فصل سوم: انتقال سیگنال و فیلترینگ

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$a\,x(t) \longrightarrow a\,y(t) \quad \& \quad x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$$

پاسخ ضربه و کانولوشن

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\lambda) \longrightarrow h(t-\lambda)$$

$$a\,\delta(t) \longrightarrow a\,h(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda$$

خاصیت مشتق کانولوشن

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,y(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,y'(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda$$

$$= x(t) * y'(t) = x'(t) * y(t)$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = x(t) * y''(t) = x'(t) * y'(t) = x''(t) * y(t)$$

تابع تبدیل و پاسخ فرکانسی

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$H(f) \longrightarrow |H(f)|$ اندازه پاسخ فرکانسی

$H(f) \longrightarrow \angle H(f)$ فاز پاسخ فرکانسی

پاسخ به ورودی نمایی مختلط

$$x(t) = A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 (t-\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j2\pi f_0 \lambda}\, d\lambda\right) A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$= H(f_0) A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} = A_y e^{j\phi_y} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$A_y = |H(f_0)| A_x \qquad \phi_y = \angle H(f_0) + \phi_x$$

$$\frac{x + x^*}{2} \longrightarrow \frac{y + y^*}{2}$$

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \phi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(2\pi f_0 t + \phi_y)$$

$x(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow Y(f) = X(f) \times H(f)$$

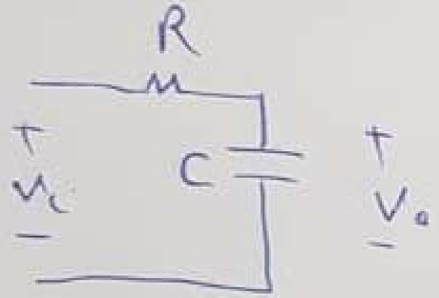
حاصل ضرب طیف ورودی در پاسخ ضربه

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

مثال: پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه؟



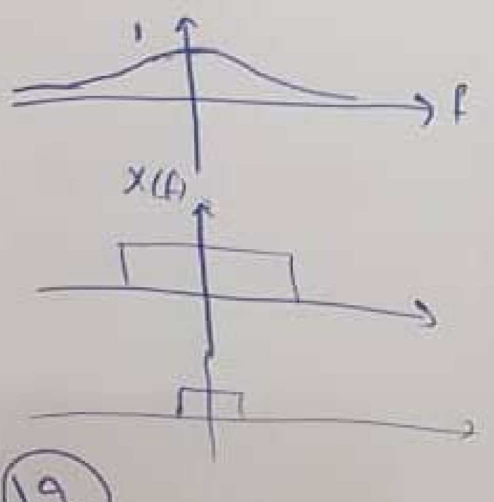
تقسیم امپدانسی

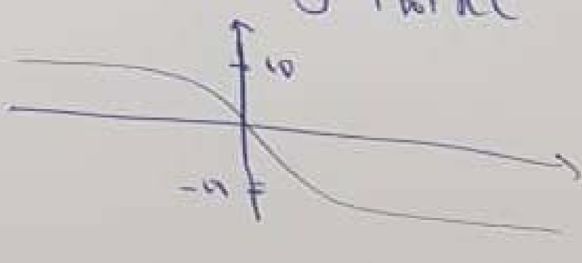
$$\frac{V_o}{V_i} = H(f) = \frac{\frac{1}{jC2\pi f}}{\frac{1}{jC2\pi f} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + j2\pi f RC}\right\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

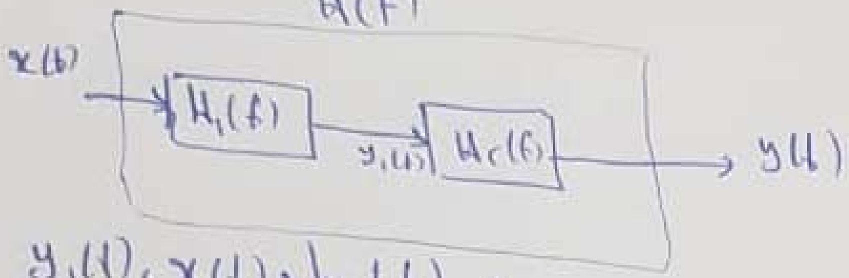
$$\angle H(f) = -tg^{-1} 2\pi f RC$$





تحلیل با نمودار بلوکی

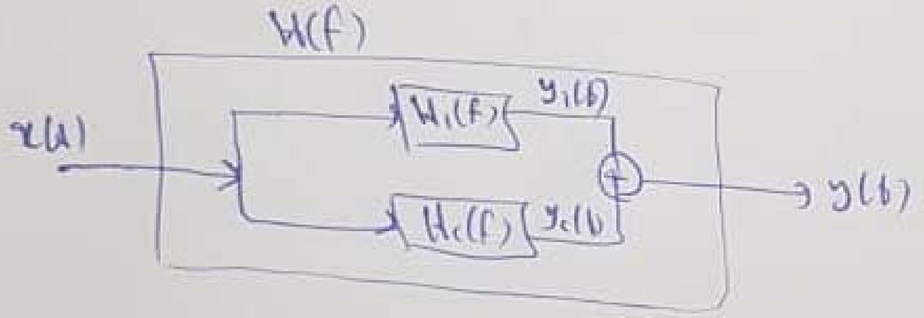
۱- اتصال سری



$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$
$$y(t) = y_1(t) * h_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$
$$= x(t) * h(t)$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$
$$H(f) = H_1(f)\,H_2(f)$$

