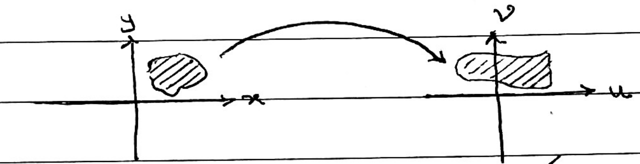
درس ۱
جلسه هفدهم

ریاضیات مهندسی:

تابع مختلط (مرور): اگر S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد، تابع f تعریف شده روی S به هر عدد مختلط z از مجموعه‌ی S عددی مانند w نسبت می‌دهد به طوری که $w=f(z)$ است. فرض کنید u و v به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی w باشد ($w=u+iv$) از آنجایی که $z=x+iy$ بستگی دارد، کاملاً واضح است که در حالت کلی u و v به x و y بستگی دارند، لذا می‌توان نوشت:

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$



این مطلب نشان دهنده‌ی این موضوع است که تابع مختلط $f(z)$ معادل با دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ است که هر کدام از آن‌ها به دو متغیر حقیقی x و y بستگی دارند، به طور مثال $f(z)=z^2+z$ را می‌توان نوشت:

$$f(z)=(x+iy)^2+x+iy=x^2-y^2+i2xy+x+iy=(x^2-y^2+x)+i(2xy+y)=u+iv$$

$$u(x,y)=Re\{f(z)\}=x^2-y^2+x$$

$$v(x,y)=Im\{f(z)\}=2xy+y$$

نکته: بعضی از توابع مختلط رفتارهایی را نشان می‌دهند که از طبیعت مختلط بودن آن ناشی می‌شود، از جمله می‌توان از توابع چند مقداری نام برد. به طور مثال تابع $f(z)=\sqrt{z}$ را در نظر بگیرید، در صورتی که z یک متغیر حقیقی باشد هیچ مشکلی در مورد یکتایی این تابع نخواهیم داشت. اما در صورتی که z یک متغیر مختلط باشد، به ازای هر z دو $f(z)$ متفاوت به صورت زیر وجود خواهد داشت

$$f(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos\theta/_2+i\sin\theta/_2\right)$$

$$f(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos(\pi+\theta/_2)+i\sin(\pi+\theta/_2)\right)$$

بدین جهت بررسی رفتارهای خاصی است که نمی‌توان خواصی از جمله یکتایی و پیوستگی را در هنگام کار با متغیرهای مختلط همچون متغیرهای حقیقی داشت.

s.a.m

حد و پیوستگی و مشتق توابع تحلیلی:

تعریف ۱:

فرض تابع تک مقداری $f(z)$ آن گاه وقتی که z به سمت z_0 میل می‌کند دارای حد w_0 است اگر $f(z)$ در همه نقاط همسایگی z_0، به جز احتمالاً خود z_0، تعریف شده باشد و اگر بتوان برای هر عدد حقیقی مثبت ε، یک عدد حقیقی δ پیدا کرد به طوری که برای همه مقادیر $z \neq z_0$ در دیسک $|z-z_0|<\delta$ داشته باشیم $|f(z)-L|<\varepsilon$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

نکته: لازم به ذکر است به طور ضمنی بیان کنیم که z می‌تواند از هر جهت دلخواه در صفحه مختلط به z_0 میل کند و بدیهی است که حد در صورت وجود برای تمامی جهت‌ها مقدار واحدی خواهد داشت.

نتیجه: حد تابع در صورت وجود منحصر به فرد خواهد بود.

مثال: هرگاه $f(z)=\frac{xy}{x^2-y^2}+i2xy$ آن گاه $\lim_{z\to 0} f(z)$ را بدست آورید؟

پاسخ: مقدار $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2}$ موجود نیست چون اگر روی خط $y=mx$ به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2} \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2(1-m^2)} = \frac{m}{1-m^2}$$

چون جواب به m وابسته است (یعنی به ازای مقادیر مختلف m، حاصل حد مقادیر مختلفی پیدا می‌کند) و این با تعریف منحصر به فرد بودن حد تابع در تناقض است، پس حد موجود نیست.

با توجه به تعریف حد و شرط وجود آن برای توابع مختلط می‌توانیم دسته‌های زیر و متعاقب آن روش‌های بیشتری زیر را ارائه کنیم.

