گویا از $\cos \theta$ و $\sin \theta$
ابتدا انتگرال‌هایی از نوع

$$I = \int_0^{\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (1)$$

را که در آن $F(\cos \theta, \sin \theta)$ یک تابع گویای حقیقی از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ [به عنوان مثال، $\frac{\sin^4 \theta}{5 - 4 \cos \theta}$] و بر فاصله انتگرال‌گیری متناهی است، در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $e^{i\theta} = z =$ می‌یابیم

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$
(۲)

هم اکنون مشاهده می کنیم که تابع انتگرالده تابعی گویا از Z به صورت $f(z)$ است. وقتی θ از 0 تا 2π تغییر می کند، متغیر Z یک بار روی دایره واحد $|z| = 1$ را درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت حرکت می کند. از آنجا که $dz = ie^{i\theta} d\theta$ داریم $\frac{dz}{iz} = ie^{i\theta}$ و انتگرال مفروض به صورت زیر درمی آید

$$I = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz},$$
(۳)

انتگرالگیری روی دایره واحد درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می پذیرد.

مثال ۱. انتگرالی ازنوع (۱)

باتوجه به روش مذکور، نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \cos \theta}} = 2\pi.$$

حل. با استفاده از روابط $d\theta = \frac{dz}{iz}$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ می یابیم

$$\oint_C \frac{dz}{iz\sqrt{2 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}} = \oint_C \frac{dz}{z - \frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)} = -\frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}.$$

مشاهده می کنیم که تابع انتگرالده دارای دو قطب ساده، یکی در $z_1 = \sqrt{2} + 1$ ، که در خارج دایره واحد $|z| = 1$ واقع است و ازاین رو مورد توجه مانیست و دیگر برابر $z_2 = \sqrt{2} - 1$ است. که در

داخل C قرار داشته و مقدار مانده در این نقطه برابر است با [بنا به (۳) از بخش ۱۵.۱]

$$\text{Res}_{z=z_1} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = \left[\frac{1}{z - \sqrt{2} - 1} \right]_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}.$$

باتوجه به ضربی $\frac{2}{i}$ در کنار انتگرال نتیجه موردنظر به صورت به دست می آید

$$2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi.$$

انتگرالهای توسعی یا ناسرة توابع گویا

حال انتگرالهای حقیقی ازنوع

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$
(۴)

را مورد بررسی قرار می دهیم. چنین انتگرالی، که فاصله انتگرالگیری در آن متناهی نیست، به انتگرال

ناصره (توسعی) موسوم می‌باشد و چنین تعریف می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx. \quad (5)$$

هرگاه هر دو حد در طرف راست موجود باشند، آنگاه می‌توان میل کردن به $-\infty$ و ∞ را درهم ادغام کرده و چنین نوشت^۱

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (5)$$

فرض کنید تابع $f(x)$ که در (۴) ظاهر شده است یک تابع گویای حقیقی باشد که مخرجش به ازای هر مقدار حقیقی x مخالف صفر است و درجه آن لااقل دو درجه بیشتر از درجه صورت است. آنگاه حدودهایی که در (۵) آمده اند وجود دارند، و می‌توان انتگرال‌گیری را از (۵) شروع کرد. انتگرال کانتور متناظر

$$\oint_C f(z) dz \quad (5^*)$$

روی مسیر C ، مطابق شکل ۳۴۷، را درنظر می‌گیریم. از آنجا که $f(z)$ گویا است، (x) دارای تعدادی متناهی قطب در نیم صفحه فوقانی است، و اگر R را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم، در آن صورت C این قطبها را دربر می‌گیرد. آنگاه بتا به قضیه مانده می‌یابیم

$$\oint_C f(z) dz = \int_S f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z)$$

که در آن مجموع فوق همه مانده‌های $f(z)$ را در نقاطی از نیم صفحه فوقانی که در آن $f(z)$ دارای قطب است دربر می‌گیرد. با توجه به آن می‌یابیم

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(x) - \int_S f(z) dz. \quad (6)$$

هم اکنون ثابت می‌کنیم که هرگاه $\infty \rightarrow R$ ، مقدار انتگرال روی نیم دایره S به سمت صفر می‌کند. اگر قراردهیم $z = Re^{i\theta}$ ، آنگاه S با ثابت R نمایش داده می‌شود، و هنگامی که

z روی S حرکت می‌کند متغیر θ از 0° تا π تغییر می‌کند. نظر به اینکه، با توجه به مفروضات، درجه مخرج $f(z)$ لااقل دو واحد از درجه صورت بیشتر است، به ازای مقادیر ثابت و بزرگ k و R داریم

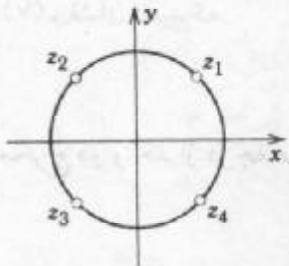
$$\|f(z)\| < \frac{k}{|z|^k} \quad (|z| = R > R_0).$$

بنابراین نامساوی ML از بخش ۱۳.۲ نتیجه می‌گیریم

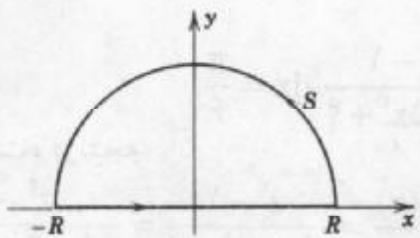
۱- عبارت طرف راست (۵) را مقدار اصلی کوشی انتگرال می‌نامند. این مقدار ممکن است حتی در صورت عدم وجود حدودی که در (۵) آمده اند موجود باشد. به عنوان مثال

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x dx = \infty, \quad \text{ولی} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{-R^2}{2} \right) = 0$$

$$\left| \int_S f(z) dz \right| < \frac{k}{R} \pi R = \frac{k\pi}{R} \quad (R > R_0).$$



شکل ۳۴۸. مثال ۲



شکل ۳۴۷. مسیر C از انتگرال کانتور در (۵)

از این رو، وقتی R به سمت بینهایت میل می‌کند، مقدار انتگرال روی S به سمت صفر میل می‌کند،
(۵) و (۶) به نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) \quad (7)$$

منجر می‌گردد که در آن مجموع روی همه مانده‌های $f(z)$ که با قطب‌های (z) در نیم صفحه فوقانی متناظر اند محاسبه می‌شود.

مثال ۲. یک انتگرال ناسره از 0 تا ∞

با استفاده از (۷)، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

حل. در واقع $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ دارای چهار قطب در نقاط

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, z_3 = e^{-\frac{\pi i}{4}}, z_4 = e^{-\frac{3\pi i}{4}}$$

است. دو قطب اول در نیم صفحه فوقانی واقع اند (شکل ۳۴۸) از (۴) بخش ۱۰.۱۵ می‌باییم

$$\operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_1} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} = -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{4}},$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_2} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

باتوجه به (۱) از بخش ۷.۱۲ و (۷) از این بخش می‌باییم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4} (-e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{-\pi i}{4}}) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

نظر به اینکه $\frac{1}{1+x^4}$ تابعی زوج است، می‌توان نوشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

مثال ۳. یک انتگرال ناسره دیگر

با استفاده از (۷)، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{6}.$$

حل. درجه مخرج دو واحد از درجه صورت بیشتر است، درنتیجه

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^4 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{z^4 - 1}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}$$

دارای قطب‌های ساده $2i$ و $-2i$ در نیم صفحه فوقانی و i و $-i$ در نیم صفحه تحتانی است که در اینجا به آنها نیاز نداریم. با توجه به (۴) بخش ۱.۱۵ داریم

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{z^4 - 1}{4z^2 + 1 \circ z} \right]_{z=i} = \frac{5}{12i}, \quad \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \left[\frac{z^4 - 1}{4z^2 + 1 \circ z} \right]_{z=-i} = \frac{-2}{6i}.$$

درنتیجه جواب نهایی عبارت است از

$$2\pi i \left(\frac{5}{12i} - \frac{-2}{6i} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

مسائل بخش ۳.۱۵

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3V - 12\cos\theta}. ۳$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\pi + \cos\theta}. ۲$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}. ۱$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3 + \sin\theta} d\theta. ۶$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} - \sin\theta}. ۵$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\sin\theta}. ۴$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{13 - 12\cos 2\theta} d\theta. ۹$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta. ۸$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{17 - 8\cos\theta} d\theta. ۷$$

راهنمایی. از فرمول زیر استفاده شود:

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + 4\cos\theta}{17 - 8\cos\theta} d\theta. ۱۰$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$$

هر یک از انتگرال‌های توسعی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^4}{1+x^2} dx. ۱۳$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}. ۱۲$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}. ۱۱$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16} . ۱۶ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} . ۱۵ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx . ۱۴$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)(x^4 + 9)} . ۱۸ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^4 - 2x + 2)^2} dx . ۱۷$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 - 2x + 5)^2} . ۲۰ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^4)^2} . ۱۹$$

۱۵. ۴. انواع دیگری از انتگرال‌های حقیقی

دسته‌های دیگری از انتگرال‌های حقیقی وجود دارند که با بکارگیری قضیه مانده و انتخاب یک تابع و یک مسیر مناسب قابل محاسبه هستند. در عمل چنین انتگرال‌هایی در رابطه با تبدیلات انتگرالی یانمایش توابع خاص ظاهرمی شوند. در این بخش دو دسته از این انتگرال‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از این دو دسته در مسائلی که شامل نمایش انتگرال فوریه هستند، به کار می‌رود (بخش ۹.۱۰). دسته دیگر از انتگرال‌های حقیقی ای تشکیل شده است که تابع انتگرال‌ده آنها در نقاطی واقع در فاصله انتگرال‌گیری نامتناهی است.

انتگرال‌های فوریه

انتگرال‌های حقیقی که به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx dx , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx \quad (1)$$

می‌باشند در ارتباط با انتگرال فوریه روی می‌دهند (شکل ۹.۱۰).

هرگاه $f(x)$ تابعی گویا باشد که در مفروضاتی که در رابطه با (۴)، بخش ۱۵.۳. بیان شده است صدق کند، آنگاه می‌توان انتگرال‌های (۱) را با روش مشابه با روش محاسبه انتگرال‌های (۴) بخش قبل محاسبه نمود. در حقیقت می‌توان انتگرال متناظر را به صورت

$$\oint_C f(z) e^{isz} dz \quad (s \text{ حقیقی و مثبت})$$

روی کانتور C از شکل ۳۴۷ در نظر گرفت (بخش ۱۵.۳. با جایگزینی (۷)، بخش ۱۵.۳. به دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}] \quad (s > 0) \quad (2)$$

که در آن جمع روی مانده‌های $f(z) e^{isz}$ در نقطه‌های آن در نیم صفحه فوقانی محاسبه می‌شود. با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی در طرفین (۲) می‌یابیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx = -2\pi \sum \operatorname{Im} \operatorname{Res} [f(z)e^{isz}], \quad (s > 0) \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx dx = 2\pi \sum \operatorname{Re} \operatorname{Res} [f(z)e^{isz}].$$

یادآوری می‌کنیم که (۷) از بخش ۱۵.۳ با اثبات اینکه مقدار انتگرال بر روی نیم‌دایره S شکل ۳۴۷ وقتی $\rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند، به دست آمده است. برای برقراری (۲)، باید همان موضوع را در مورد انتگرال کانتوری موجود اثبات نمود. نظر به اینکه $s > 0$ و S در نیم صفحه فوقانی قرار دارد، داریم

$$|e^{isz}| = |e^{isx}| |e^{-sy}| = e^{-sy} \leq 1 \quad (s > 0, y \geq 0).$$

باتوجه به آن نامساوی زیر حاصل می‌شود

$$|f(z)e^{isz}| = |f(z)| |e^{isz}| \leq |f(z)| \quad (s > 0, y \geq 0).$$

این موضوع مساله اخیر را به همان مساله بخش قبل تبدیل می‌کند و به همین ترتیب مشاهده می‌کنیم که مقدار انتگرال روی S وقتی که R به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل خواهد کرد. باتوجه به آن (۲) به اثبات می‌رسد و (۳) حاصل می‌شود.

مثال ۱. کاربردی از (۳)

نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^r + x^r} dx = \frac{\pi}{k} e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^r + x^r} dx = 0 \quad (s > 0, k > 0).$$

حل. فقط یک قطب در نیم صفحه فوقانی یعنی یک قطب ساده در $z = ik$ دارد. باتوجه به (۴) بخش ۱۵.۱ به دست می‌آوریم

$$\operatorname{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^r + z^r} = \left[\frac{e^{isz}}{2z} \right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

از این رو،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^r + x^r} dx = 2\pi i \frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-ks}.$$

از $e^{isz} = \cos sx + i \sin sx$ نتایج فوق حاصل شده است [همچنین ر. ک. (۱۵) بخش ۱۰.۹].

أنواع دیگری از انتگرال‌های ناسره حقیقی

نوع دیگری از انتگرال ناسره انتگرال معین

$$\int_A^B f(x) dx \quad (4)$$

است که در آن تابع انتگرالده در نقطه ای مانند a واقع در فاصله انتگرالگیری به بینهایت میل می کند،
یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty.$$

در چنین حالتی انتگرال (۴) به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_A^B f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_A^{a-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^B f(x) dx. \quad (5)$$

که در آن ϵ و η به طور مستقل و با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می کنند. ممکن است وقتی که ϵ و η مستقلانه به سمت صفر میل می کنند، هیچیک از این انتگرالها موجود نباشد ولی

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_A^{a-\epsilon} f(x) dx + \int_{a+\epsilon}^B f(x) dx \right] \quad (6)$$

موجود باشد. این حد به مقدار اصلی کوشی انتگرال موسوم بوده و چنین نوشته می شود

$$\text{Pr.v. } \int_A^B f(x) dx.$$

به عنوان مثال،

$$\text{Pr.v. } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^3} \right] = 0;$$

مقدار اصلی وجود دارد، اگر چه خود انتگرال بی معنی است. کل موضوع کاملاً شبیه موضوعاتی است که در قسمت دوم بخش ۱۵. ۳ مورد بحث قرار گرفته است.

برای محاسبه انتگرالهای ناسره ای که تابع انتگرالده آنها قطبها را روی محور حقیقی دارد، از مسیری استفاده می نماییم که با نیمدايره های کوچکی به مرکز نقاط تکینی ها را دور می زند، این موضوع را با ارائه یک مثال روشن می کنیم.

مثال ۲. تابع انتگرالده ای که دارای یک قطب روی محور حقیقی است. انتگرال سینوسی نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(این حد انتگرال سینوسی $Si(x)$ است وقتی که $x \rightarrow \infty$ ؛ ر. ک. بخش ۹. ۱۰)

حل. (الف) عبارت $\frac{\sin z}{z}$ را مورد بررسی قرار می دهیم زیرا این تابع رفتار مناسبی در بینهایت ندارد.

بدین جهت $\frac{e^{iz}}{z}$ را، که قطب ساده ای در $z=0$ دارد در نظر می گیریم، و از آن روی کانتوری که

در شکل ۳۴۹ نشان داده شده است انتگرال می گیریم. از آنجایی که $\frac{e^{iz}}{z}$ در داخل و روی دایره C

تحلیلی است، از قضیه انتگرال کوشی به دست می آوریم

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (7)$$

(ب) ثابت می‌کنیم که وقتی R به سمت بینهایت میل کند، مقدار انتگرال بر روی نیمداایرهٔ بزرگ C_1 به سمت صفر میل می‌کند. با قراردادن $z = Re^{i\theta}$ ، $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ ، و از این رو

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iz} i d\theta \right| \leq \int_0^\pi |e^{iz}| d\theta \quad (z = Re^{i\theta}).$$

درتابع انتگرال‌ده طرف راست داریم

$$|e^{iz}| = |e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{iR \cos \theta}| |e^{-R \sin \theta}| = e^{-R \sin \theta}.$$

با جایگزینی عبارت فوق در انتگرال و با استفاده $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ برای به دست آوردن انتگرال

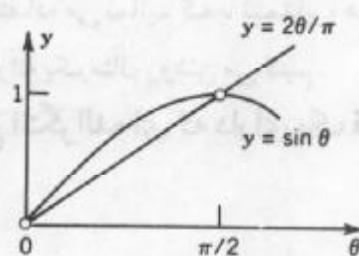
از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ می‌یابیم

$$\int_0^\pi |e^{iz}| d\theta = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

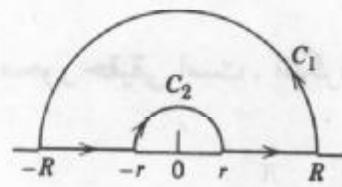
اکنون شکل ۳۵۰ نشان می‌دهد که $-\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \frac{\pi}{2}$ اگر $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$. بنابراین با ازاینجا و با انتگرال‌گیری داریم

$$R \rightarrow \infty \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0.$$

از این رو وقتی که $R \rightarrow \infty$ ، مقدار انتگرال روی C_1 به سمت صفر میل می‌کند.



شکل ۳۵۰. نامساوی در مثال ۲



شکل ۳۴۹. کاتور در مثال ۲

(ج) در مورد انتگرال بر روی نیمداایرهٔ کوچک C_2 در شکل ۳۴۹ داریم

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_1} \frac{e^{iz}-1}{z} dz.$$

مقدار انتگرال اول در طرف راست برابر $i\pi$ است. تابع انتگرال‌ده انتگرال دوم تحلیلی و بنابراین کراندار است، یعنی قدر مطلق آن به ازای تمام مقادیر z بین C_2 و محور X ها از عدد ثابتی مانند M کوچکتر است. بنابراین بنا به نامساوی ML (بخش ۱۳. ۲)، قدر مطلق این انتگرال نمی‌تواند

از $M\pi i$ تجاوز کند. این مقدار وقتی که $\rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کند. زیرا با به قسمت (ب) از (۷) به دست می آوریم

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \text{Pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \text{Pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i = 0.$$

بنابراین مقدار اصلی برابر πi است؛ که قسمت حقیقی آن 0 و قسمت موهومی آن عبارت است از $\text{Pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$.

(د) حال تابع انتگرالde (۸) در $x = 0$ تکین نیست. به علاوه، چون به ازای x های مثبت تابع

$\frac{1}{x}$ نزولی است، مساحت زیر منحنی تابع انتگرالde بین دو صفر مثبت متواالی به طریقی یکنوانزول می کند، یعنی قدر مطلقهای انتگرالهای

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

تشکیل دنباله نزولی یکنوای $|I_0|, |I_1|, \dots, |I_n|$ را می دهد، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $I_n \rightarrow 0$. چون این انتگرالها یک در میان مثبت و منفی هستند (چرا؟) از آزمون لایپیتز (در ضمیمه ۳) نتیجه می شود که سری نامتناهی $\dots + I_1 + I_0 + I_0$ همگرا است. به وضوح، مجموع سری برابر انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx$$

است که به دلیل آن موجود می باشد. مشابهآ، انتگرال از 0 تا ∞ وجود دارد. بنابراین لازم نیست که در (۸) مقدار اصلی را در نظر بگیریم، و

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

نظر به اینکه تابع انتگرالde تابعی زوج است، نتیجه موردنظر به دست می آید. در قسمت (ج) از مثال ۲ از قطب ساده بوسیله انتگرالگیری در امتداد نیمداایره C_+ اجتناب شده است، وسپس فرض کردیم C_+ کوچک شده و به سمت صفر میل کند. باتوجه به آن قضیه زیر حاصل می شود.

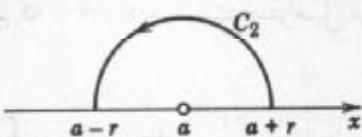
قضیه ۱. قطبهای ساده روی محور حقیقی

اگر $f(z)$ دارای یک قطب ساده در $z = a$ واقع بر محور حقیقی باشد، آنگاه (شکل ۳۵۱)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_C f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

ایات. بنا به تعریف یک قطب ساده (بخش ۱۴.۸) تابع انتگرالde $f(z)$ در $z = a$ دارای سری لوران

$$f(z) = \frac{b_1}{z-a} + g(z) ; b_1 = \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$$



شکل ۳۵۱. قضیه ۱

است که در آن $g(z)$ بر نیم‌دایره انتگرال‌گیری (شکل ۳۵۱)

$$C_r : z = a + re^{i\theta}; \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

و به ازای تمام مقادیر z بین C_r و محور x ‌ها تحلیلی است. با انتگرال‌گیری، داریم

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{b_1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta + \int_{C_r} g(z) dz.$$

مقدار انتگرال اول طرف راست برابر $b_1\pi i$ است. بنابراین ML (بخش ۱۳.۲) قدر مطلق انتگرال دوم نمی‌تواند از $M\pi r$ تجاوز کند و $\rightarrow 0$. بدین ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

این قضیه را می‌توان با رابطه (۷) از بخش ۱۵.۳ با رابطه (۳) از این بخش ترکیب نمود. از

این رو [ر. ک. (۷) بخش ۳.۱۵]

$$\text{Pr.v. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) + \pi i \sum \text{Res } f(z) \quad (۹)$$

(با جمع روی همه قطبها در نیم صفحه فوقانی و در دومی روی محور x ‌ها محاسبه می‌شوند)، برای توابع گویای $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ با این جمع که $p \geq q+2$ درجه q ، که دارای قطب‌های ساده روی محور x ‌ها باشد، معتبر است.

مسائل بخش ۴.۱۵

۱. (۳) را از (۲) به دست آورید.

هر یک از انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + x + 1} dx . ۴ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx . ۳ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx . ۲$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx . ۵ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx . ۶ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1} dx . ۷$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx . ۸ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+x^2} dx . ۹ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx . ۱۰$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^2 + 13x^2 + 9} dx . ۱۳ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 4)^2} dx . ۱۲ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 4} dx . ۱۱$$

۱۴. با انتگرالگیری از e^{-z^2} روی کرانه مستطیلی که رئوس آن $-a + ib$, $a + ib$, a , $-a$ است، وقتی که $\rightarrow \infty$ و با استفاده از $a \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}, \text{ نشان دهید که } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

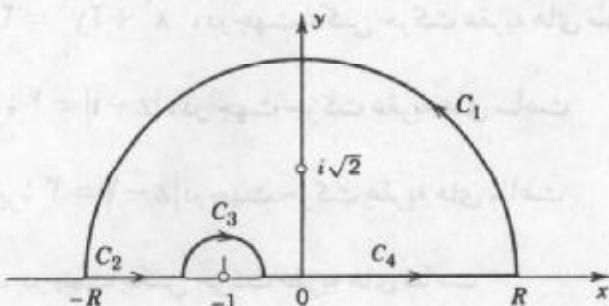
قطبهای محور حقیقی. مقدار اصلی کوشی انتگرال‌های زیر را بایابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\lambda - x^2} dx . ۱۷ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+2)} dx . ۱۶ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix} . ۱۵$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} . ۲۰ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} . ۱۹ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix} . ۱۸$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x - x^2} dx . ۲۳ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos -\pi x}{x^2 - 1} dx . ۲۲ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{4} x}{2x - x^2} dx . ۲۱$$

۲۴. نشان دهید که اگر در مثال ۲، به جای نیم‌دایره C_2 نیم‌دایره C_1 تحتانی متناظر شر را فرازدهیم، نتیجه به جای خود باقی می‌ماند.



شکل ۳۵۲. مساله ۱۶

پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۵

۱. تکینی یک تابع تحلیلی $f(z)$ و همچنین مانده (z) در یک نقطه تکین چیست؟
۲. انگیزه انتگرالگیری مانده چیست؟
۳. چرا در انتگرالگیری به روش مانده استفاده از سری لورانی که در یک همسایگی نقطه تکین z (جز در خود z) از اهمیت خاصی برخوردار است؟
۴. آیا برخی از روش‌هایی که مانده را تعیین کرده ایم، می‌توانند یادآوری کنند؟
۵. آیا مانده در یک نقطه تکین می‌تواند صفر باشد؟ دلیل بیاورید.
۶. آیا مانده در یک قطب ساده می‌تواند صفر باشد؟

۷. آیا در حالتی که یک تابع تحلیلی نیست ولی فقط پیوسته است، می‌توان انتگرال‌گیری مانده رایکار برد؟

۸. آیا برای محاسبه انتگرال $\int \frac{1}{z} \tan z dz$ روی کانتور بسته‌ای که نقطه $z = 0$ را در بر می‌گیرد، می‌توان

از انتگرال‌گیری مانده استفاده کرد؟ جواب این پرسش را به ازای e^z بباید.

۹. در انتگرال گیری به روش مانده به مسیرهای بسته نیازمندیم. علیرغم توانایی در مورد محاسبه انتگرال‌ها (ی حقیقی) روی بازه‌ها چگونه بود؟

۱۰. مقدار اصلی کوشی یک انتگرال چیست و چرا در این فصل آمده است؟

انتگرال‌های زیر را روی مسیر مفروض C با استفاده از انتگرال‌گیری به روش مانده یا یکی از روش‌های بحث شده در فصل ۱۳ محاسبه کنید. و نشان دهید که انتگرال‌گیری به روش مانده را می‌توان برای آنها به کار برد.

۱۱. C ، دایره دلخواه ثابت $|z| = R$ ، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۱۲. C ، دایره واحد درجهت حرکت عقربه‌های ساعت

۱۳. C ، دایره $|z - 2i| = 3$ ، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۱۴. C ، بیضی $x^2 + 2y^2 = 2$ ، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۱۵. C ، دایره $|z - i| = 4$ ، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت

۱۶. C ، دایره $|z - 3| = 3$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت

۱۷. C ، دایره واحد، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۱۸. C ، مسیر دلخواهی از $i + 1$ تا 1 .

۱۹. C ، دایره واحد (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)، $n = 1, 2, \dots$

۲۰. C ، $\frac{z}{\sin^2 z}$ ، دایره $|z| = 1$ ، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۲۱. C ، $\operatorname{Re} z$ ، مثلثی به رئوس $0, 1, 1+i$ ، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت

۲۲. C ، $\frac{z \cosh z}{(z - 2i)^2}$ ، دایره $|z - 2i| = 1$ ، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۲۳. C ، $(z - \frac{\pi}{4})^{-r} \cos \lambda z$ ، دایره واحد، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۲۴. C ، $\frac{z^r + \sqrt{z}}{\cos z}$ ، دایره $|z + 1| = 1$ ، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت

۲۵ دایره C ، $\cot \theta z = 0/3 = |z|$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت با استفاده از روش های موجود در این فصل، انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{13 - 5\sin\theta} . \quad ۲۸ \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta} . \quad ۲۷ \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k + \cos\theta} (k > 1) . \quad ۲۶$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{34 - 16\sin\theta} d\theta . \quad ۲۹ \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{3 + \cos\theta} d\theta . \quad ۳۰ \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{1}{2}\sin\theta} . \quad ۲۹$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2} . \quad ۳۴ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2} . \quad ۳۳ \quad \int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{2} + 2\sin\theta}{17 - 8\sin\theta} d\theta . \quad ۳۲$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 5x^2 + 4} dx . \quad ۳۷ \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} . \quad ۳۶ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx . \quad ۳۵$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x^2 + 9} . \quad ۴۰ \quad \int_0^{\infty} \frac{1+2x^2}{1+4x^2} dx . \quad ۳۹ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 13x^2 + 36} dx . \quad ۳۸$$

خلاصه فصل ۱۵ روش انتگرالگیری مانده

مانده یک تابع تحلیلی $f(z)$ در یک نقطه z_0 ضریب b_1 جمله $\frac{1}{z - z_0}$ در سری لوران

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

تابع $f(z)$ است که در همسایگی z_0 (جزء در خود z_0) همگرا است. این مانده با انتگرال (بخش ۱.۱۵)

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (1)$$

داده شده است ولی این ضریب را از راههای مختلف دیگری نیز می توان به دست آورد، در نتیجه برای محاسبه انتگرالها روی منحنی های بسته از (۱) می توان استفاده کرد. به طور کلی، قضیه مانده (بخش ۱۵.۲) بیان می کند که هرگاه $f(z)$ در دامنه D ، به جز تعدادی متناهی نقاط z_j تحلیلی بوده و C یک مسیر بسته ساده ای در D باشد که هیچیک از z_j در C قرار نگیرند و تمام داخل C متعلق به D باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) \quad (2)$$

(جمع تنها روی z_j هایی صورت می گیرد که در داخل C قرار دارند).

این روش انتگرال‌گیری بسیار ساده و ظرفیت می‌باشد. فرمولهای مانده در قطب‌ها عبارت است از (m مرتبه قطب است (بخش ۱۵.۱))

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right), \quad (3)$$

که در آن $m = 1, 2, \dots$. از این روش برای قطب ساده ($m = 1$) داریم

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (3*)$$

فرمول دیگر برای مانده در یک قطب ساده $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ عبارت است از

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (3**)$$

انتگرال‌گیری به روش مانده به منحنی‌های پسته مربوط می‌شوند، ولی بازه حقیقی انتگرال‌گیری $2\pi \leq \theta \leq 0$ ، با قرار دادن $e^{i\theta}$ به دایره واحد تبدیل می‌شود. درنتیجه بنا به

انتگرال‌گیری به روش مانده می‌توان انتگرال‌های حقیقی به شکل (بخش ۱۵.۳) انجام داد.

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

را انتگرال گرفت ، که در آن F تابع گویایی از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ است، مثلاً تابع $\frac{\sin^5 \theta}{5 - 4\cos \theta}$ وغیره یک تابع گویای موردنظر است.

روش دیگر انتگرال‌گیری ، انتگرال‌های حقیقی بوسیله مانده ، استفاده یک کانتور پسته مرکب از بازه $-R \leq x \leq R$ - محور حقیقی و نیمداire $R = |z|$ است. با توجه به قضیه مانده، هرگاه فرض کنیم $\infty \rightarrow R$ ، برای تابع گویا $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ (با $q(z) \neq 0$ و درجه $p \geq q$ درجه q) به دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}_{z=z_0} f(z), \quad (\text{بخش } 15.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx = -2\pi \sum \text{Im Res}_{z=z_0} [f(z) e^{isz}], \quad (\text{بخش } 15.4)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx dx = 2\pi \sum \text{Re Res}_{z=z_0} [f(z) e^{isz}]$ (جمع روی همه مانده‌ها در قطب‌های واقع در نیم صفحه فوقانی انجام می‌شود). در بخش ۱۵.۴ این روش را برای انتگرال‌های حقیقی که تابع انتگرال‌ده در نقطه‌ای واقع در فاصله انتگرال‌گیری بینهایت می‌شود تعمیم داده شده است .

فصل ۱۶

نگاشت همدیس

اگر تابع f با ضابطه $w = f(z)$ در دامنه D از صفحه z تعریف شود، آنگاه به ازای هر نقطه از D نقطه‌ای از صفحه w متناظر قرار می‌گیرد. به این ترتیب نگاشتی از D بر روی برد مقادیر (z) در صفحه w خواهیم داشت. این «راهیافت هندسی» در آنالیز مختلط به ما کمک می‌کند تا خصلت یک تابع مختلط را با بررسی این که آن تابع منحثیها و نواحی معین را چگونه می‌نگاردرا «تجسم کنیم» ما این خاصیت را برای توابع خاصی در بخش ۹.۱۲ ملاحظه کردیم که متعلمان برای شروع بحث می‌توانند آنها را دوباره مطالعه نمایند.

این فصل در ارتباط با یک روش سیستماتیک از نگاشتهایی با توابع تحلیلی دلخواه $w = f(z)$ است. مشاهده خواهیم کرد (در بخش ۱۰.۱۶) که چنین نگاشتی همدیس است، یعنی زوایا را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بجز در «نقاط بحرانی» (نقاطی که در آنجا (z) صفر است) بدون تغییر منتقل می‌کند.

نگاشت همدیسی در ریاضیات مهندسی مهم است، چرا که این نگاشت روشی متعارف برای حل مسائل بامقدار کرانه‌ای در نظریه پتانسیل دو بعدی با تبدیل یک ناحیه پیچیده مفروض به ناحیه‌ای ساده‌تر (جزئیات در فصل ۱۷ آمده است) می‌باشد. در این قسمت از نگاشت، تبدیلات کسری خطی (بخش‌های ۲.۱۶، ۲.۱۶، ۳.۱۶) که دارای یک نقش کلیدی است، و توابع خاص دیگر (بخش ۴.۱۶) می‌توان استفاده نمود. در بخش آخر (بخش ۵.۱۶) سطح ریمان مورد بحث قرار می‌گیرد. کاربردهای نظریه پتانسیل در فصل ۱۷ ارائه خواهد شد.

پیشیازهای این فصل: فصل ۱۲.

بخش‌هایی که برای دوره فشرده‌تر قابل حذف است: بخش‌های ۳.۱۶ و ۴.۱۶.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D.

چواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۶. نگاشت همدیس

تابع با مقدار مختلط

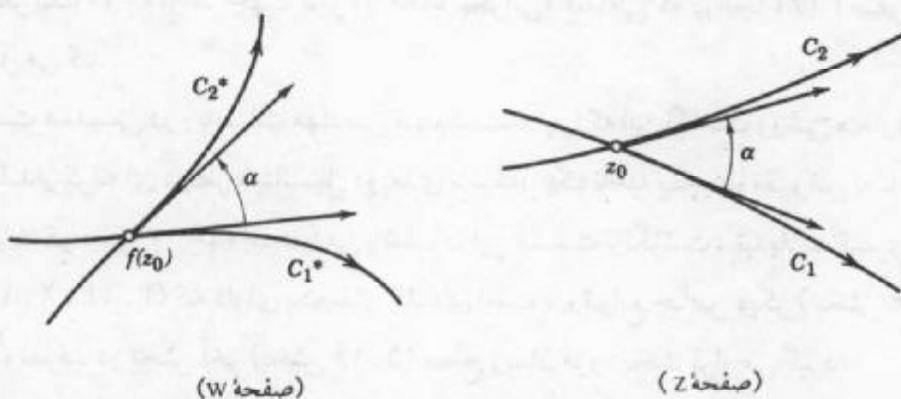
$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

از متغیر مختلط z ، نگاشتی از دامنه تعریفش در صفحه مختلط Z بر روی W برد مقادیر در صفحه w تخصیص می‌دهد. مثالهایی در بخش ۹.۱۲ نشان داده شده‌اند، که متعلمان می‌توانند آنها را قبل از این بخش مطالعه نمایند. چنانچه $f(z)$ تحلیلی باشد، آنگاه مهمترین خاصیت نگاشت همدیس بودن نگاشت است. یک نگاشت همدیس به صورت زیر تعریف می‌شود.

نگاشت $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را همدیس نامند هرگاه زوایای بین منحنيهای جهتدار را از نظر اندازه و جهت حفظ کند.

شکل ۳۵۳ چگونگی انجام این کار را نشان می‌دهد: تصاویر C_1^* و C_2^* از دو منحنی جهتدار همان زاویه α (که این زاویه $0^\circ \leq \alpha \leq \pi$) بین مماسهای جهتدار در نقطه تقاطع می‌باشد) را به عنوان زاویه بین C_1 و C_2 ، باتوجه به جهت آنها، چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت پیدید می‌آورد.

ثابت می‌کنیم که همدیسی برای یک تابع تحلیلی $f(z)$ ، جز در نقطه بحرانی، یعنی نقطه‌ای که مشتق $f'(z)$ در آن صفر است، اراده می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(z) = z^2$ دارای نقطه بحرانی $z = 0^\circ$ است، که در آن $f'(z) = 2z = 2z = 0^\circ$ و در $z = 0^\circ$ هر زاویه دو برابر می‌شود (ر.ک. مثال ۲، بخش ۹.۱۲)، درنتیجه این نگاشت مسلماً در $z = 0^\circ$ همدیس نیست. نقاط $0^\circ, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ نقاط بحرانی تابع $f(z) = \cos z$ می‌باشند.



شکل ۳۵۳. منحنیهای C_1 و C_2 تصاویر مربوط به آنها یعنی C_1^* و C_2^* تحت یک نگاشت همدیس

۱- اصطلاحات عمومی به شرح زیر اند. نگاشتی از مجموعه A به توى مجموعه B را پوششی یا نگاشتی از A بر روی B گویند هرگاه هر عضو B تصور لاقل یکی از اعضای A باشد. نگاشتی را انتزکیویا یک به یک نامند اگر اعضای مختلف A دارای تصاویر مختلف در B باشند. نگاشتی را دوسویی نامند اگر هم پوششی وهم یک به یک باشد.

قضیه ۱ (نگاشت همدیس)

نگاشتی که با تابع تحلیلی $f(z)$ تعریف می شود، جز در نقاط بحرانی، یعنی در نقاطی که مشتق $f'(z)$ صفر است، همدیس است.

اثبات. برای نیل به هدف، منحنی

$$(1) \quad C : z(t) = x(t) + iy(t)$$

واقع در دامنه $f(z)$ را در نظر می گیریم و نشان می دهیم که نگاشت $w = f(z)$ هر خط مماس بر C را در یک نقطه دلخواه z_0 واقع بر C (با فرض $f'(z_0) \neq 0$) به طور مستقل از منحنی C دوران می دهد. خطوط مماس بر دو منحنی دلخواه C_1 و C_2 که از نقطه z_0 می گذرند (شکل ۳۵۳) تحت یک زاویه دوران می کنند، زاویه بین دو منحنی تصویر چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت برابر وضعیت زاویه بین دو منحنی C_1 و C_2 است و این با توجه به تعریف، به معنی همدیسی است. جزئیات کار به شرح زیر می باشد.

فرض کنید C یک منحنی هموار باشد، یعنی $z(t)$ در (1) مشتق پذیر بوده و مشتق $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$ پیوسته و هیچ جا صفر نباشد. هم اکنون ادعا می کنیم که خط مماس بر C به طور پیوسته یکتا تغییر می کند. در واقع بنا، به تعریف (شکل ۳۵۴)

$$(2) \quad \dot{z}(t) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}.$$

در تساوی (2) $z_1 - z_0$ نمایش وتری از منحنی C بوده (ر. ک. شکل ۳۵۴)، و $\frac{z_1 - z_0}{\Delta t}$ با Δt مشتبه دارای همان جهت است. هم اکنون اگر $\Delta t \rightarrow 0$ آنگاه نقطه z_0 در طول منحنی C به سمت z_1 میل می کند، و

$$\frac{z_1 - z_0}{\Delta t} \rightarrow \dot{z}(t_0).$$

از این رو $\dot{z}(t_0)$ در z_0 بر C مماس است، که به اختصار به بردار مماسی بر منحنی C در نقطه z_0 موسوم است، با توجه به آن درستی ادعای مورد نظر به اثبات می رسد.

هم اکنون هر خط مماس جهتدار می گردد: جهت مشتبه هر خط مماس و همینطور بر منحنی C همان جهت افزایش t در (1) است که در آن جهت بردار نیز نشان می دهد.

حال به منحنی C نقش منحنی C تحت نگاشت $w = f(z)$ (غیر ثابت) بر می گردیم. منحنی C دارای نمایش به صورت زیر است

$$w = f[z(t)]$$

زیرا $z(t)$ نمایش منحنی C است و f آن را به C می برد. به $z_0 = z(t_0)$ واقع بر C نقطه

$w = w(t)$ واقع بر C^* و یک بردار مماس در آن مستناظر قرار می گیرد. هم اکنون بنابه قاعده زنجیره ای داریم

$$\dot{w}(t) = f'[z(t)] \dot{z}(t) \quad \text{و یا به اختصار} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3)$$

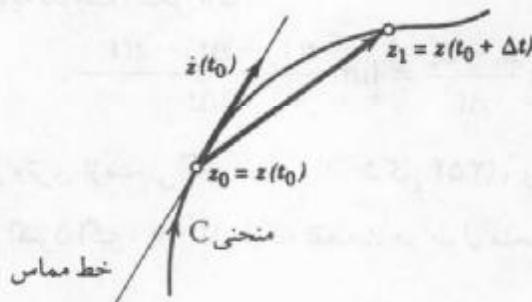
با فرض $\arg f'(z_0) \neq 0$ تعریف شده و با توجه به (۳) [بنابراین z_0 در C^* است] می باییم

$$\arg \dot{w}(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t_0). \quad (4)$$

بنابراین زاویه بین مماس بر C^* در z_0 و مماس بر C^* در w ، یعنی زاویه α که خط مماس به اندازه آن دوران می کند عبارت است از

$$\alpha = \arg \dot{w}(t_0) - \arg \dot{z}(t_0) = \arg f'(z_0).$$

حال به نقطه کلیدی پر می گردیم: چون عبارت طرف راست مستقل از انتخاب C است (و تنها به نقطه z_0 بستگی دارد)، این زاویه مستقل از C است؛ یعنی نگاشت موردنظر هر منحنی مار بر C را به اندازه همان زاویه دوران می دهد، درنتیجه تصاویر دو منحنی C_1^* و C_2^* همان زاویه دو منحنی اصلی C_1 و C_2 پدید می آورند وینا به تعریف این مطلب به معنی همدیس بودن است و قضیه به اثبات می رسد.



شکل ۳۵۴. فرمول (۲)

مثال ۱. همدیسی $w = e^z$ و $w = z^n$

نگاشت $w = z^n$ ، که در آن $n = 2, 3, \dots$ به جز در $z = 0$ ، که در آن $w' = nz^{n-1} = 0$ است، همدیس می باشد. به ازای $z = w$ در شکل ۳۵۴ (بخش ۹.۱۲) نشان داده شده است، که در این شکل منحنيهای تصویر یکدیگر را با زاویه قائم قطع می کنند و تنها در نقطه $z = 0$ زوایا تحت این نگاشت دو برابر می شوند. و دلیل این کار آن است که هر شعاع ثابت $\arg z = c$ به شعاع $\arg w = nc$ تبدیل می شود.

نگاشت $w = e^z$ به ازای تمام مقادیر z همدیس است زیرا به ازای تمام مقادیر z ،

مخالف صفر است.

نسبت بزرگنمایی. بنا به تعریف مشتق داریم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

درنتیجه، نگاشت $f(z) = w$ طول پاره خطهای کوتاه را تقریباً $|f'(z_0)|$ برا بر بزرگ یا کوچکتر می‌کند. تصویر یک شکل هندسی کوچک با شکل اصلی همدیس می‌باشد به این معنی که تقریباً دارای همان شکل است. گرچه، از آنجا که $f'(z)$ از هر نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند، یک شکل هندسی بزرگ ممکن است دارای تصویری باشد که شکل آن کاملاً با شکل اصلی تفاوت داشته باشد.

توضیح بیشتر درباره شرط $|f'(z)| \neq 0$. از (۴) بخش ۱۲. ۵. معادلات کوشی - ریمان به

دست می‌آوریم

$$|f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

يعنى

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}. \quad (5)$$

این دترمینان به ژاکوبی (Jacobi) بخش ۹. ۳. تبدیل $w = f(z)$ موسوم می‌باشد که به شکل حقیقی زیر نوشته می‌شود

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

از این رو، شرط $|f'(z)| \neq 0$ ایجاد می‌کند که ژاکوبی در z صفر نباشد. این شرط کفایت می‌کند که تحدید نگاشت $w = f(z)$ از z به همسایگی N باشد، کافی کوچک است یک به یک یا از گذشتی باشد، یعنی نقاط متفاوت در N دارای تصویرهای متفاوت باشند؛ مرجع [۵] را که درضمیمه ۱ فهرست شده، ملاحظه کنید.

مثال ۲.

نگاشت $w = z^2$ در هر همسایگی از نقطه دلخواه $z \neq 0$ ، که به اندازه کافی کوچک باشد، یک به یک است. این نگاشت در همسایگی $z = 0$ یک به یک نیست. تمامی صفحه z بر روی صفحه w نگاشته می‌شود به قسمی که هر نقطه w تصویر دونقطه از صفحه z باشد. به عنوان نمونه، نقاط $z = 1$ و $z = -1$ بر روی $w = 1$ نگاشته می‌شوند، و به طور کلی دونقطه z_1 و z_2 دارای یک

تصویر $z = w$ می باشد.

برخی نگاشتها در بخش ۱۲.۹ تشریح شده اند و تعدادی بیشتر نیز در بخش‌های بعدی به صورت سیستماتیک ارائه خواهد شد.

مسائل بخش ۱.۱۶

تصویر هریک از منحنیهای زیر را تحت نگاشت $w = z^r = u + iv$ باید و آنها را رسم کنید.

$$xy = 10 \cdot 3 \quad y = 1, 2, 3, 4, 2 \quad x = 1, 2, 3, 4, 1$$

$$y^r = x^r - 1 \cdot 6 \quad y = -x, y = x, 5 \quad y = x + 1, 4$$

تصویر هریک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^r$ یافته و آنها را رسم کنید.

$$|\arg z| < \frac{\pi}{3}, 9 \quad |z| \geq 5, 8 \quad |z| < \frac{1}{\pi}, 7$$

$$0 < y < 1, 12 \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}, 11 \quad \operatorname{Re} z > 0, 10$$

هریک از منحنیهای زیر را که در صفحه $(z = x + iy)$ قرار دارند، به صورت $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ نمایش دهید و بردار مماسی $\dot{z}(t)$ متناظر را تعیین کنید. منحنی و برخی از بردارها را رسم کنید.

$$x^r + 9y^r = 9, 15 \quad (x-1)^r + (y+2)^r = 25, 14 \quad x^r + y^r = 16, 13$$

$$y = 12 - 3x^r, 18 \quad y = \frac{1}{x}, 17 \quad x^r - y^r = 4, 16$$

نقاطی را در صفحه z تعیین کنید که در آن نقاط نگاشت $w = f(z) = f(x+iy)$ تعریف شده به یکی از صورتهای زیر همدیس نباشد.

$$\exp(z^3 - 1), 21 \quad \cos \pi z, 20 \quad z^r + az + b, 19$$

$$z + z^{-1} (z \neq 0), 24 \quad \cosh 2z, 23 \quad \exp(z^3 - 9z), 22$$

۲۵. چرا تصاویر منحنیهای ثابت $= |z|$ و ثابت $= \arg z$ یک تابع تحلیلی تحت یک زاویه قائمه یکدیگر را قطع می کنند؟

۲۶. به چه علتی منحنیهای تراز ثابت $= u$ و ثابت $= v$ یک تابع تحلیلی $(w = f(z))$ در هر نقطه‌ای که در آن $f'(z) \neq 0$ تحت یک زاویه قائمه همدیگر را قطع می کنند؟

۲۷. آیا نگاشت $w = \bar{z} = x - iy$ زوایارا از نظر اندازه و از نظر جهت حفظ می کند؟

۲۸. درستی (۵) را به ازای $f(z) = e^z$ بررسی کنید.