۲- اتصال موازی

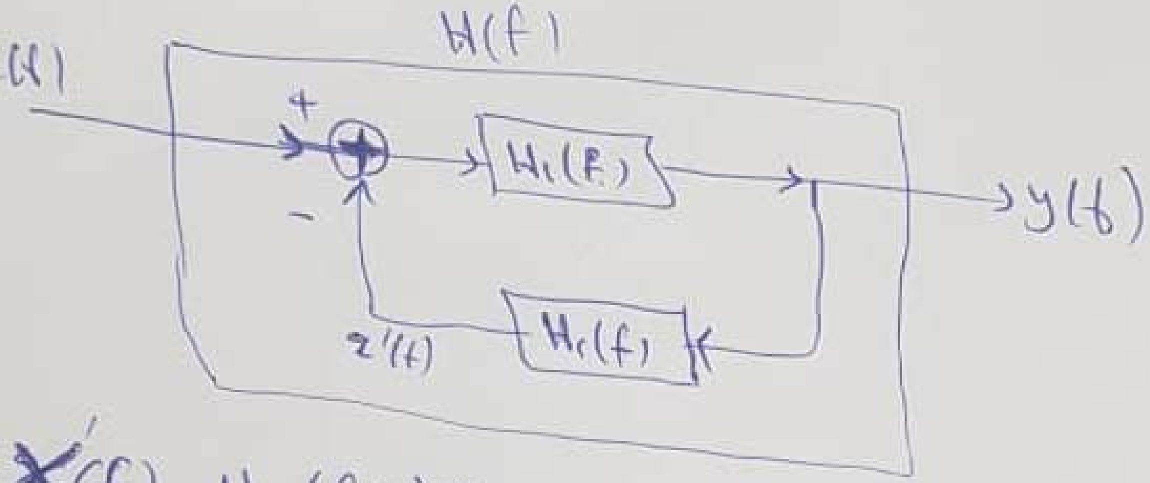


$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$
$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$
$$= x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\}$$
$$= x(t) * h(t)$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

۳- اتصال فیدبک



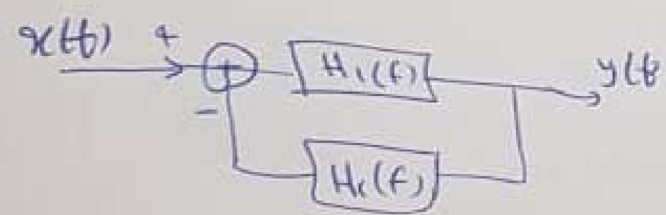
$$X'(f) = H_2(f)\,Y(f)$$

$$Y(f) = H_1(f)X(f) - H_1(f)X'(f) = H_1(f)X(f) - H_1(f)H_2(f)Y(f)$$

$$Y(f)\{1 + H_1(f)H_2(f)\} = H_1(f)X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

مثال: برای سیستم زیر پاسخ ضربه و فرکانس را بیابید



$$H_1(f) = j2\pi f$$
$$H_2(f) = k$$

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi kf} = \frac{1}{k} \times j2\pi f \times \frac{1}{\frac{1}{k} + j2\pi f}$$

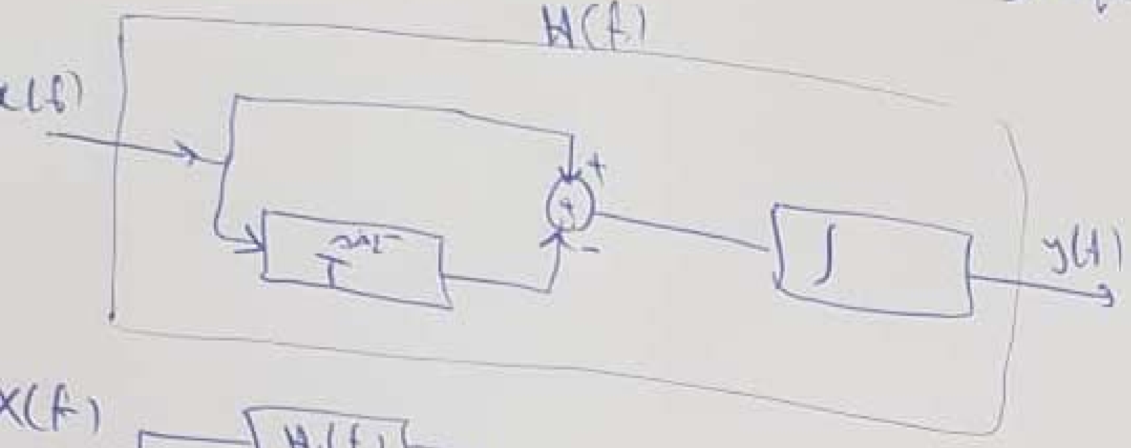
$$\frac{1}{a + j\omega} \to e^{-at}u(t) \Rightarrow \frac{1}{k}e^{-\frac{t}{k}}u(t)$$