۱- عبارت فقط شامل z است و هیچ گونه نقطه‌ای ناپیوستگی در آن دیده نشود و صرفاً با حالت $\frac{0}{0}$ روبرو هستیم

در این حالت مانند آنچه در مورد توابع حقیقی بلدیم عمل کرده و از هم‌ارزی یا روش‌های دیگر حد را حساب می‌کنیم

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{z}\right) = 1$$

جلسه هفدهم

۲_ اگر عبارت به شکل $\frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد که $Q(z)$ تابعی چندجمله‌ای است و حالت ابهام $\frac{0}{0}$ را داشته باشیم می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم. (مثال)

$$\lim_{z\to i}(z-i)\times\frac{2\bar{z}+1}{2z^3+iz^2+2z+i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{2z^3+iz^2+2z+i}\times\lim_{z\to i}(2\bar{z}+1)$$

$$=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{6z^2+2iz+2}\right)\times\lim_{z\to i}(2\bar{z}+1)=-\frac{1}{6}(1-2i)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}i$$

توجه: استفاده از هوپیتال برای حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در توابع مختلط صحیح نخواهد بود.

۳_ معمولاً اگر عبارت شامل $\bar{z}$ باشد برای یافتن حد در نقطه‌ی z_0 عبارت $z_0+re^{i\theta}$ را جایگزین z می‌کنیم و با بردن حد به فضای قطبی، طبیعی است که باید $r\to 0$ میل کند تا $z\to z_0$ درست باشد. پس از این جایگزینی مقدار حد را حساب می‌کنیم اگر این مقدار تابعی از θ باشد (به θ بستگی داشته باشد) می‌توانیم بگوییم حد تابع در z_0 موجود نیست. اما اگر برابر عددی ثابت مانند a است. نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که جواب حد روی همه‌ی مسیرها برابر با a است مگر آنکه همه‌ی حیثیت‌ها در مرجع هم درج باشند.

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است پس تابع فاقد حد است

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x-iy}{x+iy}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}}\frac{x-iy}{x+iy}=-1$$

چون حد تابع از دو مسیر متفاوت مقدار منحصربه‌فردی نشده است پس حد وجود ندارد.

۴_ اگر در ضابطه‌ی تابع فقط x و y داشته باشیم و خبری از z و $\bar{z}$ به وضوح نبود در این حالت هم بهتر است وارد مختصات قطبی شویم و با جایگزینی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ حاصل حد را حساب کنیم و با توجه به توضیحات حالت سوم وجود یا عدم وجود حد را ثابت کنیم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{2(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=2\cos\theta\sin\theta$$

چون حاصل حد به θ بستگی دارد پس حد وجود ندارد.

البته در این حالت (که در ضابطه‌ی تابع فقط x و y داریم) می‌توانیم روی خط $y=mx$ و یا هر خط مناسب دیگر

s.a.m

که y برحسب ضریب m از z معین می کند حد را بررسی کنیم. اگر حد به m بستگی داشت می توان گفت تابع حد ندارد.

تعریف ۲: تابع $f(z)$ در $z=z_0$ پیوسته است اگر $f(z_0)$ تعریف شده باشد و داشته باشیم $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

به عبارت دیگر برای اینکه تابع $f(z)$ در نقطه z_0 پیوسته باشد باید $f(z)$ به ازای تمام مسیرهای ممکن که از z به z_0 ختم می شود به $f(z_0)$ میل کند. گوییم تابع $f(z)$ در ناحیه‌ی R پیوسته است هرگاه $f(z)$ در هر نقطه ناحیه R پیوسته باشد.

خاصیت‌های حد و پیوستگی:

الف) اگر $\lim_{z\to z_0} f(z)=L$ و $\lim_{z\to z_0} g(z)=M$ باشد آنگاه:

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\pm g(z)\right)=L\pm M$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)g(z)\right)=LM$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z)=L/M,\quad M\neq 0$$

ب) اگر $f(z)$ و $g(z)$ در $z=z_0$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f(z)\pm g(z)$ ، $f(z)g(z)$ و $f(z)/g(z)$ در $z=z_0$ پیوسته هستند در مورد خارج قسمت $g(z_0)\neq 0$.

ج) توابع چندجمله‌ای برحسب z در تمامی نقاط پیوسته خواهند بود.

د) توابع گویا در تمامی نقاط به جز ریشه‌های مخرج پیوسته هستند.

توجه: اگر تابع $f(z)$ را به صورت $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بیان کنیم آنگاه داریم

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته است اگر و فقط اگر توابع u و v در $z_0=(x_0,y_0)$ پیوسته باشند.