۲۹. (بزرگنمایی زوایا) فرض کنید تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی و $f'(z_0) = 0$

$f^{(k)}(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) \neq 0$. آنگاه نگاشت $w = f(z)$ هر زاویه به راس z_0 را برابر

می کند. درستی این موضوع را با ارائه سه مثال به ازای $k = 2, 3, 4$ نشان دهید.

۳۰. مساله ۲۹ را به ازای یک k دلخواه ثابت کنید. راهنمایی. از سری تیلور استفاده کنید.

۱۶. تبدیلات کسری خطی

تبدیلات همدیس دارای کاربردهای متعدد فیزیکی است. درستی این ادعای در فصل ۱۷ مشاهده خواهد نمود. ولی آنچه در عمل مهم است آن است که در مسائل عملی چه تبدیلی را باید انتخاب نمود تا یک ناحیه پیچیده را به یک ناحیه ساده مثلاً به یک قرص تبدیل کند. برای نیل به این هدف نیاز به مطالعه خواص تبدیلات همدیس داریم. برای این منظور موضوع را با یک دسته خبلی مهم از این تبدیلات به شرح زیر آغاز می‌کنیم. تبدیلات کسری خطی (یا تبدیلهای موبیوس) نگاشتهایی به

صورت

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

می‌باشد که در آن ثابت‌های a, b, c, d اعداد حقیقی یا مختلط هستند. این نگاشتها دارای کاربردهای عملی مهم در حل مسائل با مقادیر کرانه‌ای هستند زیرا در حل چنین مسائل بسیاری اوقات نیاز داریم که یک قرص را به روی یک نیم‌دایره یا بر روی قرص و بالعکس بنگاریم. این نوع تبدیلات باعث گسترش صفحه مختلط نیز می‌گردند (بخش ۱۴.۸) و در جریان مسائل سیالات و کاربردهای دیگر نقش اساسی دارند.

باتوجه به شرط $ad - bc \neq 0$

$$w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

مشاهده می‌کنیم که مشتق تابع موردنظر همواره مخالف صفر است، بنابراین نگاشت (1) در همه جا همدیس است. به ازای $w' = 0$ یعنی $ad - bc = 0$ رسیم که در مسائل چندان با اهمیت نیستند. بحث را باحالتهای خاصی از (1) شروع می‌کنیم.

مثال. انتقال، دوران، انبساط، انقباض

هریک از موارد زیر حالت خاصی از (1) هستند.

$$(2) \text{ (انتقال)} \quad w = z + b \quad \text{به اندازه } b \text{ است.}$$

و

$$(3) \quad w = az$$

به ازای $|a| = 1$ از یک دوران حاصل می‌شود، یعنی اگر بنویسیم $a = e^{i\alpha}$ آنگاه α زاویه این دوران است به ازای $\alpha > 0$ حقیقی با یک انبساط و به ازای $\alpha < 0$ با یک انقباض مواجه هستیم. تبدیلات (2) و (3) موارد خاصی از تبدیل خطی

نگاشت همدیس

$$w = az + b$$

می باشد، که از (۱)، به ازای $c = 0$ و $d = 1$ حاصل می شود.

مثال ۲. نگاشت $w = \frac{1}{z}$. انعکاس
نگاشت

$$w = \frac{1}{z} \quad (4)$$

حالت خاص مهمی از (۱) می باشد. در مطالعه آن با بهترین کاربرد مختصات قطبی $w = Re^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$ مواجه هستیم. با توجه به این فرض داریم

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}},$$

و با مساوی قراردادن قدر مطلقها با هم و آرگومانها با هم در طرفین تساوی فوق می یابیم

$$R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta.$$

با توجه به این موضوع نتیجه می شود که نقش $(z \neq 0)$ $w = \frac{1}{z}$ روی شعاعی که مبدأ را به \bar{z} وصل

می کند، در فاصله $\frac{1}{|z|}$ از مبدأ قرار دارد. علی الخصوص $e^{i\theta} z = e^{i\theta} = |z|$ بر روی

نقطه $w = e^{i\phi} = e^{-i\theta}$ واقع بر دایره واحد $|w| = 1$ نگاشته می شود.

متذکر می شویم که به طریق هندسی نقش z با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ با انعکاس نسبت به دایره واحد (شکل ۳۵۵) وسیس قرینه یابی نسبت به محور x حاصل می شود. متعلم می تواند این مطلب را با استفاده از مثلثهای مشابه ثابت کند.

شکل ۳۵۶ نشان می دهد که $w = \frac{1}{z}$ خطهای راست افقی و قائم را بر روی دایره ها یا خطهای راست می نگارد.

$w = \frac{1}{z}$ هر خط راست یا دایره را بر روی یک دایره یا خط راست می نگارد.

اثبات. هر خط راست یا دایره واقع در صفحه z را می توان به صورت زیر نوشت $A(x' + y') + Bx + Cy + D = 0$ (حقیقی D, C, B, A).

اگر $A = 0$ این معادله نمایش خط راست و اگر $A \neq 0$ ، نمایش یک دایره است، معادله فوق بر حسب \bar{z} و \bar{z} می توان چنین نوشت

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

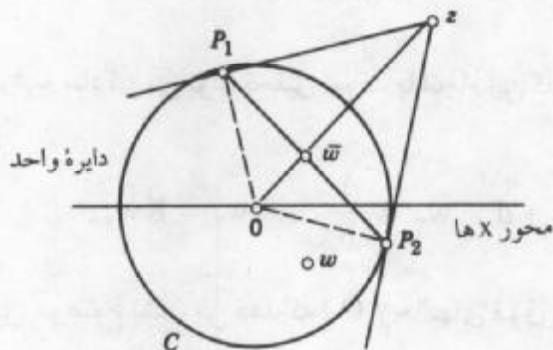
حال با جایگزینی $w = \frac{1}{z}$ و ضرب کردن معادله در $w\bar{w}$ می یابیم

$$A + B \frac{\bar{w} + w}{2} + C \frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0$$

یا

$$A + Bu - Cv + D(u^r + v^r) = 0.$$

این نمایش یک دایره (اگر $D \neq 0$) یا نمایش یک خط راست ($D = 0$) در صفحه w است

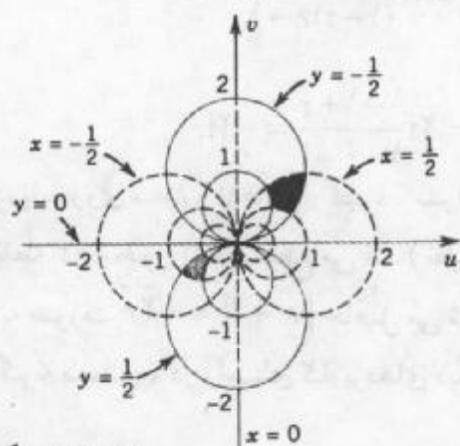
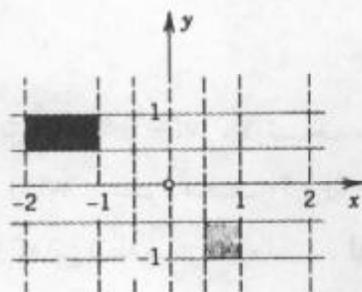


شکل ۳۵۵. تعبیر هندسی $w = \frac{1}{z}$. در اینجا، \bar{w} نقطه تقاطع Oz ، P_1P_2 است، که در آن P_1 و P_2 نقاط تمسخ خطوطی است که از نقطه z بر دایره واحد مماس شده‌اند.

اثبات این مثال اشاره بر استفاده Z و \bar{Z} به جای X و Y دارد، که یک موضوع مهم است که اغلب در عمل مفید واقع می‌شود. شگفت‌انگیز آنکه توجه کنیم که هرتبدیل کسری خطی دارای خاصیت ذکر شده فوق است.

قضیه ۱ (دوایر و خطوط راست)

هرتبدیل کسری خطی (۱) یک دایره یا یک خط راست واقع بر صفحه Z را برابر روی یک دایره یا یک خط راست واقع در صفحه w می‌نگارد.



شکل ۳۵۶. نگاشت $w = \frac{1}{z}$

اثبات. صحبت این ادعا در انتقال یا دوران بدیهی، و همین طور در مورد انساط و انقباض یکنواخت واضح است، و بنابراین قضیه به ازای $\frac{1}{z} = w$ ، همانطوری که ثابت شد، برقرار است. درنتیجه این قضیه در مورد ترکیب این نگاشتهای خاص نیز برقرار است. حال به انگیزه کلیدی اثبات می‌رسیم و آن نمایش (۱) بر حسب نگاشتهای خاص فوق الذکر است. به ازای $c = 0$ ، قضیه به آسانی به اثبات می‌رسد. به ازای $c \neq 0$ ، نمایش (۱) به صورت $w = K \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$ که در آن $K = -\frac{ad-bc}{c}$ درمی‌آید.

درستی این مطلب را به سادگی می‌توان تحقیق نمود. با انجام این کار به (۱) خواهیم رسید.

هم اکنون چنین قرار می‌دهیم

$$w_1 = cz, \quad w_2 = w_1 + d, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad w_3 = Kw_2,$$

و از آنجا $w_3 = w + \frac{a}{c}$ و این موضوع نشان می‌دهد که (۱) از حالتها فوق است و بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۳. تصویر یک دایره

با استفاده از قضیه ۱، نقش دایره واحد $|z|=1$ را تحت تبدیل سری خطی

$$w(z) = \frac{2iz - 2 - 2i}{(1-i)z - 1}$$

یابید.

حل. بنا به قضیه ۱، نقش دایره موردنظر یک دایره (یا یک خط راست) است، از این رو با تصویر کردن سه نقطه $1, -1, i$ و بر روی دایره $|z|=1$ تعیین می‌شود. با محاسبه این تصاویر، $w(z)$ را می‌توان به صورت ساده تری همانند

$$w(z) = 2i \frac{z-1+i}{(1-i)z-1}$$

نوشت، لذا

$$w(1) = 2i \frac{1-1+i}{1-i-1} = -2i,$$

به همین طریق، $w(-1) = 2i$ ، درنتیجه مرکز دایره باید روی محور $z=1$ قرار گیرد. سرانجام، $w(i) = -2 + 4i$. عمود منصف $z=i$ و $z=-2+4i$ در نقطه -4 -محور $z=1$ را قطع می‌کند (نظیر آن را رسم کنید)؛ که این نقطه مرکز دایره است. لذا جواب به صورت $|w+4| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ حاصل می‌شود.

در بعض آینده روش بهتری را برای حل این گونه مسائل، در راستای کاربردهای دیگری از قضیه ۱ ارائه می‌کنیم.

صفحه مختلط توسعه یافته در بخش ۱۴.۸. تشریح می شود. این صفحه از صفحه مختلط به انضمام نقطه ∞ (بینهایت) شکل می گیرد. حال می توان این مطلب را حتی با یک انگیزش طبیعی تر بر حسب تبدیلات کسری خطی به دست آورد.

باتوجه به (۱) مشاهده می شود که با هر Z ای که به ازای آن $0 \neq cz + d$ ، دقیقاً یک عدد مختلط w متناظر است فرض کنید که $0 \neq c$ آنگاه با مقدار $z = -\frac{d}{c}$ که به ازای آن w ای متناظر نمی شود. این موضوع اشاره بر آن دارد که $w = \infty$ را نقش $(c \neq 0)$ قراردهیم. به علاوه، وقتی که $c = 0$ ، باید داشته باشیم $d \neq 0$ ، $a \neq 0$ (چرا؟) و در این صورت فرض کنید که $w = \infty$ تصویر نقطه ∞ باشد.

سرانجام، نگاشت معکوس (۱) از حل (۱) بر حسب Z حاصل می شود، که این نگاشت معکوس خود یک تبدیل کسری خطی است:

$$w = \frac{-dw + b}{cw - a}. \quad (5)$$

وقتی $c \neq 0$ ، آنگاه به ازای $cw - a = 0$ ، $w = \frac{a}{c}$ و فرض می کنیم $w = \infty$ تصویر ∞ باشد. حال با این مفروضات، تبدیل کسری خطی (۱) نگاشت همدیس یک به یک از صفحه Z توسعه یافته بر روی صفحه w توسعه یافته است. همچنین گوییم هر تبدیل کسری خطی (۱) «صفحه توسعه یافته را به طور یک به یک بر روی خودش» می نگارد.

باتوجه به آنچه بحث شد می توان نتیجه گرفت:

تبصره کلی. اگر $\infty = Z$ ، در این صورت طرف راست (۱) به صورت عبارت بی معنی $\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d}$ ظاهر می شود، هنگامی که $c \neq 0$ ، مقدار $w = \frac{a}{c}$ و وقتی که $c = 0$ ، مقدار $w = \infty$ را به این عبارت نسبت می دهیم.

نقاط ثابت

نقاط ثابت نگاشتی مانند $f(z) = w$ نقاطی هستند که این نگاشت آنها را بر روی خودشان می نگارند، به عبارت دیگر تحت این نگاشت «ثابت نگهداشته می شوند». نقاط ثابت از رابطه $w = f(z) = z$

به دست می آیند. برای نگاشت همانی

$$w = z$$

هر نقطه یک نقطه ثابت است. نگاشت $\bar{z} = w$ دارای تعدادی نامتناهی نقاط ثابت $w = \frac{1}{z}$ ، دارای

دونقطه ثابت، یک دوران دارای یک نقطه ثابت و یک انتقال هیچ نقطه ثابتی در صفحه متناهی ندارد.
(در هر حالت آنها را بباید). با توجه به (۱) نقطه ثابت مقید به $w = z$ عبارت است از

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

یا

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0. \quad (۶)$$

این یک معادله درجه دو بر حسب z است که ضرایب آن فقط و فقط وقتی صفر هستند که نگاشت همانی $w = z$ باشد (در این حالت، $b = c = 0$ ، $a = d \neq 0$). از این رو داریم:

قضیه ۲ (نقاط ثابت)

هر تبدیل کسری خطی، غیرهمانی، حداقل دو نقطه ثابت دارد. اگر تبدیل کسری خطی دارای سه یا تعداد بیشتری نقاط ثابت باشد، آنگاه این تبدیل یک نگاشت همانی است.

برای عمومیت بخشنودن به بحث قبلی از تبدیلات کسری خطی از نقطه نظر عملی بالاتر می باشند. که به ارائه مثالهای متعدد در مورد آنها در بخش مسائل این بخش می پردازیم.

مسائل بخش ۲.۱۶

نقاط ثابت هریک از نگاشتهای زیر را بباید.

$$w = z^3. \quad ۳$$

$$w = (z + 3i). \quad ۲$$

$$w = (2+i)z. \quad ۱$$

$$w = z^4 + 10z^2 + 10z. \quad ۶$$

$$w = (z+1)^5. \quad ۵$$

$$w = (z-i)^4. \quad ۴$$

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad ۹$$

$$w = \frac{3z+2}{z-1}. \quad ۸$$

$$w = \frac{2iz-1}{z+2i}. \quad ۷$$

تبدیل کسری خطی ای را بباید که (تنها) نقاط ثابت آن نقاط داده شده زیر باشند.

$$0.12$$

$$2, -2.11$$

$$1, 0.10$$

تمام تبدیلات کسری خطی ای را بباید که (تنها) نقاط ثابت آنها نقاط داده شده زیر باشند.

$$i, -i. \quad 15$$

$$1, -1.14$$

$$\infty, 0.13$$

۱۶. تمام تبدیلات کسری خطی ای را که در صفحه متناهی نقاط ثابتی ندارند، بباید.

۱۷. معکوس تبدیل $\frac{3z+4i}{z+2i}$ را به طور مستقیم و بدون استفاده از (۵) بباید.

۱۸. چنانچه z_1 نقطه ثابتی از تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ باشد، آنگاه واضح است که z_1 باید یک نقطه ثابت تبدیل معکوس $w = g(w)$ باشد. درستی این حکم را ثابت کنید.

۱۹. با محاسبات (۵) را از (۱) نتیجه بگیرید. (۵) را با جایگزینی در (۱) بررسی کنید.

۲۰. قضیه ۱ را با جاگذاری (۱) در معادله یک دایره یا خط راست داده شده ثابت کنید. راهنمایی.

نشان دهید که معادله آخر را می‌توان به صورت $A = 0 ; w = u + iv$ یک خط راست را به دست می‌دهد)

$$Aw\bar{w} + Bw^* + \bar{B}\bar{w} + C = 0$$

نوشت.

۱۶. ۳. تبدیلات کسری خطی خاص

حال توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان تبدیلات کسری خطی

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

را که برای نگاشتن دامنه‌های ساده‌های معین بر روی سایر دامنه‌ها به کار می‌روند مشخص کرد، و چطور می‌توان خواص (۱) را مورد بحث قرار داد.

چهار عدد مفروض a, b, c, d یک نگاشت یکتا را مشخص می‌کند، اما می‌توان آن را مسکوت گذاشت یا بدون تغییر دادن نگاشت مفروض (۱) آن را به سه عدد وابسته نمود. نشان می‌دهیم که تنها یک تبدیل به صورت (۱) موجود است که سه نقطه مجزای داده شده از صفحه Z تبدیل می‌کند. مهمتر اینکه فرمولی به دست می‌آوریم که منجر به نگاشت زیر می‌گردد.

قضیه ۱ (سه نقطه و تصاویر مفروض آنها)

سه نقطه مجزای داده شده z_1, z_2, z_3 و w_1, w_2, w_3 را همواره می‌توان با یک، و تنها یک، تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ بر روی سه نقطه مجزای مشخص w_1, w_2, w_3 نگاشت. این نگاشت به طور ضمنی با معادله زیر داده می‌شود

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \quad (2)$$

(اگر یکی از این نقاط نقطه ∞ باشد، نسبت دوتفاضلی که شامل این نقطه هستند باید برابر ۱ فرض شود)

اثبات. معادله (۲) به صورت $F(w) = G(z)$ است، که در آن $F(w) = G(z)$ تابع کسری خطی متغیرهای مربوط به خود می‌باشد. از اینجا به سهولت به دست می‌آوریم $[G(z)]^{-1} = F^{-1}(z)$ ، که در آن F^{-1} به معنی تابع معکوس F است. از آنجا که معکوس تبدیل کسری خطی و ترکیب تبدیلات کسری خطی تبدیلات کسری خطی می‌باشد [ر. ک (۵) از بخش ۱۶. و مساله ۱۷ آخر این بخش، $w = f(z)$ تبدیل کسری خطی است. به علاوه، با توجه به (۲) با محاسبه مستقیم مشاهده می‌کنیم که $F(w_1) = 0, F(w_2) = 1, F(w_3) = \infty$,

$$G(z_1) = 0, G(z_2) = 1, G(z_3) = \infty$$

[چنانچه در طرف راست قرار دهیم $w = w_1, w = w_2, w = w_3$ و آنگاه برای برقرار بودن (۲)

نگاشت همدیس

باید در طرف دوم آن چنین کاری را انجام دهیم [۱]. از این رو $w_1 = f(z_1)$ ، $w_2 = f(z_2)$ و $w_3 = f(z_3)$. این مطلب وجود تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ را که z_1, z_2, z_3 و z_4 را به ترتیب بر روی w_1, w_2, w_3 و w_4 می نگارد ثابت می کند.

حال ثابت می کنیم که $w = f(z)$ به طور یکتا معین می شود. فرض کنید که $w = g(z)$ تبدیل کسری خطی دیگری باشد که z_1, z_2, z_3 و z_4 را به ترتیب بر روی w_1, w_2, w_3, w_4 می نگارد. آنگاه معکوس آن، یعنی $(w - g^{-1})$ w_1, w_2, w_3, w_4 را برابر روی z_1, z_2, z_3, z_4 و w_4 را برابر روی z_4 خواهد نگاشت. درنتیجه، نگاشت مرکب $H = g^{-1}[f(z)]$ هریک از نقاط z_1, z_2, z_3, z_4 و w_4 را برابر روی خودش می نگارد؛ یعنی دارای سه نقطه ثابت مجازی z_1, z_2, z_3 و w_4 می باشد. با توجه به قضیه ۲ از بخش قبل نتیجه می گیریم که H نگاشتی همانی است، و بنابراین $g(z) = f(z)$.

آخرین گزاره قضیه فوق از تبصره کلی بخش قبل نتیجه می شود. بدین ترتیب قضیه اثبات می رسد.

نگاشت نیم صفحه ها بر روی قرصها

این نگاشت به عنوان مثال در مسائل مربوط به پتانسیل از لحاظ عملی جالب است. بدون آنکه به کلیت موضوع خللی وارد شود، فرض کنیم که می خواهیم نیم صفحه فوقانی $\mathbb{C} \setminus \{y\}$ را برابر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ بنگاریم. کران نیم صفحه محور x ها است؛ واضح است که این کران باید بر روی دایره واحد $|w| = 1$ نگاشته شود. از این مطلب الهام می گیریم که برای یافتن نگاشت، سه نقطه روی محور x ها انتخاب کنیم. تصاویر این نقاط را باید بر روی دایره مشخص نماییم و سپس قضیه ۱ را به کار ببریم. باید اطمینان حاصل کنیم که نیم صفحه $\mathbb{C} \setminus \{y\}$ بر روی داخل و نه بر روی خارج دایره مذبور نگاشته شده است.

مثال ۱. نگاشت نیم صفحه بر روی قرص

تبدیل کسری خطی (۱) را طوری بیابیم که $z_1 = -1$ ، $z_2 = 0$ و $z_3 = \infty$ را به ترتیب بر روی $w_1 = -1$ ، $w_2 = i$ و $w_3 = 1$ بنگارد.

حل. از (۲) می باییم

$$\frac{w - (-1)}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - 1} \cdot \frac{0 - (-1)}{0 - (-1)},$$

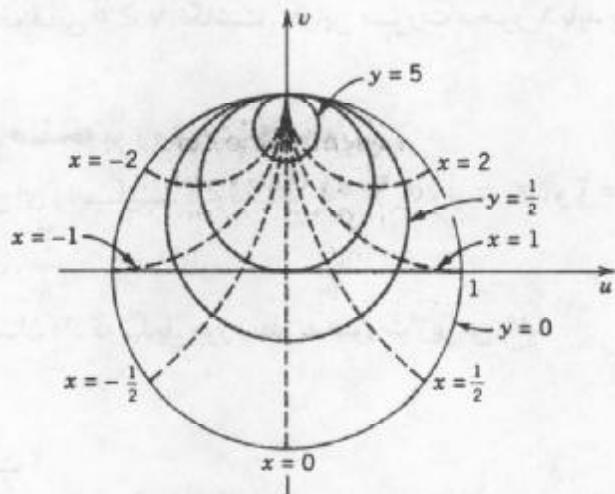
لذا

$$w = \frac{z - i}{iz + 1}.$$

(۳)

اکنون نشان می دهیم که خواص ویژه چنین نگاشتی را بدون انجام محاسبات مشکل می توان

مشخص نمود. به ازای $x = z$ داریم $w = \frac{x-i}{(-ix+1)}$. لذا $|w| = 1$. درنتیجه محور x ها بر روی دایره واحد نگاشته می شود. از آنجا که $i = Z$ مقدار $w = 1$ را به دست می دهد، دراین صورت نیم صفحه فوقانی بر روی داخل دایره و نیم صفحه تحتانی بر روی بیرون دایره نگاشته می شوند. نقاط $z = 0, i, \infty$ با نقاط $w = -i, 0, 1$ متناظر می باشند، درنتیجه محور موهومی مثبت بر روی پاره خط S با $0 \leq v \leq 1$ نگاشته می شود. خطوط قائم ثابت $= x$ (بنا به قضیه ۱، بخش ۲.۱۶) بر روی دایری که از $i = w$ (تصویر $\infty = z$) می گذرند و بر $1 = |w|$ عمودند (بنا به همدیسی؛ ر.ک. شکل ۳۵۷) نگاشته می شوند. به همین ترتیب، خطوط افقی ثابت $= y$ بر روی دایری که از $i = w$ می گذرند و بر S عمودند (بنا به همدیسی) نگاشته می شوند. شکل ۳۵۷ این دایر را به ازای $y \geq 0$ نشان می دهد، و به ازای $y < 0$ آنها در بیرون قرص واحد نشان داده شده قرار دارند.



شکل ۳۵۷. تبدیل کسری خطی مثال ۱

مثال ۲. رخداد ∞

تبدیل کسری خطی ای را مشخص کنید که $z_1 = 1$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = \infty$ را به ترتیب بر روی $w_1 = -i$ ، $w_2 = 1$ ، $w_3 = -1$ بنگارد.

حل. از (۲) نگاشت مطلوب به صورت زیر درمی آید

$$w = \frac{z-i}{z+i}. \quad (4)$$

این نگاشت را گاهی اوقات تبدیل کیلی^۲ می نامند. دراین حالت، ابتدا از (۲) نسبت $\frac{1-\infty}{z-\infty}$ حاصل

۲- آرثور کیلی ARTHR CAYLEY (۱۸۹۵-۱۸۲۱)، ریاضیدان انگلیسی، استاد دانشگاه کمبریج، که بخاطر کارهای مهمش در جبر، نظریه ماتریسها، و معادلات دیفرانسیل مشهور می باشد.

می شود که به جای آن ۱ قرار می دهیم.

نگاشت قرصها بر روی نیم صفحه ها. این کار کاملاً شبیه سوال پاسخ داده شده در فوق است.

مثال ۳. نگاشت قرص واحد بر روی نیم صفحه راست صفحه

تبدیل کسری خطی ای را باید که نقاط $-1, z_1 = i, z_2 = \infty$ را به ترتیب بر روی $w_1 = 0, w_2 = \infty$ بنشانیم. (یک شکل از قرص و نیم صفحه رسم کنید.)

حل. با توجه به (۲)، بعد از جایگزینی $\frac{i-\infty}{w-\infty}$ با ۱ به دست می آوریم

$$w = -\frac{z+1}{z-1}.$$

نگاشت نیم صفحه بر روی نیم صفحه

این نگاشت از نظر علمی نیز جالب است. به عنوان مثال، می توان نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$ را بر روی نیم صفحه فوقانی $v \geq 0$ نگاشت. در این صورت محور X باید بر روی محور v نگاشته شود.

مثال ۴. نگاشت نیم صفحه بر روی نیم صفحه

تبدیل کسری خطی ای را باید که نقاط $-2, z_1 = 0, z_2 = \infty$ را به ترتیب بر روی $w_1 = 1, w_2 = \frac{3}{4}, w_3 = \infty$ بنشانیم.

حل. از (۲) می توان نشان داد که تبدیل مورد نظر به صورت زیر می باشد

$$(5) \quad w = \frac{z+1}{2z+4}.$$

نقش محور X کدام است؟

نگاشت قرصها بر روی قرصها

این نگاشت دسته سوم از مسائل عملی است. می توان قرص واحد صفحه Z بر روی قرص واحد صفحه W نگاشت. به آسانی می توان تحقیق کرد که تبدیل

$$(6) \quad w = \frac{z-z_0}{cz-1}; \quad c = \bar{z}_0, |z_0| < 1$$

نگاشتی از نوع مورد نظر می باشد و این نگاشت نقطه z_0 را بر روی مرکز $w = 0$ می نگارد (ر. ک. مساله ۱۴).

مثال ۵. نگاشت قرص واحد بر روی قرص واحد

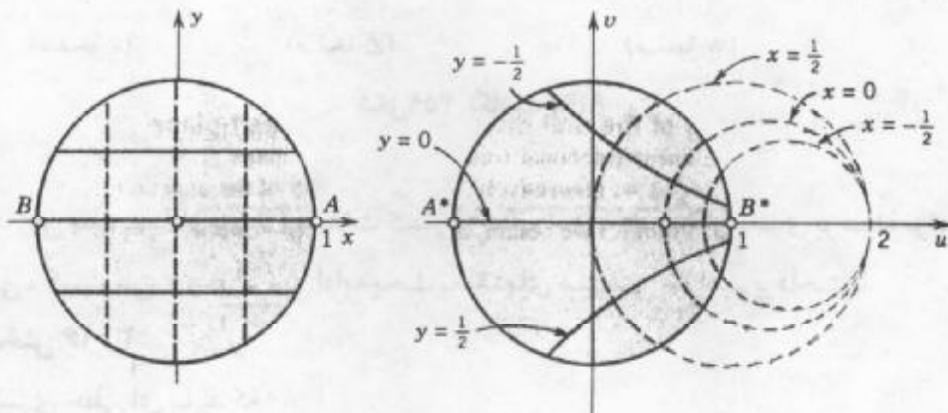
چنانچه فرض کنیم که $z_0 = \frac{1}{c}$ بر روی $w = 0$ نگاشته شده است، آنگاه با توجه به (۶) می بایس

$$w(z) = \frac{2z-1}{z-2}.$$

محورهای حقیقی با همدیگر متناظراند؛ بخصوص

$$w(-1) = 1, \quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = -1.$$

از آنجا که نگاشت همدیسی است و خطوط راست بر روی دوایر یا خطوط راست نگاشته می‌شوند و $w(\infty) = 2$ ، تصاویر خطوط ثابت $= X$ دوایری هستند که از $z = 2$ می‌گذرند و مراکز آنها روی محور u قرار دارد؛ خطوط ثابت $= y$ بر روی دوایری نگاشته می‌شوند که به دوایر فوق الذکر عموداند (ر.ک. شکل ۳۵۸).



شکل ۳۵۸. نگاشت مثال ۵

نگاشت نواحی زاویه‌ای بر روی قرص واحد را می‌توان از ترکیب تبدیلات کسری خطی با تبدیلهایی از نوع $w^n = z^m$ ، که در آن n عددی صحیح و بزرگتر از ۱ است، به دست آورد.

مثال ۶. نگاشت ناحیهٔ زاویه‌ای بر روی قرص واحد

ناحیهٔ زاویه‌ای $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ بنگارید.
حل. بدین منظور به روش زیر عمل می‌کنیم. نگاشت

$$Z = z^r$$

ناحیه D را بر روی نیمهٔ راست صفحه Z می‌نگارد. هم اکنون می‌توان از یک تبدیل کسری خطی ای استفاده کرد که این نیم صفحه را بر روی قرص واحد بنگارد، این تبدیل، مثلاً، می‌تواند به صورت زیر باشد

$$w = i \frac{Z-1}{Z+1}.$$

با جایگزینی $Z = z^r$ در این نگاشت می‌یابیم

$$w = i \frac{z^r - 1}{z^r + 1};$$

این نگاشت دارای خواص موردنظر است (ر. ک. شکل ۳۵۹).



شکل ۳۵۹. نگاشت مثال ۶

این مطلب پایان بحث تبدیلات کسری خطی است. در بخش بعدی بوسیله توابع تحلیلی (سینوسی، کسینوسی، وغیره) به ادامه بحث نگاشتهای همدیسی خواهیم پرداخت.

مسائل بخش ۳.۱۶

تبدیل کسری خطی ای باید که

۱. $1, 0, 1, 2$ را بروی $5, 2, 0, 8$ بنگارد.

۲. $0, 1, 0, -1$ را بروی $0, 0, \infty, \infty$ بنگارد.

۳. $-1, 0, 0, 1$ را بروی $0, 1, 0, -1$ بنگارد.

۴. $\frac{1+i}{2}$ را بروی $1, 0, \infty, \infty$ بنگارد.

۵. $0, 1, 0, \infty$ را بروی $1, 0, 0, \infty$ بنگارد.

۶. $0, 1, 0, -2i$ را بروی $0, 0, \infty, \infty$ بنگارد.

۷. $\frac{5i}{2}$, $0, i, 2i$, 0 را بروی $2i, 0, \infty, \infty$ بنگارد.

۸. $0, \infty, \infty, \frac{i}{2}$ را بروی $0, 1, 0, \infty$ بنگارد.

۹. $0, -1, i, 1$ را بروی $0, -1, 1, i$ بنگارد.

۱۰. $0, 1, 0, -i$ را بروی $i, 2i, 0, i+1$ بنگارد.

۱۱. (۴) را از (۲) نتیجه بگیرید.

۱۲. معکوس (۳) را باید نشان دهید که (۳) خطوط ثابت $c = x$ را بروی دوایری که مراکز شان برخط v قرار دارند، می نگارد.

۱۳. (۵) را از (۲) نتیجه بگیرید. معکوس (۵) را باید و منحنيهای متاظر با ثابت $= u$ و ثابت $= v$ را یافته و رسم کنید.

۱۴. حکم مربوط به (۶) را ثابت کنید.

۱۵. تبدیل کسری خطی ای باید که $1 \leq |z|$ را بر روی $1 \leq |w|$ بنگارد به طوری که $\frac{i}{z} = w$ بر روی $y = 0$ نگاشته شود و تصاویر خطوط ثابت $= x$ و ثابت $= y$ رارسم کنید.

۱۶. تمام تبدیلات کسری خطی (z) ای که محور x را بر روی محور u می نگارند باید.

۱۷. نشان دهید که ترکیب دو تبدیل کسری خطی یک تبدیل کسری خطی است.

۱۸. تابع تحلیلی ای باید که ربع دوم صفحه z را بر روی داخل دایره واحد صفحه w بنگارد.

۱۹. تابع تحلیلی $f(z) = w$ را که ناحیه زاویه ای $\arg z \leq \frac{\pi}{4}$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ می نگارد پیدا کنید.

۲۰. تابع تحلیلی $f(z) = w$ را طوری باید که ناحیه $1 \leq y \leq x + 1 \leq 2$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ بنگارد.

۱۶. نگاشت با سایر توابع

نگاشتهای z^n ، e^z ، $\ln z$ در بخش ۱۲. ۹. مورد بحث قرار گرفته اند. متعلم می تواند قبل از شروع این بخش برای یادآوری به مطالعه این نگاشتها پردازد.

تابع سینوسی

نگاشت زیر را در نظر می گیریم (بخش ۱۲. ۷).

$$w = u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (1)$$

که در آن

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y. \quad (2)$$

نگاشت $z = \sin z$ متناوب و با دورهٔ متناوب 2π است، نگاشت (۱) در تمام صفحه z یک به یک نیست، $z = \pm \frac{\pi}{2}$ را به نوار $\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ - محدود می کنیم (شکل ۳۶). از آنجا که $f'(z) = \cos z$ در $\frac{\pi}{2}$ صفر است، نگاشت در این دونقطه بحرانی همدیسی نیست. حال می توان خواص نگاشت را با مشخص نمودن تصاویر خطوط قائم ثابت $= x$ و خطوط افقی ثابت $= y$ مورد بررسی قرار داد.

اگر $x = 0$ ، آنگاه از (۲) نتیجه می شود که $u = 0$ و $v = \sinh y$. از این رو محور $x = 0$ بر روی محور v نگاشته می شود.

اگر $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه با توجه به (۲) داریم $v = 0$ و $u = \pm \cosh y$ ، نظر به اینکه $\cosh y \geq 1$ ، کرانه های خطوط قائم $x = \pm \frac{\pi}{2}$ بر روی قطعات $1 - u \leq u \leq 1$ و $u \geq 1$ همانطوری که در شکل ۳۶۰ نشان داده شده است ، بر روی محور u نگاشته می شود.

اگر $x \neq 0, \pm \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه با توجه به تساوی $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ و (۲) داریم

$$\frac{u^2}{\sinh^2 x} - \frac{v^2}{\cosh^2 x} = 1. \quad (3)$$

نمایش (۳) به ازای هر ثابت $x \neq 0$ یک هذلولی است. بنابراین نقش هر خط ثابت $x = \text{const}$ یک هذلولی است.

اگر $y = 0$ ، آنگاه $\sinh y = 0$ ، بنابراین با توجه به (۲) داریم $v = 0$ و $u = \sin x$ ، در نتیجه محور $x = 0$ (یعنی $y = 0$) بر روی پاره خط $1 - u \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می شود.

اگر $y \neq 0$ ، آنگاه با توجه به اینکه $1 = \cosh^2 y + \sinh^2 y$ و (۲) می باییم

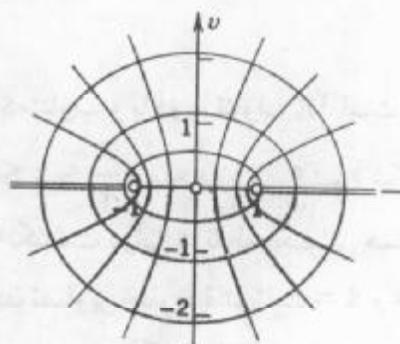
$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1. \quad (4)$$

نمایش (۴) به ازای هر ثابت $y \neq 0$ یک بیضی با کانونهای ± 1 می باشد. بنابراین نقش هر خط افقی ثابت $y = \text{const}$ یک بیضی است.

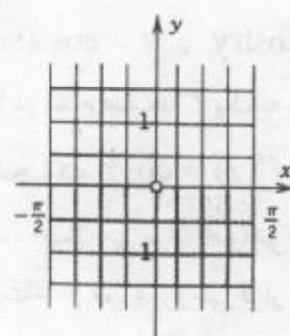
تصاویر منحنیهای ثابت $x = \text{const}$ و $y = \text{const}$ متعامد می باشد. (تحت زوایای قائمه یکدیگر را قطع می کند) زیرا نگاشت $w = \sin z$ در همه نقاط بجز نقاط بحرانی $z = \pm \frac{\pi}{2}$ همدیس است. شکل ۳۶۰ را ملاحظه کنید.

با توجه به بررسیهای به عمل آمده مشاهده می شود که $w = \sin z$ نوار قائم نامتناهی

$$v = 0, u \geq 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} - \text{را بر روی صفحه } W \text{ بریده شده در امتداد شعاعهای } 1 - u \leq u \leq 1 \text{ می باشد.}$$



(صفحه W)



(صفحه Z)

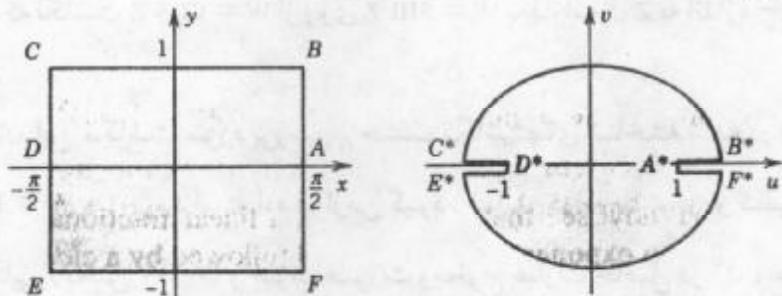
شکل ۳۶۰. نگاشت $w = u + iv = \sin z$

می نگارد، و این نگاشت یک به یک و همدیسی است.

مثال ۱. نگاشت مستطیل بر روی قرص بیضوی

مطلوب است تصویر مستطیل در شکل ۳۶۱ تحت نگاشت $w = \sin z$.

حل. کرانه مستطیل با $y = \pm 1$ و $x = \pm \frac{\pi}{2}$ متناظرند. بنابراین لبه‌های فوقانی و تحتانی این مستطیل به ترتیب بر روی نیمه‌فوقانی و نیمه‌تحتانی بیضی (۴) که نیمه محورهای آن $\cosh 1 = 1/54$ و $\sinh 1 = 1/18$ می‌باشند نگاشته می‌شود. لبه چپ بر روی پاره خط $-1 \leq u \leq \cosh 1$ و لبه راست بر روی قطعه خط $\cosh 1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می‌شوند. توجه کنید که هر دو نقطه از این لبه‌ها دارای همان تصویر $\cosh y - \cosh y$ (لبه چپ) یا $\cosh y - \cosh y$ (لبه راست) برمحور u هستند (ر. ک. شکل ۳۶۱).



شکل ۳۶۱. نگاشت با $w = \sin z$ مربوط به مثال ۱

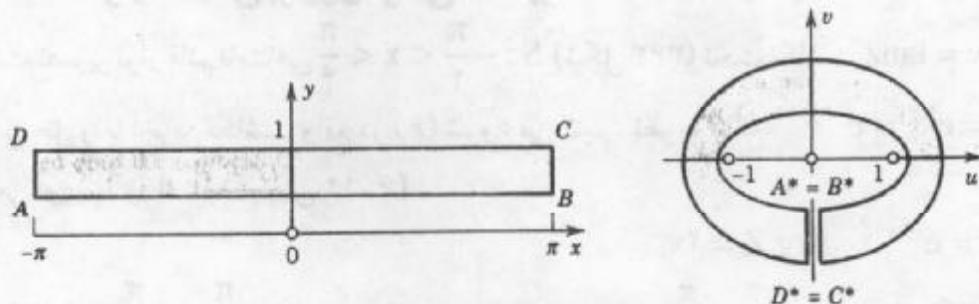
مثال ۲. تصویر مستطیل بر روی حلقه‌ای بیضوی

مطلوب است تصویر مستطیل

$$R : -\pi < x < \pi, \quad \frac{1}{2} < y < 1$$

تحت نگاشت $w = \sin z$ (ر. ک. شکل ۳۶۲).

حل. لبه فوقانی مستطیل $y = 1$ است و بر روی بیضی (۴) با نیمه محورهای $\cosh 1$ و $\sinh 1$ (شکل



شکل ۳۶۲. نگاشت با $w = \sin z$ مربوط به مثال ۲

(۳۶۲)، لب تحتانی بر روی (۴) بانیمه محورهای $\cosh \frac{1}{2} = 1/13$ و $\sinh \frac{1}{2} = 0/152$ نگاشته می شوند. یالهای جانبی $x = \pm\pi$ بر روی قطعه مفروض با $\sinh v \leq v \leq -\sinh v$ از محور v که مستقیماً از (۲) و $\cos(\pm\pi) = -1$ ، $\sin(\pm\pi) = 0$ نتیجه شده اند، نگاشته می شوند. شکل ۳۶۲ نتیجه حاصل را نشان می دهد.

توابع کسینوس و تانژانت

کسینوس. نگاشت $w = \cos z$ می تواند به طور مستقل مورد بررسی قرار گیرد، ولی نظر به اینکه $w = \cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ ، (۵)

مشاهده می شود که نگاشت $w = \sin z$ از روی $w = \cos z$ بعد از انتقال z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست حاصل می شود.

تانژانت. ایده بیان این نگاشت مورد بررسی بر حسب نگاشتهای شناخته شده در بررسی نگاشت $w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ نیز مورد استفاده قرار می گیرد. نمایش توابع سینوس و کسینوس در z بر حسب توابع نمایی (بخش ۱۲. ۷) و ضرب صورت و مخرج عبارت حاصل در e^{iz} ، می یابیم

$$w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{iz} - 1}{i(e^{iz} + 1)}$$

بنابراین اگر با قراردادن $e^{iz} = Z$ و با استفاده از تساوی $i = \frac{1}{-1}$ ، داریم

$$w = \tan z = -i Z^*, \quad Z^* = \frac{Z-1}{Z+1}, \quad Z = e^{iz}. \quad (6)$$

بدین طریق نگاشت $w = \tan z$ از روی یک نگاشت کسری خطی و دورانی به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت حرکت عقربه های ساعت حاصل می شود.

مثال ۳. نگاشت نوار نامتناهی بر روی قرصی مستدير

مطلوب است تصویر نوار قائم نامتناهی $\pi < x < -\frac{\pi}{4}$ (شکل ۳۶۳) تحت نگاشت $w = \operatorname{tanz}$. حل. مراحل حل را با آخرین نگاشت واقع در (۶) شروع می کنیم. نظر به اینکه $Z = e^{iz} = e^{-iy+ix}$ ، به دست می آوریم [ر. ک. (۸) بخش ۱۲. ۶]

$$|Z| = e^{-y}, \quad \operatorname{Arg} Z = 2x.$$

بنابراین خطوط قائم $\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{2}$ به ترتیب بر روی شعاعهای $\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{2}$ نگاشته

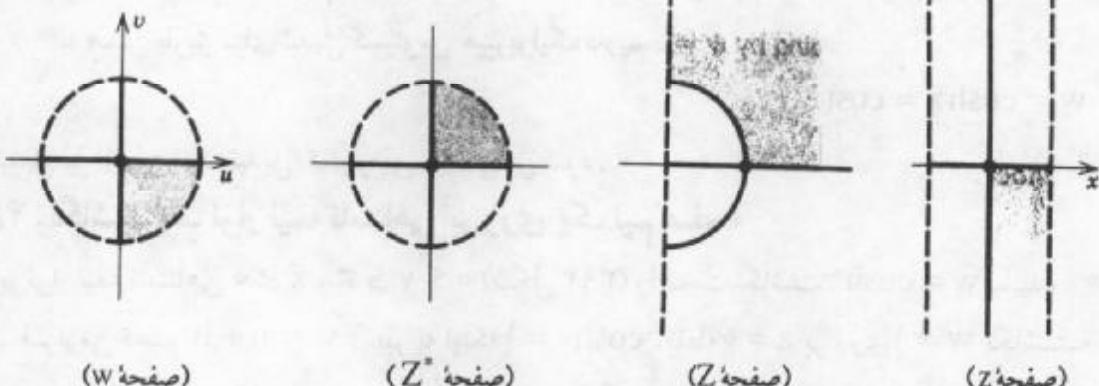
می شوند. در نتیجه S بر روی نیم صفحه راست Z نگاشته می شوند. همچنین اگر $y > 0$ ، آنگاه $|Z| = e^{-y}$ و اگر $y < 0$ ، آنگاه $|Z| = e^{-y}$. از این رو نیمه فوقانی S در داخل دایره واحد $|Z| = 1$ نگاشته می شوند (شکل ۳۶۳).