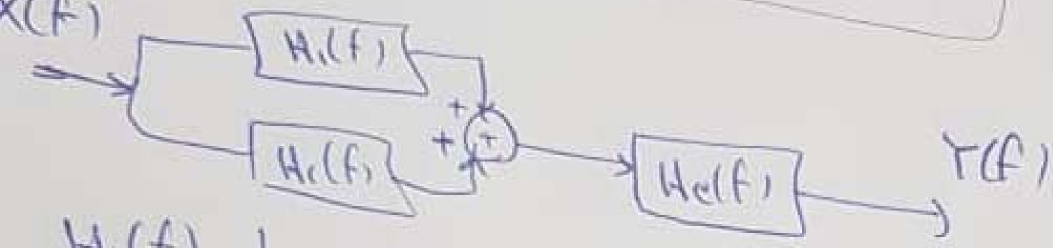
$$\frac{dx(t)}{dt} \to j2\pi f X(f) \to \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{k}e^{-\frac{t}{k}}u(t)\right\} = h(t)$$

$$h(t) = -\frac{1}{k^2}e^{-\frac{t}{k}}u(t) + \underbrace{\frac{1}{k}e^{-\frac{t}{k}}\delta(t)}_{\frac{1}{k}\delta(t)}$$

#1 $h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

مثال: نگهدارنده مرتبه صفر



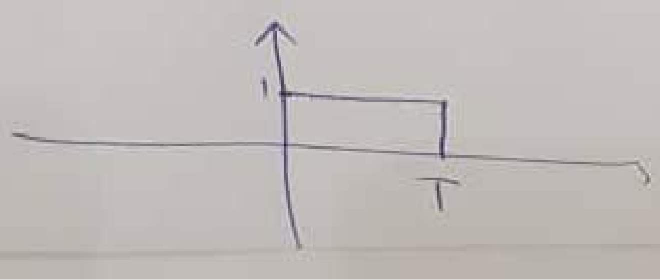


$$H_1(f)=1$$
$$H_2(f)=-e^{-j2\pi fT}$$
$$H_3(f)=\frac{1}{j2\pi f}$$

$$H(f)=H_3(f)\{H_1(f)+H_2(f)\}$$
$$=(1-e^{-j2\pi fT})\times\frac{1}{j2\pi f}$$
$$=e^{-j\pi fT}\left\{\frac{e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{j2\pi f}\right\}$$
$$=e^{-j\pi fT}\frac{\sin \pi fT}{\pi f}=T\,e^{-j\pi fT}\,\mathrm{sinc}\, fT$$

$$h(t)=\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$\hat{h}(t)=h_1(t)+h_2(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$$
$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(\delta(t')-\delta(t'-T)\right)dt'=u(t)-u(t-T)$$



مثال: برای ورودی $x = A\{\delta(t+t_d) - \delta(t-t_d)\}$ خروجی سیستم با پاسخ ضربه $h(t)$ و طیف آن را بیابید

$$y(t) = h(t) * x(t) = A\, h(t) * \delta(t+t_d) - A\, h(t) * \delta(t-t_d)$$
$$= A\, h(t+t_d) - A\, h(t-t_d)$$
$$Y(f) = A\, H(f)\{e^{j2\pi f t_d} - e^{-j2\pi f t_d}\}$$
$$= 2Aj\, H(f) \sin 2\pi f t_d$$

اعوجاج سیگنال در انتقال

انتقال بدون اعوجاج: فقط دامنه سیگنال تغییر کند و یا اینکه تاخیر به سیگنال اعمال شود

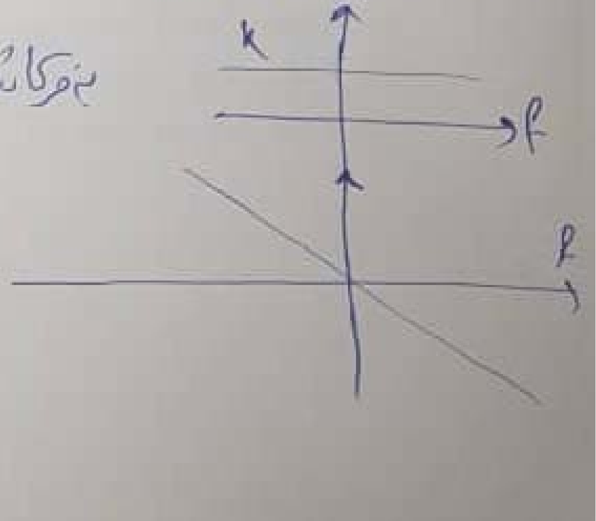
$$y(t) = k\, x(t-t_d)$$

$$Y(f) = k\, X(f)\, e^{-j2\pi f t_d}$$
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = k\, e^{-j2\pi f t_d}$$

سیستم بدون اعوجاج

اندازه پاسخ فرکانسی ثابت و فاز خطی

$$\begin{cases} |H(f)| = |k| & \longleftarrow \text{به فرکانس ربطی ندارد} \\ \angle H(f) = -2\pi f t_d \pm m\pi \end{cases}$$



