(جلسه ششم)

سری فوریه توابع متقارن نیم موج :

تابع $f(x)$ را متقارن نیم موج گوئیم اگر .

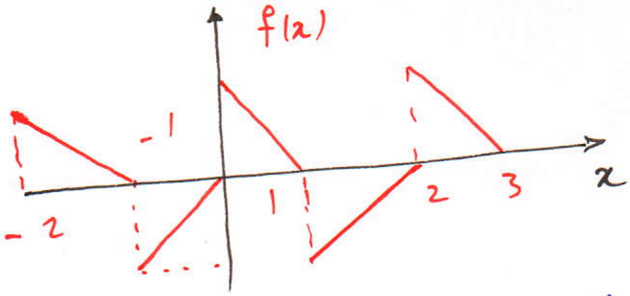
$$\boxed{f(x+\tfrac{T}{2}) = -f(x)}$$

اگر تابع $f(x)$ متقارن نیم موج باشد در این صورت هارمونیک ها زوج آن صفر می باشند یعنی :

$a_n \,\&\, b_n = 0$ ، زوج wn

مثال ۹ - ضرایب سری فوریه شکل مقابل

توجه : شکل مقابل متقارن نیم موج است .



$T = 2$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad , \quad a_0 = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx = \frac{2}{2}\left(\int_{-1}^{0} x\cos n\pi x\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cos n\pi x\,dx\right)$$

$$a_n = \frac{x}{\pi n}\sin n\pi x - \frac{(-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + (-x+1)\frac{1}{\pi n}\sin n\pi x - (-1)\left(\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\Big|_{0}^{1}$$

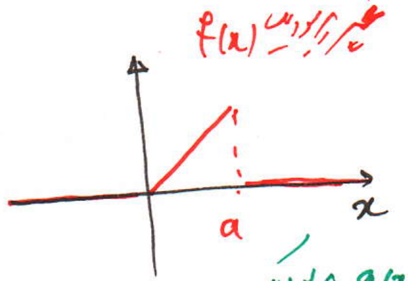
$$a_n = \cdots = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi x) = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2} \ , & \text{فرد } n \\ 0 \ , & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega_0 x\,dx = \frac{2}{2}\left(\int_{-1}^{0} x\sin n\pi x\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\sin n\pi x\,dx\right)$$

$$b_n = \cdots = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \ ; & \text{فرد } n \\ 0 \ ; & \text{زوج } n \end{cases}$$

سری فوریه برای توابع غیر پریودیک :

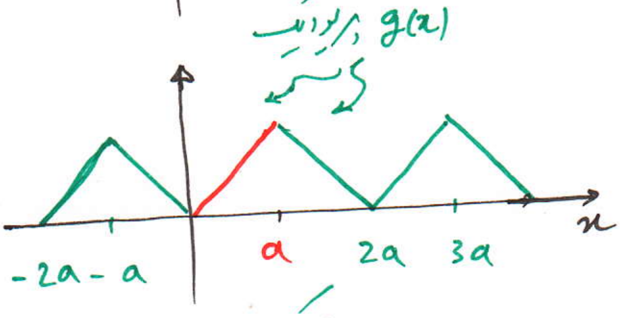
قبلاً بیان گردید که سری فوریه برای توابع پریودیک تعریف شده. آیا می توان برای توابع غیر پریودیک نیز سری فوریه تعریف نمود که البته باید تابع بصورت پریودیک درآورد. ؟ چه طرقی می توان یک شکل موج غیر پریودیک را پریودیک نمود.



روش اول - تابع را بصورت زوج پریودیک نمود.

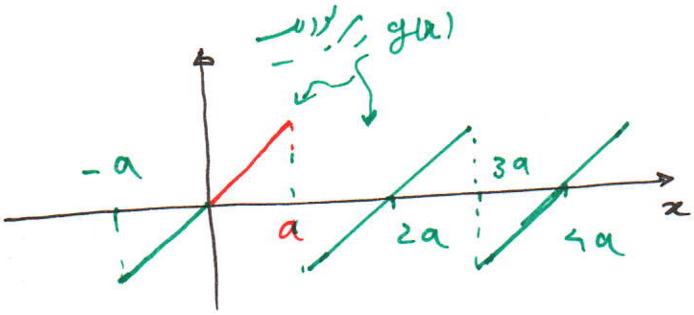
(معادل بخش شیب و قرینه با هم)

$T = 2a$



$$g(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x \; ; \; -\infty < x < \infty$$

$$f(x) = g(x) \; ; \; \text{for} \quad 0 \leq x \leq a$$

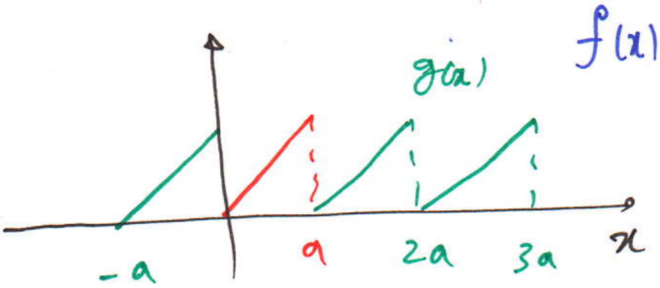


روش دوم - تابع را بصورت فرد پریودیک نمود.