اکنون تبدیل کسری خطی مذکور در (۶)، که بانماد گذاری با $g(Z)$ ، به صورت زیر درمی آید

$$Z^* = g(Z) = \frac{Z-1}{Z+1}. \quad (7)$$

به ازای Z حقیقی، عبارت فوق حقیقی است. در نتیجه محور حقیقی Z بر روی محور حقیقی Z^* نگاشته می شود. علاوه بر آن، محور موهومی Z بر روی دایره واحد $|Z^*| = 1$ نگاشته می شود زیرا به ازای مقدار موهومی محض $Z = iY$ از (۷) می یابیم

$$|Z^*| = |g(iY)| = \left| \frac{iY - 1}{iY + 1} \right| = 1.$$



شکل ۳۶۳. نگاشت مربوط به مثال ۳

نیمة راست صفحه Z در داخل دایره واحد $|Z^*| = 1$ نه در خارج آن نگاشته می شود، زیرا $Z = 1$ دارای تصویر $= g(1)$ در داخل این دایره است. سرانجام، دایره واحد $|Z| = 1$ بر روی محور موهومی Z^* نگاشته می شود، زیرا این دایره عبارت است از $Z = e^{i\phi}$ ، در نتیجه (۷) به صورت یک مقدار موهومی محض درمی آید، یعنی

$$g(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} - 1}{e^{i\phi} + 1} = \frac{e^{\frac{i\phi}{2}} - e^{-\frac{i\phi}{2}}}{e^{\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}}} = \frac{i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

با توجه به صفحه Z^* صفحه W با دورانی به اندازه $\frac{\pi}{2}$ درجه حرکت عقربه های ساعت به دست می آید (ر. ک. (۶)).

با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت که نگاشت $w = \tan z$ نوار $S: -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ را بر روی قرص واحد $|w| = 1$ می‌نگارد، که چهار ربع S نگاشته شده در شکل ۳۶۳ نمایش داده شده است. این نگاشت همدیس و یک به یک است.

تابع هذلولی (هیپربولیک)

تابع هذلولی را می‌توان به طور مستقل یا به کمک تابع مثلثاتی مورد بحث و بررسی قرار داد، مثلاً به ازای $z = \sinh w$ می‌توان نوشت

$$w = \sinh z = -i \sin(iz). \quad (8)$$

برای رسیدن به نقش Z به کمک تبدیل $w = \sinh z$ نخست از دوران $Z = iz$ و سپس ازنگاشت $Z^* = \sin Z$ و به دنبال آن مجددآز دوران $w = -iZ^*$ استفاده می‌کنیم تا w حاصل شود. به همین طریق برای تبدیل کسینوس هیپربولیک داریم

$$w = \cosh z = \cos(iz). \quad (9)$$

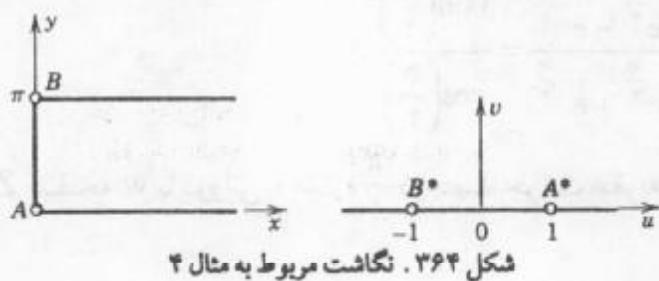
این تبدیل نیز از روی یک تبدیل کسینوسی حاصل می‌شود.

مثال ۴. نگاشت یک نوار نیمه نامتناهی بر روی یک نیم صفحه

تصویر نوار نیمه نامتناهی $0 \leq y \leq \pi$ ، $x \geq 0$ (شکل ۳۹۴) را تحت نگاشت $w = \cosh z$ بیابید. حل. قرار می‌دهیم $w = u + iv$. نظر به اینکه $\cosh 0 = 1$ ، نقطه $0 = z$ بر روی $1 = w$ نگاشته می‌شود. به ازای عدد حقیقی $z = x \geq 0$ $\cosh z$ حقيقة است و با افزایش x ، به طور یکتا از ۱ صعود می‌کند. بنابراین محور x مثبت بر روی قسمت $u \geq 1$ از محور u نگاشته می‌شود.

به ازای مقدار موهومی محض y داریم $cosh iy = \cos y$. در نتیجه کران چپ نوار بر روی قطعه $-1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می‌شود، ضمن آنکه نقطه $i\pi = z$ متناظر است با $w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1$.

روی کران فوقانی نوار، $y = \pi$ ، و چون $\cos \pi = -1$ ، $\sin \pi = 0$ ، نتیجه می‌شود که این قسمت کران بر روی قسمت $1 \leq u \leq \infty$ از محور u نگاشته می‌شود. بنابراین کران نوار بر روی محور u نگاشته



شکل ۳۹۴. نگاشت مریوط به مثال ۴

می شود. بررسی این مطلب که داخل نوار بر روی نیمة فوکانی صفحه w نگاشته می شود و نگاشت یک به یک است کار دشواری نیست.

مسائل بخش ۴.۱۶

تصاویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = e^z$ بباید و نمودارشان رارسم کنید.

$$\frac{\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{4}, \quad -1 < x < 1.2 \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.1$$

$$0 < y < \pi, \quad -2 < x < -1.4 \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < x < 2.3$$

تصاویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \sin z$ بباید و نمودار آنها رارسم کنید.

$$0 < y < \frac{\pi}{6}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}.6 \quad 0 < y < 2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.5$$

$$0 < y < 3, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.8 \quad 1 < y < 2, \quad 0 < x < 2\pi.7$$

۹. تابع تحلیلی ای که ناحیه محصور به محورهای مثبت x و y و هذلولی $\frac{\pi}{2} = xy$ ، واقع در ربع اول، را بر روی نیم صفحه فوکانی می نگارد، بباید. راهنمایی. ابتدا ناحیه موردنظر را بر روی یک نوار افقی بنگارید.

۱۰. نقش خطوط $\frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{3}$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ بباید و آنها رارسم کنید.

۱۱. تمام نقاطی که نگاشت $w = \sin z$ در آنها همدیسی نیست را تعیین کنید.

۱۲. تبدیل $w = \cosh z$ را بر حسب تبدیل $z = \sin w$ و دوران و انتقال بیان کنید.

۱۳. نقاطی که نگاشت $w = \cosh z$ در آنها همدیسی نیست را مشخص کنید.

۱۴. تصاویر خطوط ثابت $= y$ را تحت نگاشت $w = \cos z$ بباید.

تصاویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \cos z$ بباید و نمودار آنها رارسم کنید.

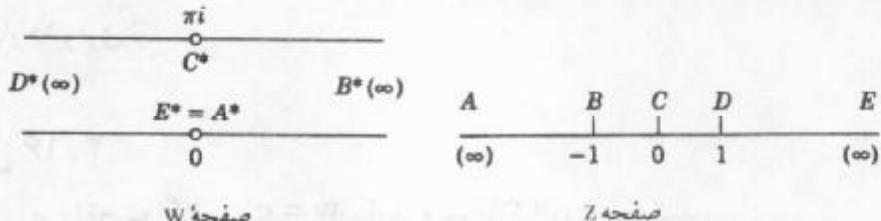
$$0 < y < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.16 \quad y < 0, \quad 0 < x < \pi.15$$

$$\frac{1}{2} < y < 1, \quad 0 < x < 2\pi.18 \quad y < 0, \quad \pi < x < 2\pi.17$$

۱۹. نقش ناحیه $3 \leq |z| \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ را تحت نگاشت $w = \ln z$ بباید.

۲۰. نشان دهید که $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$ نیم صفحه فوکانی را به ترتیبی که در شکل ۳۶۵ نشان داده شده

است بر روی نوار افقی $\text{Im } w \leq \pi^0$ می نگارد.



شکل ۲۰. ۳۶۵. مساله

۱۶. ۵. سطوح ریمان

سطح ریمان سطوحی هستند که بر آن روابط چند مقداری، همانند $w = \ln z$ یا $w = \sqrt{z}$ ، تک مقداری می شوند. یعنی توابعی که در این جهت مفید قرار می گیرند، مربوط می شوند. در اینجا به بررسی این توابع به «طریقه هندسی» بر حسب نگاشتها بر روی کره ریمان می پردازیم چون به کمک آن تفہیم مطالب موردنظر بهتر صورت می پذیرد.

برای شروع نگاشت مفروضی را که با

$$w = u + iv = z' \quad (1)$$

تعريف می شود در نظر می گیریم (بخش ۹. ۱۲). این نگاشت، به جز در $z = 0$ که در این نقطه مشتق آن $w' = 2z$ ، برابر صفر است، همدیس است. زوایا تحت این نگاشت در $z = 0$ دو برابر می شوند. نیمه راست صفحه z (که شامل قسمت مثبت محور z می باشد) بر روی تمامی صفحه w که در طول نیمه منفی محور u بریده شده است نگاشته می شود، این نگاشت یک به یک است. همینطور، نیمه چپ صفحه z (که شامل قسمت منفی محور z می باشد) به طور یک به یک بر روی صفحه w ای که بریده شده است نگاشته می شود.

بدیهی است که این نگاشت در تمامی صفحه z یک به یک نیست، زیرا هر نقطه $w \neq 0$ دقیقاً با دو نقطه از z متناظر است، در حقیقت، هرگاه z_1 یکی از این نقاط باشد آنگاه نقطه دیگر $-z_1$ است. به عنوان مثال نقاط i و $-i$ دارای یک تصویر $w = -1$ می باشند و درنتیجه صفحه w توسط تصویر صفحه z با نگاشت $z = w$ «دوبار پوشانده» می شود. گوئیم که تمامی صفحه z بر روی صفحه w دو لایه نگاشته می شود. لازم است تصوری را که از این نگاشت داریم با توصیف زیر تقویت نمود.

این طور تصور کنیم که یک نمونه از صفحه w ای بریده شده روی نمونه دیگری از این صفحه قرار گیرد به قسمی که ورقه بالای تصویر نیمه راست صفحه z و ورقه زیرین تصویر نیمه چپ صفحه z باشد؛ این نیم صفحه ها را به ترتیب با R و L نمایش می دهیم. وقتی که از R به L می رویم، نقطه

تصویر متناظر باید از ورقه بالایی به ورقه زیرین برود. بدین جهت دو ورقه را در طول قسمت بریده شده، یعنی در طول محور حقیقی منفی، به طور ضربدری به هم وصل می کنیم (این تنها یک تصویر خیالی است، زیرا عبور دو صفحه مادی از داخل هم هرگز بطور کامل امکان پذیر نیست). دومباده به هم متصل هستند. شکلی که به این ترتیب حاصل می شود به سطح ریمان موسوم می باشد. روی این سطح هر نقطه $w \neq w^0$ دوبار، بر روی هم، و مبداء فقط یک بار ظاهر می شود. اکنون تابع $w = z^{\frac{1}{n}}$ تمامی صفحه z را به طور یک به یک بر روی سطح ریمان می نگارد، و این نگاشت جز در مورد «نقطه پیچشی» یا نقطه شاخه ای در w^0 (شکل ۳۶۶) هم دیس است. هر نقطه شاخه ای از این نوع که دو ورقه را به هم وصل می کند، نقطه شاخه ای از مرتبه اول نامیده می شود. (در حالت کلیتر، هر نقطه شاخه ای که ۱۱ ورقه را به هم وصل کند، نقطه شاخه ای از مرتبه $1 - n$ نامیده می شود.)



شکل ۳۶۶. سطح ریمان $z^{\frac{1}{n}}$

اکنون رابطه دومقداری

$$w = \sqrt[n]{z} \quad (2)$$

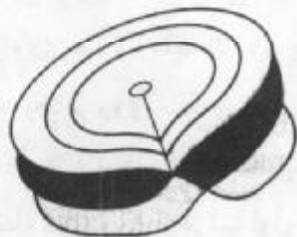
را در نظر می گیریم (بخش ۲۰.۱۲). به ازای هر $z^0 \neq 0$ دومقدار w نظیر می شود، که یکی از آنها مقدار اصلی است. چنانچه جای صفحه z را با سطح ریمان دو ورقه ای، که هم اکنون بررسی شد، عوض کنیم در این صورت هر عدد مختلف $z^0 \neq 0$ با دونقطه از سطح، که بر روی هم قرار دارند، نمایش داده می شود. فرض کنیم یکی از این نقاط - مثلاً، نقطه ای که در ورقه فوقانی واقع شده است - نظیر مقدار اصلی و نقطه دوم نظیر مقدار دیگر باشد آنگاه (۲) یک مقدار می شود، یعنی (۲) تابعی از نقاط سطح ریمان است و به هر حرکت پیوسته z در سطح حرکتی پیوسته از نقطه متناظر آن در صفحه w نظیر می شود. تابع ورقه متناظر بامقدار اصلی را بر روی نمایه راست صفحه w و ورقه دیگر را بر روی نمایه چپ صفحه w می نگارد. اکنون چند مثال مهم دیگر را مورد بررسی قرار می دهیم.

مثال ۱. سطح ریمان $\sqrt[n]{z}$

در مورد رابطه

$$w = \sqrt[n]{z}; \quad n = 3, 4, \dots \quad (3)$$

نیاز به سطح ریمانی با n ورقه داریم که دارای یک نقطه شاخه ای از مرتبه $1 - n = z^0$ باشد. یکی از این ورقه ها متناظر بامقدار اصلی است و $1 - n$ ورقه دیگر با $1 - n$ مقدار دیگر متناظر می باشند. شکل ۳۶۷ سطح ریمان $\sqrt[n]{z}$ را نشان می دهد.



شکل ۳۶۷. سطح ریمان $\sqrt[n]{z}$

مثال ۲. سطح ریمان لگاریتم طبیعی به ازای هر $z \neq 0$ رابطه

$$w = \ln z = \operatorname{Ln} z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, z \neq 0) \quad (4)$$

بینهایت مقداری است. از این رو (۴) یک تابع بر سطح ریمانی که مرکب از تعدادی نامتناهی ورقه است تعریف می کند. تابع $w = \operatorname{Ln} z$ با یکی از این ورقه ها متناظر می باشد. بر این ورقه θ آرگومان z ، در فاصله $\pi \leq \theta < -\pi$ تغییر می کند (ر. ک. بخش ۱۲. ۸). ورقه در امتداد منتهی محور حقیقی بریده شده است و چاک لبه بالایی به لبه پایینی ورقه دیگری، که متناظر با فاصله $3\pi \leq \theta < \pi$ ، یعنی متناظر با تابع $w = \operatorname{Ln} z + 2\pi i$ است وصل شده است. به این روش هر مقدار n که در (۴) بگذاریم نظیر تنها یکی از این بینهایت ورقه می شود. تابع $w = \ln z$ ورقه مربوط به خود را بر روی نوار افقی $\pi \leq v < -\pi$ در صفحه W می نگارد. ورقه بعدی بر روی نوار مجاور یعنی $3\pi \leq v < \pi$ نگاشته می شود و همین طور الى آخر. در نتیجه تابع $w = \ln z$ تمام ورقه های سطح ریمان نظیر خود را بر روی همه صفحه W می نگارد، تناظر بین نقاط $z \neq 0$ از سطح ریمان و نقاط صفحه W یک به یک می باشد.

مثال ۳. نگاشت $w = z + z^{-1}$. هو ابر

نگاشت تعریف شده با

$$w = z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \quad (5)$$

را که در آنرودینامیک مهم می باشد در نظر می گیریم. چون این تابع دارای مشتقی به صورت زیر می باشد

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2},$$

نگاشت آن به جز در نقاط $z = 1$ و $z = -1$ همدیس است؛ این نقاط به ترتیب با $w = 2$ و $w = -2$ نگاشت آن به

متناظر هستند. از (۵) می‌یابیم

$$z = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1} = \frac{w}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(w+2)(w-2)}. \quad (6)$$

در نتیجه، نقاط $w=2$ و $w=-2$ نقاط شاخه‌ای مرتبه اول $z = z(w)$ می‌باشند. برای هر مقدار $w \neq -2$ دو مقدار نظیر z وجود دارد. در نتیجه، (۵) صفحه Z را بر روی یک سطح ریمان دو ورقه‌ای می‌نگارد، که این دو ورقه به طور ضربدری از $w=2$ تا $w=-2$ (شکل ۳۶۸) به هم مرتبط می‌شوند، و این نگاشت یک به یک است. با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ تصویر منحنی‌های ثابت $\theta = \text{ثابت}$ را مشخص می‌کنیم. از (۵) به دست می‌آوریم

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta.$$

با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی طرفین معادله بالا داریم

$$u = (r + \frac{1}{r})\cos\theta, \quad v = (r - \frac{1}{r})\sin\theta. \quad (7)$$

از اینجا می‌یابیم

$$b = \left| r - \frac{1}{r} \right| \quad \text{که در آن } \frac{u^2}{r^2} + \frac{v^2}{r^2} = 1$$

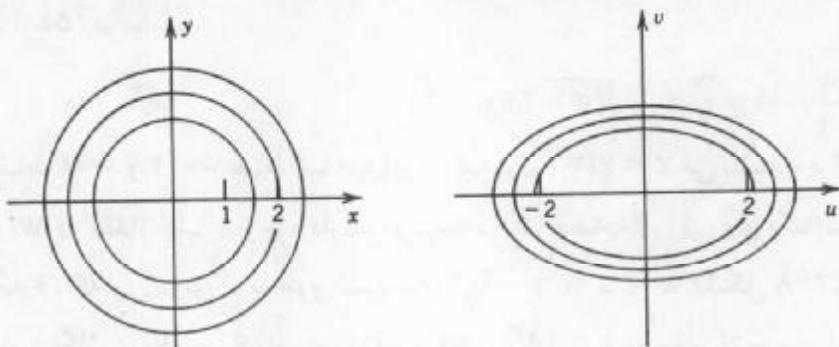
در نتیجه دوایر ثابت r بر روی بیضی‌های نگاشته می‌شوند که محورهای اصلی آنها بر محورهای u و v منطبق و طول آنها به ترتیب $2a$ و $2b$ باشند. نظر به اینکه $a^2 - b^2 = 4$ مستقل از r می‌باشد، این بیضیها هم کانون هستند و کانونهای آنها نقاط $w=2$ و $w=-2$ می‌باشند. دایره واحد $r=1$ بر روی پاره خطی که به $w=2$ و $w=-2$ محدود است نگاشته می‌شود. به ازای هر $r \neq 1$ دو دایره‌ای که شعاعهایشان $\frac{1}{r}$ است بر روی یک بیضی در صفحه W ، که متناظر با دو ورقه از سطح ریمان است، نگاشته می‌شوند. در نتیجه، داخل دایره واحد $|z|=1$ با یکی از این ورقه‌ها و خارج آن با ورقه دیگر متناظر می‌باشد.

به علاوه، با توجه به (۷) به دست می‌آوریم

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 4. \quad (8)$$

از این رو خطوط ثابت θ بر روی هذلولی‌هایی که مسیرهای متعامد این بیضیها می‌باشند نگاشته می‌شوند. محور حقیقی (یعنی شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$) بر روی قسمتی از محور حقیقی از $w=2$ از طریق ∞ تا -2 نگاشته می‌شود. محور u بر روی محور v نگاشته می‌شود. هر قسمت دیگر از شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ بر روی دو شاخه همان هذلولی نگاشته می‌شود.

ناحیه خارجی یکی از بیضیهای فوق عاری از نقطه شاخه‌ای است و با داخل یا خارج دایره متناظر در صفحه Z ، بسته به ورقه‌ای از سطح ریمان که ناحیه به آن تعلق دارد، متناظر است. به

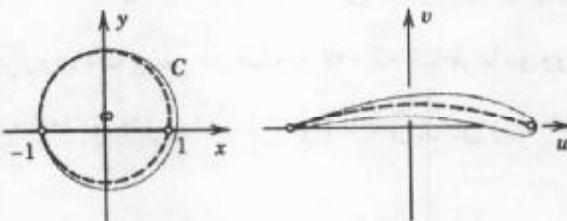


شکل ۳۶۸. مربوط به مثال ۳

خصوص ، تمامی صفحه w همانطوری که قبلًاً متذکر شدیم با داخل یا خارج دایره واحد $|z| = 1$ متناظر است.

نگاشت (۵) دایر مناسب را به هوابرها بی انتقال می دهد که لب عقبی تیز دارند و زاویه داخلی آنها صفر است؛ این هوابرها به هوابرها ژوکوفسکی^۳ موسوم می باشند. چون هوابر دارای لب تیزی است، واضح است دایری که نگاشته می شود باید از یکی از دو نقطه $z = \pm 1$ که نگاشت در آنها همدیسی است بگذرد.

در شکل ۳۶۹ دایر بزرگتری که از -1 - می گذرد بر روی کانتوری از هوابر و دایر با خط چین مشخص شده (که دایر واحد نیست!) بر روی خط چین واقع در درون یک پروفیل ، نگاشته می شود. تفصیل این موضوع در مرجع [D8] [ضمیمه ۱] آمده است.



شکل ۳۶۹. هوابر ژوکوفسکی

بدین طریق به پایان فصل ۱۶ می رسیم . کاربردهای بیشتری از نگاشتهای همدیس در فصل ۱۷ ارائه می شوند.

مسائل بخش ۵.۱۶

۱. $w = \sqrt{z}$ را در نظر بگیرید . مسیر w ، تصویر نقطه z ، را که از وضع اولیه $z = 1$ شروع کرده دوبار

۳- نیکلای گورویچ ژوکوفسکی NIKOLAI JEGOROVICH JOUKOWSKI (۱۸۴۷ - ۱۹۲۱) ، ریاضیدان روس.

روی دایره واحد دور می زند بباید.

۲. نشان دهید که سطح ریمان $\sqrt{z} = w$ مرکب از سه ورقه است و در نقطه $z = 0$ دارای نقطه شاخه‌ای مرتبه دوم است. مسیر w ، تصویر نقطه z را که از وضع اولیه $z = 1$ شروع کرده سه بار روی دایره واحد دور می زند پیدا کنید.

۳. نموداری مشابه شکل ۳۶۶ از سطح ریمان \sqrt{z} رسم کنید.

۴. سطوح ریمان $\sqrt[3]{z} = w$ و $\sqrt[4]{z} = w$ را به طریقی مشابه با مساله ۲ بررسی کنید.

۵. مسیر تصویر نقطه z را تحت نگاشت $w = \ln z$ وقتی که z چندین بار روی دایره واحد درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دور می زند تعیین کنید.

۶. نشان دهید که سطح ریمان $w = \sqrt{(z-1)(z-2)}$ که در $z = 1$ و $z = 2$ دارای نقاط شاخه‌ای است مرکب است از دو ورقه که می‌توان آنها را در طول قطعه خطی که از ۱ تا ۲ ادامه دارد برید و به طور ضربدری به هم وصل کرد. راهنمایی. مختصات قطبی $z-1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z-2 = r_2 e^{i\theta_2}$ را به کار ببرید.

۷. نقاط شاخه‌ای و تعداد ورقه‌های سطح ریمان $1 - \sqrt{z^2} = w$ را بباید.

۸. نشان دهید که سطح ریمان $\sqrt[4]{(1-z^2)(4-z^2)}$ دارای چهار نقطه شاخه‌ای است و دو ورقه دارد که می‌توان آنها را در طول قطعات $-2 \leq x \leq 2$ و $1 \leq x \leq -1$ از محور x به طور ضربدری به هم وصل کرد.

مکان نقاط شاخه‌ای و تعداد ورقه‌های سطح ریمان توابع زیر را تعیین کنید.

$$\sqrt[3]{z-a} . 11 \quad \sqrt{i+z} . 10 \quad i + \sqrt{z} . 9$$

$$3 + 2z - \sqrt{2z} . 14 \quad \sqrt{z^4 - z} . 13 \quad \sqrt{3z+4} . 12$$

$$3 + \sqrt[5]{2z+i} . 17 \quad \sqrt[4]{z-16} . 16 \quad \ln(z+1) . 15$$

$$\sqrt{e^z} . 20 \quad e^{\sqrt{z}} . 19 \quad \ln(4z-3i) . 18$$

پرسشها و مسائل دوره‌ای فصل ۱۶

۱. زاویه دومنحنی جهتدار متقطع چگونه تعریف می‌شود و معنی جمله «نگاشتی همدیس است» چیست؟

۲. در چه نقاطی نگاشت $w = f(z)$ با یک تابع تحلیلی همدیس نیست؟ مثال بیاورید.

۳. هرگاه $f'(z_0) = 0$ ، $f''(z_0) \neq 0$ و $f'''(z_0) = 0$ ، آنگاه چه اتفاقی برای زوایا در z_0 تحت نگاشت $w = f(z)$ رخ می‌دهد؟

۴. تبدیل کسری خطی چیست؟ چرا این نگاشتها از نقطه نظر عملی بسیار مورد توجه هستند؟

۵. چرا نیاز داریم که ضرایب تبدیل کسری خطی در نامساوی $ad - bc \neq 0$ صدق کنند؟
۶. صفحه مختلط وسعت یافته چیست، و چرا این مطلب در این فصل آمده است؟
۷. نقطه ثابت یک نگاشت چیست؟ مثالهایی از نگاشتها با توابع تحلیلی بیاورید که دارای هیچ نقطه ثابت، دقیقاً یک نقطه ثابت، تعداد نامتناهی نقطه ثابت باشند.
۸. سطح ریمان چیست، و به چه منظوری به کار گرفته می شود؟
۹. سطح ریمان $\sqrt{z} = w$ شامل چند ورقه است؟ در اینجا منظور از نقطه شاخه ای چیست؟
۱۰. چرانگاشت $\frac{1}{z} = w$ از نقطه نظر علمی با اهمیت است؟ چه تعداد ورقه های سطح ریمان معکوس این نگاشت دارا می باشد؟

تصاویر منحنیها و نواحی زیر را تحت نگاشت $w = u + iv = z^2$ باید و نمودار آنها را رسم کنید.

$$|\arg z| < \frac{\pi}{\lambda}, |z| = 2/5.13 \quad x = -1, 1, 2.12 \quad y = -1, 1.11$$

$$\operatorname{Im} z > 0.16 \quad y = \frac{x}{2}.15 \quad xy = -4.14$$

$$\frac{1}{2} < x < 1.19 \quad 0 < y < 2.18 \quad \frac{\pi}{\lambda} < \arg z \leq \frac{\pi}{4}.17$$

هر یک از منحنیها و بانواحی زیر را تحت نگاشت $\frac{1}{z} = w$ باید و آنها را رسم کنید.

$$|z| < 1, y > 0, x < 0.22 \quad |\arg z| < \frac{\pi}{\lambda}.21 \quad y < 0, |z| < \frac{1}{2}.20$$

$$x = -1.25 \quad y = 1.24 \quad \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.23$$

برای هر یک از نگاشتها $W = f(z)$ زیر نقاطی را باید که در آنها همدیس نباشند.

$$\cosh 2z.28 \quad 3z^3 + 5z^7.27 \quad \cos \pi z^r.26$$

$$\sin z + \cos z.31 \quad z + \frac{1}{z} (z \neq 0).30 \quad \exp(z^r + z).29$$

مطلوب است تبدیل کسری خطی ای که به ترتیب

۳۲. $-1, 1, 1, -1$ ، و زرا بروی $1, 1, 1$ ، و -1 می نگارد.

۳۳. $1, 0, 1, 1, 2$ را بروی $0, i, 1, 2i$ می نگارد.

۳۴. $i, 0, 1+i, 1+i, \infty$ را بروی $1, 1+i, 1+i, \infty$ می نگارد.

۳۵. $0, 1, 0, \infty$ را بروی $1, 0, 1, \infty$ می نگارد.

۳۶. $1, 0, 0, \infty, \infty, 0, -2i$ را بروی $1-i, 0, 1-i$ می نگارد.

۳۷. $1, i, 5, 5i, \infty$ را بروی $1, i, 5, 5i, \infty$ می نگارد.

۳۸. $z = -1 + 2i$ را بروی $\arg z = \frac{\pi}{2}$ می نگارد.

۳۹. $z = 1 + 5i$ را بروی $\arg z = \pi$ می نگارد.

۴۰. $z = i + 5i$ را بروی $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ می نگارد.

مطلوب است تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ که

۴۱. ناحیه $\arg z < \frac{\pi}{3}$ را بروی ناحیه $\arg w < \frac{\pi}{2}$ بنگارد.

۴۲. نیم صفحه $\arg z \geq \frac{\pi}{2}$ را بروی ناحیه $\arg w \geq \frac{\pi}{2}$ طوری بنگارد که در $\arg w$ دارای تصویر $\arg z + \pi$ باشد.

۴۳. نیم صفحه راست را بروی نیم صفحه فوقانی بنگارد.

۴۴. داخل دایره واحد $|z| = 1$ را بروی خارج دایره $|w| = 0$ بنگارد.

۴۵. نوار نامتناهی $\arg z = \frac{\pi}{3}$ را بروی نیم صفحه فوقانی $\arg w = \frac{\pi}{6}$ بنگارد.

۴۶. نیم قرص $1 < |z| < \infty$ را بروی خارج دایره واحد $|w| = 0$ بنگارد.

۴۷. ناحیه $\arg xy < \arg k$, $y > 0$ را بروی نوار $\arg w < \arg v < 0$ بنگارد.

هرگاه $w = f(z)$ برابر یکی از توابع زیر باشد، آنگاه نقاط ثابت آنها را باید.

$$\frac{2iz-1}{z+2i} \cdot 50 \quad \frac{3z+2}{z-1} \cdot 49 \quad z^2 + z - 81 \cdot 48$$

خلاصه فصل ۱۶

نگاشت همدیس

تابع مختلط $w = f(z)$ نگاشتی از دامنه تعریف خود واقع در صفحه Z بر روی مقادیر $f(z)$ در صفحه W به دست می دهد. هرگاه $f(z)$ تحلیلی باشد، این نگاشت همدیسی است، یعنی حفظ کننده زاویه است: زاویه بین تصاویر هر دو منحنی متقاطع، چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت همان زاویه بین دو منحنی را تشکیل می دهد (بخش ۱.۱۶).

برای خواص نگاشتهای e^z , $\sin z$, $\cos z$ وغیره به بخش‌های ۱۶.۹ و ۱۶.۱۲ مراجعه شود.

تبديلات کسری خطی، همچنین به تبدیلات موبیوس موسوم می باشند (ر. ک. بخش‌های

(۳.۱۶، ۲.۱۶)

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (1)$$

این تبدیل صفحه مختلط توسعه یافته (بخش ۲.۱۶) را به طور همدیسی بر روی خودش می نگارد. این نگاشتهای چگونگی نگاشت نیم صفحه ها بر روی نیم صفحه ها یا فرصلها، و فرصلها بر روی فرصلها یا نیم

صفحه ها را پاسخ می دهد. تصاویر سه نقطه توسط (۱) به طور یکتا مشخص می شود (بخش ۳. ۱۶).
سطوح ریمان (بخش ۱۶. ۵) از چند ورقه مرتبط شده در نقاط بحرانی که به نقاط شاخه ای
معروف می باشند، تشکیل یافته است. روی این سطوح، روابط چند مقداری به روابط تک مقداری
تبديل می شوند. این سطوح برای توجیه چنین توابعی مفید واقع می شوند. به عنوان مثال
برای $w = \sqrt{z}$ به دو ورقه نیاز داریم زیرا این رابطه دومقداری است. و برای $w = \ln z$ نیاز به تعدادی
نامتناهی ورقه داریم زیرا این رابطه به طور نامتناهی چند مقداری است (ر. ک. بخش ۸. ۱۲).

فصل ۱۷

کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل

معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ یکی از مهمترین معادلات بامستق جزئی در ریاضیات مهندسی می‌باشد، زیرا این معادله در مباحث مربوط به میدانهای گرانشی (بخش ۹.۸) میدانهای الکترواستاتیکی (بخش ۱۱.۱۱)، انتقال گرما در حالت پایدار (بخش‌های ۱۱.۸، ۹.۵) جریان سیال تراکم ناپذیر، وغیره ظاهر می‌شود. نظریه جوابهای معادله لاپلاس به نظریه پتانسیل موسوم می‌باشد و جوابهایی از معادله لاپلاس که دارای مشتق دوم پیوسته داشته باشند به توابع همساز موسوم می‌باشند. در «حالت دو بعدی» وقتی که Φ فقط به دو مولفه کارتزین x و y بستگی دارد، معادله لاپلاس به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0. \quad (1)$$

چنانکه می‌دانیم جوابهای این معادله ارتباط نزدیکی با توابع تحلیلی مختلط دارند (ر. ک. بخش ۱۲.۵). در این بخش این ارتباط و نتایج آن را با تفصیل بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم و بر حسب مثالهای عملی ناشی از الکترواستاتیک (بخش‌های ۱.۱۷، ۲.۱۷)، انتقال گرما (بخش ۳.۱۷)، و هیدرودینامیک (بخش ۴.۱۷) موضوع را توضیح می‌دهیم. در بیشتر موارد این موضوع در حل مساله مقدار کرانه‌ای، که به مسائل دیریکله (یا اولین مساله مقدار کرانه‌ای) موسوم می‌باشند، برای معادله لاپلاس موردنیاز می‌باشند، یعنی، در دامنه مفروض D جوابی برای معادله لاپلاس باید بیاییم که بر کران D مقادیر مفروضی را اختیار کند. چنین مساله‌ای را اغلب می‌توان با روش نگاشت هم‌دیسی (بخش ۲.۱۷)، یعنی، توسط نگاشتی D را به طور هم‌دیسی بر روی ناحیه ساده‌تر (قرص، نیم صفحه، وغیره) برای ناحیه‌ای که جواب معلوم باشد یا بتوان از فرمولی، همانند فرمول انتگرال پواسن

۱- در حالت سه بعدی چنین ارتباط نزدیکی وجود ندارد.
نکه. ابتدا Φ و سپس $i\Psi + \Phi$ را می‌نویسیم چرا که u و v در نگاشت هم‌دیسی در بخش ۲.۱۷ مورد نیاز می‌باشند.

(بخش ۱۷.۵) به دست آورد، حل کرد. برای مسائل پامقدار کرانه‌ای آمیخته وضعیت مشابهی وجود دارد.

در بخش آخر (بخش ۱۷.۶) چند خواص عمومی توابع همساز حاصل از تابع بر روی توابع تحلیلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
پیشناز این فصل : فصلهای ۱۲، ۱۳، و ۱۶.
مراجع : ضمیمه ۱، قسمت D.
جواب مسائل : ضمیمه ۲.

۱۷.۱ میدانهای الکترواستاتیک

نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات باردار از قانون کولن پیروی می‌کند. این نیرو برابر گرادیان تابعی مانند Φ ، موسوم به پتانسیل الکترواستاتیک می‌باشد. در نقاطی که بار وجود ندارد، Φ جواب معادله لاپلاس

$$\nabla' \Phi = 0.$$

است. سطوح ثابت $= \Phi$ به سطوح هم پتانسیل موسوم می‌باشد. در هر نقطه P، گرادیان Φ به سطح ثابت $= \Phi$ که از آن نقطه عبور می‌کند عمود است؛ یعنی نیروی الکتریکی امتدادی متعمد با سطح هم پتانسیل دارد. (ر. ک. بخشهای ۹.۸ و ۱۱.۱۱.)

مسائل مورد بحث در این فصل در حالت دو بعدی می‌باشند، زیرا آنها در ارتباط با سیستم‌های فیزیکی ای هستند که در فضای سه بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند، اما چنین توابع پتانسیل Φ مستقل از یکی از مولفه‌های فضا هستند، درنتیجه Φ تنها به دو مولفه، که موسوم به x و y می‌باشند، وابسته است. با توجه به این مفروضات معادله لاپلاس به صورت زیر می‌باشد

$$\nabla' \Phi = \frac{\partial' \Phi}{\partial x'} + \frac{\partial' \Phi}{\partial y'} = 0. \quad (1)$$

اکنون سطوح هم پتانسیل به صورت خطوط هم پتانسیل (منحنی‌های هم پتانسیل) در صفحه xy ظاهر می‌شوند.

مثال ۱. پتانسیل بین دو صفحه موازی

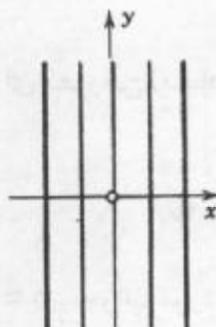
پتانسیل Φ از میدان بین دو صفحه هادی موازی نامتناهی (شکل ۳۷۰) را که به ترتیب در پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 نگهداشت شده اند بیابید.

حل. از شکل صفحات نتیجه می‌شود که Φ تنها به x وابسته است، و معادله لاپلاس به صورت $\Phi'' = 0$ در می‌آید، با دوبار انتگرالگیری به دست می‌آوریم $\Phi = ax + b$. که در آن ثابت‌های

a و b به کمک مقادیر کرانه‌ای Φ در روی صفحات تعیین می‌گردند. به عنوان مثال، اگر صفحات با $x = -1$ و $x = 1$ متناظر باشند، جواب عبارت است از

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(\Phi_r - \Phi_l)x + \frac{1}{2}(\Phi_r + \Phi_l).$$

سطوح هم پتانسیل صفحات موازی هستند.



شکل ۳۷۰. پتانسیل در مثال ۱

مثال ۲. پتانسیل بین استوانه‌های هم محور

پتانسیل Φ بین دو استوانه‌های هم محور که از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد (شکل ۳۷۱) و به ترتیب در پتانسیلهای Φ_l و Φ_r قرار گرفته اند را بایابید.

حل. در اینجا به دلیل تقارن، Φ فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد و معادله لاپلاس به صورت زیر در می‌آید [ر. ک. (۴) بخش ۱۱. ۹]

$$r\Phi'' + \Phi' = 0.$$

با جداسازی متغیرها و انگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = -\frac{1}{r}, \quad \ln \Phi' = -\ln r + a, \quad \Phi' = \frac{a}{r}, \quad \Phi = a \ln r + b,$$

ثابت‌های a و b با مقادیر مفروض Φ بر روی استوانه‌ها تعیین می‌شوند. گرچه هادی نامتناهی وجود ندارد، اما میدان حاصل از یک هادی ایده‌آل که در اینجا مورد بحث قرار گرفت به طور تقریبی میدان حاصل از یک هادی متناهی طولانی را در مقاطعی که از دو استوانه بسیار دور است به دست می‌دهد.

مثال ۳. پتانسیل در یک ناحیه زاویه‌ای

مطلوب است پتانسیل Φ بین صفحات هادی در شکل ۳۷۲، که در پتانسیلهای Φ_l (صفحه تحتانی) و Φ_r (صفحه بالا) قرار گرفته‌اند، و با یکدیگر زاویه α ، که در آن $0 < \alpha \leq \pi$ می‌سازند (در شکل داریم

$$\therefore \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

حل. $\theta = \operatorname{Arg} z (z = x + iy \neq 0)$ بر روی شعاعهای ثابت $= \theta$ ثابت هستند. θ یک تابع همساز است زیرا قسمت موهومی یک تابع تحلیلی، یعنی $\ln z$ (بخش ۱۲. ۸) هستند. از این رو جواب عبارت است از

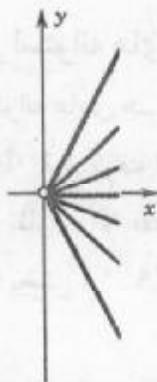
$$\Phi(x, y) = a + b \operatorname{Arg} z$$

که در آن a و b با توجه به دو شرط کرانه‌ای مفروض (مقادیر مفروض بر صفحات) به صورت زیر مشخص می‌شوند

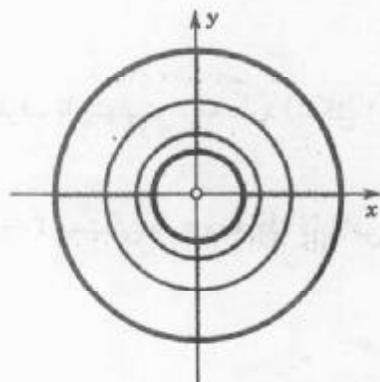
$$a + b\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha\right) = \Phi_1, \quad a + b\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha\right) = \Phi_r.$$

درنتیجه $b = \frac{(\Phi_r - \Phi_1)}{\alpha}$ و $a = \frac{(\Phi_r + \Phi_1)}{2}$. جواب مورد نظر عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi_r + \Phi_1) + \frac{1}{\alpha}(\Phi_r - \Phi_1)\theta, \quad \theta = \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x}.$$



شکل ۳۷۲. پتانسیل در مثال ۳



شکل ۳۷۱. پتانسیل در مثال ۲

پتانسیل مختلط

فرض کنید $\Phi(x, y)$ در دامنه D همساز و $\Psi(x, y)$ تابع همساز مزدوج Φ در D باشد. آنگاه

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

تابع تحلیلی از $iy + x$ می‌باشد. تابع F را پتانسیل مختلط متناظر با پتانسیل حقیقی Φ می‌نامند. از بخش ۱۲. ۵. یادآوری می‌کنیم که به ازای Φ مفروض، یک مزدوج Ψ ، صرفنظر از یک مقدار ثابت

۲- می‌نویسیم $f = u + iv$ ، زیرا $F = \Phi + i\Psi$ را برای نگاشت همدیگری، که در بخش بعد به آن نیاز داریم اختصاص داده ایم.

به طور یکتا تعیین می شوند. بنا بر این می توان آنرا ، بدون هیچ سوء تفاهمی پتانسیل محیط نامید. به کارگیری F دارای دو مزیت تکنیکی و فیزیکی است. به جهت تکنیکی F در ارتباط با روش‌های آنالیز مختلط نسبت به قسمت‌های حقیقی و موهومی بهتر عمل می کند. از نقطه نظر فیزیکی، Ψ دارای معنی است. بنا به هم‌دیسی، منحنی‌های ثابت $= \Psi$ خطوط هم پتانسیل ثابت $= \Phi$ را تحت زاویه قائم قطع می کنند [جز در نقاطی که $(z)'F$ در آنها صفر است]. از این رو آنها با نیروی الکتریکی هم جهت هستند و بدین جهت خطوط نیرو نامیده می شوند. این خطوط مسیرهای ذرات باردار متحرک (الکترونها در یک میکروسکوپ الکترونی) می باشند.

مثال ۴. پتانسیل مختلط

در مثال ۱ ، $\Psi = ay$ یک مزدوج Φ مختلط است. در نتیجه پتانسیل مختلط عبارت است از $F(z) = az + b = ax + b + iay$ و خطوط نیرو خطوط مستقیم ثابت $= y$ هستند که با محور X موازی هستند.

مثال ۵. پتانسیل مختلط

در مثال ۲ داریم $\Psi = a \operatorname{Arg} z$. یک مزدوج مختلط برای آن $\Phi = a \ln r + b = a \ln|z| + b$ است. و پتانسیل مختلط عبارت است از

$$F(z) = a \operatorname{Ln} z + b$$

و خطوط نیرو خطوط مستقیمی هستند که از مبدأ می گذرند. همچنین می توان $F(z)$ را به پتانسیل مختلط یک خط منبع که نقطه برخورد آن با صفحه xy مبداء است تعبیر کرد.

مثال ۶. پتانسیل مختلط

در مثال ۳ با توجه به اینکه $i \operatorname{Ln} z = i \ln|z| - \operatorname{Arg} z$ ، با ضرب طرفین این رابطه در b ، و جمع آن با a به صورت زیر حاصل می شود

$$F(z) = a - ib \operatorname{Ln} z = a + b \operatorname{Arg} z - ib \ln|z|.$$

با توجه به آن مشاهده می شود که خطوط نیرو دوایر متعدد مرکز ثابت $= |z|$ هستند.

انطباق

اغلب می توان پتانسیلهای پیچیده تری را با انطباق پتانسیلها به دست آورد.

مثال ۷. پتانسیل مختلط یک جفت خط منبع

پتانسیل مختلط یک جفت خط منبع هم توان را که بارشان با هم مخالف بوده و در نقاط $c = z$ و $-c = -z$ واقع برمحور حقیقی قرار دارند مشخص کنید.

حل. از مثالهای ۲ و ۵ نتیجه می شود که پتانسیل هر یک از خطهای منبع به ترتیب به صورتهای زیر هستند

$$\Phi_r = -K \ln|z + c| \quad \text{و} \quad \Phi_i = K \ln|z - c|$$

در اینجا ثابت حقیقی K قدرت (میزان بار) می‌باشد. توابع فوق قسمتهای حقیقی پتانسیلهای مختلط $F_r(z) = -K \ln(z + c)$ و $F_i(z) = K \ln(z - c)$

هستند. از این رو پتانسیل مختلط حاصل از ترکیب دو خط منبع عبارت است از $F(z) = F_r(z) + F_i(z) = K[\ln(z - c) - \ln(z + c)]$. (۲)

خطوط هم پتانسیل منحنیهای زیر می‌باشند

$$\text{ثابت} = \frac{|z - c|}{|z + c|}, \quad \Phi = \operatorname{Re} F(z) = K \ln \left| \frac{z - c}{z + c} \right|$$

که متعلم با یک محاسبه مستقیم می‌تواند نشان دهد که این منحنیها داویر هستند. خطوط نیرو عبارت اند از

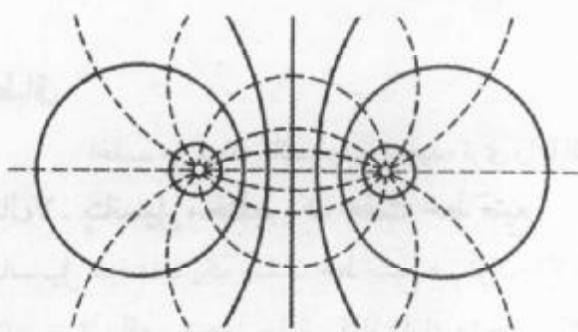
$$\Psi = \operatorname{Im} F(z) = K[\operatorname{Arg}(z - c) - \operatorname{Arg}(z + c)], \quad \text{ثابت} =$$

این فرمول را می‌توان چنین نوشت (شکل ۳۷۳)

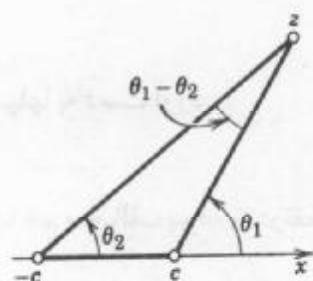
$$\Psi = K(\theta_i - \theta_r) = \text{ثابت}.$$

حال $\theta_i - \theta_r$ زاویه بین پاره خط‌هایی است که z را به c و $-c$ وصل می‌کند (شکل ۳۷۳). از این رو خطوط نیرو منحنیهای هستند که در طول هر یک از آنها پاره خط $c \leq x \leq -c$ تحت زاویه ثابت ظاهر می‌شود. این منحنیها، همان طوری که از هندسه مقدماتی می‌دانیم تمام قوسهای مستديری هستند که بر روی S ساخته می‌شوند. بنابراین خطوط نیرو داویر می‌باشند. در شکل ۳۷۴ برخی از این نتایج با برخی خطوط هم پتانسیل نمایش داده شده اند.