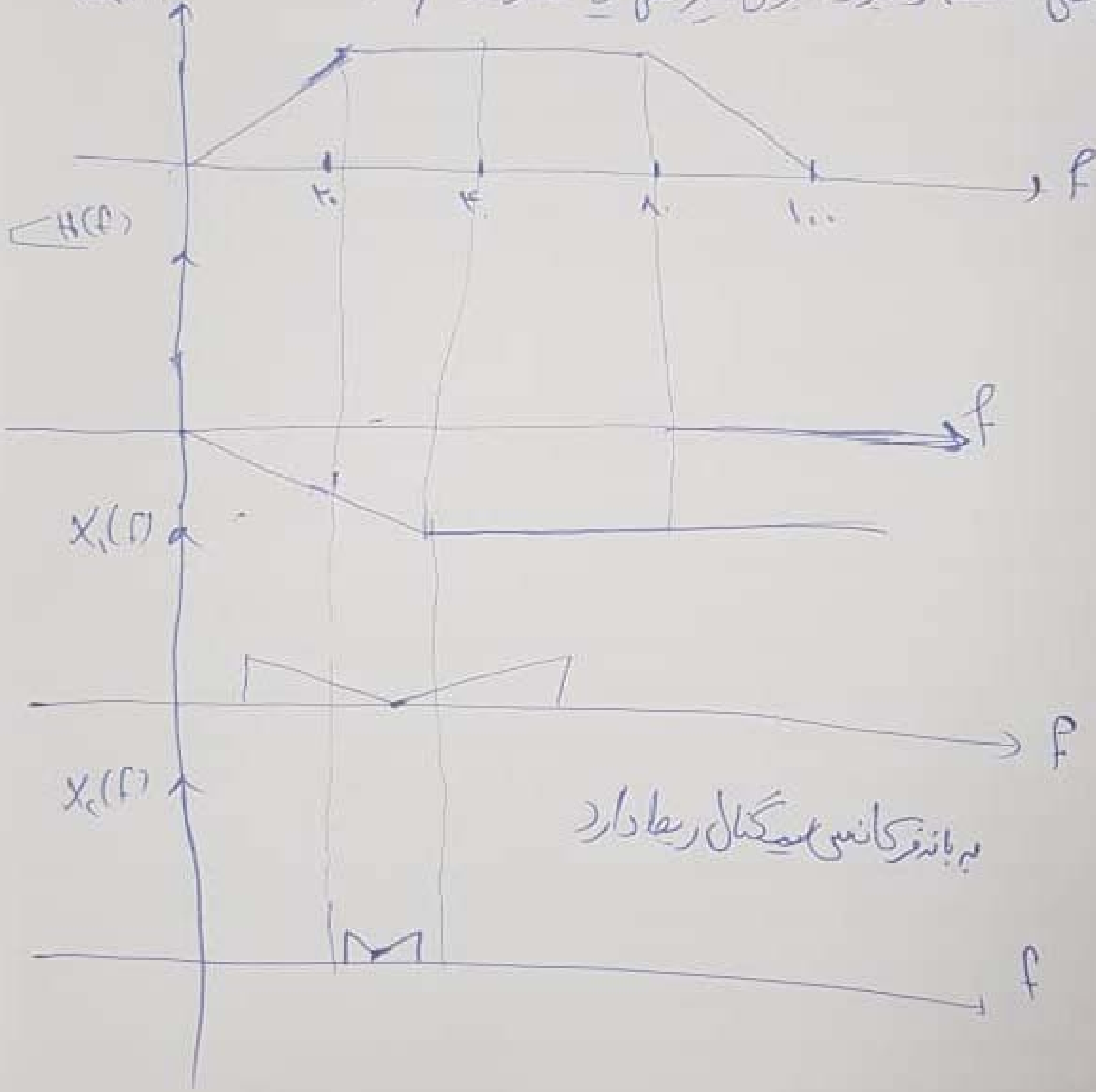
انواع اعوجاج

۱- اعوجاج دامنه $|H(f)| \neq |k|$

۲- اعوجاج فاز $\angle H(f) \neq -2\pi f t_d \pm m\pi$

اعوجاج خطی

۳- اعوجاج غیرخطی ← وجود اجزای غیرخطی یا عملکرد سیستم در مناطق غیرخطی



د:

$$x(t) = \cos \omega_0 t + \cos 4\omega_0 t + \cos 5\omega_0 t$$

$$\cos \omega_0 t \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow |H(f_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(f))$$

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_d} \longrightarrow \angle H(f) = -2\pi f t_d$$

$$|H(f)| \cos \omega_0 t - \underbrace{2\pi f_0}_{\omega} t_d = k \cos \omega (t - t_d)$$

$$|H(4f_0)| \cos(4\omega_0 t - 2\pi f_0 \times 4 t_d) = k \cos 4\omega_0 (t - t_d)$$

$$|H(5f_0)| \cos(5\omega_0 t - 2\pi f_0 \, 5 t_d) = k \cos 5\omega_0 (t - t_d)$$

$$\Longrightarrow y(t) = k\, x(t - t_d)$$

$$\angle H(f) = -tg^{-1} f$$

$$k \cos(\omega_0 t - tg^{-1} f_0) = k \cos \omega_0 \left(t - \frac{tg^{-1} f_0}{\omega_0}\right)$$

$$k \cos(4\omega_0 t - tg^{-1} 4 f_0) = k \cos 4\omega \left(t - \frac{tg^{-1} 4 f}{4\omega}\right)$$