$T = 2a$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x \; ; \; -\infty < x < \infty$$

$$f(x) = g(x) \; ; \; \text{for} \quad 0 \leq x \leq a$$



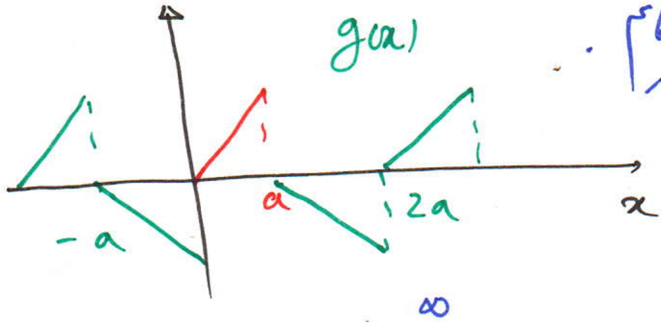
روش سوم - تابع را بصورت نه فرد و نه زوج پریودیک نمو.

$T = a$

$$g(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega x) \; ; \; -\infty < x < \infty$$

$$f(x) = g(x) \; , \; \text{for} \quad 0 < x < a$$

درس چهارم - تابع را بصورت متقارن نیم موج پریودیک می‌نماییم.

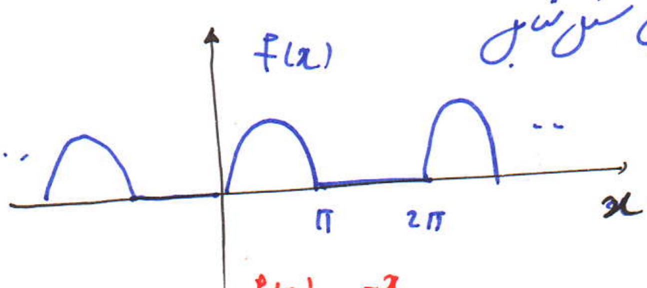


در این حالت فقط سینوس‌های فرد را داریم.

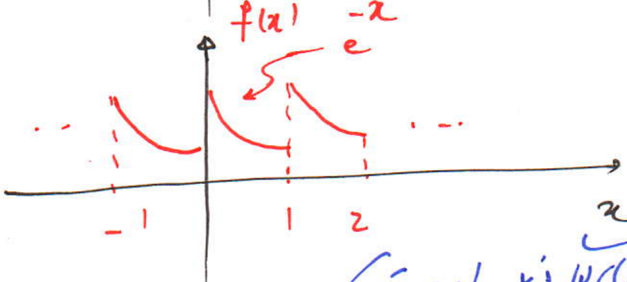
$$g(x) = \sum_{n=1 \text{ فرد}}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$f(x) = g(x) \quad ; \quad 0 < x < a$$

تمرین ۱- سری فوریه شکل موج سینوسی یکسوشده نیم موج یعنی شکل مقابل را بدست آورید.



تمرین ۲- برای شکل مقابل a_n ، b_n را محاسبه نمایید.



تمرین ۳- با استفاده از سری فوریه مثال این جلسه مجموع سری‌های ذیل را بدست آورید.

الف -

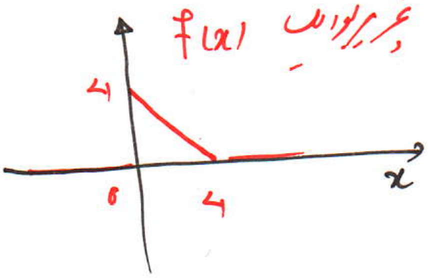
$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

راهنمایی: (اتحاد پارسوال)

مراجعه به تمرین‌ها شود.



تمرین ۴- برای شکل مقابل چهار مدل سری فوریه بنویسید.

سری فوریه نمایی :

چند یادآوری - ۱ـ

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x \quad , \quad j=\sqrt{-1}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx}+e^{-jx}\right)$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}\left(e^{jx}-e^{-jx}\right)$$

۲ـ تابع $e^{jn\omega_0 x}$ با پریود $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ پریودیک می باشد.

$$e^{jn\omega_0 x} = e^{jn\omega_0\left(x+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = e^{jn\omega_0 x}\cdot \underbrace{e^{jn2\pi}}_{1} = e^{jn\omega_0 x}$$

۳ـ مجموعه $\{e^{jn\omega_0 x}\}$ یک مجموعه متعامد در فاصله $[-T/2, T/2]$ است.