در مجموع برای تعبیر پتانسیل دو خط منبع، این پتانسیل نیز می‌تواند به پتانسیل بین دو استوانه مستدير که دارای محورهای موازی ولی مختلف، یا به پتانسیل بین دو استوانه هم تراز که یکی در خارج دیگری قرار دارد، یا به پتانسیل بین یک استوانه و یک جدار مسطح تصور نمود. توصیف این مطالب، در شکل ۳۷۴ آمده است.



شکل ۳۷۴. خطوط هم پتانسیل و خطوط نیرو در مثال ۷



شکل ۳۷۳. آرگومانها در مثال ۷

ایدهٔ پتانسیل مختلط، همان طوری که توصیف شد، کلیدی برای نزدیکی نظریهٔ پتانسیل با آنالیز مختلط است و در جریان حرارت و جریان سیال به کار می‌رود.

مسائل بخش ۱۷

۱. سطوح هم‌پتانسیل بین دو صفحهٔ موازی در $-3 = x = 3$ که به ترتیب دارای پتانسیلهای 140 و 260 ولت می‌باشند را بایابید و رسم کنید.

۲. پتانسیل مختلط در مسالهٔ ۱ را پیدا کنید.

۳. سطوح هم‌پتانسیل بین دو صفحهٔ موازی در $0 = y = d$ که به ترتیب دارای پتانسیلهای $(ولت ۲۰۰۰) = ۲۰ kV$ و $U_1 = ۰$ ولت می‌باشند را بایابید و آنها را رسم کنید.

۴. پتانسیل Φ و پتانسیل مختلط F بین صفحات $x = y = 0$ که به ترتیب دارای پتانسیلهای 100 و 100 ولت می‌باشند را بایابید.

۵. پتانسیل در ربع اول از صفحه xy بین محورها (دارای پتانسیل 110 ولت) و هذلولی 1 (دارای پتانسیل 60 ولت) را بایابید.

مطلوب است پتانسیل Φ بین دو استوانهٔ هم‌محور نامتناهی که شعاعهای آنها $r_1 < r_2$ بوده و به ترتیب دارای پتانسیلهای U_1 و U_2 می‌باشند، که در آن

$$U_2 = 1000 \text{ V}, U_1 = 100 \text{ V}, r_2 = 10, r_1 = 1.6$$

$$U_2 = 110 \text{ V}, U_1 = -110 \text{ V}, r_2 = 2, r_1 = 0.5, 7$$

$$U_2 = 2 \text{ kV}, U_1 = 1 \text{ kV}, r_2 = 8, r_1 = 2.8$$

$$U_2 = 0 \text{ V}, U_1 = 200 \text{ V}, r_2 = 4, r_1 = 1.9$$

$$U_2 = 150 \text{ V}, U_1 = 50 \text{ V}, r_2 = 10, r_1 = 0.1, 10$$

مطلوب است خطوط هم‌پتانسیل از پتانسیل مختلط $F(z)$ در هریک از موارد زیر. این خطوط را به طور نموداری نشان دهید.

$$F(z) = z^r. 13$$

$$12$$

$$F(z) = -iz^r. 12$$

$$F(z) = (1+2i)z. 11$$

$$F(z) = iLnz. 16$$

$$F(z) = \frac{1}{z}. 15$$

$$F(z) = \frac{1+i}{z}. 14$$

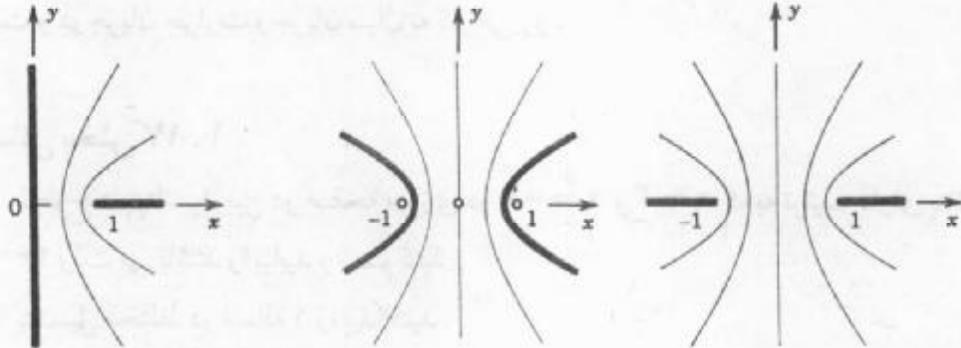
۱۷. پتانسیل دو خط منبع $a = -a$ و $z = z$ که بارشان یکسان است را بایابید.

۱۸. نزدیکی هر دو خط منبع واقع در شکل ۳۷۴ دوایر ثابت $= \Phi$ تقریباً متحده مرکز هستند. آیا این مطلب به طور فیزیکی قابل درک است؟

۱۹. نشان دهید که خطوط هم‌پتانسیل در مثال ۷ دوایر هستند.

۲۰. نشان دهید که $F(z) = \cos^{-1} z$ را می‌توان به پتانسیل مختلط مربوط به شکلهای ۳۷۵ و ۳۷۶

تعییر کرد.



شکل ۳۷۶. روزنه های دیگر

شکل ۳۷۵. شکاف

۱۷. موارد استعمال نگاشت همدیسی

همانطوری که دیدیم پتانسیلهای مختلط مرتبط به نظریه پتانسیل رابطه نزدیکی با آنالیز مختلط دارند. ارتباط نزدیک دیگر تایجی از استفاده نگاشت همدیسی در حل مسائل مقدار کرانه ای برای معادله لاپلاس، یعنی دریافت جوابی از معادله در برخی دامنه داده شده مقادیر مفروض برکرانه (« مساله دیریکله »؛ ر. ک. بخش ۱۱. ۵) می باشد. در این صورت نگاشت همدیسی برای نگاشتن یک دامنه پیچیده مفروض بر روی دامنه ساده تری که در آن جواب معلوم است یا جواب را آسانتر می توان یافت، استفاده می شود. هدف این است که جواب را در دامنه تصویر یافته و از روی آن به جواب متناظر در ناحیه موردنظر برسیم. اهمیت عملی نگاشت همدیسی از این واقعیت ناشی می شود که توابع همساز تحت نگاشت همدیسی همساز باقی می مانند.

قضیه ۱ (توابع همساز تحت نگاشت همدیسی)

اگر $\Phi^*(u, v)$ در دامنه D واقع در صفحه W همساز، و همچنین تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ دامنه D واقع در صفحه Z را به طور همدیسی بر روی D بنگارد، آنگاه

$$\Phi(x, y) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y)) \quad (1)$$

در D همساز است.

اثبات. با توجه به قاعده زنجیره ای، ترکیب توابع تحلیلی تابعی تحلیلی می باشد. از این رو، با درنظر گرفتن مزدوج همساز $\Psi^*(u, v)$ از Φ^* و تشکیل تابع تحلیلی $F^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v)$ داریم

$$F^*(w) = F^*(f(z)) = F^*(f(z)) = F(z) = \operatorname{Re} F(z) = \operatorname{Re} F^*(w)$$

نتیجه می گیریم که $F(z) = F^*(w)$ در D تحلیلی و قسمت حقیقی آن یعنی $F(z) = \operatorname{Re} F(z)$ در D تحلیلی است.

۳- ر. ک. بخش ۱۲. ۵. بدون اثبات متذکر می شویم که اگر D همبند ساده (بخش ۱۳. ۳) باشد، آنگاه مزدوج همساز Φ^* وجود دارد. اثبات دیگری از آن بدون استفاده از مزدوج همساز در ضمیمه ۴ آمده است.

در D همساز است. بدین طریق اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

مثال ۱. پتانسیل بین استوانه‌های غیرهم محور

مطلوب است پتانسیل بین استوانه‌های $|z| = 1$ و $|w| = \frac{2}{5}$ دارای پتانسیل $U_1 = C_1$ باشد. مطلوب است پتانسیل بین استوانه‌های $|z| = 1$ و $|w| = \frac{2}{5}$ دارای پتانسیل $U_2 = 11^\circ$ ولت.

حل. برای حل مساله قرص واحد $= |z|$ را روی قرص واحد $= |w|$ طوری می‌نگاریم که C_1 بر روی استوانه $r_0 = |w|$ نگاشته شود. بنابر (۶) بخش ۱۶. ۳. تبدیل کسری خطی ای کسری خطی ای که قرص واحد را بروی قرص واحد بنگارد عبارت است از

$$w = \frac{z - b}{bz - 1} \quad (2)$$

که در آن بدون هیچ محدودیتی $b = z$ را حقيقی انتخاب می‌کنیم. b بلا فاصله در اینجا به ما کمک نمی‌کند زیرا مرکز دوایر بر روی مرکز تصاویر نگاشته نمی‌شوند. به هر حال، اکنون دو ثابت آزاد b و r_0 داریم و با اضافه نمودن دو شرط مناسب که $\frac{4}{5}$ (شکل ۳۷۷) را به ترتیب بر روی r_0 و b -بنگارد، به هدفمان خواهیم رسید. از این موضوع و از (۲) می‌پاییم

$$r_0 = \frac{-b}{-1}, \quad -r_0 = \frac{\frac{4}{5} - b}{\frac{4}{5}b - 1} = \frac{\frac{4}{5} - r_0}{\frac{4}{5}r_0 - 1},$$

که یک معادله درجه دوم نسبت به b با جوابهای ۲ (نامناسب زیرا $1 < r_0 < \frac{1}{4}$) و $\frac{1}{2}$ می‌باشد. نگاشت تابع

$$(2) \text{ به ازای } b = \frac{1}{2} \text{ چنین می‌شود}$$

$$w = f(z) = \frac{2z - 1}{z - 2}. \quad (3)$$

از مثال ۵ بخش ۱۷. ۱. با نوشتن w بر حسب z همان پتانسیل مختلف در صفحه w را داریم و با توجه به این موضوع پتانسیل حقیقی برابر است با

$$\Phi^*(u, v) = \operatorname{Re} F^*(w) = a \ln|w| + k.$$

ضرایب a و k با توجه به شرایط کرانه‌ای تعیین می‌شوند. اگر $|w| = 1$ ، آنگاه $\Phi^* = a \ln(1) + k = 0$ ، اگر $|w| = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $\Phi^* = a \ln \frac{1}{2} + k = 0$. این را $a = \frac{1}{\ln \frac{1}{2}}$ می‌توان نوشت.

$$a = \frac{11^\circ}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} = -158/7 = -22.57^\circ$$

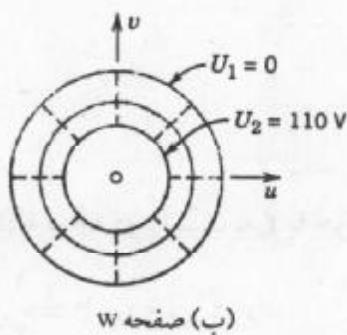
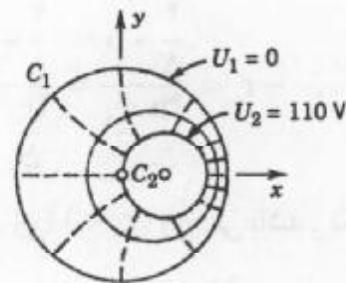
صفحه z به صورت زیر درمی‌آید

$$F(z) = F^*(f(z)) = a \ln \frac{2z-1}{z-2}.$$

پتانسیل حقیقی عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z) = a \ln \left| \frac{2z-1}{z-2} \right| ; \quad a = -158/V.$$

داریم ثابت $\Phi(x, y)$ اگر فقط اگر ثابت $= \left| \frac{2z-1}{z-2} \right|$ ، یعنی، بنابر (۵)، ثابت $= |w|$. این دوایر متناظر با دوایر در صفحه z است، همانطوری که از قضیه ۱ بخش ۲.۱۶ نتیجه می شود. با این وجود معکوس یک تبدیل کسری خطی خود نیز یک تبدیل کسری خطی است [ر. ک. (۵) بخش ۲.۱۶]. به همین طریق وضعیت مشابهی برای شعاعهای ثابت $= \arg w$ وجود دارد. از این رو خطوط هم پتانسیل ثابت $= \Phi(x, y)$ دوایر بوده، و خطوط نیرو و قوهای مستدیر (خط چین در شکل ۳۷۷). اینها دو خانواده از منحنیهای متعامد متقاطع هستند، یعنی همانطوری که در شکل ۳۷۷ نشان داده شده است، آنها همیگر را تحت زاویه قائمه قطع می کنند.

(ب) صفحه w (الف) صفحه z

شکل ۳۷۷. مثال ۱

مثال ۲. پتانسیل بین دو صفحه نیم دایره ای

مطلوب است پتانسیل بین دو صفحه نیم دایره ای P_1 و P_2 واقع در شکل ۳۷۸ (الف) که به ترتیب در پتانسیلها -3000 و 3000 ولت قرار گرفته اند. از مثال ۳ بخش ۱.۱۷ و نگاشت همیگری استفاده کنید.

حل. گام اول. با استفاده از تبدیل کسری خطی مثال ۳ بخش ۱.۱۶، قرص واحد واقع در شکل ۳۷۸ (الف) را بر روی نیمه راست صفحه w (شکل ۳۷۸ (ب)) می نگاریم:

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

کران $|z| = 1$ بر روی کران $w = u$ (محور v)، همچنین نقاط $1, i, -1, -i$ به ترتیب بر روی

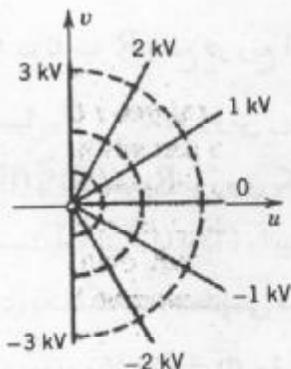
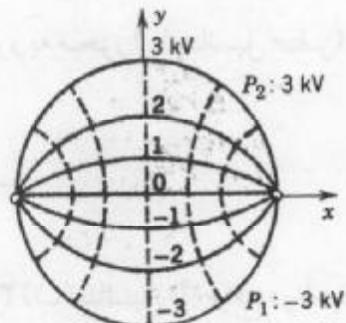
بر $|z| = \infty$ و $-i = -Z = -w$ نگاشته می شوند. بنابراین نیمدایره فوقانی را روی نیمه فوقانی، و نیمدایره تحتانی بر روی نیمه تحتانی محور v نگاشته می شوند، درنتیجه شرایط کرانه ای در صفحه w مطابق شکل ۳۷۸ (ب) می باشند.

گام دوم. پتانسیل $\Phi^*(u, v)$ را در نیم صفحه راست صفحه w مشخص می کنیم. در مثال ۳ بخش

$$[\Phi(x, y)]_{U_2} = 3000, U_1 = -3000, \alpha = \pi/17$$

$$\Phi^*(u, v) = \frac{6000}{\pi} \varphi; \varphi = \arctan \frac{v}{u}$$

منجر می شود.

(ب) صفحه w (الف) صفحه z

شکل ۳۷۸. مثال ۲

بر نیمه مثبت محور موهومی ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)، این مقدار برابر 3000 و بر نیمه منفی محور موهومی برابر

-3000 ، همانطوری که باید باشد، است. Φ^* قسمت حقیقی پتانسیل مختلط

$$F^*(w) = -\frac{6000i}{\pi} \ln w$$

می باشد.

گام سوم. با جایگزینی تابع نگاشت در F^* ، پتانسیل مختلط واقع در شکل ۳۷۸ (الف) به صورت زیر در می آید

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z) = \frac{6000}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{6000}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{1+z}{1-z}.$$

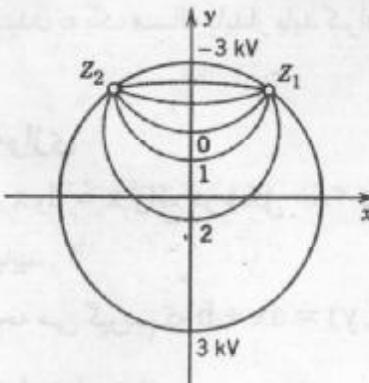
همانند مثال ۱ نتیجه می گیریم که خطوط هم پتانسیل ثابت $= \Phi(x, y)$ قوسهای مستدير هستند زیرا آنها با ثابت $= \operatorname{Arg}[(1+z)/(1-z)]$ ، بنابراین با ثابت $= \operatorname{Arg} w$ متناظراند. همچنین، ثابت w شاعرهایی از 0° تا 180° که به ترتیب تصاویر $-1 = z = w$ هستند، می باشند. از این رو تمام خطوط هم پتانسیل شامل -1 و 1 (نقاطی که در آنها پتانسیل کرانه ای پوش دارند) همانند این نقاط انتهایی

(شکل ۳۷۸ (الف)) هستند. خطوط نیرو نیز قوسهای مستدیر می باشند، و نظر به اینکه این خطوط نیرو باید بر خطوط هم پتانسیل متعامد باشند، مرکز شان را می توان از تقاطع خطوط مماس بر دایره واحد یا محور X به دست آورد. (توضیح دهید!)

مسائل بخش ۲۰. ۱۷

۱. درستی قضیه ۱ را به ازای $v = f(z) = e^z$ و $\Phi^*(u, v) = u^v - v^u$ تحقیق کنید.
۲. همه فرمولهای اثبات دوم قضیه ۱ (مفروض در ضمیمه ۴) را بتویسید و مراحل اثبات را به تفصیل بیان کنید.
۳. پتانسیل Φ در ناحیه R واقع در ربع اول صفحه Z محصور به محور (با پتانسیل صفر) و هذلولی $\frac{1}{x} = y$ (با پتانسیل U_2) را به دو روش زیر باید:

 - (i) مستقیماً، (ii) با نگاشتن R بر روی یک نوار نامتناهی مناسب.
 ۴. مراحل به دست آوردن (۳) از (۲) را بیان کنید.
 ۵. با به کار گیری یک نگاشت همدیسی مناسب، از شکل ۳۷۸ (ب) پتانسیل Φ واقع در ناحیه زاویه ای $-\frac{\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$ و $\Phi = -3kV$ وقتی که $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ و $\Phi = 0$ باشد را به دست آورید.
 ۶. درمثال ۲ نشان دهید که محور u بر روی دایره واحد واقع در صفحه W نگاشته می شود.
 ۷. در نقاط $z = \pm 1$ واقع در شکل ۳۷۸ (الف) مماسها با خطوط هم پتانسیل نشان داده شده، زاویه $\frac{\pi}{6}$ می سازند. چرا؟
 ۸. با قرار دادن $z = Z'$ ($Z = X + iY$) در مثال ۲، نشان دهید که پتانسیل حاصل از $\Phi(X, Y) = \operatorname{Re} F(Z')$ پتانسیل در قسمتی از قرص واحد $1 \leq |Z| \leq 3$ واقع بر ربع اول دارای مقادیر کرانه ای صفر بر محور ها و 3 بر $1 = |Z|$ می باشد.
 ۹. تبدیل کسری خطی ای مانند $z = g(Z) = \frac{i}{Z}$ را طوری باید که $|z| \geq 1$ را بر روی $1 \leq |Z| \leq 3$ بر $Z = Z'$ روی $z = 0$ بنگارد. نشان دهید که $Z_1 = \frac{-3+4i}{5}$ بر روی $1 \leq |Z| \leq 3$ نگاشته می شوند، درنتیجه خطوط هم پتانسیل مربوط به مثال ۲، همانطوری که در شکل ۳۷۹ نشان داده شده است، در $1 \leq |Z| \leq 3$ ظاهر می شوند.
 ۱۰. چرا خطوط هم پتانسیل مربوط به مساله ۹ دوایر هستند؟



شکل ۳۷۹. مساله ۹

۱۷. ۳. مسائل گرمایی

معادله لاپلاس بر مسائل جریان گرمایی که پایدار هستند، یعنی مستقل از زمان می باشند، نیز حاکم است. در واقع، انتقال گرمایی در یک جسم ماده همگن با معادله گرمایی

$$T_t = c^2 \nabla^2 T$$

مدلسازی می شود که در آن تابع T برابر درجه گرمایی، T_t زمان، و c^2 یک ثابت مثبت (وابسته به جنس ماده) می باشند. در حالت پایدار داریم $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ و معادله به یک معادله لاپلاس دو بعدی به صورت زیر تبدیل می شود

$$\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0. \quad (1)$$

بنابراین مساله گرمایی در حالت پایدار را می توان به روشهای پیشین بررسی نمود.

$T(x,y)$ موسوم به پتانسیل گرمایی، قسمت حقیقی پتانسیل گرمایی مختلط

$$F(z) = T(x,y) + i\Psi(x,y)$$

است. منحنیهای ثابت $= T(x,y)$ را خطوط هم دما (= خطوط گرمایی با درجه حرارت ثابت) و منحنیهای ثابت $= \Psi(x,y)$ را خطوط جریان گرمایی نامند، زیرا در امتداد آنها، جریان های گرمایی از دمای بالاتر به دمای پایین تر جریان دارد.

اکنون می یابیم که تمام مثالهای موردنظر در بخش های ۱.۱۷ و ۲.۱۷ را می توان به عنوان مثالهای از جریان گرمایی دوباره تفسیر نمود. خطوط هم پتانسیل الکترواستاتیک ثابت $= \Phi(x,y)$ در اینجا خطوط هم دما ثابت $= T(x,y)$ می باشند، و خطوط نیروی الکتریکی به خطوطی از جریان گرمایی تبدیل می شوند. از دیدگاه ریاضی، محاسبات به همان وضع سابق است. مسائل جدید شامل شرایط کرانه ای ممکن است در اینجا مطرح شود که دارای کاربرد فیزیکی در الکترواستاتیک نیستند یا از نقطه نظر عملی در آنجا مورد توجه نیستند. مثالهای ۳ و ۴ (به شرح زیر) این مطلب را روشن می سازد.

به طور فیزیکی برای رسیدن به یک مساله پایدار باید کران ناحیه جریان گرمابا گرم کردن یا سرد شدن در دمای ثابت باشد.

مثال ۱. دمای بین صفحات موازی

دمای بین دو صفحه موازی $x = d$ و $x = 0$ واقع در شکل ۳۸۰ که به ترتیب در دماهای صفر و 100° درجه سانتیگراد قرار گرفته اند را بباید.

حل. با توجه به بخش ۱۷.۱ نتیجه می گیریم که $T(x,y) = ax + b$. از شرایط کرانه ای می باییم که $b = 0$ و $a = \frac{100}{d}$ و جواب عبارت است از

$$T(x,y) = \frac{100}{d}x [{}^\circ\text{C}].$$

پتانسیل مختلط متناظر برابر $F(z) = \frac{100}{d}z$ است. جریانهای گرمابه طور افقی، درجهت منفی محور x ، درامتداد خطوط ثابت y است.

مثال ۲. توزیع دما بین یک مفتول و یک استوانه.

میدان دما حول یک مفتول نازک و بلند به شعاع $r_1 = 1\text{ mm}$ که با گرمای الکتریکی $T_1 = 500^\circ\text{F}$ گرم شده محصور بین یک استوانه مستدير به شعاع $r_2 = 100\text{ mm}$ ، که با خنک کردن با هوا درجه حرارت آن را $T_2 = 60^\circ\text{F}$ ثابت نگهداشته شده است را بباید. شکل ۳۸۱ را ملاحظه کنید.

حل. T به دلیل متقارن بودن، تنها به r وابسته است. از این رو، مطابق بخش ۱۷.۱ (مثال ۲) داریم

$$T(x,y) = a \ln r + b.$$

شرط کرانه ای عبارت اند از

$$T_1 = 500 = a \ln 1 + b, T_2 = 60 = a \ln 100 + b.$$

از این رو $b = 500 - 60 = 440$ (زیرا $\ln 1 = 0$) و $a = \frac{60 - b}{\ln 100}$. جواب عبارت است از

$$T(x,y) = 500 - \frac{440}{\ln 100} \ln r [{}^\circ\text{F}].$$

خطوط هم دما دوایر متحده مرکز هستند. جریان گرمابه از مفتول به طور تشعشی به خارج استوانه صورت می پذیرد.

مثال ۳. یک مساله مقدار کرانه ای آمیخته.

توزیع دما در ناحیه واقع در شکل ۳۸۲ (قطع یک استوانه صلب)، که قسمت قائم کرانه در 20° درجه سانتیگراد، قسمت افقی در 50° درجه سانتیگراد، قسمت مستدير عایق پوش شده است را بباید.

حل. نظر به اینکه با عایق پوش شدن، گرمابه از قسمت مقطع عبور نمی کند. از این رو گرمابه درامتداد جریان باشد، لذا خطوط جریان باید این متحنیها را تحت زاویه قائم قطع کنند. نظر به اینکه در طول

یک خط جریان T ثابت است در امتداد قسمت عایق پوش شده کران داریم

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

که در آن $\frac{\partial T}{\partial n}$ مشتق قائم T ، یعنی مشتق سویی (بخش ۹.۸) T درجهت قائم بر کران عایق پوش شده (یعنی، جهت قائم بر این کران) است. هر مساله‌ای که T بر یک قسمت از کران و $\frac{\partial T}{\partial n}$ بر قسمت دیگر کران مشخص شده باشد را یک مساله مقدار کرانه‌ای آمیخته می‌نامند.

در حالت موردنظر، جهت قائم به منحنی کران عایق پوش شده درجهت شعاعی به سمت مبدأ

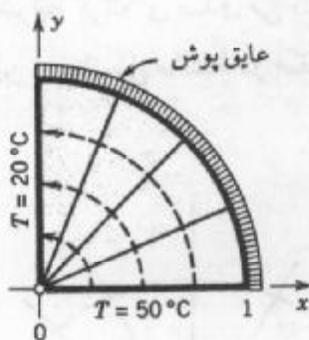
است. از این رو (۲) چنین می‌شود $= \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ، این بدان معنی است که در امتداد این منحنی جواب نباید وابسته به r باشد. اکنون $\theta = \text{Arg}z$ در (۱) صدق می‌کند همانطوری که این شرط برقرار است و مقدار آن بر قسمتها مستقیم کران ثابت است $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$. از این رو جواب عبارت است از

$$T(x, y) = a\theta + b.$$

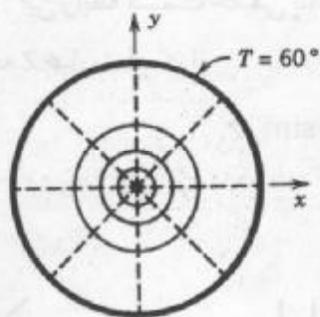
شرط کرانه‌ای به $a \cdot 0 + b = 50^\circ$ و $a \cdot \frac{\pi}{2} + b = 20^\circ$ می‌شوند. با توجه به این نتایج به دست می‌آوریم

$$T(x, y) = 50 - \frac{60}{\pi}\theta; \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

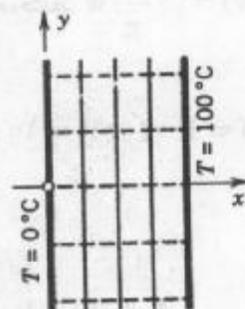
خطوط هم دما قسمتها از شعاعها ثابت $= \theta$ هستند. جریان گرما از محور x در امتداد دو ایر ثابت $= 2$ (خط چین در شکل ۳۸۲) بر طرف محور y می‌باشد.



شکل ۳۸۲. مثال ۲



شکل ۳۸۱. مثال ۲



شکل ۳۸۰. مثال ۱

مثال ۴. مساله مقدار کرانه‌ای آمیخته دیگر در انتقال گرما

میدان دمای نیم صفحه فوقانی وقتی که محور x به ازای $-1 < x < 1$ در $T = 0^\circ C$ و به ازای $1 < x < 2$ عایق پوش شده، و به ازای $1 < x < 2$ در $T = 20^\circ C$ قرار گرفته اند را باید (شکل ۳۸۳ (الف)).

حل. نیم صفحه واقع در شکل ۳۸۳ (الف) را بروی نمودار قائم شکل ۳۸۳ (ب) می نگاریم، دمای $T^*(u, v)$ موجود را می یابیم، و این نگاشت مجدداً دمای $T(x, y)$ واقع در نیم صفحه را به دست می دهد.

انگیزه استفاده با توجه به شکل ۳۶۰ در بخش ۴.۱۶ با $w = u + iv$ و $z = x + iy$ جابجا می شود. با توجه به آن $w = \sin z$ نوار مورد نظر را روی نیم صفحه شکل ۳۸۳ (الف) می نگارد. از این رو تابع معکوس

$$w = f(z) = \sin^{-1} z$$

نیم صفحه را بر روی نوار واقع در صفحه W می نگارد. این تابع نگاشتی است که بر طبق قضیه ۱ بخش ۲ به آن نیاز داریم.

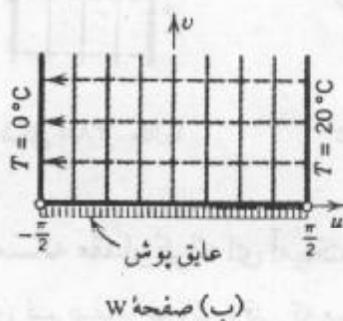
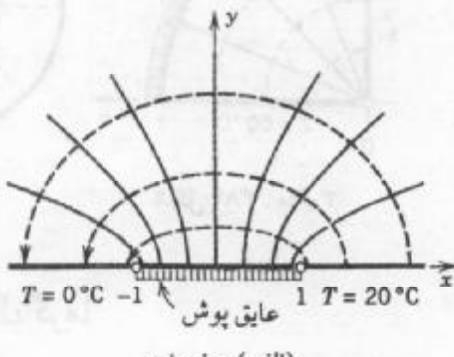
پاره خط عایق پوش شده $1 < x < -\frac{\pi}{2}$ از محور x بر روی پاره خط $\frac{\pi}{2} < u < 1$ از محور u نگاشته می شوند. مابقی از محور x بر روی دو قسمت کرانه های قائم u برابر با $\frac{\pi}{2}$ و 0 ، $v > 0$ از نوار نگاشته می شوند. این موضوع شرایط کرانه ای تبدیل شده در شکل ۳۸۳ (ب) را بر حسب $\frac{\partial T^*}{\partial u} = \frac{\partial T^*}{\partial v}$ زیرا v محور $T^*(u, v)$ به دست می دهد، که در آن روی کران افقی عایق پوش شده است. قائم است که بر پاره خط مورد نظر عمود است.

به همین طریق امثال ۱ به دست می آوریم

$$T^*(u, v) = 10 + \frac{20}{\pi} u$$

$F^*(w) = 10 + \frac{20}{\pi} w$ که در همه شرایط کرانه ای صدق می کند. این رابطه قسمت حقیقی پتانسیل مختلط است. از این رو پتانسیل مختلط در صفحه Z عبارت است از

$$F(z) = F^*(f(z)) = 10 + \frac{20}{\pi} \sin^{-1} z,$$

(ب) صفحه W (الف) صفحه Z

شکل ۳۸۳. مثال ۴

و $T(x,y) = \operatorname{Re} F(z)$ جواب است. خطوط هم دما ثابت = $u = \text{ا}$ در نوار و هذلولی در صفحه Z ، عمود بر این جریانهای گرما در امتداد بیضی های خط چین از 2° درجه قسمت به خنکترین یعنی صفر درجه قسمت کران، که یک دلیل فیزیک خوبی است، هستند.

مثالهای فوق فایده نگاشت همدیسی و پتانسیل مختلط را نشان می دهد. بحثی در این مورد در مطالعه جریان سیال ارائه خواهد شد.

مسئائل بخش ۱۷

۱. دمای بین دو صفحه موازی $y = d$ و $y = 0$ که به ترتیب در دمای 0° و 100° درجه سانتیگراد قرار گرفته را به دو روش زیر بایابید.

(i). پرداختن به روش مستقیم. (ii). با استفاده از مثال ۱ و یک نگاشت مناسب.

۲. دما و پتانسیل در یک صفحه نامتناهی را که لبه های $-x - y = 2$ و $x + 2y = 0$ به ترتیب در 10° درجه سانتیگراد و 20° درجه سانتیگراد قرار گرفته اند را بایابید.

۳. دمای واقع در شکل ۳۸۲ را در صورتی بایابید که بر محور $y = T = -20^{\circ}C$ و بر محور $x = 100^{\circ}C$ ، و بر قسمت مستدير همانند قبل عایق پوش شده باشد.

۴. دمای T واقع در ناحیه زاویه ای $\frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Arg} z \leq 1, 0 \leq |z| \leq \sqrt{3}$ طوری بایابید که بر محور x دمای T برابر 20° درجه سانتیگراد و بر $x = \sqrt{3}y$ دمای T برابر 50° درجه سانتیگراد، و قسمت منحنی شکل کران عایق پوش شده باشد.

۵. مطلوب است دما و پتانسیل مختلط در ربع اوّل صفحه Z وقتی که محور y در 100° درجه سانتیگراد قرار گرفته، پاره خط $1 < x < 0$ از محور x عایق پوش شده، و قسمت $1 < x$ از محور x در 200° درجه سانتیگراد نگهداشته شده باشد. راهنمایی. از مثال ۴ استفاده کنید.

۶. مساله ۹ در انتهای بخش ۱۷. ۲ را به عنوان یک مساله جریان گرما (با دمای کرانه ای، یعنی 20° درجه سانتیگراد و 300° درجه سانتیگراد) مورد بررسی قرار دهید. جریان گرما در امتداد چه منحنیهایی هستند؟

۷. دما در نیم صفحه فوقانی شکل ۳۸۴ صادق در شرایط کرانه ای مفروض را بایابید.

۸. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۷ را بایابید.

۹. دمای T واقع در نیم صفحه فوقانی با شرایط کرانه ای نشان داده شده در شکل ۳۸۵ را بایابید.

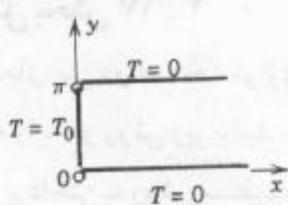
۱۰. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۹ را بایابید.

۱۱. نتیجه مساله ۹ را از مساله ۷ بنا بر قاعده انطباق به دست آورید.

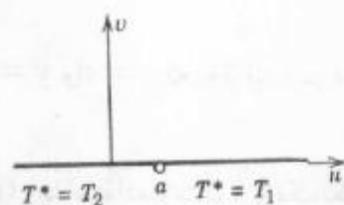
۱۲. دما در ربع اول صفحه Z از مساله ۷ با توجه به نگاشت $w = a + z$ چگونه به دست می آید، و شرایط کرانه ای تغییر یافته کدام هستند؟

۱۳. با استفاده از مساله ۹ و نگاشت $w = \cosh z$ (ر. ک. مثال ۴ بخش ۱۶. ۴)، نشان دهید که دما در نوار نامتناهی از شکل ۳۸۶ به صورت زیر است:

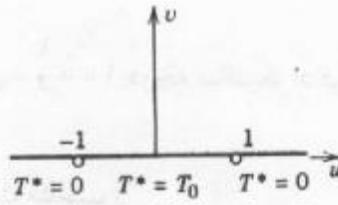
$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\tanh \frac{z}{2} \right).$$



شکل ۳۸۶. مساله ۱۳



شکل ۳۸۵. مساله ۹



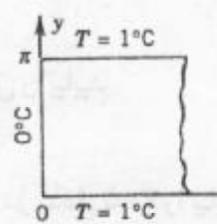
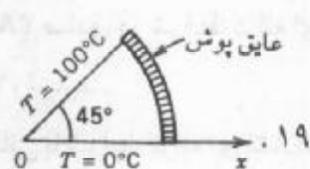
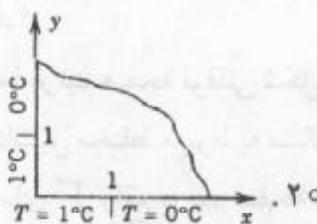
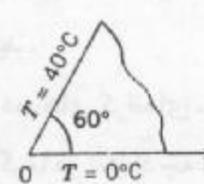
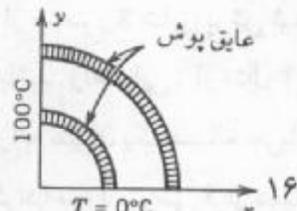
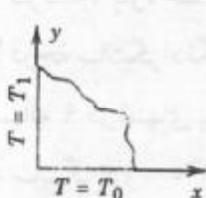
شکل ۷. مساله ۷

۱۴. با محاسبات مستقیم نشان دهید که

$$T(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Im} \tanh \frac{1}{2} z, \text{ در نتیجه } \frac{\operatorname{Im} \tanh \frac{1}{2} z}{\operatorname{Re} \tanh \frac{1}{2} z} = \frac{\sin y}{\sinh x}$$

قوس $\tan = \left[\frac{\sin y}{\sinh x} \right]$ در مساله ۱۳ ارائه شده است.

دما $T(x, y)$ در ورقه نازک فلزی مفروضی که رویه های آن عایق پوش شده و لبه های آن در دماهایی قرار گرفته اند که در اشکال زیر نشان داده شده اند را باید.



۴. ۱۷ جریان سیال

معادله لاپلاس در هیدرودینامیک، در جریان سیال غیر چسبنده پایدار تحت شرایط فیزیکی

بحث شده در این بخش نقش مهمی نیز دارد. برای حفظ این مطلب در آنالیز مختلط، مساله ما دو بعدی خواهد بود، در نتیجه با توجه به حرکت سیال، بردار سرعت مفروض V می‌تواند تنها به دو متغیر فضایی x و y وابسته باشد و حرکت سیال در تمام صفحات موازی با صفحه xy یکسان است.

در این صورت برای استفاده ازتابع برداری مختلط V که

$$V = V_1 + iV_r \quad (1)$$

می‌توان اندازه وامتداد سرعت را در هر نقطه $z = x+iy$ به دست آورد. در اینجا V_1 و V_r مولفه‌های سرعت در امتداد محورهای x و y هستند. V مماس بر مسیر حرکت ذرات سیال است. چنین مسیری به خط جریان موسوم می‌باشد (ر. ک. شکل (۳۸۷)).

نشان می‌دهیم که تحت مفروضات مناسب (که به تفصیل در مثالهای زیر ارائه می‌شوند)، برای یک جریان مفروض یک تابع تحلیلی

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad (2)$$

وجود دارد، که این تابع به پتانسیل مختلط جریان مشهور می‌باشد، چنین خطوط جریانی با ثابت $= \Psi(x, y)$ مفروض می‌باشند، و سرعت جریان با رابطه زیر مفروض می‌باشد

$$V = V_1 + iV_r = \overline{F'(z)} \quad (3)$$

که در آن بار بیانگر مزدوج مختلط است. تابع Ψ به تابع جریان موسوم می‌باشد. تابع Φ را پتانسیل سرعت^۴ می‌نامند. منحنی‌های ثابت $= \Phi(x, y)$ به خطوط هم پتانسیل مشهور می‌باشند. V ، برابر گرادیان Φ است، این بدان معنی است که

$$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (4)$$

در واقع، بنا به (۴) بخش ۱۲.۵، واستفاده از معادله دوم کوشی - ریمان، با انتخاب $f = F$ ، $v = \Psi$ و $u = \Phi$ می‌یابیم

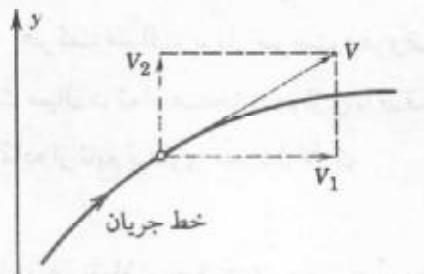
$$\overline{F'(z)} = \Phi_x - i\Psi_x = \Phi_x + i\Phi_y = V_1 + iV_r = V.$$

علاوه بر آن، چون $F(z)$ تحلیلی است، لذا Φ و Ψ در معادله لاپلاس صدق می‌کنند:

$$\nabla^r \Phi = \frac{\partial^r \Phi}{\partial x^r} + \frac{\partial^r \Phi}{\partial y^r} = 0, \quad \nabla^r \Psi = \frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r} + \frac{\partial^r \Psi}{\partial y^r} = 0. \quad (5)$$

در حالیکه کرانه‌های داده شده در الکترواستاتیک (صفحات هادی) خطوط هم پتانسیل هستند، در جریان سیال در طول یک کران که سیال نمی‌تواند جریان پیدا کند باید یک خط جریان باشد.

^۴- برخی مولفین (به جای Φ) از Φ - برای نشان دادن پتانسیل سرعت استفاده می‌کنند.



شکل ۳۸۷. سرعت

قبل از بحث شرایط برای برقراری مطالب شامل (۲) تا (۵) به بررسی دو جریان می‌پردازیم که در مسائل کاربردی مورد توجه هستند، به طوری که نخست مشاهده می‌کنیم که موضوع از نقطه نظر عملی چیست. مسائل بیشتر از جریان سیال در بخش مسائل آمده اند.

مثال ۱. جریان حول یک گوش

پتانسیل مخلوط

$$F(z) = z^r = x^r - y^r + 2ixy$$

جریانی را توصیف می‌کند که خطوط هم پتانسیل آن هذلولیهای ثابت $\Phi = x^r - y^r$

و خطوط جریانش هذلولیهای

$$\Psi = 2xy \quad \text{ثابت}$$

هستند. از (۳) بردار سرعت به دست می‌آید

$$V_r = -2y, V_i = 2x, V = 2\bar{z} = 2(x - iy)$$

تندی (اندازه سرعت) عبارت است از

$$|V| = \sqrt{V_r^2 + V_i^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

این جریان را می‌توان به جریان در کانالی که به محورهای مختصات مثبت و یک هذلولی، مثلاً، هذلولی $1 = xy$ (شکل ۳۸۸) مخصوص شده تعبیر کرد. توجه کنید که در طول خط جریان S تندی در نقطه P که در آن مقطع کانال بزرگ است دارای مقدار می‌نیم است.

مثال ۲. جریان در نزدیکی یک استوانه

پتانسیل مخلوط زیر را در نظر بگیرید

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = z + \frac{1}{z}.$$

با استفاده از صورت قطبی $z = re^{i\theta}$ ، به دست می آوریم

$$F(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

بنابراین خطوط جریان عبارت اند از

$$\Psi(x, y) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

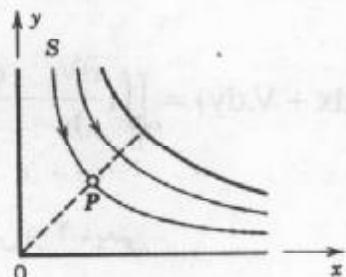
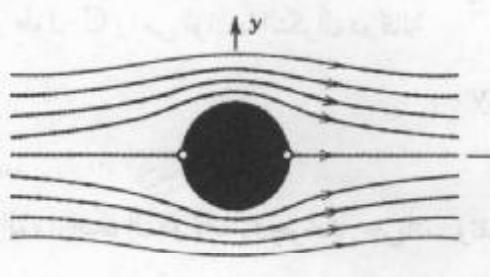
خصوصاً ، $\Psi(x, y) = 0$ نتیجه می دهد که $r = \frac{1}{\sin\theta}$ یا $\theta = 0$. بنابراین این خط جریان مرکب

از دایره واحد $\frac{1}{r} = 1$ نتیجه می دهد که $r = 1$ و محور $x = 0$ و $\theta = \pi$ می باشد. به ازای

مقادیر بزرگ $|z|$ جمله $\frac{1}{z}$ در $F(z)$ با قدر مطلق کوچک است ، درنتیجه برای این z ها جریان تقریباً یکنواخت و موازی با محور x است. بنابراین ، این موضوع را می توان همانند یک جریان در حول یک استوانه مستدير بلندی که شعاع آن برابر واحد است تعبیر کرد. جریان دارای دو نقطه ایستائی (یعنی نقاطی که سرعت V در آنها صفر است) ، در $z = \pm 1$ است. این نقاط از

$$F'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

و (۳) نتیجه می شوند . ر. ک. شکل ۳۸۹.



شکل ۳۸۹. جریان در اطراف یک گوش (مثال ۲)

مفروضات و نظریه اساسی (۲) الی (۵)

هرگاه دامنه جریان همبند ساده و جریان غیر دورانی و تراکم ناپذیر باشد، آنگاه گزاره های مربوط به روابط (۲) الی (۵) برقرارند. بخصوص جریان دارای یک پتانسیل مختلط $F(z)$ است، که تابعی تحلیلی می باشد. (توضیحات مربوطه در زیر آمده اند)

اثبات این موضوع ، در راستای بحث بازگو شده مفاهیم اساسی از جریان سیال انجام می شود. منحنی هموار دلخواه C از صفحه Z ، که با (s) $z(s) = x(s) + iy(s)$ نمایش داده می شود را در نظر می گیریم، که در آن طول قوس C است. فرض کنیم متغیر حقیقی s مولفه سرعت V

مماس بر C باشد (شکل ۳۹۰). آنگاه مقدار انتگرال روی خط حقیقی

$$\int_C V_t \, ds \quad (6)$$

که در طول C و درجهت افزایش مقادیر s محاسبه می شود، به گردش سیال در طول C موسوم می باشد. از تقسیم گردش بر طول C سرعت میانگین \bar{V} جریان در طول منحنی C به دست می آید.