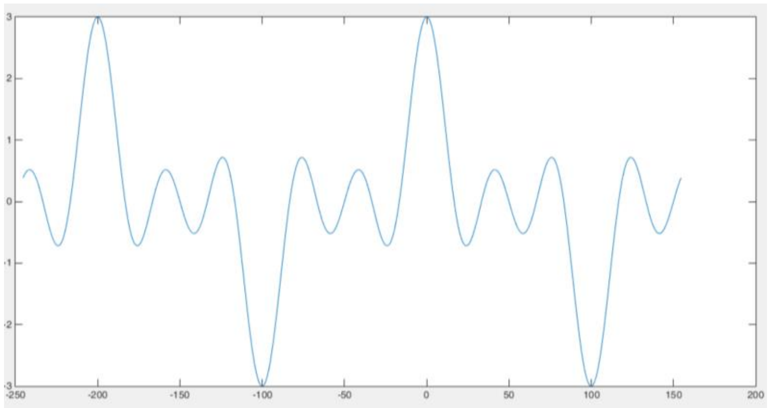
$$k \cos(5\omega_0 t - tg^{-1} 5 f_0) = k \cos 5\omega \left(t - \frac{tg^{-1} 5 f_0}{5\omega}\right)$$

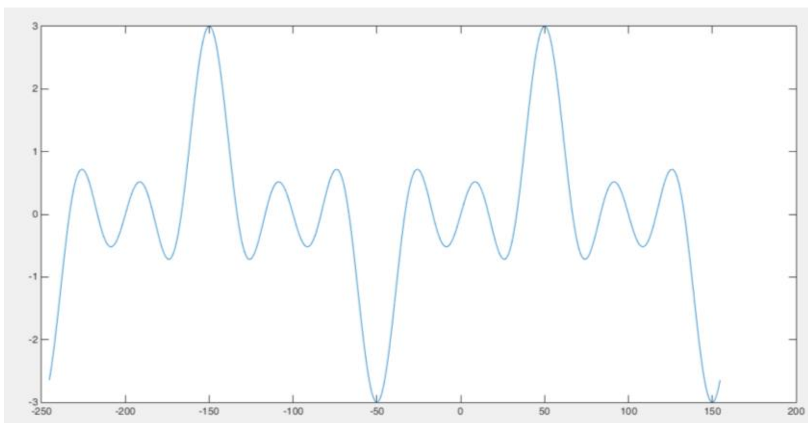
$$\Sigma \neq k\, x(t - t_d)$$

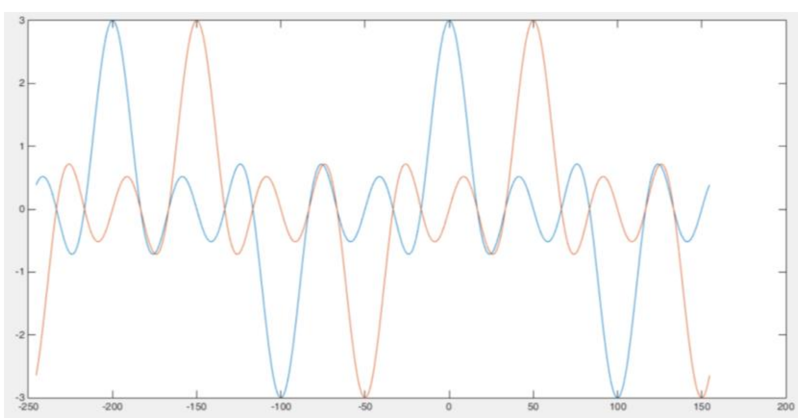
$$w = 2\pi \times 0.005 \quad x(t) = \cos(wt) + \cos(3wt) + \cos(5wt)$$

$$|\mathrm{H(f)}| = 1 \qquad \prec H(f) = -100\pi f$$

$$y(t) = \cos(wt - 100\pi \times 0.005) + \cos(3wt - 300\pi \times 0.005) + \cos(5wt - 500\pi \times 0.005)$$
$$= \cos(w(t-50)) + \cos(3w(t-50)) + \cos(5w(t-50))$$