تعریف سری فوریه نمایی: اگر $f(x)$ تابع مناسب مختلط با پریود T باشد آنگاه دارای سری فوریه نمایی بصورت مقابل است:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}}$$

محاسبه ضرایب c_n: برای محاسبه ضرایب c_n طرفین را در $e^{-jm\omega_0 x}$ ضرب نموده و انتگرال گیری می کنیم:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot e^{-jm\omega_0 x}\,dx = \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\omega_0 x}\cdot e^{-jm\omega_0 x}\,dx$$

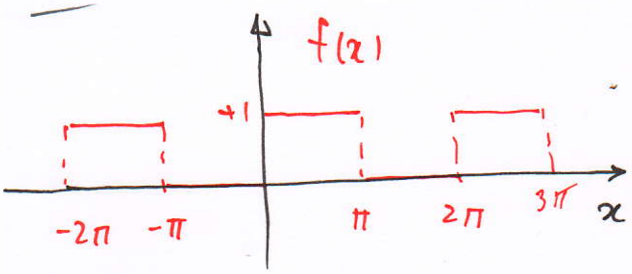
$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-jm\omega_0 x}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 x}\cdot e^{-jm\omega_0 x}\,dx$$

فقط برای $m=n$ مخالف صفر است و برای بقیه حالات صفر است

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-jn\omega_0 x}\,dx = 0+0+\dots + c_n\overbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{+jn\omega_0 x}\cdot e^{-jn\omega_0 x}\,dx}^{T} + 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-jn\omega_0 x}\,dx} \quad ; \quad c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

مثال - ضرایب سری فوریه تابع شکل مقابل:



$$T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \times dx + \int_0^{\pi} 1 \times dx = \boxed{1}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \times e^{-jn\omega_0 x}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1 \times e^{-jn\omega_0 x}\,dx$$

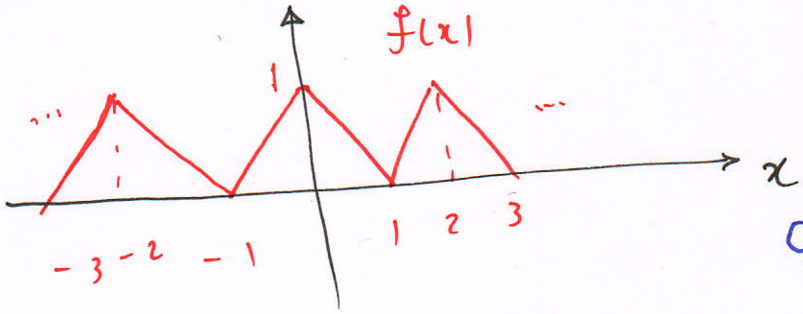
$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-jn}\, e^{-jnx}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{jn}\right)\left(e^{-jn\pi} - 1\right) = \frac{-1}{2jn\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{-1}{jn\pi} \;, & n \text{ فرد} \\ C_n = 0 \;; & n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow C_n = \begin{cases} \dfrac{j}{n\pi} \;; & n \text{ فرد} \\ 0 \;; & n \text{ زوج} \;; n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{j}{n\pi}\right) e^{jnx} + 1$$

مثال -

ضرایب سری فوریه‌ی شکل مقابل:



$$T = 2$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi}$$

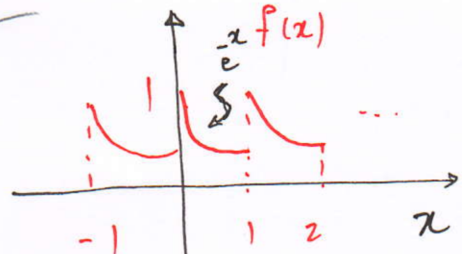
$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(x)\,dx = 1$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)\, e^{-jn\pi x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (x+1)\, e^{-jn\pi x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{1} (1-x)\, e^{-jn\pi x}\,dx$$

$$= \cdots = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi^2} \;; & n \text{ فرد} \\ 0 \;; & n \text{ زوج} \;, n \neq 0 \end{cases}$$

مثال - ضرایب سری فوریه نمایی شکل مقابل:



$$T = 1 \quad , \quad \omega_0 = 2\pi$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \int_0^1 e^{-x} e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \int_0^1 e^{-x} e^{-jn2\pi x}\, dx$$

$$c_n = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi n)x}\, dx = \frac{1}{-(1+j2\pi n)}\, e^{-(1+j2\pi n)x}\Big|_0^1$$

$$c_n = \frac{-1}{1+j2\pi n}\left[e^{-(1+j2\pi n)} - 1\right]$$

$$c_n = \frac{-1}{1+j2\pi n}\left[e^{-1} e^{j2\pi n} - 1\right] = \frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi n} = \boxed{\frac{(1-e^{-1})(1-j2\pi n)}{1+4\pi^2 n^2}}$$

رابطه بین ضرایب سری فوریه نمایی و مثلثاتی:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\left[\cos n\omega_0 x - j\sin n\omega_0 x\right] dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\, dx}_{\frac{a_n}{2}} - j\,\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega_0 x\, dx}_{\frac{b_n}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}} \quad (1)$$

همچنین می‌دانیم که:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega_0 x\, dx = \frac{\cancel{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\left[\frac{e^{jn\omega_0 x} + e^{-jn\omega_0 x}}{\cancel{2}}\right] dx$$

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\, e^{+jn\omega_0 x}\, dx}_{c_{-n}} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega_0 x}\, dx}_{c_n}$$

$$\Longrightarrow$$