حال (شکل ۳۹۰)

$$V_t = |V| \cos \alpha.$$

بنابراین V_t برابر حاصل ضرب عددی (بخش ۲.۸) V و بردار مماس $\frac{dz}{ds}$ از C است (بخش ۱.۱)؛ از این رواز (۶) داریم

$$V_t \, ds = (V_t \frac{dx}{ds} + V_r \frac{dy}{ds}) \, ds = V_t dx + V_r dy.$$

هم اکنون گردش (۶) در طول C عبارت است از

$$\int_C V_t \, ds = \int_C (V_t dx + V_r dy). \quad (7)$$

به عنوان ایده بعدی، فرض کنید C یک منحنی بسته باشد، در واقع فرض کنید C منحنی کران یک دامنه همبند ساده D باشد، وهمچنین فرض کنید که V در دامنه ای که شامل D و C است دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد. در این صورت با استفاده از قضیه گرین (بخش ۴.۹) نتیجه می گیریم که گردش در طول C را می توان با انتگرال دوگانه

$$\oint_C (V_t dx + V_r dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_t}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (8)$$

نمایش داد.

تابع انتگراله از انتگرال دوگانه را چرخش جریان، و تقسیم چرخش بر ۲، یعنی

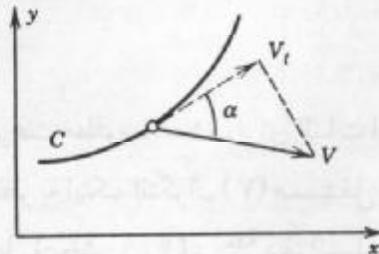
$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_t}{\partial y} \right) \quad (9)$$

تعاریف :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = a \leq x \leq b \quad \text{مقدار میانگین } f \text{ بر فاصله } a \text{ تا } b$$

$$\frac{1}{L} \int_C f(s) \, ds = C \quad (\text{طول } C) \quad \text{مقدار میانگین } f \text{ روی } C$$

$$\frac{1}{A} \iint_D f(x, y) \, dxdy = A \quad (\text{مساحت } D) \quad \text{مقدار میانگین } f \text{ روی } D$$



شکل ۳۹۰. مؤلفه مماسی سرعت نسبت به منحنی C

را دوران می نامند. فرض کنیم جریان غیر دورانی باشد، یعنی جریانهایی که (x, y) می آنها سرتاسر جریان صفر باشد، در این حالت

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_i}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

برای تفهیم معنای فیزیکی چرخش و دوران، C در (۸) یک دایره ای به شعاع r می گیریم، آنگاه حاصل تقسیم گردش بر طول $2\pi r$ از منحنی C سرعت متوسط سیال در طول C می باشد. از این رو از تقسیم سرعت میانگین بر πr ای سرعت زاویه ای متوسط سیال نسبت به محور دایره به دست می آید:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi r} \iint_D \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{\pi r} \iint_D \omega(x, y) dx dy.$$

هرگاه فرض کنیم $\omega \rightarrow 0$ ، آنگاه حد ω_0 برابر مقدار ω در مرکز C است. بنابراین، $\omega(x, y)$ برابر سرعت زاویه ای حدی یک جزء دایره ای سیال است وقتی که دایره منقبض شده به نقطه (x, y) بدل می شود. به بیان عامیانه، اگر یک جزء کروی از سیال ناگهان منجمد شود و همزمان سیالی که آن را احاطه کرده از بین برود، در این صورت جزء کروی با سرعت زاویه ω دوران خواهد کرد.

فرض دوم آنکه سیال تراکم ناپذیر است. (آب و نفت مثالهای از این نوع هستند، و حال آنکه هو تراکم پذیر است.) آنگاه

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial y} = 0 \quad (11) \quad [ر. ک. (۷)، بخش ۱۰.۸]$$

در هر ناحیه ای آزاد از چشمی یا چاهک، یعنی نقاطی که از آن نقاط سیال وارد یا خارج می شود، است عبارت (۱۱) به دیورزانس V مشهور می باشد که با نماد $\operatorname{div} V$ نمایش می دهیم.

چنانچه دامنه D از سیال همبند ساده بوده و جریان غیر دورانی باشد، آنگاه انتگرال روی خط (7) [با به قضیه ۳ بخش ۲.۹ که در آن $F_r = 0$ ، $F_i = V_r$ ، $F_z = 0$] در D مستقل از مسیر است. بنابراین هرگاه از نقطه ثابت (a, b) واقع در D بر نقطه متغیر (x, y) از D انتگرال بگیریم، انتگرال تابعی مانند $\Phi(x, y)$ از نقطه (x, y) خواهد

شد:

$$\Phi(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} (V_x dx + V_y dy). \quad (12)$$

ادعا می کنیم که Φ پتانسیل سرعت مطلوب است. برای اثبات این ادعا، تمام گارنشان دادن این است که (۱۲) برقرار است. حال نظر به اینکه انتگرال (۷) مستقل از مسیر می باشد، در این صورت

$V_x dx + V_y dy$ دیفرانسیل کامل (بخش ۹.۲)، مثلاً دیفرانسیل Φ ، یعنی دیفرانسیل

$$V_x dx + V_y dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

است. با توجه به آن می یابیم که $V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ و $V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ، که (۱۲) را نتیجه می دهد.

با جایگزینی (۱۲) در (۱۱) نتیجه می گیریم که Φ همساز است، که اولین معادله لاپلاس مربوط به رابطه (۵) به دست می آید.

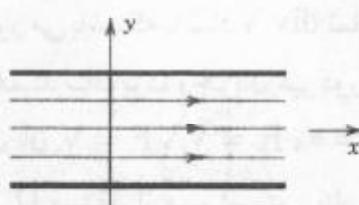
سرانجام مزدوج همساز Ψ از Φ را اختیار می کنیم. در این صورت معادله دوم رابطه (۵) برقرار است. همچنین فرض کنیم که Φ و Ψ هم دارای مشتقهای جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند، آنگاه تابع مختلط

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

در D تحلیلی است. نظر به اینکه منحنیهای ثابت $\Psi(x, y) = \text{const}$ به منحنیهای هم پتانسیل ثابت $= \Phi(x, y) = \text{const}$ (جز در نقاطی که در آنها $F'(z) = 0$) عمود است، نتیجه می گیریم که منحنیهای ثابت $= \Psi(x, y) = \text{const}$ خطوط جريان هستند. بنابراین Ψ تابع جريان و $F(z)$ پتانسیل مختلط جريان هستند.

۴.۱۷ مسائل بخش

- (جريان موازي) نشان دهید که $F(z) = Kz$ (K عدد حقیقی مثبت) بیانگر جريانی یکنواخت به طرف راست است، که می تواند به جريان یکنواختی بين دو خط موازي (بين دو صفحه موازي در فضای سه بعدی) تعبير شود، به شکل ۳۹۱ مراجعه کنید. بردار سرعت، خطوط جريان و خطوط هم پتانسیل را بایابید.



شکل ۳۹۱. جريان موازي در مثال ۱

۲. نشان دهید که $i\bar{z} = F(z)$ بیانگر جریانی حول یک گوشه است. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را پیدا کرده و آنها را رسم کنید. بردار سرعت V را بایابید.

۳. جریان در مثال ۱ را به کمک مساله ۱ از طریق نگاشت همدیسی از ربع اول بر روی نیم صفحه فوقانی به دست آورید.

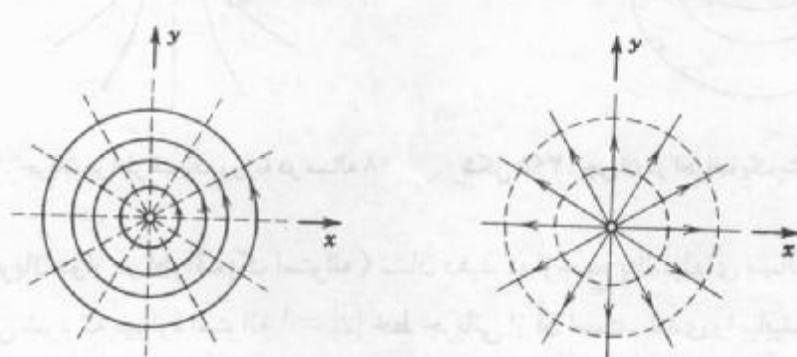
۴. یک تغییر جزئی از $F(z)$ در مثال ۲ طوری ایجاد کنید که یک جریان حول یک استوانه به شعاع π به دست آید، که به جریان واقع بر مساله ۱، وقتی که $1 \rightarrow \infty$ منجر شود.

جریان متناظر با پتانسیل مختلط مفروض $F(z)$ را در نظر بگیرید. برخی از خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را با رسم نشان دهید. بردار سرعت V را بایابید. همه نقاطی را که در آنها V موازی با محور x است تعیین کنید.

$$iz^2 \cdot 10 \quad z^2 \cdot 9 \quad z^2 + 2z \cdot 8 \quad (1+i)z \cdot 7 \quad (1-2i)z \cdot 6 \quad iz \cdot 5$$

۱۱. (چشم و چاهک) پتانسیل مختلط $F(z) = \frac{c}{2\pi i} \ln z$ را که در آن c عدد حقیقی مثبتی است

در نظر بگیرید. نشان دهید که $(x+iy)\left(\frac{c}{2\pi i}\right) = V = \sqrt{x^2 + y^2}$ است، وازین رابطه چنین بر می آید که جریان شعاعی و جهت آن به طرف خارج است (ر. ک. شکل ۳۹۲)، درنتیجه این پتانسیل با یک چشم نقطه ای در $z=0$ (یعنی با یک خط چشم $x=0, y=0$ در فضا) متناظر است. ثابت c قدرت یا تخلیه چشم نامیده می شود. اگر c حقیقی منفی باشد، گویند جریان در $z=0$ دارای یک چاهک است، این جریان شعاعی و جهت آن به طرف داخل می باشد، و سیال در نقطه منفرد $z=0$ پتانسیل مختلط ناپذید می شود.)



شکل ۳۹۳. جریان گردابی در مساله ۱۱

شکل ۳۹۲. نقطه چشم در مساله ۱۱

۱۲. (خط گردابی) نشان دهید که $F(z) = \frac{iK}{2\pi} \ln z$ ، که در آن K عدد حقیقی مثبتی است، بیانگر جریانی است که در حول مبدأ درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت دور می زند؛ شکل ۳۹۳ را ملاحظه کنید (نقطه $z=0$ را نقطه گردابی می نامند؛ به ازای هر بارگردش به دور نقطه گردابی پتانسیل

به اندازه K افزایش می یابد).

۱۳. پتانسیل مختلط جریانی که در $-a = z$ یک چشمۀ نقطه‌ای به قدرت ۱ دارد را باید.

۱۴. مطلوب است پتانسیل مختلط جریانی که در $a = z$ یک چاهک نقطه‌ای به قدرت ۱ دارد.

۱۵. نشان دهید که جمع برداری بردارهای سرعت دو جریان منجر به جریانی می شود که پتانسیل مختلط آن از جمع پتانسیل مختلط مربوط به دو جریان حاصل می شود.

۱۶. پتانسیلهای مذکور در مسائل ۱۳ و ۱۴ را جمع و خطوط جریان پتانسیل حاصل رارسم کنید.

۱۷. مطلوب است خطوط جریان متناظر با جریان $F(z) = \frac{1}{z}$. نشان دهید که به ازای مقادیر کوچک $|a|$ خطوط جریان مساله ۱۶ شبیه جریان این مساله به نظر می آید.

۱۸. نشان دهید که $F(z) = \cosh^{-1} z$ با جریانی که خطوط جریان آن هنولیهای هم کانون با کانونهای $\pm 1 = z$ هستند متناظر است، و جریان را می توان به جریانی تعبیر کرد که از یک روزنۀ می گذرد. به شکل ۳۹۴ مراجعه کنید.

۱۹. نشان دهید $F(z) = \cos^{-1} z$ را که می توان به پتانسیل مختلط جریانی که یک استوانه بیضوی یا یک بشقاب (خط راستی که از $-1 = z$ تا $1 = z$ کشیده شده است) را دور می زند تعبیر کرد. نشان دهید که خطوط جریان بیضویهای هم کانونی هستند که کانونهای آنها در $\pm 1 = z$ است. شکل ۳۹۵ را ملاحظه کنید.

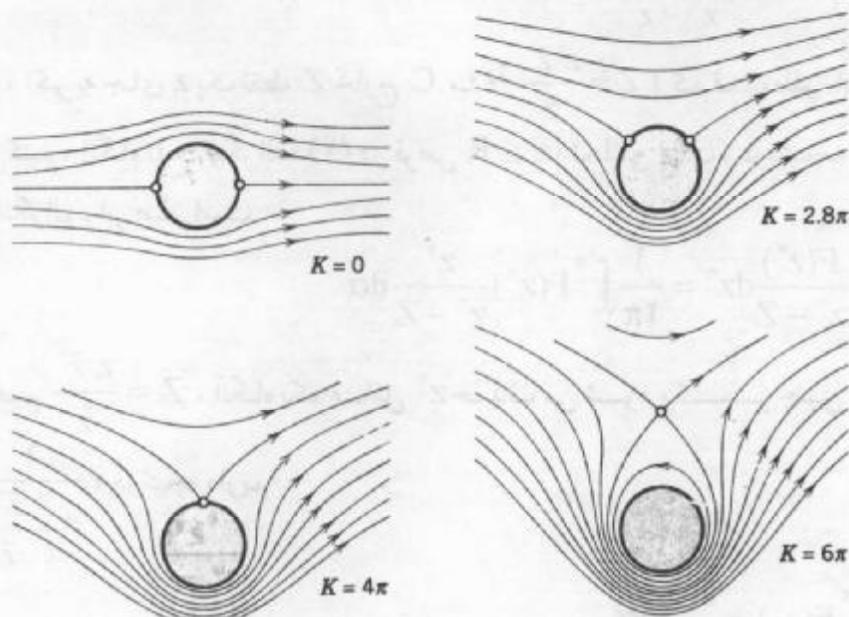


شکل ۳۹۵. جریان در اطراف یک روزنۀ در مساله ۱۸

۲۰. (جریان دوار در اطراف یک استوانه) نشان دهید که از جمع پتانسیلهای مساله ۱۲ و مثال ۲ جریانی حاصل می شود که دیوارۀ استوانه $1 = |z|$ خط جریانی از آن است. تندی را بباید و نشان دهید که نقاط ایستائی عبارت اند از

$$z = \frac{iK}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{-K^2}{16\pi^2} + 1};$$

اگر K برابر صفر باشد، این نقاط عبارت اند از $\pm i$ ، با افزایش K این نقاط روی دایره واحد حرکت می کنند تا آنکه در $i = z$ برحه منطبق می شوند ($K = 4\pi$)، به شکل ۳۹۶ مراجعه کنید)، و اگر K



شکل ۳۹۶. جریان در اطراف یک استوانه بدون گردش ($K = 0^\circ$) و با گردش (مساله ۲۰)

بزرگتر از 4π باشد نقاط ایستائی روی محور موهومی قرار می‌گیرند. (یکی از نقاط در میدان جریان قرار می‌گیرد و نقطه دیگر که درون استوانه واقع می‌شود فاقد معنی فیزیکی است.

۱۷.۵. فرمول انتگرال پواسن

تاکنون در این فصل مشاهده کردیم که آنالیز مختلط روشی کارآمد برای تشریح و حل مسائل پتانسیل دو بعدی براساس نگاشت همدیسی و پتانسیلهای مختلط ارائه می‌دهد. یک روش دیگر، از انتگرالگیری مختلط نتیجه می‌شود. از فرمول انتگرال کوشی به فرمول انتگرال پواسن برای حل مساله دیریکله (ر. ک. بخش ۱۷.۲) برای یک قرص (همان طور که جوابها در دامنه‌ها، همانطوری که دیدیم، با نگاشت همدیسی به دست می‌آید) می‌رسیم.

برای به دست آوردن این فرمول موضوع را از فرمول انتگرال کوشی

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \quad (1)$$

آغاز می‌کنیم. که در آن انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقریه‌های ساعت روی دایره C انجام می‌گیرد و فرض می‌کنیم که $f(z^*)$ در یک دامنه‌ای که درون آن قرار دارد تحلیلی باشد.

نظر به اینکه $dz^* = i Re^{i\alpha} d\alpha = iz^* d\alpha$.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(z^*) \frac{z^*}{z^* - z} d\alpha \quad (z^* = Re^{i\alpha}, z = re^{i\theta}). \quad (2)$$

از طرف دیگر، اگر به جای z یک نقطه Z خارج C مثلاً $Z = \frac{z^* \bar{z}^*}{\bar{z}}$ (که قدر مطلق آن $R > r$ است) اختیار کنیم، آنگاه تابع انتگرال (1) در قرص $R \leq |z| \leq R$ تحلیلی است، درنتیجه بنا به قضیه کوشی مقدار انتگرال برابر صفر است:

$$\circ = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z^*)}{z^* - Z} dz^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(z^*) \frac{z^*}{z^* - Z} d\alpha.$$

اگر قراردهیم $Z = \frac{z^* \bar{z}^*}{\bar{z}}$ ، آنگاه یک عامل $z^* \bar{z}^*$ حذف می شود و کسر چنین می شود:

$$\frac{1}{(1 - \frac{\bar{z}^*}{\bar{z}})} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*}, \text{ درنتیجه داریم}$$

$$\circ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(z^*) \frac{\bar{z}}{z - \bar{z}^*} d\alpha.$$

با کم کردن این رابطه از (2) واستفاده از

$$\frac{z^*}{z^* - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*} = \frac{z^* \bar{z}^* - z \bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} \quad (3)$$

می یابیم

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(z^*) \frac{z^* \bar{z}^* - z \bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} d\alpha. \quad (4)$$

باتوجه به نمایش قطبی z و z^* مشاهده می کنیم که نسبت موجود در انتگرال برابر است با

$$\frac{R^r - r^r}{(Re^{i\alpha} - re^{i\theta})(Re^{-i\alpha} - re^{-i\theta})} = \frac{R^r - r^r}{R^r - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^r}.$$

درنتیجه، با نوشتند

$$F(z) = \Phi(r, \theta) + i\Psi(r, \theta)$$

و با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی دو طرف فرمول (4) فرمول انتگرال پواسن*

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(R, \alpha) \frac{R^r - r^r}{R^r - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^r} d\alpha. \quad (5)$$

رابطه دست می آوریم، که نمایش تابع همساز Φ در قرص $|z| \leq R$ بر حسب مقادیر $\Phi(R, \alpha)$ بر روی کران دایره $|z| = R$ است.

*- سیمیون دونی پواسن SIMEON DENIS POISSON (۱۷۸۱-۱۸۴۰)، ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی، پروفسوری در پاریس از سال ۱۸۰۹. کارهای او در زمینه های نظریه پتانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی (معادله پواسن، بخش ۱۱)، و احتمال می باشد.

اگر تابع کرانه ای $\Phi(R, \alpha)$ فقط بطور تکه ای پیوسته باشد، باز فرمول (۵) معتبر است.
 همانطوری که اغلب در موارد کاربردی اتفاق می افتد؛ (ر. ک. به عنوان مثال به شکل (۳۹۹). در این صورت فرمول (۵) تابعی مانند $\Phi(r, \theta)$ را تعریف می کند که در قرص باز $R < |z| < R'$ همساز، و برداشته $|z| = R$ ، جز در نقاطی که تابع کرانه ای در آنها ناپیوسته است، تابع مذکور برابر تابع کرانه ای مفروض است. اثبات این موضوع را می توان در مرجع [D1] یافت.

نمایش به صورت سری پتانسیل در یک قرص

از (۵) می توان بسط سری مهمی از Φ بر حسب توابع همساز ساده را به دست آورد.
 یادآوری می کنیم که نسبت موجو د در تابع انتگرالده (۵) از (۳) حاصل شده است. ادعا می کنیم که طرف راست رابطه (۳) برابر قسمت حقیقی

$$\frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{(z^* + z)(\bar{z}^* - \bar{z})}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z} - z^*\bar{z} + z\bar{z}^*}{|z^* - z|^2}$$

است. در واقع، مخرج حقیقی بوده و صورت برابر $z^*\bar{z}^* - z\bar{z}$ است، گرچه در $z^*\bar{z}^* + z\bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z\bar{z}^*)$ صورت موهومی محض است. این مطلب درستی ادعای ما را تایید می کند. حال با استفاده از سری هندسی به دست می آوریم

$$\frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{1 + \left(\frac{z}{z^*}\right)}{1 - \left(\frac{z}{z^*}\right)} = \left(1 + \frac{z}{z^*}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n. \quad (6)$$

نظر به اینکه $z^* = \operatorname{Re}^{i\alpha}$ و $z = re^{i\theta}$ داریم

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n = \operatorname{Re}\left(\frac{r^n}{R^n} e^{in\theta - in\alpha}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n\theta - n\alpha).$$

از طرفی دیگر، $\cos(n\theta - n\alpha) = \cos n\theta \cos n\alpha + \sin n\theta \sin n\alpha$ ، درنتیجه از (۶) به دست می آوریم

$$\operatorname{Re} \frac{z^* + z}{z^* - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\theta \cos n\alpha + \sin n\theta \sin n\alpha).$$

این عبارت، همانطوری که قبل امذکور شدیم، برابر نسبت موجود در (۵) است، و با قراردادن این سری در (۵) و انتگرالگیری جمله به جمله می یابیم

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta); \quad (7)$$

که در آن ضرایب عبارت اند از ضرایب فوريه $\Phi(R, \alpha)$ (ر. ک. بخش ۱۰.۲)،

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(R, \alpha) d\alpha, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(R, \alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(R, \alpha) \sin n\alpha d\alpha; \quad n = 1, 2, \dots$$

اگر n به ازای $R = r$ سری (7) به سری فوریه $\Phi(R, \alpha)$ تبدیل می شود، بنابراین نمایش (7) وقتی که بتوان $\Phi(R, \alpha)$ را با سری فوریه نمایش داد معتیر است.

مثال ۱. مساله دیریکله در مرور قرص واحد

مطلوب است پتانسیل الکترواستاتیک $\Phi(r, \theta)$ در قرص واحد $1 < r < 2$ با مقادیر کرانه ای (شکل ۳۹۷)

$$\Phi(1, \alpha) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\pi} & ; \quad -\pi < \alpha < 0 \\ \frac{\alpha}{\pi} & ; \quad 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

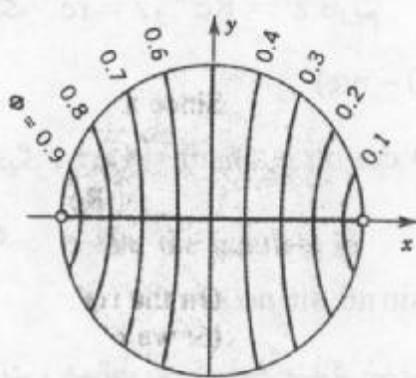
حل. نظر به اینکه $\Phi(1, \alpha)$ زوج است، $b_n = 0$ و از (8) به دست می آوریم $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(1, \alpha) d\alpha$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha d\alpha \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1).$$

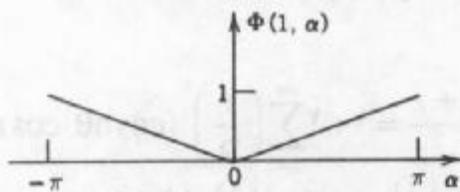
بنابراین، اگر n فرد باشد $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2}$ و اگر $n = 0, 2, 4, \dots$ و پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left[r \cos \theta + \frac{r^3}{3!} \cos 3\theta + \frac{r^5}{5!} \cos 5\theta + \dots \right].$$

شکل ۳۹۸ قرص واحد و برخی خطوط هم پتانسیل (منحنیهای ثابت $\Phi = \text{const}$) را نشان می دهد.



شکل ۳۹۸. پتانسیل در مثال ۱



شکل ۳۹۷. مقادیر کرانه ای در مثال ۱

مسائل بخش ۵.۱۷

۱. صحت برقراری (۲) را بررسی کنید.

۲. نشان دهید که هر جمله (۷) در قرص $r < R'$ تابعی همساز است.
با استفاده از (۷)، پتانسیل $\Phi(r, \theta)$ در داخل قرص واحد $1 < r$ را طوری بیاید که دارای مقادیر کرانه‌ای مفروض $\Phi(1, \theta)$ باشد. با استفاده از چند جمله اول سری، برخی مقادیر Φ را محاسبه کنید و نمودار خطوط هم پتانسیل رارسم کنید.

$$\Phi(1, \theta) = \sin^3 \theta . 4$$

$$\Phi(1, \theta) = \sin \theta . 3$$

$$\Phi(1, \theta) = 1 + \cos 2\theta . 6$$

$$\Phi(1, \theta) = 2 - \cos \theta . 5$$

$$\Phi(1, \theta) = \cos 2\theta - \cos^4 \theta . 8$$

$$\Phi(1, \theta) = \frac{1}{2} \sin 5\theta . 7$$

$$\Phi(1, \theta) = \cos^3 \theta . 10$$

$$\Phi(1, \theta) = \sin^3 \theta . 9$$

$$\Phi(1, \theta) = \theta ; \quad 0 < \theta < 2\pi . 11$$

$$\Phi(1, \theta) = \theta ; \quad -\pi < \theta < \pi . 11$$

$$\Phi(1, \theta) = \pi - \theta , \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \text{و اگر} \quad \Phi(1, \theta) = \theta , \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} . 13$$

۱۴. هرگاه $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، $\Phi(1, \theta) = 1$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\Phi(1, \theta) = -1$ ، و در غیر آن صورت $\Phi(1, \theta) = 0$.

۱۵. با استفاده از (۱۸) بخش ۱۴. ۴ نشان دهید که نتیجه مساله ۱۴ را می‌توان چنین نوشت

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{(1+iz)(1+z')}{(1-iz)(1-z')} .$$

۱۶. نشان دهید که پتانسیل مساله ۱۱ را می‌توان چنین نوشت

$$\Phi(r, \theta) = 2 \operatorname{Im} \ln(1+z) .$$

۱۷. با استفاده از (۷) و (۸)، نشان دهید که پتانسیل $\Phi(r, \theta)$ در داخل قرص واحد $1 < r$ با مقادیر کرانه‌ای

$$\Phi(1, \theta) = \begin{cases} -1 ; & -\pi < \theta < 0 \\ 1 ; & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

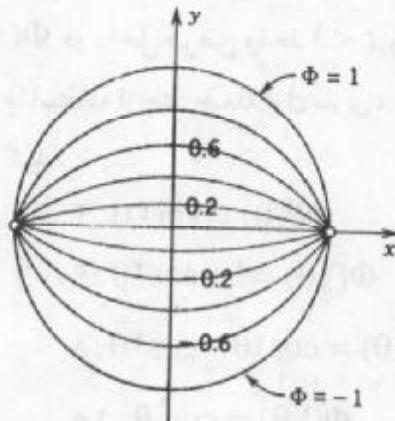
از سری زیر به دست می‌آید

$$\Phi(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{r^3}{3} \sin 3\theta + \frac{r^5}{5} \sin 5\theta + \dots \right)$$

برخی از مقادیر Φ را با استفاده از چند جمله اول این سری به دست آورید و چند خط هم پتانسیل رارسم کنید. نتیجه را با شکل ۳۹۹ مقایسه کنید. نمودار خطوط نیرو (مسیرهای متعامد) رارسم کنید.

۱۸. با استفاده از (۱۸)، بخش ۴.۱۴، نشان دهید که در مساله ۱۷

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{\pi} [\operatorname{Arg}(1+z) - \operatorname{Arg}(1-z)] .$$



شکل ۳۹۹. پتانسیل در مثال ۱۷

۱۹. نشان دهید که

$$\Phi^*(w) = 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{w+1}{w-1} \quad (w = u + iv)$$

در نیم صفحه فوقانی $v > 0$ همساز است و مقدار آن به ازای $1 < u < -1$ برابر ۱ و روی بقیه قسمتهای محور u برابر ۱ است.

۲۰. نشان دهید که تبدیل کسری خطی ای که $w_1 = -1$ ، $w_2 = 0$ ، $w_3 = 1$ را به ترتیب، بر $z_1 = -i$ ، $z_2 = -1$ ، $z_3 = i$ می نگارد عبارت است از

$$z = \frac{w-1}{-iw+1}.$$

تبدیل معکوس $w = w(z)$ را یافته، و با قرار دادن آن در Φ^* ، مساله ۱۹، نشان دهید که تابع همساز حاصل همان است که در مساله ۱۸ دیدیم. این مطلب را با مثال ۲، بخش ۱۷. ۲ نیز مقایسه کنید.

۱۷. خواص عمومی توابع همساز

آنالیز مختلط نه تنها در حل مسائل پتانسیل دو بعدی مفید واقع می شود بلکه، همانطوری که در این بخش نشان می دهیم، برای به دست آوردن خواص عمومی توابع همساز از اهمیت زیادی برخوردار است.

اگر $\Phi(x, y)$ تابعی باشد که در یک دامنه همبند ساده D همساز باشد، آنگاه تابع Φ دارای تابع همساز مزدوجی مانند Ψ در D می باشد و تابع

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

در D تحلیلی است. (ر. ک. بخش ۱۷. ۵. و ر. ک. زیرنویس ۳، بخش ۱۷. ۲) ابتدا، چون توابع تحلیلی دارای مشتق از هر مرتبه هستند، نتیجه می گیریم که

قضیه ۱ (مشتقات جزئی)

تابع $\Phi(x, y)$ که در دامنه همبند ساده D همساز است در D از هر مرتبه دارای مشتقات جزئی است. به علاوه اگر $F(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه بنا به فرمول انتگرال کوشی (بخش ۱۳. ۵) داریم

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z - z_0} dz \quad (1)$$

که در آن C یک مسیر بسته ساده D و z_0 نقطه‌ای در درون C است. هرگاه C را یک دایره به صورت زیر در D انتخاب می‌کنیم

$$z = z_0 + re^{i\alpha}, \quad \text{داریم } dz = ire^{i\alpha}d\alpha \quad \text{و } z - z_0 = re^{i\alpha} \quad \text{درنتیجه (1) به صورت زیر در می‌آید}$$

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{i\alpha}) d\alpha. \quad (2)$$

طرف راست برابر مقدار متوسط F بر روی دایره است (= مقدار انتگرال تقسیم بر طول بازه انتگرالگیری). واثبات قضیه زیر کامل می‌شود.

قضیه ۲ (خاصیت مقدار متوسط توابع تحلیلی)

فرض کنید $F(z)$ در یک دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد. آنگاه مقدار $F(z)$ در نقطه z_0 از D برابر است با مقدار متوسط $F(z)$ بر روی هر دایره‌ای که در D قرار دارد و مرکز آن z_0 است.

این قضیه و قضیه بعدی، مشخصه بارز خواص توابع تحلیلی است، درنتیجه برای به دست آوردن خواص اساسی توابع همساز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه ۳ (قضیه قدر مطلق ماکزیمم در مورد توابع تحلیلی)

فرض کنید D ناحیه‌ای کراندار باشد که $F(z)$ در درون D و بر کران D تحلیلی و غیر ثابت باشد. آنگاه $|F(z)|$ نمی‌تواند در یک نقطه درونی D ماکزیممی داشته باشد. درنتیجه، ماکزیمم $|F(z)|$ به ازای نقطه‌ای واقع بر کرانه D به دست می‌آید. هرگاه در D ، $|F(z)| \neq |F(z_0)|$. در این صورت این ادعا در مورد می‌نیم بودن $|F(z)|$ نیز درست است.

اثبات. فرض کنید $|F(z)|$ در یک نقطه درونی z_0 از D دارای ماکزیمم باشد و نشان می‌دهیم که این فرض منجر به تناقض می‌شود. فرض کنید $M = |F(z_0)|$ مقدار ماکزیمم باشد. چون $F(z)$ ثابت نیست، $|F(z)|$ نیز مانند نتیجه‌ای از مثال ۱۲. ۵، ثابت نیست. درنتیجه می‌توان دایره‌ای مانند C به شعاع r و مرکز z_0 یافت به طوری که درون C در D باشد و $|F(z)|$ در نقطه‌ای از C مانند P ،

از M کوچکتر باشد. چون $|F(z)|$ پیوسته است، روی قوسی مانند C_1 از C که شامل P است کوچکتر خواهد بود، مثلاً به ازای هر z روی C_1 داریم (شکل ۴۰۰)

$$|F(z)| \leq M - k \quad (k > 0).$$

اگر طول C_1 برابر L_1 باشد، طول C_2 ، قوس مکمل C_1 برابر $L_1 - 2\pi r$ خواهد بود. با به کار بردن نامساوی ML (بخش ۱۳.۲) در مورد (۱) و یاتوجه به آنکه $|z - z_0| = r$ ، می‌یابیم

$$\begin{aligned} M = |F(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_1} \frac{F(z)}{z - z_0} dz \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_2} \frac{F(z)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M - k}{r} \right) L_1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{r} \right) (2\pi r - L_1) = M - \frac{kL_1}{2\pi r} < M, \end{aligned}$$

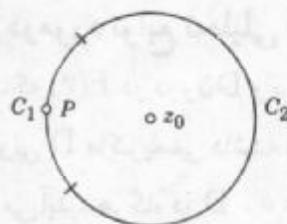
یعنی

$$M < M,$$

که غیرممکن است. بنابراین، فرض ما باطل است و گزاره اول قضیه به اثبات می‌رسد.

حال به اثبات گزاره دوم قضیه می‌پردازیم. اگر در D ، $F(z) \neq 0$ در این صورت $\frac{1}{F(z)}$ در

D تحلیلی است. از آنجه تاکنون ثابت شد می‌یابیم که ماکزیمم $\frac{1}{|F(z)|}$ برگرانه D واقع است. اما این ماکزیمم با می‌نیممی از $|F(z)|$ متناظر است. بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.



شکل ۴۰۰. اثبات قضیه ۳

حال نتایج پایه ای قضایای ۲ و ۳ را می‌توان در مورد توابع همساز بیان نمود و به نتایج زیر دست یافت.

قضیه ۴ (توابع هارمونیک)

فرض کنیم D یک دامنه کراندار همبند ساده و C مرز D باشد. در این صورت اگر $\Phi(x, y)$ در دامنه ای که شامل D و C است همساز باشد، دارای خواص زیر است:

I . مقدار $\Phi(x, y)$ در نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) از دامنه D با مقدار میانگین $\Phi(x, y)$ روی هر دایره درون D که مرکز آن (x_0, y_0) باشد برابر است .

II . مقدار $\Phi(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) از D با مقدار میانگین $\Phi(x, y)$ در هر قرص مستدیری که در D قرار گرفته و مرکز آن (x_0, y_0) است برابر است [ر.ث. زیرنویس ۵، بخش ۱۷، ۴] .

III . (اصل ماکزیمم) اگر $\Phi(x, y)$ غیر ثابت باشد، ماکزیمم یا می نیممی در D ندارد، بلکه ماکزیمم یا می نیمم خود را بر روی کران D اختیار می کند .

IV . اگر $\Phi(x, y)$ بر C ثابت باشد، آنگاه $\Phi(x, y)$ ثابت است .

V . هرگاه $h(x, y)$ در D و بر C همساز باشد و اگر بر C آنگاه در تمام نقاط D . $h(x, y) = \Phi(x, y)$

اثبات . گزاره I از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی طرفین (۲) نتیجه می شود، یعنی

$$\Phi(x_0, y_0) = \operatorname{Re} F(x_0 + iy_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r \cos \alpha, y_0 + r \sin \alpha) d\alpha.$$

اگر طرفین رابطه را در ۳ ضرب کنیم و نسبت به ۲ از ۰ تا ۲، که در آن ۲ ساعت قرص مستدیری در D

با مرکز (x_0, y_0) است، انتگرال بگیریم ، آنگاه در طرف چپ می یابیم $\frac{1}{2} \int_0^2 \Phi(x_0 + r \cos \alpha, y_0 + r \sin \alpha) r d\alpha dr$ و بنابراین

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r \cos \alpha, y_0 + r \sin \alpha) r d\alpha dr.$$

بدین طریق گزاره دوم به اثبات می رسد

گزاره III را ثابت می کنیم . فرض کنید $\Phi(x, y)$ یک تابع همساز مزدوج $\Psi(x, y)$ در D باشد، آنگاه $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$

$$G(z) = e^{F(z)}$$

در D تحلیلی هستند . قدر مطلق $G(z)$ عبارت است از

$$|G(z)| = e^{\operatorname{Re} F(z)} = e^{\Phi(x, y)}.$$

از قضیه ۳ نتیجه می شود که $|G(z)|$ نمی تواند دارای ماکزیممی در یک نقطه درونی D باشد . نظر به اینکه e^Φ تابعی صعودی یکنواز متغیر حقیقی Φ است . گزاره III درباره ماکزیمم Φ به اثبات می رسد . از این موضوع گزاره مربوط به می نیمم با جایگزین کردن $\Phi - \Phi$ نتیجه می شود .

هم اکنون به اثبات IV می پردازیم . با توجه به III تابع $\Phi(x, y)$ ماکزیمم و می نیمم خود را بر C اختیار می کند . بنابراین، اگر $\Phi(x, y)$ روی C ثابت باشد، این می نیمم باید با مقدار ماکزیمم Φ برابر باشد، در نتیجه $\Phi(x, y)$ باید ثابت باشد .

سرانجام ، هرگاه h و Φ در درون D و بر روی C همساز باشد، آنگاه $\Phi - h$ نیز در درون D و بر

روی C همساز است، و بنا به فرض در تمام نقاط C ، $h - \Phi = 0$. بنابراین، بنا به IV، در تمام نقاط D داریم $h - \Phi = 0$ ، و گزاره V به اثبات می‌رسد. به این طریق اثبات قضیه ۴ کامل می‌شود.

گزاره آخر قضیه ۴ بسیار مهم است. بنا به این گزاره هرتایع همساز به کمک مقادیرش برگرانه D به طور یکتا مشخص می‌شود. معمولاً، لازم است که $\Phi(x,y)$ در D همساز برگرانه D پیوسته^۴ باشد.

تحت این شرایط، هنوز هم می‌توان اصل ماکزیمم (قضیه ۴، III) را به کار برد. مساله مشخص کردن $\Phi(x,y)$ وقتی که مقادیر کرانه ای $\Phi(x,y)$ مفروض باشند، همانطوری که می‌دانیم، مساله دیریکله در مورد معادله لاپلاس دومتغیره نامیده می‌شود. هم اکنون قضیه زیر را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۵ (مساله دیریکله)

اگر به ازای یک ناحیه مفروض و مقادیر کرانه ای داده شده مساله دیریکله برای معادله لاپلاس دومتغیره دارای جواب باشد، آنگاه این جواب منحصر به فرد است.

این پایان فصل ۱۷ و قسمت D از آنالیز مختلط است. امیدواریم که متعلمین از آنالیز مختلط و چگونگی کاربرد این قسمت در حل برخی مسائل مهندسی و فیزیکی لذت برده باشند.

مسائل بخش ۶.۱۷

۱. درستی قضیه ۲ را در مورد $Z = (z+2)^2$ بررسی کنید. $F(z) = 1$ ، و دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز Z_0 برد.

۲. درستی قضیه ۲ را در مورد $Z = 5z$ بررسی کنید. $F(z) = 0$ ، و دایره ای به شعاع واحد نسبت به مبدأ تحقیق.

۳. از $|F(z)| = |z|$ روی یک دایره واحد انتگرال بگیرید. آیا نتیجه حاصل با قضیه ۲ تناقض دارد؟

۴. درستی قضیه ۳ را در در مورد $Z = F(z)$ و مستطیل $x < 1 < y < 5$ تحقیق کنید.

۵. درستی قضیه ۳ را در مورد $Z = e^z$ بررسی کنید. $F(z) = 1$ دامنه کراندار دلخواه تحقیق کنید.

مطلوب است ماکزیمم $|F(z)|$ در درون قرص $1 \leq |z| \leq 2$ و $Z = 0$ متناظر، که در آن

$$F(z) = \cos z, \quad F(z) = z^2 - 1, \quad F(z) = az + b. \quad 6$$

۹. تابع $F(z) = 1 + 3|z|$ در درون قرص $2 \leq |z| \leq 3$ صفر نمی‌شود و در یک نقطه درونی این قرص دارای می‌نیم است. آیا این مطلب با قضیه ۳ تناقض دارد؟

۱۰. تابع حقیقی $F(x) = \sin x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ ماکزیمم است. با استفاده از قضیه ۳، نتیجه بگیرید که این تابع

-۸ - یعنی $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \Phi(x,y) = \Phi(x_0, y_0)$ برگرانه و (x,y) در D واقع اند.

نمی تواند ماکزیممی از قدر مطلق تابع مختلط $z = \sin z$ در دامنه ای شامل $\frac{\pi}{2} \leq z < \infty$ باشد.

۱۱. فرض کنید $|F(z)| \leq |z|$ در قرص بسته $0 \leq |z| \leq R$ تحلیلی (غیر ثابت) بوده و همچنین فرض کنید که روی دایره $|F(z)| = c$ ، ثابت $c = 1$ نشان دهید که در این صورت $F(z)$ باید یک صفر در این قرص داشته باشد.

۱۲. اگر $|F(z)| \leq M$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی (غیر ثابت) باشد، و متحنی مفروض $c = \max_{D \subset D'} |F(z)|$ عدد ثابت دلخواه در D واقع بوده و بسته باشد، آنگاه نشان دهید که در یک نقطه درونی از متحنی D دارای $F(z) = 0$ چند مثال ارائه دهید.

۱۳. درستی گزاره I از قضیه ۴ را در مورد $y' - x' = \Phi(x, y)$ و دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز (x_0, y_0) تحقیق کنید.

۱۴. درستی اصل ماکزیمم واقع در قضیه ۴ را در مورد $xy = \Phi(x, y)$ و قرص $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ تحقیق کنید. مقادیر ماکزیمم و مینیمم Φ واقع در قرص و نقاطی را که Φ این مقدار را اختیار می کند تعیین کنید.

۱۵. گزاره I از قضیه ۴ را با به کار گیری فرمول انتگرال کوشی اثبات کنید.

پرسشها و تمرینات دوره ای فصل ۱۷

۱. چرا توابع تحلیلی مختلط را می توان برای حل مسائل پتانسیل دو بعدی مورد استفاده قرار داد؟ جمله یک مساله «دو بعدی» به چه معنی است؟

۲. پتانسیل مختلط چیست؟ و چه مزیتی دارد؟

۳. مساله دیریکله به چه معنی است؟

۴. به چه علت نگاشت همدیسی در حل مساله دیریکله به کار رفته است؟

۵. مساله مقدار کرانه ای آمیخته چیست؟ و در کجا این فصل مطرح شده است؟

۶. خط جریان چیست؟

۷. اگر جریانی مربوط به روش‌هایی از آنالیز مختلط باشد، شرایط جریانی که باید برقرار باشند را تعیین کنید.

۸. توضیح دهید که چرا جریان گرما در حالت پایدار در مورد نظریه پتانسیل بازگشته است.

۹. معنی پتانسیل انطباقی چیست؟

۱۰. برخی از خواص مشترک قابل توجه در مورد تمام توابع همساز را نام ببرید.

۱۱. پتانسیل بین استوانه های $1 = |z|$ با پتانسیل صفر و $5 = |z|$ با پتانسیل 100 ولت را بایايد.

۱۲. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۱۱ را بایايد.

۱۳. پتانسیل بین استوانه های $1 = |z|$ و $100 = |z|$ ، که به ترتیب دارای پتانسیلهای 10 کیلووات و صفر قرار گرفته اند را بایايد.

۱۴. خطوط هم پتانسیل $= U$ بین استوانه های $0/25 = |z| = 4$ که در 220 -ولت و 220 ولت قرار گرفته اند را باید.
۱۵. پتانسیل Φ درربع اول از صفحه xy را طوری باید که محور x دارای پتانسیل 110 ولت و محور y با پتانسیل صفر باشند.
۱۶. پتانسیل بین صفحات $\frac{\pi}{6} = \text{Arg}z$ که در 4 کیلووات و $\frac{\pi}{3}$ کیلووات قرار گرفته اند را باید.
۱۷. اگر قسمت منفی محور x دارای پتانسیل 400 ولت و قسمت مثبت محور x دارای پتانسیل صفر باشند، آنگاه پتانسیل مختلط صفحه فوقانی چیست؟
۱۸. پتانسیل بر شعاع $x = y > 0$ ، و بر قسمت مثبت محور x را طوری باید که قسمت مثبت محور y در 1200 ولت و قسمت منفی محور y در صفر قرار گرفته باشد.
۱۹. پتانسیل بین صفحات $\frac{x}{2} = y$ ، که در 100 ولت، و 4 ولت قرار گرفته اند را باید.
۲۰. در مساله 18 ، فرمولی را برای پتانسیل بر خط $1 = x$ باید. پتانسیل در نقطه $1 = y = 2$ را پیدا کنید.
۲۱. خطوط هم دمای $z = 10(1+i)$ را باید و نشان دهید که $F(z) = \text{Ra}_m$ توان به عنوان پتانسیل مختلط جریان گرمای بین دو صفحه موازی تعبیر کرد.
۲۲. دما در نیم صفحه فوقانی را در صورتی باید که قسمت $4 < x$ از محور x در دمای 100 درجه سانتیگراد و قسمتهاي ديگر در دمای صفر قرار گرفته باشند.
۲۳. نشان دهید که خطوط هم دمای $F(z) = -iz^2 + 2z$ هذلولی هستند.
۲۴. اگر ناحیه بین دو استوانه متحده مرکز به شعاعهای 2 سانتیمتر و 10 سانتیمتر شامل آب باشد و خارج استوانه در دمای 20 درجه سانتیگراد قرار گرفته باشد، تاچه درجه حرارتی باید استوانه داخلی را گرم کنید تا در فاصله 5 سانتیمتری محور آن درجه حرارتی برابر 30 درجه سانتیگراد داشته باشیم.
۲۵. خطوط هم دمای $F(z) = k \ln(z - 1 - i)$ ، که در آن k عدد حقیقی است را باید و نشان دهید که این مقدار پتانسیل مختلط بین استوانه های هم محور با محور در $1+i$ می باشد.
۲۶. دما در قرص واحد $1 \leq |z|$ به صورت یک سری نامتناهی را طوری باید که نیم دایره سمت چپ $= |z|$ دمای 100 درجه سانتیگراد و نیم دایره سمت راست در دمای صفر باشند.
۲۷. مساله 26 را در حالتی پاسخ دهید که نیم دایره فوقانی در دمای 20 درجه سانتیگراد و تحتانی در دمای صفر باشند.