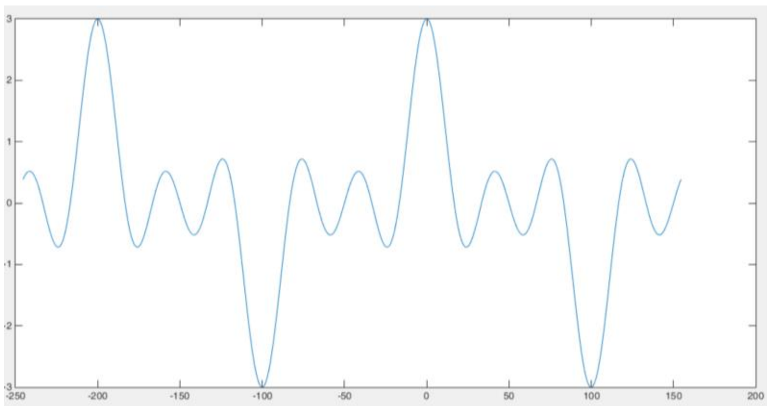


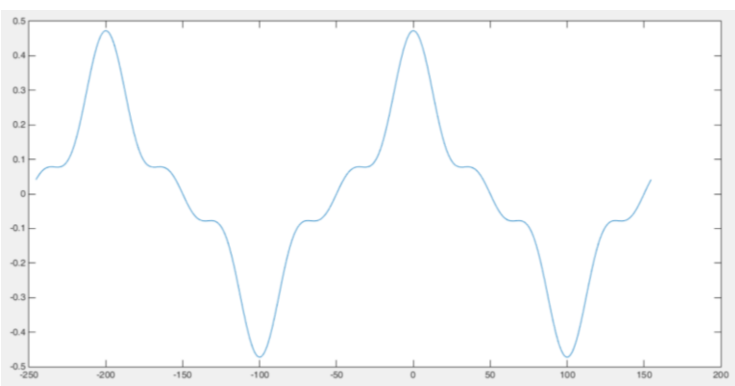
$$w = 2\pi \times 0.005 \quad x(t) = \cos(wt) + \cos(3wt) + \cos(5wt)$$

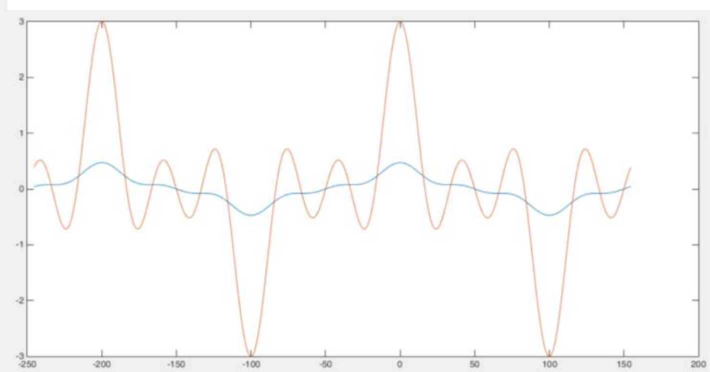
$$|\mathrm{H(f)}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (100 \times 2\pi f)^2}} \qquad \prec H(f) = \begin{cases} 20\pi \times 0.005 & f = 0.005 \\ 84\pi \times 0.005 & f = 0.015 \\ 300\pi \times 0.005 & f = 0.025 \end{cases}$$

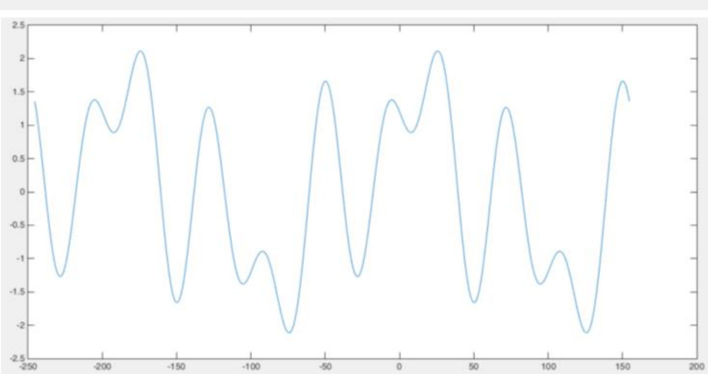
$$y(t) = |\mathrm{H}(0.005)|\cos(wt) + |\mathrm{H}(0.015)|\cos(3wt) + |\mathrm{H}(0.025)|\cos(5wt)$$

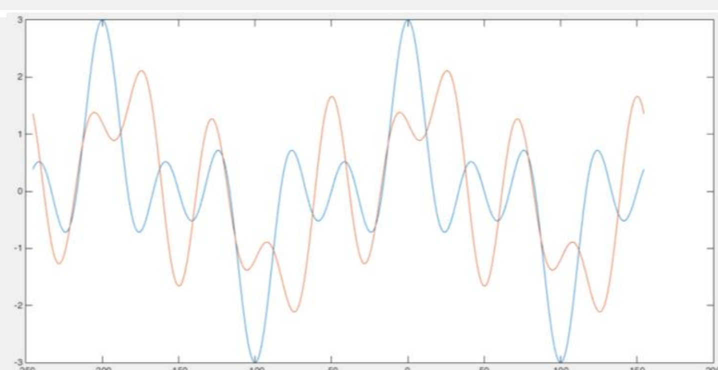
$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(wt - 20\pi \times 0.005) + \cos(3wt - 84\pi \times 0.005) + \cos(5wt - 300\pi \times 0.005) \\ &= \cos(w(t-10)) + \cos(3w(t-14)) + \cos(5w(t-30)) \end{aligned}$$











تأخیر فاز

تأخیر زمانی ناشی از تغییر فاز

$$t_d(f) = -\frac{\angle H(f)}{2\pi f} \Leftarrow H(f) = |H(f)|\, e^{j\angle H(f)}$$

تغییر فاز ثابت $\neq$ تأخیر زمانی ثابت

$$\cos \omega_0 t + \varphi = \cos \omega_0 \left(t - \frac{\varphi}{\omega_0}\right)$$
$$\cos 2\omega_0 t + \varphi = \cos 2\omega_0 \left(t - \frac{\varphi}{2\omega_0}\right)$$