۲۸. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۲۷ را به صورت یک سری بباید. حاصل جمع این سری چیست؟ راهنمایی. از مثال ۴، بخش ۱۴ استفاده کنید.

۲۹. مساله ۲۶ را در صورتی پاسخ دهید که بر روی دایره واحد

$$T(1, \theta) = 30 \theta^2 \quad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

۳۰. خطوط هم پتانسیل $F(z) = \frac{1}{1-z}$ را یافته و آنها را رسم کنید.

مطلوب است خطوط جریان و سرعت جریان با پتانسیل مختلط

$$z^3 + \frac{1}{z} \cdot 34 \quad z + \frac{4}{z} \cdot 33 \quad z^2 + z \cdot 32 \quad -ikz \quad \text{عدد حقیقی است) ۳۱}$$

۳۵. نشان دهید که جریان مربوط به مساله ۳۴ دارای نقاط ایستانی در $1 \pm i$ هستند. آیا ارتباطی با مثال ۲ بخش ۱۷ ۴. می توان مشاهده کرد؟

خلاصه فصل ۱۷

کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل
نظریه پتانسیل، نظریه جوابهای معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

است. جوابهایی از معادله (۱) که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته دارند را جوابهای همساز می نامند. معادله (۱) معادله با مشتقات جزئی مهمی در فیزیک می باشد، که در حالت دو و سه بعدی بسیار جالب می باشد. این معادله در الکترواستاتیک (بخش ۱۷.۱)، مساله گرما در حالت پایدار (بخش ۳.۱۷)، جریان سیال (۴.۱۷)، جاذبه زمین، وغیره ظاهر می شود. گرچه در حالت سه بعدی نیاز به روش‌های دیگر داریم (ر.ک. فصل ۱۱)، نظریه پتانسیلی دو بعدی را می توان به کمک آنالیز مختلط مورد مطالعه قرار داد و بکار گرفت، چون قسمت‌های حقیقی و موهومی یکتابع تحلیلی همساز هستند (بخش ۵.۱۲). این تابع تحت نگاشت همدیسی همساز باقی می مانند (بخش ۲.۱۷)، در نتیجه نگاشت همدیسی به یک ابزار نیرومند در حل مسائل مقدار کرانه‌ای برای (۱)، همانطوری که در این فصل تشریح شده است، تبدیل می شود. با یک پتانسیل حقیقی Φ می توان یک پتانسیل مختلط

$$F(z) = \Phi + i\Psi \quad (2)$$

را با آن مرتبط ساخت. در این صورت هردو منحنی معروف ثابت $= \Phi$ و ثابت $= \Psi$ دارای یک معنی فیزیکی است. در الکترواستاتیک، این منحنیها خطوط هم پتانسیل و خطوط نیروی دافعه یا جاذبه (۱.۱۷) هستند. در مسائل گرما این منحنیها خطوط هم دما (منحنیهایی با دمای ثابت) و خطوط جریان گرما (۳.۱۷) هستند. در جریان سیال، این منحنیها خطوط هم پتانسیل از پتانسیل سرعت و خطوط جریان (بخش ۴.۱۷)

هستند.

برای قرص ، جواب مساله دیریکله بنا به فرمول پواسن (بخش ۱۷.۵) یا با یک سری که روی دایره کرانه ای به سری فوریه مقادیر کرانه ای (بخش ۱۷.۵) تبدیل می شود، به دست می آید. توابع همساز شبیه توابع تحلیلی ، دارای تعدادی خواص عمومی می باشد؛ مهمترین کاربردها، خاصیت مقدارمیانگین و خاصیت قدرمطلق ماگزیمم (بخش ۱۷.۶) هستند، که یکتاوی جواب مساله دیریکله را نتیجه می دهند (قضیه ۵، بخش ۱۷.۶).

سوالات ریاضیات مهندسی درآزمونهای کارشناسی ارشد

مهندسی برق - ۶۷ - ۶۸

۱. جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ با شرایط اولیه و کرانه ای

$$u_x(x, 0) = p, \quad u_y(0, y) = q, \quad u(0, 0) = p + q$$

عبارت است از

. ۱. $u(x, y) = xy + p + q$

. ۲. $u(x, y) = xy + px + qy + p + q$

. ۳. $u(x, y) = xy + (p+q)x + (p+q)y + p + q$

. ۴. $u(x, y) = (p+q)xy + p + q$

حل. از $u_{xy} = 1$ نتیجه می شود $u_x(x, 0) = p$. هم اکنون از $u_x = y + f(x)$ می یابیم

و در نتیجه $u_x = y + p$ و از آنجا $u = xy + px + g(y)$ با توجه به $u_y(0, y) = q$ و از

طرفی $g'(y) = q$ و در نتیجه $g(y) = qy + C$ بنابراین $u_y(0, y) = g'(y) = q$

و از آنجا $u(0, 0) = p + q$. هم اکنون از $u = xy + px + qy + C$ می یابیم

و در نتیجه جواب درست مساله گزینه (۲) است.

۲. کدامیک از روابط زیر در معادله لاپلاس صدق نمی کند.

$$u = [(x-a)^r + (y-b)^r]^{\frac{1}{r}}. \quad ۱$$

$$u = \delta(x-a)(y-b). \quad ۲$$

$$u = \ln[(x-a)^r + (y-b)^r]. \quad ۳$$

$$u = (x-a)^r - (y-b)^r. \quad ۴$$

حل. بدیهی است که در فضای دو بعدی لگاریتم فاصله جواب معادله لاپلاس است، یعنی u در پاسخ اول جواب معادله لاپلاس است. همینطور u در پاسخهای ۳ و ۴ جواب معادله لاپلاس هستند و تنها جوابی که در معادله لاپلاس صدق نمی کند جواب (۲) است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳. انتگرال $\int_C \frac{\sin \pi z^r + \cos \pi z^r}{(z-1)(z-2)} dz$ که در آن $|z| = 3$ برابر است با

۴. هیچ کدام

$2\pi i \cdot 3$

$4\pi i \cdot 2$

$-4\pi i \cdot 1$

$$\text{حل. هرگاه } f(z) = \frac{\sin \pi z^r + \cos \pi z^r}{(z-1)(z-2)}$$

$$\oint_{|z|=r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=1} \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \left\{ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z^r + \cos \pi z^r}{z-2} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\sin \pi z^r + \cos \pi z^r}{z-1} \right\}$$

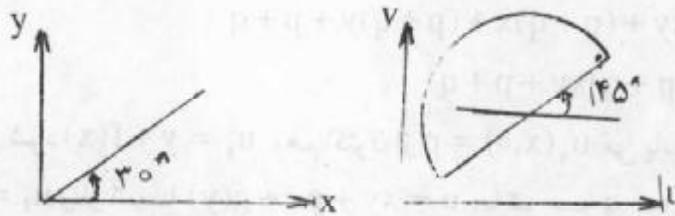
$$= 2\pi i (1+1) = 4\pi i.$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۴. کدام یک از تبدیلات همدیس (همشکل) زیر سایه هاشور خورده در صفحه Z را به یک نیمه قرص به شعاع واحد در صفحه W (مطابق شکل) تصویر می کند.

$$w(z) = +e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z^r - i}{z^r + i} + 2 + 2i . 2 \quad w(z) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z^r - i}{z^r + i} + 2 + 2i . 1$$

$$w(z) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z^r - i}{z^r + i} + 2 + 2i . 4 \quad w(z) = +e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z^r - i}{z^r + i} + 2 + 2i . 3$$



حل. تبدیل $w_1 = z^r$ زاویه 30° درجه را به ربع اول تبدیل می کند و تبدیل $w = \frac{z^r - i}{z^r + i}$ آن را بروی

نیم قرص فوقانی واحد می نگارد و $w = e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z^r - i}{z^r + i}$ آن را 45° درجه دوران می دهد و نهایتاً گشت

$w = e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z^r - i}{z^r + i} + 2 + 2i$ مرکز نیم قرص را به نقطه $2 + 2i$ برد و شکل داده شده حاصل می شود.
بنابراین پاسخ صحیح گزینه (۲) است.

۵. تبدیل $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که نقاط $-1, i, 1$ از صفحه Z را به ترتیب روی نقاط $-i, 0, i$ واقع در صفحه W می نگارد، ناحیه $|z| < 1$ را به کدام یک از نواحی زیر تبدیل می کند.

$$v < 0.4 \quad v > 0.3 \quad u < 0.2 \quad u > 0.1$$

حل. تبدیلی کسری خطی ای که سه نقطه $-1, i, 1$ را به ترتیب بر روی نقاط $-i, 0, i$ می نگارد عبارت

$$\text{است از } \frac{(w-i)(i+1)}{(w+i)(i-1)} = \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)}$$

$$\text{و از آنجا بعد از یک محاسبه مختصر می یابیم} \\ z = \frac{(1-i)(w-1)}{(1+i)(w+1)}$$

$$\left| \frac{(1-i)(w-1)}{(1+i)(w+1)} \right| = \left| \frac{w-1}{w+1} \right| < 1$$

یا $|w-1| < |w+1|$ و از آنجا u . بنابراین جواب صحیح گزینه (۱) است.

۶. تابع v در تابع تحلیلی $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ که در آن $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ و $u(x,y) = x^r - 3xy$ برابر است با $w(0) = 0$

$$v(x,y) = 3x^r y - y^r . ۲$$

$$v(x,y) = x^r - 3x^r y . ۱$$

۴. هیچکدام

$$v(x,y) = x^r - 3xy^r . ۳$$

حل. تابع v همساز است. در اینجا باید مزدوج همساز آن را بباییم، یعنی v را

باید طوری بباییم که $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$ باشد، از $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^r - 3y^r$ و $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ می باییم

$$v(x,y) = 3x^r y + h(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^r + h'(y) = 3x^r - 3y^r$$

و از آنجا $h'(y) = -3y^r$. بنابراین $h(y) = -y^r$ ، از این رو $v(x,y) = 3x^r y - y^r$ و درنتیجه گزینه (۲) صحیح است.

مساله فوق را می توان با توجه به اینکه $u(x,y) = x^r - 3xy$ برابر قسمت حقیقی z است باید $v(x,y)$ برابر قسمت موهومی آن باشد، یعنی $v(x,y) = 3x^r y - y^r$ و درنتیجه همانطور که مذکور شدیم گزینه (۲) درست است.

۶۸-۶۹ مهندسی برق

۷. جوابی از معادله $u_x + u_y = 2(x+y)u$ عبارت است از

$$u = ke^{x^r - y^r + c(x+y)} . ۲$$

$$u = ke^{x^r + y^r + c(x-y)} . ۱$$

$$u = ke^{x^r - y^r + c(x-y)} . ۴$$

$$u = ke^{x^r + y^r + c(x+y)} . ۳$$

حل. به جستجوی جوابی به صورت $u(x,y) = F(x)G(y)$ برای معادله می پردازیم. با قراردادن آن در معادله می باییم

$$\frac{F'}{F} - 2x = 2y - \frac{G'}{G} = c \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} = 2x + 2y \quad \text{یا} \quad F'G + FG' = 2(x+y)FG$$

توجه به آن به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسیم

$$\frac{G'}{G} = 2y - c \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F} = 2x + c$$

که به ترتیب دارای جوابهایی به صورت $G = k_1 e^{y^r - cy}$ و $F = k_2 e^{x^r + cx}$ است. با توجه به آن $u(x,y) = F(x)G(y) = ke^{x^r + y^r + c(x-y)}$ ؛ $k = k_1 k_2$

و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۸. تابع $w = f(y - z, z - x, x - y)$ جواب کدام یک از معادلات با مشتقهای جزئی زیر است.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} . \quad ۲ \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۱ . \quad ۱$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = ۰ . \quad ۴ \quad \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = ۰ . \quad ۳$$

حل. با فرض $r = x - y$, $q = z - x$, $p = y - z$ می‌باشیم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial q}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۰$$

و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۹. بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ عبارت است از

$$\delta(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt . \quad ۲$$

$$\delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos nt . \quad ۱$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \right) . \quad ۴$$

$$\delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nt . \quad ۳$$

حل. داریم

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) dt = \frac{1}{2\pi}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi}, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \sin nt dt = 0$$

$$\text{بنابراین } \delta(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos nt . \quad \text{از این رو گزاره (۴) درست است.}$$

۱۰. اگر سری فوریه تابع $f(x) = x^r$; $-\pi \leq x \leq \pi$ به صورت

$$\int_0^x f(u) du = \frac{\pi^r}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} \cos nx$$

$$\frac{x^r}{3} = \frac{\pi^r}{3} x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} \sin nx . \quad ۱$$

$$\frac{x^r}{3} = \pi^r \frac{x}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx . \quad 2$$

۳. بسط فوریه با انتگرالگیری از بسط فوریه $f(x) = x^r$ به دست نمی آید.

$$\frac{x^r}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx . \quad 4$$

حل. تابع $f(x) = x^r$ در شرایط قضیه انتگرال فوریه صدق می کند، چون به طور نکه ای هموار است. بنابراین

$$\int_0^x u^r du = \frac{x^r}{3} = \frac{\pi^r}{3} x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} \sin nx$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۱۱. جوابی از معادله موج $u_{xx} = a^2 u_{tt}$ را به ازای $0 < x < \infty$ و $0 < t < \infty$ که در شرایط اولیه $u(0,0) = 0$ و $u_t(0,0) = 0$ و شرط کرانه ای $u(x,t) = \mu(t)$ صدق می کند عبارت است از

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & ; t < x \\ \mu(t-x); & t > x \end{cases} . \quad 2 \qquad u(x,t) = \mu(t-x) . \quad 1$$

$$u(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) . \quad 4 \qquad u(x,t) = \begin{cases} 0 & ; t < \frac{x}{a} \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right); & t > \frac{x}{a} \end{cases} . \quad 3$$

حل. پاسخهای ۱، ۲، ۳ و ۴ در شرایط صدق نمی کند و حال آنکه پاسخ ۳ در معادله و در کلیه شرایط صدق می کند. بنابراین (۳) گزینه صحیح است.

۱۲. رابطه $xyz = \phi(x+y+z)$ جواب کدام یک از معادلات زیر است.

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2z . \quad 2 \qquad y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z . \quad 1$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \quad 4 \qquad xy\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = z(x-y) . \quad 3$$

حل. با فرض $v = x+y+z$ می یابیم $xyz = \phi(v)$. با مشتقگیری از طرفین این معادله به ترتیب نسبت به x و y داریم

$$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial v},$$

$$xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial v},$$

و از آنجا

$$(x-y)z + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)xy = 0.$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

۱۳. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^r - 1}{x^r + 5x^r + 4} dx$ برابر است با

۴. صفر

$\frac{\pi}{6} \cdot 3$

$\frac{5\pi}{6} \cdot 2$

۱. ۱

حل.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^r - 1}{x^r + 5x^r + 4} dx &= 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فرقانی}} \operatorname{Res} \frac{z^r - 1}{z^r + 5z^r + 4} \\ &= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z^r - 1}{4z^r + 1 \circ z} \right|_{z=i} + \left. \frac{z^r - 1}{4z^r + 1 \circ z} \right|_{z=\bar{i}} \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{5}{12i} - \frac{1}{3i} \right\} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

بنابراین جواب (۳) درست است.

۱۴. تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^r}{z} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$

۱. در $z = 0$ پیوسته نیست.

۲. در $z = 0$ مشتق دارد ولی معادلات کوشی - ریمان برقرار نیستند.

۳. در $z = 0$ پیوسته و معادلات کوشی - ریمان برقرار هستند.

۴. در $z = 0$ مشتق ندارد و معادلات کوشی - ریمان برقرار نیستند.

حل. با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ و $\bar{z} = re^{-i\theta}$ می‌باییم $f(z) = re^{-ri\theta}$.

چنانچه z به سمت صفر میل کند، $z = 0$ از آنجا $f(z)$ نیز به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین $f(z)$ در $z = 0$ پیوسته است.

دارای مشتق نیست زیرا

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\frac{(\bar{z})^r}{z}}{\frac{z}{z}} = \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^r = \left(\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} \right)^r = e^{-ri\theta}$$

وابسته به θ است و اگر $\theta \rightarrow 0$ دارای حد نیست. ولی شرایط کوشی - ریمان برقرارند. در واقع

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} f(x+0i)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} f(0+iy)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1.$$

$$\text{از این رو } \frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial v(0,0)}{\partial y} . \text{ از طرفی}$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} f(0+iy)}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} f(x+0i)}{x} = 0.$$

بنابراین $\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(0,0)}{\partial x}$. درنتیجه معادلات کوشی - ریمان برقرار هستند. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط z که در آنها قطعه خطهای بینهایت کوچک تحت تبدیل $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که در آن a, c, b, d ضرایب ثابت و $ad - bc \neq 0$ و $c \neq 0$ دوران نمی کنند. ۱. یک دایره است. ۲. یک بیضی است.

۳. یک خط راست می باشد. ۴. در حالت کلی مشخص نیست.

حل. از $dw = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} dz$ و با توجه به خواص نگاشت همدیس باید

$\operatorname{Arg}(z + \frac{d}{c})$ صفر باشد. این موضوع با ثابت بودن $\operatorname{Arg}(cz + d) = \operatorname{Arg}(z + \frac{d}{c})$ معادل است.

بنابراین مکان هندسی یک خط راست است. زیرا انتقال آن به اندازه بردار ثابت $\frac{d}{c}$ خط مستقیم

ثابت $= \operatorname{Arg}(z + \frac{d}{c})$ را به دست می دهد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۶. نقش ناحیه زاویه ای $\theta < \phi < \frac{\pi}{4}$ با تبدیل $w = -\frac{i}{z}$ عبارت است از

$$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2} . ۲ \quad \frac{\pi}{2} < \phi < \pi . ۱$$

$$\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi . ۴ \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2} . ۳$$

حل. z ناحیه $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ را به ناحیه $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ تبدیل می کند. این ناحیه را به روی ربع

چهار می نگارد و آن را به اندازه $\frac{\pi}{2} -$ دوران می دهد و به ربع سوم می برد. بنابراین ناحیه مورد نظر با

نگاشت داده شده بر روی ربع سوم $\frac{3\pi}{2} < \phi < \pi$ نگاشته می شود و درنتیجه گزینه (۲) درست است.

۱۷. مبداء مختصات چه نوع نقطه تکین (ویژگی) برای تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ است و مانده تابع در این نقطه کدام است.

$$\text{Res}(0) = 1 \quad \text{قطب مرتبه دوم و } 1$$

$$\text{Res}(0) = 0 \quad \text{قطب برداشتی و } 0$$

$$1. \text{قطب ساده و } 1 = \text{Res}(0)$$

$$3. \text{صفر ساده و } 0 = \text{Res}(0)$$

حل. بدیهی است که نقطه $z=0$ یک قطب ساده تابع است زیرا در همسایگی $z=0$ تابع $\frac{\sin z}{z}$ با

$\frac{1}{z}$ معادل است و چون تنها در پاسخ اول با قطب ساده موافق است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

۱۸. هرگاه C کران مربعی با رئوس $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ باشد، آنگاه $\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2 + 1)} dz$ که در آن انتگرال‌گیری

درجت مثلثاتی است عبارت است از

$$-4\pi i \cdot 4 \quad 2\pi i \cdot 3 \quad 4\pi i \cdot 2 \quad -2\pi i \cdot 1$$

حل. تابع $f(z) = \frac{\cosh \pi z}{z(z^2 + 1)}$ دارای قطب‌های $z = \pm i$ در درون ناحیه مورد نظر است.

بنابراین

$$\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2 + 1)} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res}_{z=0} f(z) + \text{Res}_{z=i} f(z) + \text{Res}_{z=-i} f(z) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left. \frac{\cosh \pi z}{z^2 + 1} \right|_{z=0} + \left. \frac{\cosh \pi z}{z^2 + 1} \right|_{z=i} + \left. \frac{\cosh \pi z}{z^2 + 1} \right|_{z=-i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ 1 + \frac{\cosh \pi i}{-2} + \frac{\cosh \pi i}{-2} \right\} = 2\pi i \left\{ 1 - \frac{\cos \pi}{2} - \frac{\cos \pi}{2} \right\} = 4\pi i.$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

مهندسی برق ۷۰-۶۹

۱۹. هرگاه $f(t+2) = f(t)$ و $f(t)$ آنگاه سری فوریه تابع $f(t)$ عبارت است از

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \cos((2n-1)\pi t) \cdot 2$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} t \cdot 1$$

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{2} t \cdot 4$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cos n\pi t \cdot 3$$

حل. یک راه حل برای مساله محاسبه مستقیم a_n و b_n است. راه حل کوتاه‌تر از آن در این مساله

از طریق سعی و خطای حاصل می‌شود. نخست توجه می‌کنیم که تابع همه جا پیوسته است. بنابراین

سری فوریه آن همواره با مقدار تابع برابر است. به ازای $t=0$ مقدار تابع برابر صفر و حال آنکه مقدار

سری در پاسخ (۱) بیشتر از $\frac{1}{2}$ است، در واقع به ازای $t=0$ داریم $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} > \frac{1}{2}$. در پاسخ

(۳) به ازای $\circ = t$ به سری واگرای $(-1)^n$ می‌رسیم. همینطور به ازای $1 = t$ به نتیجه $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ می‌رسیم و حال آنکه مقدار تابع در $t = 1$ برابر ۱ است. بنابراین پاسخ صحیح گزینه (۲) است.

۲۰. هرگاه $f(x + 4\pi) = f(x)$ و $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; 0 \leq x < 2\pi \\ -\sin x & ; -2\pi \leq x < 0 \end{cases}$ آنگاه در سری فوریه $f(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیر صفر باشند.

۱. زوج کسینوسی ۲. فرد کسینوسی ۳. زوج سینوسی ۴. فرد سینوسی

حل. نظر به اینکه $f(x)$ زوج است $b_n = 0$ و گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند از طرفی

$$a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \sin x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \sin x \cos \frac{n}{4} x dx.$$

اگر $n = 2k$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{4\pi} \sin x \cos 2kx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \{\sin(1-k)x + \sin(1+k)x\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{1-k} \cos(1-k)x \Big|_0^{4\pi} - \frac{1}{1+k} \cos(1+k)x \Big|_0^{4\pi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

۲۱. مقدار انتگرال ناصره (توسعی) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos zx}{x^2 + 1} dx$ برابر است با

$$-\pi \cdot 4 \quad \frac{\pi}{2e^{\pi}} \cdot 3 \quad \pi \cdot 2 \quad \frac{\pi}{e^{\pi}} \cdot 1$$

حل.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos zx}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} \right\} = \pi e^{-1}.$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲۲. تبدیل 1 $w = f(z) = z^2 + 2az + 1$ ، که در آن a یک پارامتر حقیقی است، مرز (کران) C دایره واحد واقع در صفحه مختلف z را به مرز Γ واقع در صفحه w تبدیل می‌کند. با توجه به آن حوزه تعریف و حوزه مقادیر تابع

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

عبارت است از

۱. حوزه تعریف مجموعه اعداد حقیقی و حوزه مقادیر $\phi(\alpha) = 1$

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 1 & ; |\alpha| > 1 \\ 0 & ; |\alpha| < 1 \end{cases}$$

۲. حوزه تعریف مجموعه اعداد حقیقی به جز $1 \pm$ و حوزه مقادیر

$$\phi(\alpha) = 1 ; |\alpha| \neq 1$$

۳. حوزه تعریف مجموعه اعداد حقیقی به جز $1 \pm$ و حوزه مقادیر

$$\phi(\alpha) = 1 ; |\alpha| > 1$$

۴. حوزه تعریف مجموعه $1 > |\alpha|$ از اعداد حقیقی و حوزه مقادیر

حل . داریم

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{z + \alpha}{z^r + 2\alpha z + 1} dz.$$

ریشه های $z = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^r - 1} = -\alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^r}$ برابر بازی $1 \leq |\alpha|$ است که واقع بر محيط دایره است و $\phi(\alpha)$ تعریف نمی شود. به ازای $|\alpha| > 1$ معادله مورد نظر دارای دو ریشه $z = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^r - 1}$ است که یکی واقع دایره واحد و دیگری واقع در خارج آن است و

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{z + \alpha}{z^r + 2\alpha z + 1} dz = \frac{1}{\pi i} \times 2\pi i \left. \frac{z + \alpha}{2z + 2\alpha} \right|_{z=z_1} = 1$$

که در آن z_1 آن ریشه مخرجتابع انتگرالده است که واقع در داخل دایره واحد است. بنابراین گزینه (۴) درست است.

۲۳. برای معادله دیفرانسیل با مشتقهای جزئی

$$e^{rx} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} + 2xe^{x+y} \frac{\partial^r u}{\partial x \partial y} + e^{ry} \frac{\partial^r u}{\partial y^r} = 0$$

کدام گزاره زیر درست است ؟

۱. به ازای هر x و y ازنوع هذلولی گون است. ۲. به ازای $y = 1$ ازنوع سهمی گون است.

۳. به ازای $x < 1$ و هر y ازنوع بیضی گون است.

۴. به ازای $y = x$ ازنوع هذلولی گون است.

حل . با فرض $x = e^x$ و $y = e^y$ می یابیم

$$\Delta = 4AC - B^r = 4e^{r(x+y)} - 4x^r e^{r(x+y)} = 4(1 - x^r)e^{r(x+y)}.$$

Δ به ازای $x < 1$ مثبت است و این مقدار از y نیز مستقل است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۲۴. هرگاه پتانسیلهای الکترواستاتیکی موجود بر روی بدنه دو استوانه هم محور و به شعاع ۱ و به

ترتیب برابر 110° و 220° و معادله لابلس به صورت $\frac{\partial^r u}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r u}{\partial \theta^r} + \frac{\partial^r u}{\partial z^r} = 0$ باشد،

آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با

$$110^\circ + 220^\circ . 2 = 110^\circ (Lnr + 1).$$

$$\frac{110}{e-1} (r+e-2) \cdot 4 = 110 \ln r + 220 \cdot 3$$

حل. به علت وجود استوانه های هم پتانسیل، پتانسیل موجود واقع در داخل دو استوانه تنها به r وابسته بوده و از θ مستقل است. بنابراین برای حل مساله کافی است نخست به حل معادله \circ

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ واز $u(r) = 110(\ln r + d)$ داریم و با توجه به آن می بایم $\frac{c}{r}$ بپردازیم. این معادله را به صورت $\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}$ می نویسیم و با توجه به آن می بایم $u' = \frac{c}{r}$ واز آنجا $u = c \ln r + d$ و $u(1) = 110$ و $u(e) = 220$ داریم (1) بنابراین گزینه (2) صحیح است.

۲۵. جواب مساله

$$u_{tt} = u_{xx}; 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 2 \sin x; 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0; t \geq 0$$

عبارت است از

$$u(x,t) = 2 \sin x \cos t. 2 \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \sin nx \sin nt. 1$$

$$u(x,t) = 2 \sin x \sin t. 4 \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos nx \sin nt. 3$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\text{که در آن } \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \text{ و}$$

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\lambda_n \pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx dx = 0; n \neq 1$$

و به ازای $n = 1$ داریم

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin x dx = 2.$$

بنابراین

$$u(x,t) = b_1 \sin t \sin x = 2 \sin t \sin x.$$

از این رو گزینه (4) درست است.

۷۰-۷۱ مهندسی برق

۲۶. انتگرال فوريه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1; |x| < 1 \\ 0; |x| > 1 \end{cases}$$

عبارت است از

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin n\pi x . ۲ \quad - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw . ۱$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw . ۴ \quad \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos w \sin wx}{w} dw . ۳$$

حل. چون تابع زوج است $b(w) = 0$ و

$$a(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos wx dx \frac{2}{\pi w} \sin w .$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \sin wx dw .$$

از اینرو گزینه (۴) درست است.

۲۷. اگر سری فوریه تابع $f(x) = \frac{1}{3}x$; $-\pi < x < \pi$ عبارت باشد با

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots, p = 2\pi,$$

آنگاه سری فوریه تابع $g(x) = x^r$; $-\pi < x < \pi$, $p = 2\pi$ برابر است با

$$g(x) = 4 \left(\frac{\pi^r}{12} - \cos x + \frac{1}{2^r} \cos 2x - \dots \right) . ۲ \quad g(x) = 2 \left(\cos x - \frac{1}{2^r} \cos 2x + \dots \right) . ۱$$

$$g(x) = -\sin x + \frac{1}{3^r} \sin 3x - \dots . ۴ \quad g(x) = 4 \left(-\sin x + \frac{1}{3^r} \sin 3x - \dots \right) . ۳$$

حل. با انتگرالگیری از ... - $\frac{1}{2^r} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$ می‌یابیم

$$\frac{x^r}{r} + c = -\cos x + \frac{1}{2^r} \cos 2x - \frac{1}{3^r} \cos 3x + \dots$$

$$x^r + r c = 4 \left(-\cos x + \frac{1}{2^r} \cos 2x - \frac{1}{3^r} \cos 3x + \dots \right)$$

و با انتگرالگیری از طرفین آن در فاصله $-\pi$ تا π می‌یابیم $c = -\frac{\pi^r}{2}$. از اینرو

$$x^r = 4 \left(\frac{\pi^r}{12} - \cos x + \frac{1}{2^r} \cos 2x - \dots \right) .$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۲۸. داریم

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^r x dx = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \cos nx)^r}{(n^r - 1)^r}$$

آنگاه مقدار عبارت

۴۲۳

ریاضیات مهندسی پیشرفته

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$$

برابر است با

$$\pi \cdot 4 \quad \frac{\pi + \lambda}{12} \cdot 3 \quad \frac{\pi}{12} \cdot 2 \quad \frac{\pi - \lambda}{16} \cdot 1$$

حل. با قراردادن $\pi = x$ در تساوی داده شده می‌بایم

$$2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^r (n+1)^r} = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}$$

و از آنجا
و زوج

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots = \frac{\pi - \lambda}{16}.$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۲۹. انتگرال $\oint_C \frac{e^z}{z^r (z+2)} dz$ که در آن C کران مریع $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ درجهت مثلثانی

است برابر است با

$$\frac{\pi i}{2} \cdot 4 \quad \frac{\pi i}{4} \cdot 3 \quad \frac{\pi i}{8} \cdot 2$$

حل. تنها قطب مرتبه دوم $z = 0$ واقع در داخل مریع مورد نظر است. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z^r (z+2)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^r (z+2)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{z+2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+2)e^z - e^z}{(z+2)^2} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

درنتیجه گزینه (۴) درست است.

۳۰. هرگاه $x = \frac{\pi}{4}$ و $z = x + iy$ ، آنگاه تحت نگاشت $w = \sin z$ خط $w = u + iv$ به کدامیک

از منحنیهای زیر تبدیل می‌شود.

$$u' + v' = \frac{1}{4} \cdot 2$$

$$u' + v' = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$u' - v' = \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$u' - v' = \frac{1}{2} \cdot 3$$

حل. $w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ و $u = \sin x \cosh y$ و $v = \cos x \sinh y$ در آن

از ای $x = \frac{\pi}{4}$ می‌بایم $u' - v' = \frac{1}{2}$ و $v' = \frac{1}{2} \sinh y$ و $u' = \frac{1}{2} \cosh y$. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۳۱. تابع $w = \ln z$ را به ازای عدد مختصات $r > 0$ و $\theta \in (-\pi, \pi]$ چنین تعریف

می‌کنیم $z = e^{i\theta}$ ، آنگاه $\ln z = \ln r + i\theta$ برابر است با

$$-i\pi \cdot 4 \quad i\pi \cdot 3 \quad i\frac{3\pi}{2} \cdot 2 \quad -i\frac{\pi}{2} \cdot 1$$

حل. داریم $z^r = e^{i\frac{r\pi}{2}}$ نظر به اینکه $\theta = \frac{3\pi}{2}$ بین $-\pi$ و π نیست، چنین می‌نویسیم $Lnz^r = Lne^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{\pi}{2}$ و از آنجا $z^r = e^{i(-\pi+\frac{r\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$32. \text{ انتگرال } \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \cos \theta}}$$

$$1.4 \quad 2\pi \cdot 3 \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 \quad \frac{1}{4} \cdot 1$$

حل.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \cos \theta}} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2 - \frac{1}{z}(z + \frac{1}{z})}} = \frac{1}{i} \int \frac{dz}{-z^2 + 2\sqrt{2}z - 1}$$

$$= \frac{4\pi i}{i} \operatorname{Res}_{z=\sqrt{-1}-z^r+2\sqrt{2}z-1} \frac{1}{z} = 4\pi \lim_{z \rightarrow \sqrt{-1}-2z+2\sqrt{2}} \frac{1}{z} = 2\pi.$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

$$33. \text{ ضریب } \frac{1}{z-1} \text{ در بسط لوران تابع } \frac{1}{z(z-5)}$$

$$1. \frac{1}{5} \cdot 4 \quad \frac{1}{8} \cdot 3 \quad \frac{1}{2} \cdot 2$$

حل. چنین می‌نویسیم

$$\frac{1}{z(z-5)} = \frac{-\frac{1}{5}}{z} + \frac{\frac{1}{5}}{z-5} = -\frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{(z-1)+1} - \frac{1}{(z-1)-4} \right\}$$

$$= -\frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{z-1} \left[1 - (z-1)^{-1} + (z-1)^{-2} - (z-1)^{-3} + \dots \right] + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z-1}{4}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \dots + \frac{1}{4} \left[1 + \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4} \right)^2 + \dots \right] \right\}.$$

بنابراین ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع در ناحیه $|z-1| < 1$ برابر $\frac{1}{5}$ است. درنتیجه گزینه (۴) درست است.

۳۴. جواب مساله

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0; \quad t \geq 0$$

عبارت است از

$$u(x, t) = 1 + \sin t \cos x \quad .1$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \sin((2n-1)t) \quad .2$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x) \quad .3$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x) \quad .4$$

حل. معادله دارای جوابی به صورت زیر است

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

که در آن

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi u_t(x, 0) \sin nx dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} ((-1)^{n+1} + 1).$$

بازوچه به اینکه a_n به ازای مقادیر زوج n صفر است، بافرض $n = 2k - 1$ می‌یابیم

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1} + 1)}{n} \sin nx \sin nt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)t) \sin((2k-1)x).$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

۳۵. معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ با تغییر متغیر $s = x - t, r = x + t$ و $u_{tt} - u_{xx} = 0$ به کدامیک از صورتهای زیر تبدیل

می‌شود.

$$u_{ss} = 0.4 \quad u_{rs} + u_r = 0.3 \quad u_{rs} = 0.2 \quad u_{rr} = 0.1 \quad .1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{حل.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad \text{و همینطور}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \quad \text{با قراردادن آنها در } u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ می‌یابیم} \quad \text{بنابراین گزینه (۲) صحیح است.}$$

مهندسی برق ۷۱-۷۲

۳۶. اگر $v(x,y) = (x^r - y^r + 1)^r - 4x^ry^r - 4$ باشد و داشته باشیم $v(0,0) = 0$ ، آنگاه مقدار $v(1,1)$ برابر است با

-۲.۴ ۳. صفر ۴.۲ ۱.۱

حل. داریم

$$u(x,y) = (\operatorname{Re}(z^r + 1))^r - (\operatorname{Im}(z^r))^r = (\operatorname{Re}(z^r + 1))^r - (\operatorname{Im}(z^r + 1))^r.$$

بنابراین تابع تحلیلی مورد نظر یعنی تابع v باید برابر باشد با

بنابراین $c = 0$ نتیجه می شود $c = 0$ و از آنجا

$v(1,1) = \operatorname{Im}((1+i)^r + 1)^r = \operatorname{Im}(1+2i)^r = 4$ و $v(x,y) = \operatorname{Im}(z^r + 1)^r$ بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳۷. مانده تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر است با

-۱.۴ ۱.۳ $\frac{1}{2}$.۲ $-\frac{1}{2}$

حل. تابع تنها در $z=1$ تحلیل نیست. بنابراین باید مانده این تابع را در $z=1$ بیابیم. برای این منظور چنین می نویسیم

$$\begin{aligned} ze^{-\frac{1}{z-1}} &= (z-1)e^{-\frac{1}{z-1}} + e^{-\frac{1}{z-1}} \\ &= (z-1)\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-1)^2} - \dots\right) + \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-1)^2} - \dots\right) \\ &= ((z-1)-1 + \frac{1}{2(z-1)} - \dots) + \left(1 - \frac{1}{z-1} + \dots\right). \end{aligned}$$

مانده تابع برابر ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط فوق است. بنابراین

$$\operatorname{Re}(ze^{-\frac{1}{z-1}}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

درنتیجه گزینه (۱) درست است.

۳۸. مقدار انتگرال $\int_C (z^r + 1)^r dz$ در طول منحنی به معادله پارامتری $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ از نقطه $t=0$ تا $t=2\pi$ برابر است با

$$\frac{2\pi a}{15} (48\pi^r a^r + 40\pi^r a^r - 15) .2 \quad \frac{2\pi a}{15} (48\pi^r a^r + 40\pi^r a^r) .1$$

$$\frac{2\pi a}{15} (48\pi^r a^r + 40\pi^r a^r - 25) .4 \quad \frac{2\pi a}{15} (48\pi^r a^r + 40\pi^r a^r + 15) .3$$

حل. تابع $w = z^2 + 1$ همه جا تحلیلی است. پس انتگرال مورد نظر به مسیر انتگرال‌گیری بستگی نداشته و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر وابسته است. بنابراین انتگرال مورد نظر عبارت است از

$$\int_0^{i\pi} (z^2 + 1) dz = \int_0^{i\pi} (z^2 + 2z + 1) dz = \left(\frac{z^3}{3} + \frac{2}{3}z^2 + z \right) \Big|_0^{i\pi}$$

$$= \frac{32}{3}a^3\pi^3 + \frac{16}{3}a^2\pi^2 + 2a\pi.$$

درنتیجه گزینه (۳) درست است.

۳۹. تصویر ناحیه $\{z : |z - 1| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ کدام یک از زیر انتگرال‌گیری‌هاست؟

۱. ربع اول ۲. ربع دوم ۳. ربع سوم ۴. ربع چهارم

$$\text{حل. از } |z - 1| = \frac{|w+1|}{|w-1|} \text{ می‌یابیم } w = \frac{z}{z-2} \text{ واز آنجا } z = \frac{w+1}{w-1} \text{ داشته باشیم.}$$

بنابراین $|w+1| < |w-1|$. اگر داشتیم $|w+1| = |w-1|$ ، آنگاه w روی عمود منصف پاره خط از $z = 1$ بود یعنی محور y بود و وجود نامساوی نشان می‌دهد که مکان واقع در طرف چپ محور y است. از طرفی $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \frac{w+1}{w-1} > 0$ و $\operatorname{Im} w = \frac{2w}{w-1} > 0$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

به این سوال می‌توان به روش سعی و خطای نیز پاسخ داد. برای این منظور نقطه $z = 1 + \frac{1}{2}i$

$$\text{واقع در ناحیه مورد نظر را انتخاب کرده و در } w = \frac{z}{z-2} \text{ قرارداده، می‌یابیم}$$

$$w = \frac{1 + \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{2}i - 2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}{-\frac{3}{2} + i} = -\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - i} = -\frac{(\frac{3}{2} + i)^2}{5} = -\frac{\frac{9}{4} + 3i + 1}{5} = -\frac{\frac{13}{4} + 3i}{5}$$

که نقطه‌ای واقع در ربع سوم است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۴۰. اگر تابع $u(x,t)$ جواب مساله

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 ; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x(1-x); \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0 ; \quad t \geq 0$$

باشد، آنگاه $u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ عبارت است از

$$\frac{1}{8} \cdot 4 \quad 3. \text{ صفر} \quad -\frac{1}{24} \cdot 2 \quad \frac{1}{24} \cdot 1$$

حل. با تغییر متغیر $z = x + t$ و $u = x - t$ معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ تبدیل می شود که دارای جواب عمومی $u(v, z) = \phi(v) + \psi(z)$ است و درنتیجه معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ دارای جواب عمومی $u(x, t) = \phi(x + t) + \psi(x - t)$ است. با توجه به شرایط اولیه داده شده

$$u_t(x, 0) = \phi'(x) - \psi'(x) = x - x^r \quad u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = 0$$

$$g(x) = \frac{x^r}{2} - \frac{x^r}{3} \quad \text{با فرض } \phi(x) - \psi(x) = \frac{x^r}{2} - \frac{x^r}{3} + k \quad \text{یا}$$

$$\phi(x) + \psi(x) = g(x) + k \quad \text{با حل این معادله و با } \phi(x) - \psi(x) = g(x) + k$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(-g(x) + k) \quad \text{و } \phi(x) = \frac{1}{2}(g(x) + k)$$

$$u(x, t) = \phi(x + t) + \psi(x - t) = \frac{1}{2}\{g(x + t) - g(x - t)\}.$$

با توجه به شرایط کرانه ای داده شده $u_x(0, t) = g_x(t) - g_x(-t) = g'(t) - g'(-t) = 0$ و از آنجا $g'(t)$ تابعی زوج و $g(x)$ تابعی فرد است و از $u(0, t) = g'(-t)$ نتیجه می شود $g(x + 2) = g(x)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\{g^*(x + t) - g^*(x - t)\}$$

که در آن g^* گسترش زوج تابع $g(x)$ است. با توجه به این جواب می یابیم

$$u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{g^*\left(\frac{1}{4}\right) - g^*\left(-\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{g^*\left(\frac{1}{4}\right) - g^*\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۴۱. دمای حالت پایدار کراندار برای ناحیه ربع اول و شرایط داده شده ببروی نمودار زیر برابر است با

$$T(x, y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \cdot 2 \quad T(x, y) = T_0 - \frac{T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \cdot 1$$

$$T(x, y) = T_0 - \frac{T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2xy}{x^r + y^r} \cdot 4 \quad T(x, y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2xy}{x^r - y^r} \cdot 3$$

حل. به روش سعی و خطافی البداهه پی می بیریم که جواب درست گزینه (۲) است. زیرا تنها به ازای این جواب است که $T(0, y) = T_0$ و $T(x, 0) = T_0$.

۴۲. معادله $\frac{\partial^r u}{\partial x^r} + 2x \frac{\partial^r u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r} = x + y$ مفروض است، آنگاه
۱. این معادله از نوع بیضوی و بعضی جاها هذلولوی است.

۲. این معادله در برخی ناحیه سهموی است و در برخی ناحیه هذلولوی است.

۳. این معادله در برخی ناحیه بیضوی و در برخی ناحیه سهموی است.

۴. این معادله در برخی ناحیه بیضوی و در برخی ناحیه هذلولوی و در برخی نقاط سهموی است.

حل.

$$\Delta = 4AC - B^2 = 4(y+1) - 4x^2 = 4(y-x^2+1).$$

بدیهی است که Δ بر صفحه xy مقادیر مثبت و منفی و صفر را با توجه به تغییرات x و y می‌تواند اختیار کند. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۴۳. اگر بسط به سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \sin x$; $0 < x < \pi$ به صورت

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx$$

باشد، آنگاه مقدار سری عددی ... برابر است با

$$\frac{\pi^2 - 4}{2} \cdot 4 \quad \frac{\pi^2 - 8}{16} \cdot 3 \quad \frac{\pi^2 - 8}{4} \cdot 2 \quad \frac{\pi^2 - 8}{8} \cdot 1$$

حل. طبق فرمول پارسوال داریم

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{4}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}.$$

و زوج

واز آنجا

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۷۲ - ۷۳ - مهندسی برق

۴۴. هرگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $y = f(x)$; $-\pi < x < \pi$, $p = 2\pi$ به صورت

$$f(x) = (\sin x + \cos 2x)^2$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

مقدار b_2 برابر است با

$$1.4 \quad \frac{1}{3} \cdot 3 \quad 10.2 \quad \frac{1}{2}$$

حل.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin x + \cos 2x)^1 \sin 3x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos 2x - \cos 4x) \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \cos 4x) dx = 1. \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

۴۵. پتانسیل الکترو استاتیک بر روی نیمدایره های فوقانی و تحتانی یک دایره به مرکز مبداء و شعاع واحد به ترتیب برابر صفر و ۱ است. اگر مقدار پتانسیل در نقاط درونی دایره برابر باشد با

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) ; \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

آنگاه به ازای هر n داریم

$$B_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}, \quad A_n = 1.2 \quad B_n = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \quad A_n = 0.1$$

$$B_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}, \quad A_n = 1.4 \quad B_n = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \quad A_n = 0.3$$

حل.

$$u(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta) = \begin{cases} 0; & \text{بر نیمدایره فوقانی} \\ 1; & \text{بر نیمدایره تحتانی} \end{cases}$$

که در آن

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\theta d\theta = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin n\theta d\theta = \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1).$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۴۶. اگر مساله مقدار اولیه و کرانه ای

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = t$$

$$u(0, t) = 2t, \quad u(1, t) = t; \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 2; \quad 0 \leq x \leq 1$$

با تغییر متغیر $u(x, t) = v(x, t) + a(t)x + b(t)$ به صورت زیر درمی آید

$$v_{xx} - \frac{1}{c^2} v_{tt} = t$$

$$v(x, 0) = f_1(x), \quad v_t(x, 0) = f_2(x)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0$$

آنگاه

$$a = -1, b = -2t, f_1(x) = x, f_2(x) = 2 \quad .1$$

$$a = t, b = -2, f_1(x) = x, f_2(x) = 1 \quad .2$$

$$a = 1, b = -2t, f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2x \quad .3$$

$$a = -t, b = 2t, f_1(x) = x, f_2(x) = x \quad .4$$

حل. داریم

$$a(t) = -t, u(1, t) = a(t) + 2t = t, u(0, t) = b(t) = 2t$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = x \text{ به آن می‌یابیم} \quad u(x, t) = v(x, t) - tx + 2t$$

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = v_t(x, 0) - x + 2 = 0 \quad \text{بنابراین جواب صحیح گزینه (4)}$$

است.