تأخیر پوش یا تأخیر گروه

$$H(f) = A e^{j(-2\pi f t_g + \varphi_0)}$$

$$\angle H(f) = -2\pi f t_g + \varphi_0 \rightarrow t_d(f) = t_g - \frac{\varphi_0}{2\pi f}$$

ورودی $\leftarrow$

$$x(t) = x_i(t)\cos \omega_c t - x_q(t) \sin \omega_c t$$

$$y(t) = x_i(t-t_g)\cos(\omega_c(t-t_g)+\varphi_0) - x_q(t-t_g)\sin(\omega_c(t-t_g)+\varphi_0)$$

$$= \underbrace{x_i(t-t_g)\cos \omega_c(t-t_d) - x_q(t-t_g)}_{\text{تأخیر } t_g}\underbrace{\sin \omega_c(t-t_d)}_{\text{تأخیر } t_d}$$

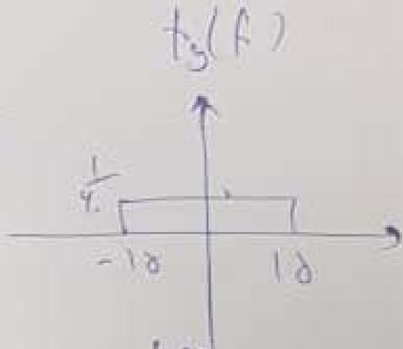
$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\angle H(f)}{df}$$

مثال: تابع تبدیل یک کانال بصورت زیر است. تأخیر فاز و گروه را محاسبه کنید

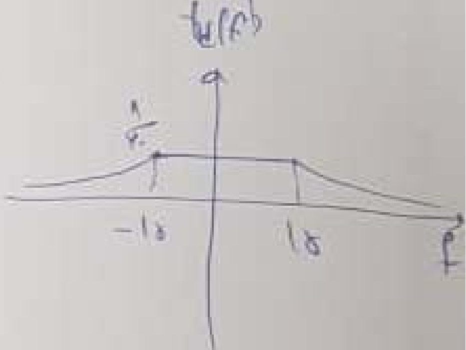
$$H(f)=\begin{cases}4\,\Pi\left(\frac{f}{40}\right)e^{-j\frac{\pi}{20}f} & |f|<15\\ 4\,\Pi\left(\frac{f}{40}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}} & |f|>15\end{cases}$$

$$\angle H(f)=\begin{cases}-\frac{\pi}{20}f & |f|<15\\ -\frac{\pi}{2} & |f|>15\end{cases}$$

$$t_g(f)=-\frac{1}{2\pi}\frac{d\angle H(f)}{df}=\begin{cases}\frac{1}{40} & |f|<15\\ 0 & |f|>15\end{cases}$$



$$t_d(f)=-\frac{\angle H(f)}{2\pi f}=\begin{cases}\frac{1}{40} & |f|<15\\ \frac{1}{4f} & |f|>15\end{cases}$$



$t_g(f)=t_d(f)$ for $|f|<15$

مثال: سیگنال زیر به سیستمی با تابع تبدیل $H(\omega)=5e^{-j3\omega}$ اعمال شده است. خروجی را بیابید

$$x(t)=10\cos\frac{\pi}{2}(t-2)+10\cos\frac{\pi}{4}(t-2)$$

$$H(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2}}=5e^{-j\frac{3\pi}{2}}=5\angle-\frac{3\pi}{2}$$

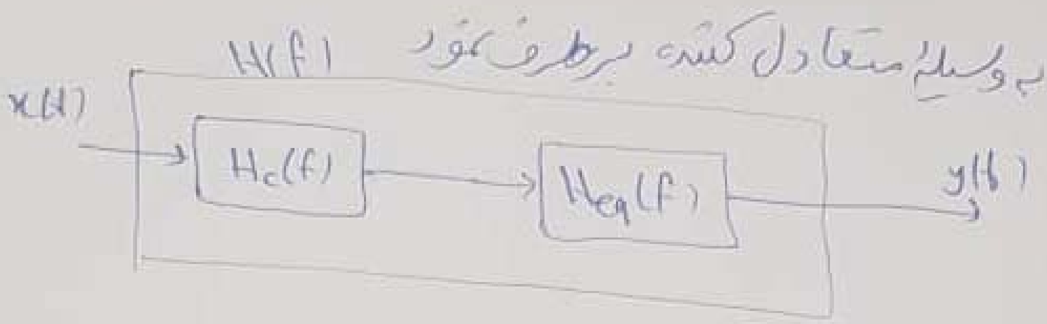
$$H(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{4}}=5e^{-j\frac{3\pi}{4}}=5\angle-\frac{3\pi}{4}$$

$$y(t)=5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(t-2)-\frac{3\pi}{2}\right)+5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=5\cdot\cos\frac{\pi}{2}(t-5)+5\cdot\cos\frac{\pi}{4}(t-5)$$

متعادل سازی

اعوجاج خطی را می‌توان به وسیله متعادل کننده برطرف نمود



$$H_c(f) \neq k e^{-j2\pi f t_c}$$

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_d} \longrightarrow H_c(f) H_{eq}(f) = k e^{-j2\pi f t_d}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}$$

مثال: کانال با پاسخ فرکانسی $H(f) = \frac{1}{1+f^2}$ داده شده است. اعوجاج کانال چیست؟