۴۷. فرض کنید، یک میله به طول 10° که دو سر آن در دمای صفر است در لحظه اولیه

در دمای $u(x, 0) = x(10 - x)$ قرار گیرد. اگر در نقطه x و در لحظه t دما به صورت زیر باشد

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 c^2 t}$$

که در آن $\lambda_n = \frac{n\pi}{10}$ و c^2 آنگاه دما در وسط میله برابر است با

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}}{(2k)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k)^2 \pi^2}{100} t}. \quad 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}}{(2k-1)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{100} t}. \quad 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}}{(2k)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k)^2 \pi^2}{100} t}. \quad 4$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}}{(2k-1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{100} t}. \quad 3$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{n\pi}{10} x = x(10 - x)$$

حل. داریم

واز آنجا

$$A_n = \frac{1}{10} \int_0^{10} x(10 - x) \sin \frac{n\pi}{10} x dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{10} (10 - x) \cos \frac{n\pi}{10} x dx + \frac{40}{(n\pi)^2} \int_0^{10} \sin \frac{n\pi}{10} x dx = \frac{40}{(n\pi)^2} \left[-\cos \frac{n\pi x}{10} \right]_0^{10}$$

$$= \frac{40}{(n\pi)^2} (1 + (-1)^{n+1}).$$

بنابراین

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}(-1)^{k-1}}{\pi^2 (2k)^2} e^{-\frac{(2k)^2 \pi^2}{100} t} \sin \frac{(2k)^2 \pi^2}{100} x.$$

با قرار دادن $x = 5$ می‌یابیم

$$u(\omega, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda \circ \alpha(-1)^{k-1}}{\pi^r (2k-1)^r} e^{-\left(\frac{\pi k}{\lambda}\right)^r \pi^r t}.$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۴۸. تابع $f(z) = \frac{z}{(z^r - 4)^r \exp \frac{z}{z-2}}$ مفروض است. کدام یک از گزاره های زیر صحیح است.

۱. $z = 0$ صفر مرتبه ۷ و $z = 2$ قطب ساده تابع است.

۲. $z = 0$ صفر مرتبه ۷ و $z = 2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

۳. $z = 2$ نقطه تکین (ویژه) تنها نیست.

۴. $z = 2$ نقطه تکین اساسی و $z = -2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

حل. تابع $\frac{1}{z-2} \exp \frac{z}{z-2}$ همواره مخالف صفر است و نقطه $z = 2$ یک نقطه تکین اساسی برای آن است. و $z = -2$ یک قطب مرتبه دوم است. بنابراین گزینه (۴) درست است.

۴۹. اگر مقدار انتگرال $\oint_C \frac{e^z dz}{(z^r + 4)(z - 4)}$ برابر $2\pi i M$ باشد، که در آن M مجموع مانده های تابع

در قطب های واقع در درون دایره $|z| = 3$ بوده و جهت انتگرال گیری مشت است، آنگاه مقدار این انتگرال بر روی $C_1 : |z+1| + |z-1| = 4\sqrt{3}$ در جهت مشیت برابر است با

$$2\pi i(M + \frac{1}{2}e^{-4}).2 \quad 2\pi i(M + \frac{1}{2}e^4).1$$

$$2\pi iM.4 \quad 2\pi i(M - \frac{1}{2}e^4).3$$

حل. نقاط $z = \pm 2i$ و $z = \pm 1$ قطب های ساده تابع انتگرال ده هستند. نقاط $z = \pm 2i$ واقع در درون C و $z = 1$ واقع در خارج آن است. از طرفی با توجه به اینکه

$$|4+1| + |4-1| = 8 > 4\sqrt{3}, \quad |\pm 2i + 1| + |\pm 2i - 1| = \sqrt{5} < 4\sqrt{3}.$$

بنابراین از قطب های تابع تنها نقاط $z = \pm 2i$ داخل C_1 است. از این رو مقدار انتگرال برابر C_1 با هم برابر آن و درنتیجه پاسخ (۴) صحیح است.

۵۰. نقش ناحیه محصور بین دوایر $|z-i|=1$ و $|z-i|=2$ توسط $w = \frac{1}{z}$ عبارت است از

$$v < -\frac{1}{2} \text{ و } u > \frac{1}{2}.1 \quad v > \frac{1}{2} \text{ و } u > \frac{1}{2}.1$$

$$v > -\frac{1}{2} \text{ و } u < \frac{1}{2}.4 \quad v < -\frac{1}{2} \text{ و } u < \frac{1}{2}.3$$

حل. از $w = \frac{1-iw}{w}$ می یابیم $z = \frac{1-w}{w}$ و از آنجا $z-1 = \frac{1-w}{w}$. بنابراین داریم

$v < -\frac{1}{2}$. از نامساوی اول نامساوی $\frac{1}{2} > u$ و از نامساوی دوم نامساوی $\frac{|w+i|}{w} < 1$ حاصل می شود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۵۱. اگر تابع $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^n}$; $z \neq 0$ و $f(0) = 0$ ، آنگاه $f(z)$ برابر است با

$$\begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ \frac{1}{(2k+1)(2k+1)} & ; n = 2k+1 \end{cases} . ۱$$

$$\begin{cases} 0 & ; n = 2k+1 \\ \frac{1}{(2k+1)(2k+1)} & ; n = 2k \end{cases} . ۱$$

$$\begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)} & ; n = 2k+1 \end{cases} . ۲$$

$$\begin{cases} 0 & ; n = 2k-1 \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)} & ; n = 2k \end{cases} . ۳$$

حل. نظر به اینکه

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-\cos z}{z^n} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z \sin z}{2}}{z^n} = \frac{1}{2}$$

و برابر مقدار تابع در نقطه $z = 0$ است. بنابراین $f(z)$ یک نقطه برداشتی تابع است و تابع $f(z)$ تابعی است تام و سری تیلور آن در حول نقطه $z = 0$ عبارت است از

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^n} (1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} + \dots; |z| < \infty. \end{aligned}$$

بنابراین

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & ; n = 2k-1 \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)} & ; n = 2k \end{cases}$$

از این رو گزینه (۳) صحیح است.

۷۳-۷۴ مهندسی برق

۵۲. مقدار انتگرال $\int_C \frac{\ln(1+z)}{(2z-i)} dz$ که در آن C منحنی و جهت انتگرالگیری جهت

مثبت است، برابر است با

$$-\frac{4\pi}{3} \cdot 4 \quad -\frac{16\pi}{3} \cdot 3 \quad \frac{4\pi}{3} \cdot 2 \quad \frac{\pi}{3} \cdot 1$$

حل. تابع انتگرالده در درون و روی C بجز در $z = \frac{i}{2}$ که یک قطب مرتبه دوم است تحلیلی است.

$z = i$ نقطه شاخه‌ای $\ln(1+z^r)$ واقع در خارج C است زیرا فاصله آن تا $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{2}$ است که از شعاع دایره C بیشتر است. بنابراین

$$\int_C \frac{\ln(1+z^r)}{(2z-i)^r} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{i}{2}} \frac{\ln(1+z^r)}{(2z-i)^r} = \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{2z}{1+z^r} \right)_{z=\frac{i}{2}} = -\frac{2\pi}{3}.$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۵۳. اگر تبدیل فوریه تابع $f(t) = \frac{t}{t^r + a^r}$ به صورت زیر تعریف شود

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t) dt$$

که در آن w عددی است حقیقی، آنگاه داریم

$$F(w) = \pi i e^{-wa}.2 \quad F(w) = 2\pi i e^{-wa}.1$$

$$F(w) = -\pi i e^{-wa}.4 \quad F(w) = \begin{cases} -\pi i e^{-wa}; & w > 0 \\ \pi i e^{wa}; & w < 0 \end{cases}.3$$

حل. داریم

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-iwt}}{t^r + a^r} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos wt - i \sin wt)t}{t^r + a^r} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin wt}{t^r + a^r} dt \\ &= -i \operatorname{Im}(\pi i \operatorname{Res}_{z=ai} \frac{ze^{iwz}}{z^r + a^r}) = -i \operatorname{Im}(\pi i \frac{ze^{iwz}}{2z}|_{z=ai}) = -i \operatorname{Im}(\pi i \frac{aie^{-wa}}{2ai}) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\pi i e^{-wa}; & w > 0 \\ \pi i e^{wa}; & w < 0 \end{cases}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۵۴. اگر توابع $u(x,t)$ و $v(x,t)$ به ترتیب جواب مسائل با مقادیر کرانه‌ای و اولیه' زیر باشند

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}; & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = a \cos \frac{x}{\pi} + b \sin \frac{x}{\pi} = f(x) \\ u(0,t) = at \\ u(\pi,t) = bt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}; & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = f(x) - (\frac{1}{\pi} - \frac{x}{\pi})a - \frac{x}{\pi}b \\ v(0,t) = 0 \\ v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

آنگاه $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ برابر است با

$$at\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + bt\frac{x}{\pi}.2 \quad \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)a + \frac{x}{\pi}b.1$$

$$at(\pi - x) + btx \quad (at \cos \frac{x}{\pi} + bt \sin \frac{x}{\pi})$$

حل. تابع $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ جوابی از مساله زیر است

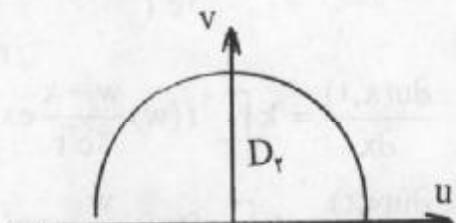
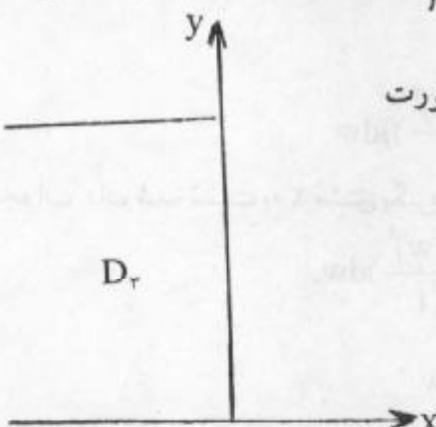
$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$w(x, 0) = 0 \quad , \quad w_t(x, 0) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)a + \frac{x}{\pi}b ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$w(0, t) = at \quad , \quad w(\pi, t) = bt ; \quad t \geq 0$$

بنابراین w را می‌توان به صورت $w(x, t) = \left(\frac{x}{\pi}b + a\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\right)t$ اختیار نمود. از این رو گزینه (۲) درست است.

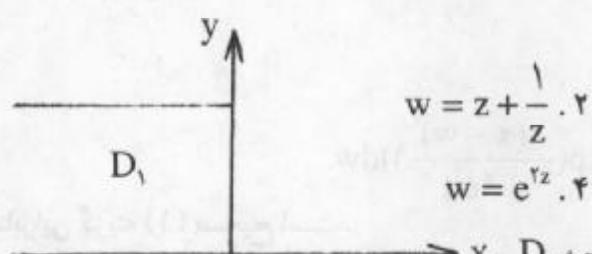
۵۵. تبدیلی که حوزه D_τ را بر روی حوزه D_v به صورت



می‌نگارد عبارت است از

$$w = e^z . ۱$$

$$w = \frac{\pi i}{\pi i - 4z} . ۳$$



$$w = z + \frac{1}{z} . ۲$$

$$w = e^{iz} . ۴$$

$$\Rightarrow x \quad D_\tau = 2z$$

حل. نخست با تبدیل $w_1 = 2z$ ناحیه D_τ را به ناحیه D_v تبدیل می‌کند و سپس $w = e^{iz} = e^{i\theta}$ آن را به داخل و روی نیم قرص D_v می‌نگارد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۵۶. اگر درجه حرارت در یک میله از دو طرف نامتناهی با شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ در نقطه x در لحظه t از روی انتگرال

$$u(x, t) = k \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-\frac{(x-w)^2}{4ct}} dw$$

که در آن $k = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}$ حاصل شد، آنگاه جواب مساله با مقدار اولیه و کرانه‌ای

سوالات ریاضیات مهندسی درآزمونهای کارشناسی ارشد

۴۴۶

$$u_t = c^r u_{xx}; \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = m; \quad x \geq 0$$

$$u_x(0, t) = 0; \quad t \geq 0$$

برابر است با

$$km \int_0^\infty (\exp(-\frac{(x+w)^r}{4c^r t}) + \exp(-\frac{(x-w)^r}{4c^r t})) dw \quad .1$$

$$km \int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{(x-w)^r}{4c^r t}) dw \quad .2$$

$$km \int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{(x+w)^r}{4c^r t}) dw \quad .3$$

$$km \int_{-\infty}^\infty (\exp(-\frac{(x+w)^r}{4c^r t}) + \exp(-\frac{(x-w)^r}{4c^r t})) dw \quad .4$$

حل. اگر از جواب داده شده نسبت به x مشتق بگیریم، می‌یابیم

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = k \int_{-\infty}^\infty f(w) \frac{w-x}{4c^r t} \exp(-\frac{(x-w)^r}{4c^r t}) dw,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = k \int_{-\infty}^\infty f(w) \frac{w}{4c^r t} \exp(-\frac{w^r}{4c^r t}) dw$$

که با فرض زوج بودن f برابر صفر است و به ازای $f(x) = m$ می‌یابیم

$$u(x, t) = km \int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{(x-w)^r}{4c^r t}) dw$$

$$= km \int_0^\infty (\exp(-\frac{(x+w)^r}{4c^r t}) + \exp(-\frac{(x-w)^r}{4c^r t})) dw.$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۵۷. کدامیک از توابع زیر تحلیلی است.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos z}{\sin^r z} & ; \quad z \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; \quad z = 0 \end{cases}, \quad |z| < 3, \quad , \quad 1. \text{ به ازای}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{z}{k}} \quad ; \quad k \neq 0 \quad 2. \text{ به ازای}$$

$$f(z) = \ln z; \quad z \neq 0 \quad 3. \text{ به ازای}$$

$$f(z) = x^r + iy^r; \quad x = y \quad 4. \text{ به ازای}$$

حل. گزینه (۲) صحیح نیست زیرا $z = 0$ نیز یک نقطه تکین است. $\ln z$ دارای خط شاخه‌ای است

و غیر تحلیلی است . تابع $f(z) = x^r + iy^r$ تها بر روی خط $y=x$ دارای مشتق است و تحلیلی نیست . بنابراین گزینه (۱) صحیح است . در واقع در همسایگی $z=0$ داریم

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^r z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^r z}{\sin^r z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{z^r}{r}}{z^r} = \frac{1}{2}.$$

درنتیجه تابع مورد نظر در گزینه (۱) در $z=0$ پسونده است و تابع در سراسر حوزه $|z| < 3$ تحلیلی است .

۵۸. اگر تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط تحلیلی و در شرط C (ثابت) صدق کند آنگاه $|f''(z)| \leq C$ برابر است با

$$A_1 z^r + A_r z + A_0 ; |A_1| < \frac{C}{2} \quad .2 \quad Az + B \quad .1$$

$$.3 \quad \frac{C}{2} z^r + Az + B \quad .3$$

که در آنها A_0, A_r, A_1, B اعداد ثابت هستند .

حل . نظر به اینکه f تابعی تام است ، $f''(z)$ نیز تابعی تام می باشد و چون کراندار است پس تابعی ثابت است ، یعنی $f''(z) = A_1 z^r + A_r z + A_0$ با دوبار انتگرالگیری از آن می یابیم $f(z) = \frac{1}{2} A_1 z^{r+2} + A_r z^2 + A_0 z + C$ بنابراین گزینه (۲) صحیح است .

۵۹. کلیه توابع تحلیل به صورت $f(z) = u(x) + iv(y)$ عبارت اند از

$$.1 \quad f(z) = \frac{1}{z} \quad .2 \quad a \text{ ثابت} \quad f(z) = z^r + a \quad .1$$

$$.3 \quad f(z) = cz + a \quad .4 \quad f(z) = z \quad .3$$

حل . داریم

$u'_x = v'_y$ و $u'_y = -v'_x = 0$ برای برقرار بودن این تساوی لازم است که

$v(y) = cy + b$ و از آنجا $v'(y) = c$

$$f(z) = u(x) + iv(y) = (cx + d) + i(cy + b) = cz + d + ib .$$

بنابراین گزینه (۴) درست است .

مهندسی برق ۷۴-۷۵

۶۰. در حل معادله موج در مختصات قطبی $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = \frac{1}{c^2} u_{tt}$ به روش تفکیک متغیرها به کدامیک از معادلات زیر مواجه می شویم .

۱. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از خانواده بسل

۲. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از نوع برنولی

۳. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از خانواده لزاندر

۴. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از نوع اویلر

حل. بدیهی است که گزینه (۱) صحیح است.

۶۱. می دانیم که جواب مساله

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l$$

به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$ است. با توجه به آن جواب مساله

$$u_t - u_{xx} = \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right); \quad 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0, t) = b, \quad u(l, t) = a$$

$$u(x, 0) = b + \frac{a-b}{l} x$$

که در آن a و b مقادیر ثابت هستند در $x = \frac{l}{2}$ عبارت است از

$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = b + \frac{a-b}{l} + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2} t\right)\right) . ۱$$

$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = b + \frac{a-b}{l} . ۲$$

$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = b + \frac{a-b}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x . ۳$$

$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2} t\right)\right) . ۴$$

حل. گزینه (۴) در شرط $u\left(\frac{l}{2}, 0\right) = b + \frac{a-b}{l}$ صدق نمی کند. گزینه (۲) در معادله صدق

نمی کند. به جهت وجود $\sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)$ در معادله جواب خصوصی آن تک جمله‌ای خواهد بود و گزینه (۳) نادرست است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

$$۶۲. نوع نقاط ویژه (تکین) تابع $I = \int_C \frac{dz}{1 - \cos z}$ و مقدار انتگرال که در آن$$

$|z| = 1$ و جهت انتگرال‌گیری جهت مثبت است عبارت است از

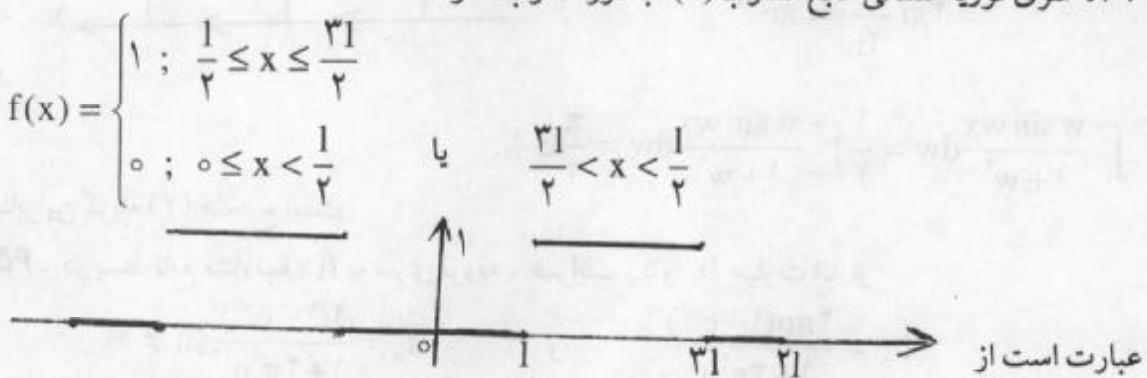
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} dz, \quad \text{از نوع قطب} \quad ۱$$

$$I = 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 4 \quad \text{از نوع اساسی} \quad I = 0 \cdot 3$$

$\int_C \frac{dz}{1 - \cos z} = 2 \int_C \frac{dz}{z^2} = 0.$

حل. $\int_C \frac{z^2}{1 - \cos z} dz = 2 \sin^2 \frac{z}{2}$ معادل است، بنابراین تابع انتگرالده دارای قطب مرتبه دوم و بنابراین گزینه (۱) درست است.

۶۳. سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)$ با دوره تنایوب ۲ و



$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)\pi} \cos \frac{(2m-1)\pi}{1} x \quad .1$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi} \cos \frac{(2m-1)\pi}{1} x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin \frac{2m\pi}{1} x \quad .2$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sin \frac{2m\pi}{1} x \quad .3$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi} \cos \frac{(2m-1)\pi}{1} x \quad .4$$

حل. می توان سری فوریه تابع را در فاصله $-1 < x < 1$ محاسبه نمود. این تابع زوج است و

$$a_n = \frac{1}{1} \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{1}{1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cos \frac{n\pi}{1} x dx = -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; n = 2m \\ \frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi} & ; n = 2m-1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۶۴. انتگرال غیرعادی (ناسره یا توسعی) $\int_0^\infty \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw$ برابر است با

سوالات ریاضیات مهندسی درآزمونهای کارشناسی ارشد

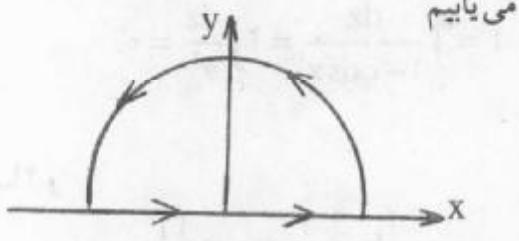
۴۵۰

۴. انتگرال مذبور و اگر است.

$$\pi e^{-x} \cdot 3 \quad \frac{\pi}{2} e^{-x} \cdot 2 \quad \frac{1}{\pi} e^{-x} \cdot 1$$

حل. با انتگرالگیری از تابع $f(w) = \frac{we^{iwx}}{1+w^2}$ بر روی C کران فوقانی نیمداire $R = |z|$ و قطر آن می‌باشد

$$\oint_C f(w) dw = 2\pi i \operatorname{Res}_{w=i} f(w) = 2\pi i \lim_{w \rightarrow i} \frac{we^{iwx}}{2w} \\ = 2\pi i \frac{e^{-x}}{2i} = \pi e^{-x}$$



$$\int_0^\infty \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۶۵. در بسط تابع متناوب $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n عبارت اند از

$$b_n = \frac{4\pi n(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2} \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2} \quad (n \neq 0)$$

۱. تابع $(x)f$ و مشتقهای مرتبه اول و مرتبه دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقهای مرتبه بالاتر ناپیوسته می‌باشند.

۲. عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای تابع $f(x)$ باشند.۳. تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در تناب در اصلی خود می‌باشد.

۴. ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع متناوب را مشخص نمایند.

حل. بدینهی است که گزینه (۴) درست است.

۶۶. با تغییر متغیر $u = v - tx + 2t$ مساله

$$u_{tt} - u_{xx} = t; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 2-x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = 2t, \quad u(1,t) = t; \quad t \geq 0$$

به کدامیک از مسائل زیر تبدیل می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} - v_{xx} = t; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x,0) = x, \quad v_t(x,0) = x, \quad v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \end{array} \right.$$

۱

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} - v_{xx} = t; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x,0) = x, \quad v_t(x,0) = v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \end{array} \right.$$

۲

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = t ; & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = x, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0 \end{cases} . \quad 3$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = t ; & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = x, \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0 \end{cases} . \quad 4$$

حل. با جایگزین کردن $u = v - tx + 2t$ در مساله و تبدیل مساله مورد نظر به یک مساله برای v می‌یابیم

$$\begin{aligned} v_{tt} - v_{xx} &= t; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) &= x, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

۶۷. تابع $f(z) = x^r + iy^r$ مفروض است، کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است.

۱. تابع $f(z)$ بر $x=y$ تحلیلی است.

۲. روابط کوشی - ریمان در $y=x$ برقرار است.

حل. بدیهی است که گزینه (۱) صحیح است چون تابع پیوسته $f(z) = x^r + iy^r$ تنها بر $x=y$ مشتقپذیر و برآن غیر تحلیلی است.

۶۸. نگاشت $f(z) = e^z$ بر روی کدامیک از زیر ناحیه $D = \{(x, y) : x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ نگارده است.

$$\begin{cases} (u, v) \mid u^r + v^r \leq 1, v \geq 0 \end{cases} . \quad 2 \quad \begin{cases} (u, v) \mid u^r + v^r \geq 1, u \geq 0 \end{cases} . \quad 1$$

$$\begin{cases} (u, v) \mid u^r + v^r \geq 1, v \geq 0 \end{cases} . \quad 4 \quad \begin{cases} (u, v) \mid u^r + v^r \leq 1, u \leq 0 \end{cases} . \quad 3$$

حل. با توجه به این که $\rho = e^x$, $\phi = v$, $\rho \leq 1$, $v \geq 0$ به توی قرص واحد $\rho \leq 1$ نگاشته می‌شود و چون $\pi \leq v \leq 0$ می‌یابیم $\phi \leq \pi \leq 0$. بنابراین ناحیه نیم قرص فوکانی جواب مساله است و گزینه (۲) صحیح است.

۷۵-۷۶ مهندسی برق

۶۹. هرگاه با توجه به تغییر متغیر $x = yu_{yy} + u_y$ و $v = xy$ معادله $z = xu_{xy}$ را حل کنیم، آنگاه جواب این معادله عبارت است از

$$u(x, y) = \phi(y^r) + \psi(xy) . \quad 2 \quad u(x, y) = \phi(y) + \psi(x^ry^r) . \quad 1$$

$$u(x, y) = \psi(xy) + \phi(x) . \quad 4 \quad u(x, y) = \phi(y) + \psi(xy) . \quad 3$$

حل. بدیهی است که گزینه (۴) صحیح است. درواقع

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} y + \frac{\partial u}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} xy + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} x + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x^2.$$

بنابراین

$$xa_{xy} - yu_{yy} - u_y = x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + x \frac{\partial u}{\partial z} - x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - x \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0$$

واز آنجا $u(x, y) = \phi(x) + \psi(xy)$ یا $u = \phi(v) + \psi(z)$ صحیح است.

۷۰. اگر $v(x, t) = u(x, t)w(t)$ و $v_t = c^2 v_{xx} - \beta v$ را برابر کدامیک از عبارات زیر انتخاب کنیم تا معادله فوق به معادله گرمایی $u_t = c^2 u_{xx}$ تبدیل شود. در این مساله c و β مقادیر ثابت هستند.

$$w = e^{\beta t}. \quad ۴ \quad w = e^{-\beta t}. \quad ۳ \quad w = \cos \beta t. \quad ۲ \quad w = \sin \beta t. \quad ۱$$

حل. داریم $v_t - c^2 v_{xx} + \beta v = 0$. با قرار دادن آنها در معادله $v_{xx} = u_{xx}w$, $v_t = u_t w + uw'$ می‌یابیم

$w(u_t - c^2 u_{xx}) + u(w' + \beta w) = 0$ یا $u_t w + uw' - c^2 u_{xx}w + \beta uw = 0$. حال اگر w را طوری انتخاب کنیم که $w = e^{-\beta t}$ یا $w' + \beta w = 0$. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۷۱. جواب مساله

$$y_{tt} = 4y_{xx}; \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$y(0, t) = f(t), \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t|_{t=0} = 0$$

و $y(x, t)$ وقتی $t \rightarrow \infty$ کراندار است عبارت است از

$$y(x, t) = f(t - \frac{x}{4}). \quad ۲ \quad y(x, t) = f(t - \frac{x}{2})u(t - \frac{x}{2}). \quad ۱$$

$$y(x, t) = f(\frac{x}{2} + t)u(-\frac{x}{2} + t). \quad ۴ \quad y(x, t) = f(\frac{x}{2} - t). \quad ۳$$

حل. مساله دارای جوابی به صورت $y(x, t) = \phi(x - 2t)$ است. که از روش دالامبر حاصل می‌شود. ϕ در آن دلخواه و مشتقپذیر است. به ازای $x = 0$ می‌یابیم

$$y(0, t) = \phi(-2t) = f(t).$$

با فرض $u = -2t$ داریم $y(x, t) = \phi(x - 2t)$ و با توجه به $y_t = f(-\frac{u}{2})$

به ازای $t = 0$ داریم $y(x, 0) = f(0 - \frac{x}{2}) = f(-\frac{x}{2}) = 0$. تابع به

ازای $x > 0$ تعریف شده است. هم اکنون تابع f را به ازای $x < 0$ به ازای 0 گسترش

می دهیم . با توجه به آن $y(x,0) = f(-\frac{x}{2})$ نیز برقرار می ماند . و تساوی $y(0,t) = f(t)$ به ازای $x > 0$ نیز برقرار است . بنابراین

$$y = f(t - \frac{x}{2})u(t - \frac{x}{2}) \quad \text{با} \quad y(x,t) = \begin{cases} f(t - \frac{x}{2}); t > \frac{x}{2} \\ 0; t < \frac{x}{2} \end{cases}$$

از این رو گزینه (۱) صحیح است .

۷۲. مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^r x}{x^r} dx$ برابر است با

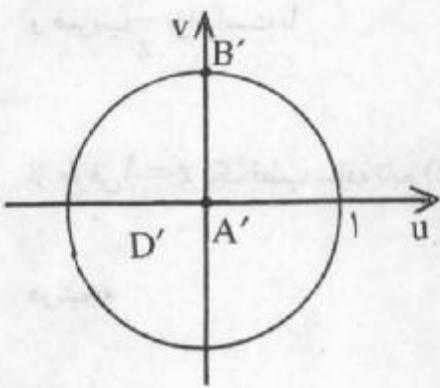
$$\pi \cdot 4 \quad \frac{\pi}{2} \cdot 3 \quad \frac{\pi}{4} \cdot 2 \quad \frac{\pi}{8} \cdot 1$$

حل . با انتگرالگیری به روش جزء به جزء و با توجه به اینکه انتگرال دیریکله است می پاییم

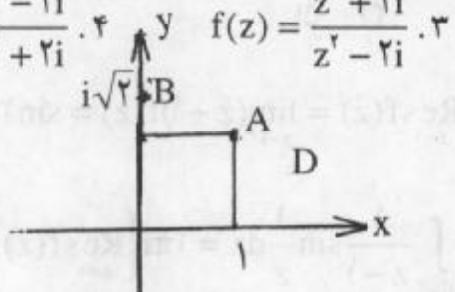
$$\int_0^\infty \frac{\sin^r x}{x^r} dx = \left\{ -\frac{1}{x} \sin^r x \right\}_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx \\ = \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2},$$

که در آن $u = 2x$. بنابراین گزینه (۳) درست است .

۷۳. تبدیلی که ناحیه D را بر روی A و B را به ترتیب روی نقاط A' و B' مطابق شکل زیر می نگارد عبارت است از



$$f(z) = e^{i\pi} \frac{z^r - 2i}{z^r + 2i} \cdot 2 \quad f(z) = e^{-i\pi} \frac{z^r + 2i}{z^r - 2i} \cdot 1 \\ f(z) = \frac{z^r - 2i}{z^r + 2i} \cdot 4 \quad f(z) = \frac{z^r + 2i}{z^r - 2i} \cdot 3$$



حل . نخست با تبدیل $z = w_1 = z^r$ ناحیه اول بر روی نیم صفحه فوقانی می نگاریم و سپس کلیه تبدیلاتی به صورت $f(z) = e^{i\theta} \frac{z^r - z_0}{z^r - \bar{z}_0}$ یا $f(z) = e^{i\theta} \frac{w_1 - z_0}{w_1 - \bar{z}_0}$ را در نظر می گیریم که نیم صفحه فوقانی را به توی دایره واحد می نگارند . با جایگزین کردن $i+1 = z$ در $f(z) = e^{i\theta} \frac{w_1 - z_0}{w_1 - \bar{z}_0}$ می پاییم

$$f(1+i) = e^{i\theta} \cdot \frac{2i - z_0}{zi - z_0}$$

و اگر نقطه $i+1$ بخواهد به مبداء مختصات، A' ، تبدیل شود لازم است $z_0 = 2i$ واز آنجا

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z' - 2i}{z' + 2i}.$$

از طرفی داریم $f(i\sqrt{2}) = i\sqrt{2}$. بنابراین

$$i = e^{i\theta} \cdot \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} = \frac{\lambda ie^{i\theta}}{\lambda} = ie^{i\theta}.$$

و درنتیجه $i = e^{i\theta}$ و از آنجا $\theta = 0$. از این رو $f(z) = \frac{z' - 2i}{z' + 2i}$ گزینه (۴) صحیح است.

۷۴. مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$ برابر است با

$$4\pi i \sin 1.4 \quad 2\pi i \sin 1.3 \quad \sin 1.2 \quad 1. \text{ صفر}$$

حل. تابع انتگرالده دارای دو نقطه تکین $z=1$ و $z=0$ در داخل ناحیه $|z|=2$ است. داریم

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \sum_{z=0,1} \operatorname{Res} f(z).$$

برای پیدا کردن مانده $f(z)$ در $z=0$ ضریب $\frac{1}{z}$ را در بسط لوران تابع $f(z)$ در حول $z=0$ می‌یابیم. داریم

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) = -\left\{1 + z + z^2 + \dots\right\} \left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots\right\}$$

و ضریب $\frac{1}{z}$ برابر است با

$$-1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots = -\sin 1.$$

از طرفی $z=1$ یک قطب ساده تابع $f(z)$ است. بنابراین

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \sin 1.$$

درنتیجه

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z) \right\} = 0.$$

از این رو گزینه (۱) صحیح است.

۷۵. انتگرال $\int_{|z|=1} (z + \frac{1}{z}) e^z dz$ برابر است با

$$3\pi i \cdot 4 \quad 2\pi i \cdot 3 \quad 2. \text{ صفر} \quad -\pi i \cdot 1$$

حل. تابع انتگرالده $f(z)$ تنها دارای یک نقطه تکین $z = 0$ است. داریم

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right) e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z).$$

از طرفی

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right)$$

و ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ است. بنابراین

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right) e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{3}{2} \times 2\pi i = 3\pi i.$$

درنتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۷۶. اگر z_1 و z_2 دو نقطه دلخواه از صفحه مختلف باشند، آنگاه مکان هندسی نقاط z با

فرض $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ عبارت است از

۱. پاره خطی که نقطه αz_1 را به نقطه βz_2 متصل می کند.

۲. پاره خطی که مبدأ را به نقطه $\alpha z_1 + \beta z_2$ متصل می کند.

۳. پاره خطی که نقاط z_1 و z_2 را به هم متصل می کند.

۴. پاره خطی که مبدأ را به نقطه $z_1 + z_2$ متصل می کند.

حل. بدیهی است که تنها گزینه (۳) با فرض $\alpha \geq 0$ و $\beta \geq 0$ برقرار است. درنتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۷۷. مقدار انتگرال $I = \oint_{|z|=r_n} \frac{dz}{\operatorname{ch}^r \pi z + \operatorname{sh}^r \pi z}$ که در آن $n = 1, 2, \dots, m$ عدد معلوم است و مثبت و صحیح) برابر است با

$$1. \text{ صفر} \quad 2. \frac{\pi}{2} \quad 3. \pi i \cdot 4 \quad 4. \pi i \cdot 3$$

حل. داریم $\operatorname{ch}^r \pi z = \operatorname{ch}^r (\pi z)$. بنابراین $\operatorname{ch}^r \pi z + \operatorname{sh}^r \pi z = \operatorname{ch}^r (\pi z)$.

نتیجه می شود $I = \int_{|z|=r_n} \frac{dz}{\operatorname{ch}^r (\pi z)}$. از طرفی از $|z| = r_n$ و از آنجا $\pi z = (k\pi - \frac{\pi}{2})i$ و یا $z_k = (k - \frac{1}{2})\frac{i}{\pi}$

$$z_4 = \frac{3i}{4}, z_{-1} = -\frac{3i}{4}$$

$$I = \int_{|z|=r_n} \frac{dz}{\operatorname{ch}^r (\pi z)} = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$$

ولی تعداد نقاط z_k واقع در درون دایره $|z| = 2n$ زوج است و z_k یک قطب ساده است. پس

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{\operatorname{ch} 2\pi z} = \frac{1}{2\pi \operatorname{sh}(2\pi z_k)}$$

که تابعی فرد است، لذا مقدار انتگرال مورد نظر صفر است و گزینه (۱) درست است.

مهندسی مکانیک (برخی سوالات مهم)

مهندسی مکانیک ۶۷ - ۶۸

۷۸. کدامیک از معادلات زیر را می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل نمود.

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad ۲ \quad a \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + bu = 0. \quad ۱$$

۳. هیچکدام
۴. هر دو
حل. واضح است که هر دو را می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل نمود. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۷۹. اگر $u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه تحت چه شرایطی تابع $v(x, y) + iu(x, y)$ هم تحلیلی است.

۱. اگر u فقط تابعی از x و v فقط تابعی از y باشد.

۲. اگر u فقط تابعی از y و v فقط تابعی از x باشد.

۳. اگر هم u و هم v مقادیر ثابتی باشد.

۴. همواره تحلیلی باشد.

حل. به علت تحلیلی بودن $v + iu$ و iv داریم $v = v_y u_x + v_x u_y$ و $iv = iu_y u_x - iu_x v_y$. بنابراین $v = c_1$ و $iu_x = -v_y$ و از آنجا $u_y = 0$ و $u_x = 0$. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۸۰. هرگاه $z = re^{i\theta}$ آنگاه کدامیک از روابط زیر نادرست است.

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}. \quad ۲$$

$$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}. \quad ۱$$

$$\overline{\ln z} = \ln \bar{z}. \quad ۴$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}. \quad ۳$$

حل. بدیهی است که گزینه های ۱، ۲، و ۳ درست هستند و تنها گزینه (۴) نادرست است زیرا

$$\overline{\ln z} = \ln r + i(\pi - \theta) \text{ و } \overline{\ln z} = \ln r - i\theta$$

مهندسی مکانیک ۶۹ - ۷۰

۸۱. تابع $f(z) = z^r \bar{z} \cos z$ مفروض است. آنگاه کدامیک از گزاره های زیر درست است.

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi. \quad ۲$$

$$\int_{|z|=1} f(z) d\bar{z} = -2\pi i. \quad ۱$$

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i. \quad ۴$$

$$\int_{|z|=1} f(z) d\bar{z} = 0. \quad ۳$$

حل. داریم $z^r \bar{z} = z^r$ ، $|z| = 1$ و بر دایره $|z|^r \cdot z^r \bar{z} = |z|^r \cdot z^r$. بنابراین

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} z^r \bar{z} \cos z dz = \int_0^{\pi} z^r \cos z dz = 0$$

$$\int_{|z|=1} f(z) d\bar{z} = \int_{|z|=1} z^r \cos z d\bar{z} = \int_0^{\pi} e^{ir\theta} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} (-ie^{i\theta} d\theta) = 0.$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۸۲. اگر $u(x,y)$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ باشد، آنگاه کدامیک از عبارت زیر صحیح است.

۱. تابع $\exp\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cos\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ همواره همساز است.

۲. تابع $f(z)$ منحصر بفرد است.

۳. همواره می‌توان عدد $M > 0$ را یافت به طوری که $|f(z)| \leq M$

۴. هیچ‌کدام

حل گزینه (۱) درست است زیرا

$$e^{u_x} \cos u_y = e^{u_x} \cos(-u_y) = \operatorname{Re}\{e^{u_x - iu_y}\} = \operatorname{Re}\{e^{u_x + iv_x}\}.$$

چون $f(z)$ تحلیلی است، داریم $f'(z) = u_x + iv_x$ و از طرفی از تحلیلی بودن $f(z)$ تحلیلی بودن

$f'(z)$ نیز نتیجه می‌شود. و از آنجا $e^{u_x + iv_x} = e^{f'(z)}$ نیز یک تابع تحلیلی است. و نظر به اینکه

$e^{u_x} \cos u_y$ برابر قسمت حقیقی $e^{f'(z)}$ است. پس این قسمت حقیقی همساز است.

۸۳. مقدار انتگرال $I = \int_{|z|=1} z^r \cos \frac{1}{z} dz$ برابر است با

$$\frac{2\pi i}{1!} \cdot 4 - \frac{\pi}{12i} \cdot 3 - \pi i \cdot 2 + 2\pi i \cdot 1$$

حل.

$$I = \int_{|z|=1} z^r \cos \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} z^r \cos \frac{1}{z}$$

از طرفی

$$f(z) = z^r \cos \frac{1}{z} = z^r \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots\right) = z^r - \frac{z^r}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \dots$$

در نتیجه $I = 2\pi i \times \frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12}$ و گزینه (۳) صحیح است.

۸۴. ناحیه $D = \{(x,y) | 0 \leq y \leq \pi, x \in R\}$ توسط $f(z) = e^z$ به کدامیک از نواعی زیر تبدیل

می‌شود.

۱. نیم صفحه تحتانی

۲. نیم صفحه فوقانی

۳. نیم دایره واحد فوقانی

حل. داریم $e^x = \rho$ و از $x \in R$ توجه می شود که $\rho < 0$. و از طرفی $y = \phi$ و $0 \leq \phi \leq \pi$. بنابراین نیم صفحه جواب مساله است و گزینه (۲) درست است.

مهندسی مکانیک ۷۰-۷۱

۸۵. هرگاه پتانسیل موجود در روی بدنه دو استوانه طویل وهم محور به شعاعهای قاعده ۱ و e به ترتیب 110° و 220° ولت باشد و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت

$$\frac{1}{r} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

$$\frac{1}{1-e} \left(\frac{110}{r} - 220e + 110 \right). 2 \quad 110(1+Lnr). 1$$

$$4. \text{ هیچکدام} \quad \frac{110}{e-1}(r+e-2). 3$$

حل. در این مساله با استوانه های هم پتانسیل مواجه هستیم. بنابراین پتانسیل از θ مستقل است و معادله لاپلاس به صورت $\frac{1}{r} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$ در می آید که دارای جواب عمومی $u = c_1 Lnr + c_2$ است. با توجه به شرایط $u(1) = 110^\circ$ ، $u(e) = 220^\circ$ می یابیم $c_1 = c_2 = 110^\circ$ و از آنجا $u = 110^\circ(1+Lnr)$. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۸۶. تصویر خط $x + \frac{1}{2}y = 0$ بوسیله نگاشت $w = \frac{1}{z}$ عبارت است از

۱. خطی که از مبدأ نمی گذرد. ۲. خطی که از مبدأ نمی گذرد.

۳. دایره ای که از مبدأ نمی گذرد. ۴. دایره ای که از مبدأ نمی گذرد.

حل. داریم $x = \frac{w}{w+1}$ و $y = -\frac{1}{w+1}$. با قراردادن آنها در $x + \frac{1}{2}y = 0$ می یابیم $w = 2u + 2v = 0$ که معادله دایره ای است که از مبدأ نمی گذرد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی مکانیک ۷۱-۷۲

۷۸. اگر $f(z) = u + iv$ باشد و $u(x, y) = 2x(1-y)$ ، آنگاه

$$f'(z) = -y + ix \quad .2 \quad f'(z) = 2iz \quad .1$$

$$f'(z) = 2(1-y) + 2i(x-1) \quad .4 \quad f'(z) = 2(1-y) + 2ix \quad .3$$

حل. داریم

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 2(1-y) + 2ix$$

از این رو گزینه (۳) صحیح است.

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^r + 1)^r} dx ; \quad m > 0. \quad ۸۸$$

$$\frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4} \quad .2$$

$$\frac{\pi e^m(1+m)}{4} \quad .1$$

$$\frac{\pi e^{-m}(m^r - 1)}{2} \quad .2$$

$$\frac{\pi e^m(1+m^r)}{2} \quad .3$$

$$\text{حل. هرگاه } f(z) = \frac{e^{imz}}{(z^r + 1)^r}, \text{ آنگاه}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^r + 1)^r} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{imz}}{(z^r + 1)^r} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{imz}}{(z+1)^r} \right) \Big|_{z=i} \right\} = \frac{\pi}{4} \frac{m+1}{e^m}.$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۷۲-۷۳ مهندسی مکانیک

۸۹. سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^r - 1}$ در ناحیه $|z - 1| > 2$ عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}} \quad .2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+r}} \quad .1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+r}} \quad .4$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}} \quad .3$$

حل.

$$f(z) = \frac{1}{z^r - 1} = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z+1} = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2^r z + 2^r - 1}$$

$$= \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2(z-1)} \frac{1}{1 + \frac{2^r}{z-1}} = \frac{1}{2z-1} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^r}{z-1} \right)^n \right\}$$

$$= \frac{1}{2z-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^r}{z-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+r}}.$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$\int \tan z dz$ در جهت مثبت مثلثاتی برابر است با

$$-2\pi i . 4 \quad -4\pi i . 3 \quad 2\pi i . 2 \quad 4\pi i . 1$$

حل. تابع $\tan z$ در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}$ واقع در $|z| = 2$ تحلیلی نیست. بنابراین

$$\int_{|z|=1} \tan z dz = 2\pi \left\{ \operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \tan z + \operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \tan z \right\} = 2\pi i \{-1 - 1\} = -4\pi i.$$

از این رو گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی مکانیک ۷۳-۷۴

۹۱. فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ باشد، آنگاه $f'(1)$ برابر با

- e. ۴ -۲e. ۳ e. ۲ -e. ۱
حل.

$$f'(z) = u_x - iu_y = 2xe^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2} \sin(2xy) \\ - i[-2ye^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2x \sin(2xy)e^{-x^2-y^2}]$$

و بنابراین گزینه (۴) درست است.

۹۲. هرگاه C دایره باشد، آنگاه $\oint_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz = 2\pi i$ برابر است با

- $\pi i . ۴$ ۳. صفر $\frac{3}{2}\pi i . ۲$ $-\frac{3}{2}\pi i . ۱$

حل. تابع $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$ دارای دو قطب $z=0$ و $z=2$ است که هیچکدام از آنها داخل دایره C نیستند. بنابراین $\int_C f(z) dz = 0$ و گزینه (۳) درست است.

جواب مسائل با شماره های فرد

بخش ۱.۱۰ صفحه ۶

1. $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$
17. ۰ (n even), $2/n$ (n odd)
19. ۰
21. $n[(-1)^n e^{-\pi} - 1]/(1 + n^2)$
23. $[(-1)^n e^\pi - 1]/(1 + n^2)$
25. ۰ ($n = 0$), π/n ($n = 1, 3, \dots$), $-\pi/n$ ($n = 2, 4, \dots$)

بخش ۲.۱۰ صفحه ۱۴

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots \right)$
3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
5. $\frac{4}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots \right)$
7. $2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + - \dots \right)$
9. $\frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \frac{1}{16} \cos 4x + - \dots \right)$
11. $2 \left[\left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3} \right) \sin x - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3} \right) \sin 2x + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{3^3} \right) \sin 3x - + \dots \right]$
13. $\frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \dots$
15. $\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - + \dots \right)$

٤٦٢

بخش ۱۰. ۳ صفحه

1. $\frac{4}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right)$
3. $1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$
5. $\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - \dots \right)$
7. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \dots \right)$
9. $-\frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \dots \right)$
11. $1 - \frac{12}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - \frac{1}{16} \cos 4\pi x + \dots \right)$
13. $4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\pi x - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\pi x - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\pi x - \dots \right)$

17. Write τ for x in Example 1 and set $\tau = x - 1$.

بخش ۱۰. ۴ صفحه

1. Even: $|x^3|, x^2 \cosh nx, \cosh x$. Odd: $x \cosh nx, \sinh x, x|x|$.
3. Odd 5. Odd 7. Even 9. Neither 11. Neither
13. $1/(1 - x^2) + x/(1 - x^2)$ 15. $\cosh kx + \sinh kx$
25. $\frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots \right)$
27. $\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right)$
29. $\frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{2}{2^2} \cos 2x + \frac{4}{3^2 \pi} \cos 3x + \frac{2}{4^2} \cos 4x - \frac{4}{5^2 \pi} \cos 5x + \dots$
31. $\frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 4x - \dots$

بخش ۱۰. ۵ صفحه

1. $\frac{4k}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$
3. $\frac{2L^2}{\pi} \left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3^2 \pi^2} \right) \sin \frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{L} + \dots \right]$
5. $\frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$
7. $\left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi} \right) \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$
9. $\frac{4L}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{L} - \dots \right)$
11. $\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$
13. $\frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{16} \cos \frac{4\pi x}{L} + \dots \right)$
15. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{L} - \dots \right)$

٤٦٤

$$17. a_0 = \frac{1}{L} (e^L - 1), \quad a_n = \frac{2L}{L^2 + n^2 \pi^2} [(-1)^n e^L - 1]$$

$$19. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos \frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos \frac{6\pi x}{L} + \dots \right)$$

بخش ٦. ١٠ صفحه ٣٦

1. Use (7).

$$3. -\frac{2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)ix}$$

$$5. i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$$

$$7. \pi + i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}$$

$$9. \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

بخش ٧. ١٠ صفحه ٣٧

$$3. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t, \quad A(\omega) = 1/(\omega^2 - 1), \\ A(0.5) = -1.33, \quad A(0.7) = -1.96, \quad A(0.9) = -5.3, \quad A(1.1) = 4.8, \\ A(1.5) = 0.8, \quad A(2) = 0.33, \quad A(10) = 0.01$$

$$5. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$$

$$7. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \\ + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} \cos t + \frac{1}{9(\omega^2 - 9)} \cos 3t + \dots \right)$$

$$9. y = \frac{1 - n^2}{D} a_n \cos nt + \frac{nc}{D} a_n \sin nt, \quad D = (1 - n^2)^2 + n^2 c^2$$

$$11. y = -\frac{3c}{64 + 9c^2} \cos 3t - \frac{8}{64 + 9c^2} \sin 3t$$

$$13. y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n c}{n^2 D_n} \cos nt - \frac{(-1)^n (1 - n^2)}{n^3 D_n} \sin nt \right], \quad D_n = (1 - n^2)^2 + n^2 c^2$$

$$15. I = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt), \quad A_n = (-1)^{n+1} \frac{240(10 - n^2)}{n^2 D_n},$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} 2400}{n D_n}, \quad D_n = (10 - n^2)^2 + 100n^2$$

بخش ٨. ١٠ صفحه ٣٩

$$1. F = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{N} \sin Nx \right] \quad (N \text{ odd})$$

$$5. F = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \sin Nx \right), \\ E^* \approx 8, 5, 3.6, 2.8, 2.3$$

$$7. F = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2} \cos Nx \right), \\ E^* \approx 4.14, 1.00, 0.38, 0.18, 0.10$$

$$9. F = \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \dots,$$

$$E^* = \frac{\pi^3}{12} - \pi \left[\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{81\pi^2} - \frac{1}{16} + \frac{4}{625\pi^2} + \dots \right]; \quad 1.311, 0.525,$$

0.509, 0.313, 0.311

15. Use the Fourier series $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

بخش ۹.۱۰ صفحه ۴۸

9. $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{2}{w^2} \right) \sin w + \frac{2}{w} \cos w \right] \frac{\cos wx}{w} dw$
11. $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{a \sin aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2} \right] \cos xw dw$
13. $A = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos wv}{1+v^2} dv = e^{-w} (w > 0), \quad f(x) = \int_0^\infty e^{-w} \cos wx dw$
15. $f(ax) = \int_0^\infty A(w) \cos axw dw = \int_0^\infty A\left(\frac{p}{a}\right) \cos xp \frac{dp}{a}, \text{ where } wa = p.$

If we write w instead of p , the result follows.

17. Differentiating (10) we have $\frac{d^2A}{dw^2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f''(v) \cos wv dv, f''(v) = v^2 f(v)$, and
the result follows.

بخش ۱۰.۱۰ صفحه ۵۳

1. $\sqrt{2/\pi} (\sin 2w - 2 \sin w)/w$ 3. $\sqrt{2/\pi} (aw \sin aw + \cos aw - 1)/w^2$
 7. $e^{-w} \sqrt{\pi/2}$
 9. $\sqrt{2/\pi} [(2 - w^2) \cos w + 2w \sin w - 2]/w^3$
 11. $\sqrt{\pi/2}$ if $0 < w < \pi$, 0 if $w > \pi$
 13. $\sqrt{\pi/2} \cos w$ if $|w| < \pi/2$, 0 if $|w| > \pi/2$
 17. $\sqrt{\pi/2} e^{-w} \cos w$ 19. No

بخش ۱۱.۱۰ صفحه ۶۱

1. $1/(1 + iw)\sqrt{2\pi}$ 3. $\sqrt{2/\pi} (2 - w)^{-1} \sin(2 - w)$
 5. $[-1 + (1 + iaw)e^{-iaw}]/w^2\sqrt{2\pi}$ 7. $i\sqrt{2/\pi} (\cos w - 1)/w$

مسائل دوره ای فصل ۱۰ صفحه ۶۶

17. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
 19. $\frac{2}{\pi} \left(\sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{6} \sin 6x + \dots \right)$
 21. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$
 23. $-\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x - + \dots$
 25. $\frac{8}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$

۴۶۵

27. $\frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{2}{3^3 \pi} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x - \dots$
29. $\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \right)$
31. $-\frac{4}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right)$
33. $\frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} x - \dots \right)$
35. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) - \frac{1}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \dots \right)$
37. $-\frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \dots \right)$
39. $-\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \dots \right)$
41. $\pi/4$ 43. $\pi^3/32$ 47. 5.168, 0.075, 0.075, 0.012, 0.012, 0.004
49. $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\pi^2}{12\omega^2} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos t + \frac{1}{4(\omega^2 - 4)} \cos 2t - \dots$

٧٤ صفحه ١.١١ بخش

25. $u = f(x)$ 27. $u_x = f(y), u = xf(y) + g(y)$
 29. $u = c(y)e^{x^2y}$ 31. $u = v(x) + w(y)$
 33. $u = c = \text{const}$ 35. $u = cx + g(y)$

٨٤ صفحه ٣.١١ بخش

1. $u = 0.02 \cos t \sin x$ 3. $u = k(\cos t \sin x - \cos 2t \sin 2x)$
 5. $u = \frac{4}{5\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{36} \cos 6t \sin 6x + \frac{1}{100} \cos 10t \sin 10x - \dots \right)$
 7. $u = \frac{8k}{\pi} \left(\cos t \sin x + \frac{1}{3^3} \cos 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3} \cos 5t \sin 5x + \dots \right)$
 9. $u = 12k \left[\left(\frac{\pi}{1^3} - \frac{8}{1^5 \pi} \right) \cos t \sin x + \left(\frac{\pi}{3^3} - \frac{8}{3^5 \pi} \right) \cos 3t \sin 3x + \dots \right]$
 11. $u = 0.1 \sin x (\cos t - 2 \sin t)$ 15. $27, 960/\pi^8 \approx 0.9986$
 17. $u = ke^{ct(x+y)}$ 19. $u = k \exp [c(x^2 + y^2)]$
 21. $u = ky^c e^{cx}$ 23. $u = k \exp (cx + y/c)$

٨٨ صفحه ٤.١١ بخش

9. 17.5n cycles/sec 13. $u = f_1(x) + f_2(xy)$
 15. $u = xf_1(x - y) + f_2(x - y)$ 17. $u = f_1(x + y) + f_2(3x + y)$
 23. $u = \frac{8L^2}{\pi^3} \left(\cos c \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 t \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^3} \cos c \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 t \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$

25. $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0$

27. $\beta L \approx \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$ (more exactly 4.730, 7.853, 10.996, ...)

29. $\beta L \approx \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$ (more exactly 1.875, 4.694, 7.855, ...)

بخش ۱۱ صفحه ۱۰۲

3. $\lambda_1^2 = (\ln 2)/10, c^2 = 0.00702L^2$

5. $u = \sin 0.1\pi x e^{-1.752\pi^2 t/100}$

7. $u = \frac{40}{\pi^3} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t} - \frac{1}{9} \sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \dots \right)$

9. $u = \frac{8}{\pi^3} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t} + \frac{1}{3^3} \sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \dots \right)$

11. Since the temperatures at the ends are kept constant, the temperature will approach a steady-state (time-independent) distribution $u_I(x)$ as $t \rightarrow \infty$, and $u_I = U_1 + (U_2 - U_1)x/L$, the solution of (1) with $\partial u / \partial t = 0$ satisfying the boundary conditions.

15. $u = 1$

17. $u = 0.5 \cos 2x e^{-4t}$

19. $u = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 2x e^{-4t} + \frac{1}{36} \cos 6x e^{-36t} + \dots \right)$

21. $u = \frac{\pi}{8} + \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \cos x e^{-t} - \frac{1}{\pi} \cos 2x e^{-4t} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9\pi} \right) \cos 3x e^{-9t} + \dots$

25. $w = e^{-\beta t}$

27. $-\frac{K\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} nB_n e^{-\lambda_n^2 t}$

29. 2.57, 0.52, 0.10°C

31. $u = (\sin \frac{1}{2}\pi x \sinh \frac{1}{2}\pi y) / \sinh \pi$

33. $u = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{24} \frac{\sinh [(2n-1)\pi y/24]}{\sinh (2n-1)\pi}$

35. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a},$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

37. $u(x, y) = \frac{A_0}{24} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh(n\pi x/24)}{\sinh n\pi} \cos \frac{n\pi y}{24},$

$$A_0 = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(y) dy, A_n = \frac{1}{12} \int_0^{24} f(y) \cos \frac{n\pi y}{24} dy$$

39. $u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx e^{-ny}, A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 1, 2, \dots$$

بخش ۱۱ صفحه ۱۱۰

7. $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a-x)\tau}^{(b-x)\tau} e^{-w^2} dw - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a+x)\tau}^{(b+x)\tau} e^{-w^2} dw$

۴۶۷

$$11. A(p) = \frac{2}{\pi(1+p^2)}, B(p) = 0, u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+p^2} \cos px e^{-c^2 p^2 t} dp$$

$$13. A(p) = \frac{2 \sin p}{\pi p}, B(p) = 0, u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p}{p} \cos px e^{-c^2 p^2 t} dp$$

بخش ۱۱.۱ صفحه ۱۲۲

1. c increases and so does the frequency.5. $c\pi \sqrt{260}$ (corresponding eigenfunctions $F_{4,16}, F_{16,14}$, etc.)7. $A = ab, b = A/a, (ma^{-2} + na^2 A^{-2})' = 0$ gives $a^2/b^2 = m/n$.9. $f_1(x) = 2(4x - x^2), f_2(y) = 2y - y^2$ 11. $B_{mn} = (-1)^{m+1} 8/mn\pi$ (n odd), 0 (n even)13. $4(\cos m\pi/2 - (-1)^m)(\cos n\pi/2 - (-1)^n)/mn\pi^2$ 15. $B_{mn} = (-1)^{m+n} ab/mn\pi^2$ 17. $B_{mn} = 4[1 - (-1)^n(b+1)][1 - (-1)^m(a+1)]/mn\pi^2$ 19. $B_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{144a^3b^3}{m^3n^3\pi^6}$ 21. $u = k \cos \pi\sqrt{5}t \sin \pi x \sin 2\pi y$ 23. $u = k \cos 5\pi t \sin 3\pi x \sin 4\pi y$

بخش ۹.۱ صفحه ۱۲۵

9. $u = 30r \sin \theta - 10r^3 \sin 3\theta$ 11. $u = \frac{400}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right)$ 13. $u = \frac{2}{\pi} r \sin \theta + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta - \frac{2}{9\pi} r^3 \sin 3\theta - \frac{1}{4} r^4 \sin 4\theta + \dots$ 15. $u = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(r \cos \theta + \frac{1}{9} r^3 \cos 3\theta + \frac{1}{25} r^5 \cos 5\theta + \dots \right)$ 17. $u = \pi/2$ 19. $u = \frac{4u_0}{\pi} \left(\frac{r}{a} \sin \theta + \frac{1}{3a^3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5a^5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right)$ 21. $a^2 u_{x^2 x^2} + c^2 u_{y^2 y^2}$ 23. $4x^2 u_{x^2 x^2} + 4y^2 u_{y^2 y^2} + 2u_{x^2} + 2u_{y^2}$ 25. $u_{x^2 x^2} + u_{y^2 y^2}$ 27. Use $\nabla^2 u = 0$ and $u_n = u_r$

بخش ۱۰.۱ صفحه ۱۳۲

5. $T = 6.828\rho R^2 f_1^2$, f_1 the fundamental frequency

9. No

15. $u = 4k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)} \cos \alpha_m t J_0(\alpha_m r)$ 23. $\alpha_{11}/2\pi \approx 0.6099$ (see Table A1 in Appendix 5)

بخش ۱۱.۱ صفحه ۱۳۷

3. $u = 160/r + 30$ 5. $u = -40 \ln r/(\ln 2) + 150$
 17. $u = (u_1 - u_0)(\ln r)/\ln(r_1/r_0) + (u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0)/\ln(r_1/r_0)$

بخش ۱۲.۱۱ صفحه ۱۴۳

5. $u = 1$
 7. $\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1, 2x^2 - 1 = \frac{4}{3}P_2(x) - \frac{1}{3}, u = \frac{4}{3}r^2 P_2(\cos \phi) - \frac{1}{3}$
 9. $x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{2}{5}P_1(x), u = \frac{2}{5}r^3 P_3(\cos \phi) + \frac{2}{5}r P_1(\cos \phi)$
 11. $u = 4r^3 P_3(\cos \phi) - 2r^2 P_2(\cos \phi) + r P_1(\cos \phi) - 2$
 17. This is the analog of Example 1 with 55 replaced by 10.
 19. $55(3/8 + 5/16) \approx 37.8$
 25. $u = U_0 \cos(\pi t/l\sqrt{LC}) \sin(\pi x/l)$

بخش ۱۲.۱۳ صفحه ۱۴۹

5. $U(x, s) = \frac{c(s)}{x^2} + \frac{x}{s^2(s+1)}, U(0, s) = 0, c(s) = 0,$
 $u(x, t) = x(t-1+e^{-t})$
 9. Set $x^2/4c^2t = z^2$. Use z as a new variable of integration. Use $\text{erf}(\infty) = 1$.

مسائل دوره ای فصل ۱۱ صفحه ۱۵۵

21. $u = A(x) \cos 4y + B(x) \sin 4y$ 23. $u = A(y)e^{-2x} + B(y)e^x - 5$
 25. $u = g(x)(1 - e^{-y}) + f(x)$ 27. $u = f_1(y) + f_2(x+y)$
 29. $u = yf_1(x+y) + f_2(x+y)$ 31. $u = f_1(x+y) + f_2(2y-x)$
 33. $u = f_1(2x-y) + f_2(2y-x)$ 35. $-0.1 \cos 3t \sin 3x$
 37. $\frac{3}{4} \cos t \sin x - \frac{1}{4} \cos 3t \sin 3x$ 39. $u = k$
 41. $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x e^{-4t}$ 43. $u = \sin 0.02\pi x e^{-0.004572t}$
 45. $u = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi x}{10} e^{-0.1143t} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{10} e^{-1.029t}$
 47. $u = \frac{200}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{50} e^{-0.004572t} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{50} e^{-0.04115t} + \dots \right)$
 49. $u = 95 \cos 2x e^{-4t}$ 59. $u = 275/r - 27.5$

بخش ۱۲.۱ صفحه ۱۶۸

3. $32 - 24i$ 5. $-\frac{7}{4}i + \frac{25}{4}i$ 7. $-47.2 - 23i$ 9. $-10 - 24i$
 11. $31/50$ 13. $2xy/(x^2 + y^2)$ 15. $x^2 - y^2, x^2$ 17. 16

بخش ۱۲.۲ صفحه ۱۷۶

3. 2.5 5. 1 7. 1 9. $8/17$
 11. $\sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$ 13. $10(\cos 0.927 + i \sin 0.927)$
 15. $\frac{1}{2}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$ 17. $0.563(\cos 0.308 + i \sin 0.308)$
 19. -3.042 21. $\pi/4$ 23. $-2 + 2i$
 25. $-0.227 - 0.974i$ 27. $\pm(2 - 2i)$
 29. $\pm 1, \pm i, \pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$ 31. $\pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$
 33. $\sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{k\pi}{12} + i \sin \frac{k\pi}{12} \right), k = 1, 9, 17$

٤٩٩

35. $3 + 2i, 2 - i$

37. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$, etc.

39. Equation (5) holds when $z_1 + z_2 = 0$. Let $z_1 + z_2 \neq 0$ and $c = a + ib = z_1/(z_1 + z_2)$. By (19) in Prob. 37, $|a| \leq |c|$, $|a - 1| \leq |c - 1|$. Thus $|a| + |a - 1| \leq |c| + |c - 1|$. Clearly $|a| + |a - 1| \geq 1$. Together we have the inequality below; multiply by $|z_1 + z_2|$ to get (5).

$$1 \leq |c| + |c - 1| = \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right|$$

بخش ١٢. ٣. صفحه

1. Circle, radius 4, center $4i$ 3. Annulus with center a

5. Vertical infinite strip

7. Right half-plane

9. Region between the two branches of the hyperbola $xy = 1$ 11. Circle $(x - 17/15)^2 + y^2 = (8/15)^2$

بخش ١٢. ٤. صفحه

1. $14 + 8i, -1 - 2i, 4 - 12i$

3. $(9 - 13i)/500, -i, (-2 - 11i)/1000$

5. $2(x^3 - 3xy^2) - 3x, 2(3x^2y - y^3) - 3y$

9. $|\arg w| \leq 3\pi/4$

11. $\operatorname{Re}(z^2)/|z^2| = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) = 1$ if $y = 0$ and -1 if $x = 0$. Ans. No.

13. $6z(z^2 + i)^2$

15. $2i/(1 - z)^3$

17. 0

19. $i/2$

21. $-1/27$

23. $-\frac{1}{3}(1 + i)$

25. The quotient in (4) is $\Delta x/\Delta z$, which is 0 if $\Delta x = 0$ but 1 if $\Delta y = 0$, so that it has no limit as $\Delta z \rightarrow 0$.

27. Use $\operatorname{Re} f(z) = [f(z) + \overline{f(z)}]/2$, $\operatorname{Im} f(z) = [f(z) - \overline{f(z)}]/2i$.

29. By continuity, for any $\epsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ so that $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ when $|z - a| < \delta$. Now $|z_n - a| < \delta$ for all sufficiently large n since $\lim z_n = a$. Thus $|f(z_n) - f(a)| < \epsilon$ for these n .

بخش ١٢. ٥. صفحه

1. Yes

3. Yes

5. For $z \neq 1$

7. Yes

9. No

11. No

13. $f(z) = -iz^2/2$ 15. $f(z) = 1/z$ 17. $f(z) = z^3$

19. No

21. No

23. $b = 1, v = -\sin x \sinh y$

29. $f'(z) = u_x = iv_z = 0, u_z = v_x = 0$, hence $v_y = u_y = 0$ by (1),
 $u = \text{const}, v = \text{const}, f = u + iv = \text{const}$.

بخش ١٢. ٦. صفحه

3. $1.469 + 2.287i, 2.718$

5. $3.610 - 1.972i, 4.113$

7. $-23.141, 23.141$

9. $-i, 1$

11. $\exp(x^3 - 3xy^2) \cos(3x^2y - y^3), \exp(x^3 - 3xy^2) \sin(3x^2y - y^3)$

13. $e^{-2x} \cos 2y, -e^{-2x} \sin 2y$

15. $e^{i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}, e^{-\pi i/4}, e^{3\pi i/4}$

17. $5 \exp(i \arctan \frac{3}{3})$

19. $x > 0$

21. $y = (2n + 1)\pi/4, n = 0, \pm 1, \dots$

23. $z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i, n = 0, \pm 1, \dots$

25. No solutions

27. $k = 1$

29. $(g/f)' = (g'f - gf')/f^2 = 0$, since $g' = g, f' = f; g/f = k = \text{const}$ by Prob.

29, Sec. 12.5. $g(0) = f(0) = e^0 = 1$ gives $k = 1, g = f$.

بخش ۱۲ صفحه ۲۰۰

3. $-0.303 - 2.112i$
 7. $26.974 - 4.256i$
 11. $-0.5150 + 0.1738i$
 15. $1.960 + 3.166i$
 19. $\pm 2n\pi + i, \pm(2n+1)\pi - i$
 23. Use Prob. 3.
5. $11013i$
 9. $\cosh 3\pi = 6195.8$
 13. $-3.725 - 0.512i$
 17. $\frac{1}{2}(2n+1)\pi - (-1)^n 1.818i$
 21. $\pm(\pi/3)i \pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$

بخش ۱۲ صفحه ۲۰۶

5. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4}\pi i = 0.347 + 0.785i$
 9. $4.605 + 3.142i$
 13. $\pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$
 17. $(-0.644 \pm 2n\pi)i, n = 0, 1, \dots$
 21. $10.85 - 16.90i$
 25. $1.032 + 0.870i$
 29. $(1+i)/\sqrt{2}$
 33. $\sqrt{2} e^{i\pi/4} [\cos(\ln \sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi) + i \sin(\ln \sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi)]$
 35. $\exp[(3+\pi i)(\ln \sqrt{29} - i \arctan 0.4)] = -276.2 - 436.0i$
 37. $3.350 + 1.189i$
 41. $\cosh w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = z, (e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0, e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}$
7. $1.609 - 2.214i$
 11. $2.773 + 3.135i$
 15. $1.946 + (1 \pm 2n\pi)i, n = 0, 1, \dots$
 19. $(\pi - 1 \pm 2n\pi)i, n = 0, 1, \dots$
 23. $(1+i)e^{2/\sqrt{2}}$
 27. $-54.05 - 7.70i$
 31. $27[\cos(\ln 3) - i \sin(\ln 3)]$

بخش ۹ صفحه ۲۱۲

1. $v = u - 2x - 2$
 7. $|w| > 16$
 13. $v^2 = 4k^2(k^2 + u)$
 19. $|w| > \sqrt{e}, 0 < \arg w < \pi$
3. $|w - 1 - i| \leq \sqrt{2}$
 9. $0 \leq |w| \leq 1/4$
 15. $|w| = 2$
 21. $2.25 \leq |w| < 4.41$
 11. $2xy = \text{const}$
 17. $|w| \leq e, w \neq 0$

مسائل دوره ای فصل ۱۲ صفحه ۲۱۳

21. $-32 - 24i$
 29. $2/5$
 37. $\pm(1-i)/\sqrt{2}$
 45. Circle, radius $\frac{1}{2}$, center $-1 + 3i$
 49. $-1/z$
 57. $1 - i$
23. $\frac{9}{13} + \frac{20}{13}i$
 31. 4
 39. $\pm(1-3i)$
 51. $\cos z$
 59. $-3.725 - 0.512i$
25. $17 + 1.5i$
 33. 5
 41. $6\sqrt{2} e^{3\pi i/4}$
 47. Half-plane below $y = x$
 53. No
 55. $3x^2y - y^3$
27. 4
 35. 1
 43. $e^{-0.3218i}$
 51. No
 57. Straight segment from 0 to $3 + 6i$

بخش‌های ۱۳ و ۱۴ صفحه ۲۲۷

1. $z = (1 + 2i)t, 0 \leq t \leq 1$
 3. $z = 4 + 2i + (-1 + 3i)t, 0 \leq t \leq 1$
 5. $z = -4i + (-1 + 6i)t, 0 \leq t \leq 7$
 7. Straight segment from 0 to $3 + 6i$

۴۷۱

9. Lower semicircle (radius 2, center 1 - i)
 11. Parabola $y = 3x^2$ from (-1, 3) to (2, 12)
 13. Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$
 15. $3 - 4i + 4e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 17. $t + i/t$, $1 \leq t \leq 3$
 19. $2 \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 21. $2b(1+i)$ 23. 0 25. 0 27. $-\pi r^2$
 29. $-2\pi i$ 31. 0 33. $-i/3$ 35. $-1 - i$
 37. $1 + i/3$ 39. $(\pi - \frac{1}{2} \sinh 2\pi)i$
 41. $32/3 + 64i/3$, $32i$, $8 + 128i/5$ 43. $i, 2i, 2i$ 49. $5e^3$

بخش ۱۳ صفحه ۲۳۶

5. Yes, by the deformation principle
 7. 0, no 9. $-\pi$, no 11. 0, no 13. 0, yes 15. 0, no
 17. 0, yes 19. $2\pi i$ 21. 0 23. $2\pi i$ 25. $-\pi, \pi$
 27. $-2\pi i, 0, -4\pi i$ 29. $-2\pi i, 0$

بخش ۱۳ صفحه ۲۴۰

1. $2 + 2i$ 3. -2 5. 0 7. $-i/3$ 9. $-2/\pi$
 11. 0 13. $-\sinh 1$ 15. $-1566i/35$

بخش ۱۳ صفحه ۲۴۴

1. $-\pi/2$ 3. $-\pi/2$ 5. -2π 7. 0 9. πi
 11. 0 13. $\pi/8$ 15. 0 17. 2 19. $-2\pi \tanh 1$
 21. $2\pi i \ln 4 = 8.710i$ 23. $\pi e^{-2+2i} = -0.1769 + 0.3866i$
 25. Use partial fractions.

بخش ۱۳ صفحه ۲۴۹

1. 0 3. $2\pi^2 i$ 5. 0 7. $-6\pi i$ 9. $2\pi i$ 11. 0
 13. $2\pi i$ 15. 0 17. $2\pi^2 i$ 19. $-2\pi i$ 21. $\frac{3}{2}\pi e^{-4i}$

مسائل دوره ای فصل ۱۳ صفحه ۲۵۰

17. $-2\pi i$ 19. $2i$ 21. 0 23. $2\pi i$
 25. $-2\pi i$ 27. $i \sin 1$ 29. 0 31. $2 \sin 1$
 33. $-\frac{1}{2} \sin \pi^2$ 35. $-\pi/2$ 37. $-5 + 8\pi i$ 39. $2\pi^2 i$

بخش ۱۴ صفحه ۲۶۶

1. Yes, no, $\pm 1 + 2i$ 3. Yes, yes, 0 5. No, no, none
 7. Yes, no, ± 1 9. Yes, no, $\pm 1, \pm i$ 15. Convergent
 17. Convergent 19. Convergent 21. Divergent
 23. Convergent

$$25. \frac{(n+2)n}{2(n+1)^2} < \frac{1}{2}, \quad |R_n| \equiv \frac{|w_{n+1}|}{1-q} = \frac{n+2}{2^n(n+1)} < 0.05, \quad n=5, \quad s=1.657$$

بخش ۱۴ صفحه ۲۷۳

٤٧٢

1. $-4i, 1$ 3. $0, 2/\sqrt{\pi}$ 5. $2i, 5$ 7. $-i, \infty$
 9. $2i/3, 1/3$ 11. $0, \sqrt{2}$ 13. $0, \infty$ 15. $0, 1$
 17. $0, \sqrt{2/3}$ 19. $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n, |z^2| < R$, etc.

٢٧٩ . ١٤ صفحه

1. 2 3. $\sqrt{5}$ 5. $\sqrt{7/2}$ 7. $1/6$ 9. $1/4$

٢٨٦ . ١٤ صفحه

1. $1 - z + z^2/2! - z^3/3! + \dots, R = \infty$
 3. $\pi z - \pi^3 z^3/3! + \pi^5 z^5/5! - \dots, R = \infty$
 5. $1 - (z - \frac{1}{2}\pi)^2/2! + (z - \frac{1}{2}\pi)^4/4! - \dots, R = \infty$
 7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z+1) + \frac{1}{8}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)^3 + \dots, R = 2$
 9. $(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots, R = 1$
 11. $-1 + 5(z+1) - 10(z+1)^2 + 10(z+1)^3 - 5(z+1)^4 + (z+1)^5$
 13. $\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z = z^2 - 2^3 z^4/4! + 2^5 z^6/6! - \dots, R = \infty$
 15. $1 - (z - \frac{1}{2}\pi)^2/2! + (z - \frac{1}{2}\pi)^4/4! - \dots, R = \infty$
 27. $(2/\sqrt{\pi})(z - z^3/3 + z^5/2!5 - z^7/3!7 + \dots), R = \infty$
 29. $z^3/1!3 - z^7/3!7 + z^{11}/5!11 - \dots, R = \infty$

٢٩٠ . ١٤ صفحه

1. $1 - z^4 + z^8 - z^{12} + \dots, R = 1$
 3. $2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + \dots, R = 1$
 5. $2z^2 - 2^3 z^6/3! + 2^5 z^{10}/5! - \dots, R = \infty$
 7. $z + z^5/2! + z^9/3! + \dots, R = \infty$
 9. $2/(z-2) - 1/(z+4)^2 = -17/16 - (15/32)z - (67/256)z^2 + \dots, R = 2$
 11. $(1-i)/2 - [(1-i)^2/4](z-1-i) + [(1-i)^3/8](z-1-i)^2 - \dots, R = \sqrt{2}$
 13. $-i + (z-i) - 7i(z-i)^2 - 9(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$
 15. $1/3! - (z+1)^2/5! + (z+1)^4/7! - \dots, R = \infty$
 17. $i(z - \frac{1}{2}\pi i) + i(z - \frac{1}{2}\pi i)^3/3! + i(z - \frac{1}{2}\pi i)^5/5! + \dots, R = \infty$
 19. $z^2 + z^4 + z^6/3 + \dots, R = \infty$
 21. $1 + 2(z - \frac{1}{4}\pi) + 2(z - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{1}{4}\pi)^3 + \dots, R = \frac{1}{4}\pi$
 23. $1 - z^2/18 - z^3/27 + \dots, R = 3$

٣٠٠ . ١٤ صفحه

1. Use Theorem 1.
 5. $|\sin n|z| \leq 1; \sum 1/n^2$ converges.
 9. $|\tanh^n x| \leq 1, 1/n(n+1) < 1/n^2$
 13. $|z| \leq 4 - \delta, \delta > 0$
 17. Convergence follows from the comparison test (Sec. 14.1). Let $R_n(z)$ and R_n^* be the remainders of (1) and (5), respectively. Since (5) converges, for given $\epsilon > 0$ we can find an $N(\epsilon)$ such that $R_n^* < \epsilon$ for all $n > N(\epsilon)$. Since $|f_n(z)| \leq M_n$ for all z in the region G , we also have $|R_n(z)| \leq R_n^*$ and therefore $|R_n(z)| < \epsilon$ for all $n > N(\epsilon)$ and all z in the region G . This proves that the convergence of (1) in G is uniform.
3. $R = 1/\sqrt{\pi} > 0.56$
 7. $|z^n| \leq 1; \sum n/(n^3 + |z|) \leq \sum 1/n^2$
 11. $|z + 2i| \leq \sqrt{3} - \delta, \delta > 0$
 15. Nowhere

۱۹۰۷۰

19. No. Why?

21. $n = 7, 10, 16, 27, 65$

بخش ۱۴ صفحه ۳۰۹

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots, R = \infty$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + 2z + \frac{2}{3} z^3 + \dots, R = \infty$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} = \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots, R = 1$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{1-2n} = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24z^3} - \dots, R = \infty$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-7} = \frac{1}{z^6} - \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^4} - \frac{4}{z^3} + \dots, R = 1$
11. $-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z - i)^{n-1} = -\frac{i/2}{z - i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z - i) + \dots, R = 2$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (z - \pi)^{2n-3} = -\frac{1}{(z - \pi)^3} + \frac{1}{2!(z - \pi)} - \frac{1}{4!}(z - \pi) + \dots, R = \infty$

15. $(z - 1) + 2 - 3/(z - 1)$

17. $-\sum_{n=0}^{\infty} (z + i)^{n-1} = -(z + i)^{-1} - 1 - (z + i) - \dots, R = 1$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ 21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z - 1)^{n-1}$

23. $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}, |z| < 1; -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{3n+3}}, |z| > 1$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+2}, |z| < 1, -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n+2}}, |z| > 1$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n, 0 < |z - 1| < 1; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^{n+1}}, |z - 1| > 1$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z + \frac{1}{2}\pi)^{2n-1}}{(2n)!}, |z + \frac{1}{2}\pi| > 0$

33. $(1 - 4z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}, |z| < 1, \left(\frac{4}{z^3} - \frac{1}{z^4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}}, |z| > 1$

35. Let $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ and $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ be two Laurent series of the same function

$f(z)$ in the same annulus. We multiply both series by $(z - z_0)^{-k-1}$ and integrate along a circle with center at z_0 in the interior of the annulus. Since the series converge uniformly, we may integrate term by term. This yields $2\pi i a_k = 2\pi i c_k$. Thus, $a_k = c_k$ for all $k = 0, \pm 1, \dots$

بخش ۱۴ صفحه ۳۱۷

1. $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ (simple poles), ∞ (essential singularity)
3. $0, \infty$ (simple poles)
5. $\pm 1, \pm i$ (third-order poles), ∞ (essential singularity)
7. $-i, 2i$ (second-order poles), ∞ (essential singularity)
9. 0 (simple pole), ∞ (essential singularity)
11. 0 (essential singularity), $\pm 2/\pi, \pm 2/3\pi, \dots$ (simple poles)
13. ∞ (essential singularity)
15. $1, \infty$ (essential singularities), $\pm 2n\pi i$ ($n = 0, 1, \dots$, simple poles)
17. $\pm 2, \pm 2i$ (second order)
19. 0 (third order), $\pm 1, \pm 2, \dots$ (second order)
21. $(2n + 1)/2$ (third order) 23. $\pm 1/\sqrt{3}$ (simple)
25. $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ (fourth order), by (6), Sec. 12.7
27. $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ by (3), and $g(z_0) \neq 0$. Hence $1/g(z_0)$ is analytic at $z = z_0$.
Let its Taylor series be

$$\frac{1}{g(z)} = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$
 Then $\frac{1}{f(z)} = \frac{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots}{(z - z_0)^n}$,
which proves the first statement. Multiplication of $h(z)$ does not change this.
29. Apply Theorem 3 to $f(z) - k$.
31. Region between the 0° and 90° meridians
33. Small spherical disk centered at the North Pole
35. Belt between two parallels that includes the equator

مسائل دوره‌ای فصل ۱۴ صفحه ۳۱۸

21. $\infty, \sin(z - 2)$ 23. $1/2, \ln(1 + 2z)$ 25. $1/3$
27. ∞, e^{-z^2} 29. $\infty, \cosh \sqrt{z}$
31. $1 - 2z + (2z)^2/2! - (2z)^3/3! + \dots, R = \infty$
33. $1/2 + (z + 1)/4 + (z + 1)^2/8 + (z + 1)^3/16 + \dots, R = 2$
35. $k - k^2(z - 2 - 3i) + k^3(z - 2 - 3i)^2 - \dots, k = (2 - 3i)/13, R = \sqrt{13}$
37. $1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \dots, R = 1$
39. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}, \left|z - \frac{\pi}{2}\right| > 0, \text{ pole of second order}$
41. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-4}, 0 < |z| < 1, \text{ pole of fourth order}$
43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! z^{2n-3}}, |z| > 0, \text{ essential singularity}$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^{n-3}, 0 < |z - 1| < 1, \text{ pole of second order}$
47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! n} z^{n-2}, |z| > 0, \text{ simple pole}$
49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!} (z - i)^{n-5}, |z - i| > 0, \text{ pole of fifth order}$

مسائل بخش ۱۵ صفحه ۳۳۸

1. -3 (at $z = 1$)
3. $-1/3!$ (at $z = 0$)

- ۴۷۵**
- | | | | |
|---|----------------------------|-------|--------------|
| 5. $i/3$ (at $-i$), $-16i/3$ (at $2i$) | 7. 1 (at $z = \pm n\pi$) | | |
| 9. $\mp \frac{1}{2}$ (at ± 1) by (5) | 11. 1 (at $z = 0$) | | |
| 13. $-9/16, 9/16, -9i/16, 9i/16$ (poles of second order at $z = 1, -1, i, -i$) | 15. $3/17$ (at $z = -1$) | 17. 0 | 19. $2\pi i$ |
| 21. $-6\pi i$ | 23. $(1 - \pi^3/128)\pi i$ | | |

مسائل بخش ۲. ۱۵ صفحه ۳۳۱

- | | | | | |
|------------------------------------|--------------|---------------------------------------|--------------|---------------|
| 1. $-2\pi i$ | 3. $-6\pi i$ | 5. 0 | 7. $10\pi i$ | 9. $4\pi i/5$ |
| 11. $2\pi i(\cosh 1 - 1) = 3.412i$ | | | 13. $2\pi i$ | 15. $\pi/3$ |
| 17. πi | 19. $8\pi i$ | 21. $\pi \sin \frac{1}{2} = 1.506i$ | | 23. $-4i$ |
| 25. $-4i$ | 27. 0 | 29. $-4i \sinh \frac{1}{2} = -2.084i$ | | |

مسائل بخش ۳. ۱۵ صفحه ۳۳۶

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------|-------------|--------------|
| 1. $4\pi/\sqrt{3}$ | 3. $2\pi/35$ | 5. $8\pi/3$ | 7. $\pi/30$ | 9. 0 |
| 11. π | 13. $\pi/\sqrt{2}$ | 15. $2\pi/3$ | 17. $\pi/2$ | 19. $\pi/16$ |

مسائل بخش ۴. ۱۵ صفحه ۳۴۲

- | | | |
|------------------------------|---|-----------------------------------|
| 3. 0 | 5. $(2\pi/\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}2} \cos \frac{1}{2} = 1.339$ | 7. π/e |
| 9. 0 | 11. $-\pi(\sin 1)/\sqrt{3}e^{\sqrt{3}} = -0.2700$ | |
| 13. $\pi/10e^2 - 2\pi/30e^3$ | 15. π | 17. $-\sqrt{3}\pi/6$ |
| 19. $-\pi/2$ | 21. $\pi/2$ | 23. $(3 - e^{-\pi})\pi/2 = 4.645$ |

مسائل دوره ای فصل ۱۵ صفحه ۳۴۳

- | | | | |
|----------------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| 11. 0, yes | 13. $5\pi/2$, yes | 15. $-18\pi i$, yes | 17. 0, no |
| 19. $-2\pi i/(n+1)!$, yes | | 21. $-i/2$, no | 23. $-64\pi i$, yes |
| 25. $\pi i/4$, yes | 27. $2\pi/7$ | 29. $4\pi/\sqrt{3}$ | 31. $\pi/60$ |
| 33. $\pi/2$ | 35. 0 | 37. $\pi/3$ | 39. $\pi/2$ |

مسائل بخش ۱. ۱۶ صفحه ۳۵۲

- | | | |
|---|----------------------------|---------------------|
| 1. $u = 1 - \frac{1}{4}v^2, 4 - \frac{1}{16}v^2, 9 - \frac{1}{36}v^2, 16 - \frac{1}{64}v^2$ | 3. $v = 20$ | |
| 5. The positive and the negative v -axis, respectively | 7. $ w < \frac{1}{9}$ | |
| 9. $ \arg w < 2\pi/3$ | 11. $\pi/2 < \arg w < \pi$ | 13. $4e^u, 4ie^u$ |
| 15. $3 \cos t + i \sin t, -3 \sin t + i \cos t$ | | |
| 17. $t + it^{-1}, 1 - it^2$ | 19. $-a/2$ | 21. $\pm 2, \pm 2i$ |
| 23. $0, \pm \pi i/2, \pm \pi i, \dots$ | 25. By conformality | 27. Only in size |

مسائل بخش ۲. ۱۶ صفحه ۳۵۸

- | | | | |
|-------------------------|---------------------------------------|--|------------|
| 1. $z = 0$ | 3. $0, \pm 1, \pm i$ | 5. $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ | 7. $\pm i$ |
| 9. $\pm i$ | 11. $w = 4/z, w = (z+4)/(z+1)$, etc. | 13. $w = az/d$ | |
| 15. $w = (az+b)/(a-bz)$ | | 17. $z = (2iw - 4i)/(-w + 3)$ | |

مسائل بخش ۳. ۱۶ صفحه ۳۶۴

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| 1. $w = 3z + 2$ | 3. $w = (z+1)/(-3z+1)$ |
| 5. $w = 1/z$ | 7. $w = (3iz+1)/z$ |
| 9. $w = iz$ | 13. $z = (-4w+1)/(2w-1)$ |
| 15. $w = (2z-i)/(-iz-2)$ | 19. $w = (z^4 - i)/(-iz^4 + 1)$ |

۳۷۱ صفحه ۴ . ۱۶ مسائل بخش

1. $1 \leq |w| \leq e$, $0 \leq \arg w \leq \frac{1}{2}\pi$
3. $e < |w| < e^2$, $-\frac{1}{2}\pi < \arg w < \frac{1}{2}\pi$
5. Interior of the ellipse $u^2/(\cosh^2 2) + v^2/(\sinh^2 2) = 1$ in the first quadrant
7. Elliptical annulus bounded by $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\sinh^2 1 = 1$ and $u^2/\cosh^2 2 + v^2/\sinh^2 2 = 1$ and cut along the positive imaginary axis
9. $t = z^2$ maps the given region onto the strip $0 < \operatorname{Im} t < \pi$, and $w = e^t$ maps this strip onto the upper half-plane. Ans. $w = e^{z^2}$.
11. $w' = \cos z = 0$ at $z = \pm(2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, \dots$
13. $\pm n\pi i$, $n = 0, 1, \dots$
15. Upper half-plane $v > 0$
17. Lower half-plane $v < 0$
19. $\ln 2 \leq u \leq \ln 3$, $\pi/4 \leq v \leq \pi/2$

۳۷۶ صفحه ۵ : ۱۶ مسائل بخش

1. w moves once around the unit circle $|w| = 1$.
5. $|z| = 1$; $\ln z = \ln|z| + i\theta = i\theta$ moves up the v -axis by 2π each time.
7. ± 1 (first order), 2 sheets
9. 0, 2 sheets
11. a , 3 sheets
13. 0, ± 1 , 2 sheets
15. -1 , infinitely many sheets
17. $-\frac{1}{2}i$, 3 sheets
19. 0, 2 sheets

۳۷۷ صفحه ۱۶ دوره ای فصل

11. $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$, $\frac{1}{4}v^2 - 1$
13. $|w| = 6.25$, $|\arg w| < \pi/4$
15. $v = 4u/3$
17. $\pi/4 < \arg w \leq \pi/2$
19. The domain between the parabolas $u = \frac{1}{4} - v^2$ and $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$
21. $|\arg w| < \pi/8$
23. $u = 1$
25. $|w + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$
27. 0, $\pm i$
29. $\pm i/\sqrt{3}$
31. $(\pm n + \frac{1}{4})\pi$
33. iz
35. $z/(z + 2)$
37. $5z$
39. $2z/(z - 1)$
41. $w = iz^3 + 1$
43. $w = iz$
45. $w = e^{3z}$
47. $w = z^2/2k$
49. $2 \pm \sqrt{6}$

۳۸۷ صفحه ۱. ۱۷ بخش

1. $\Phi = 20x + 200$
3. $\Phi = 20(1 - y/d)$
5. $\Phi = 110 - 50xy$
7. $(110 \ln r)/\ln 2$
9. $200 - (100 \ln r)/\ln 2$
11. $y = x/2 + c$
13. $x^2 - y^2 = \text{const}$
15. $(x - 1/2c)^2 + y^2 = 1/4c^2$
17. $u = c \operatorname{Re} [\ln(z - a) + \ln(z + a)] = c \ln|z^2 - a^2|$

۳۹۲ صفحه ۲. ۱۷ بخش

3. $\Phi(x, y) = U_2 xy$. $w = u + iv = iz^2$ maps R onto $-2 \leq u \leq 0$.
5. Apply $w = z^2$.
7. Corresponding rays in the w -plane make equal angles, and the mapping is conformal.
9. $z = (2Z - i)/(-iZ - 2)$

۳۹۷ صفحه ۳. ۱۷ بخش

1. $(100/d)y$. Rotate through $\pi/2$.
3. $100 - 240\theta/\pi$
5. $\operatorname{Re} F(z) = 100 + (200/\pi) \operatorname{Re} (\sin^{-1} z)$
7. $T_1 + \pi^{-1}(T_2 - T_1) \operatorname{Arg}(w - a)$
9. $T_0[\operatorname{Arg}(w - 1) - \operatorname{Arg}(w + 1)]/\pi$
15. $120\pi^{-1} \operatorname{Arg} z$
17. $T_0 + 2\pi^{-1}(T_1 - T_0) \operatorname{Arg} z$
19. $400(\operatorname{Arg} z)/\pi$