متعادل کننده چگونه خواهد بود؟

$$H(f) = \frac{1}{1+f^2} \neq k$$

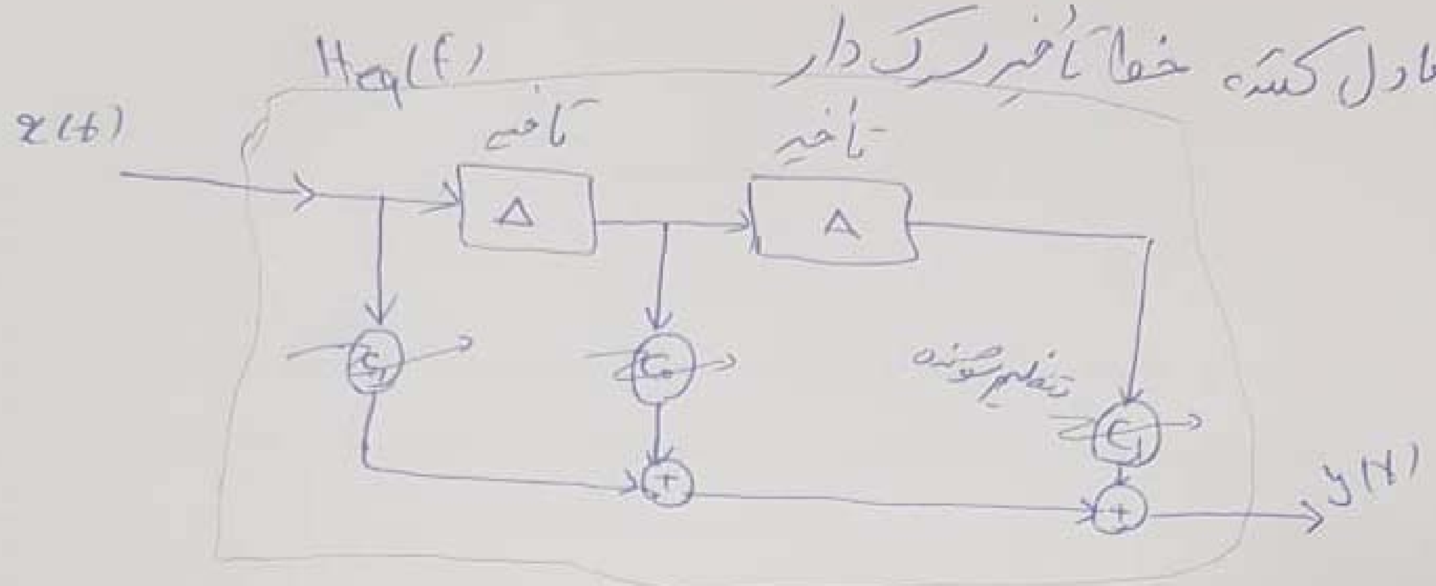
اعوجاج دامنه خطی

$$\angle H(f) = 0$$

$$H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{H(f)} = k e^{-j2\pi f t_d} + k f^2 e^{-j2\pi f t_d}$$

$$h_{eq}(t) = k\delta(t-t_d) - \frac{k}{4\pi^2} \frac{d^2\delta(t-t_d)}{dt^2}$$

متعادل کننده خط تأخیر ترک دار



$$y(t) = c_{-1}x(t) + c_0 x(t-\Delta) + c_1 x(t-2\Delta)$$

$$Y(f) = c_{-1}X(f) + c_0 e^{-j\omega\Delta}X(f) + c_1 e^{-j2\omega\Delta}X(f)$$

$$H_{eq}(f) = c_{-1} + c_0 e^{-j\omega\Delta} + c_1 e^{-j2\omega\Delta}$$

$$= e^{-j\omega\Delta}\left\{c_{-1}e^{j\omega\Delta} + c_0 + c_1 e^{-j\omega\Delta}\right\}$$

درحالت کلی با $2M$ خط تأخیر

$$H_{eq}(f) = e^{-jM\omega\Delta}\left\{\sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-jm\omega\Delta}\right\}$$

مثال: اعوجاج چند مسیره در سیستم‌های بی‌سیم

$$y(t) = k_1 x(t-t_1) + k_2 x(t-t_2)$$

$$H_c(f) = k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} = k_1 e^{-j\omega t_1}\left[1 + k e^{-j\omega t_0}\right]$$ تداخل بین سمبلی ISI

$$t_0 = t_2 - t_1 \qquad k = \frac{k_2}{k_1}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{k' e^{-j\omega t_d}}{H_c(f)} = \frac{1}{1 + k e^{-j\omega t_0}} = 1 - k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j2\omega t_0} + \cdots$$

$$k \ll 1 \rightarrow H_{eq}(f) = e^{-j\omega t_0}\left\{e^{j\omega t_0} - k + k^2 e^{-j\omega t_0}\right\}$$

مثال: یک کانال انتقال با $H_c(f)=(1+2\alpha\cos\omega T)e^{-j\omega T}$ داده شده است

$\alpha=\frac{1}{2}$ ، $x(t)=\Pi(\frac{t}{T})$ خروجی چیست. و برای ورودی

$\alpha=0.4$ متعادل کننده خطا تاخیری را مناسب برای

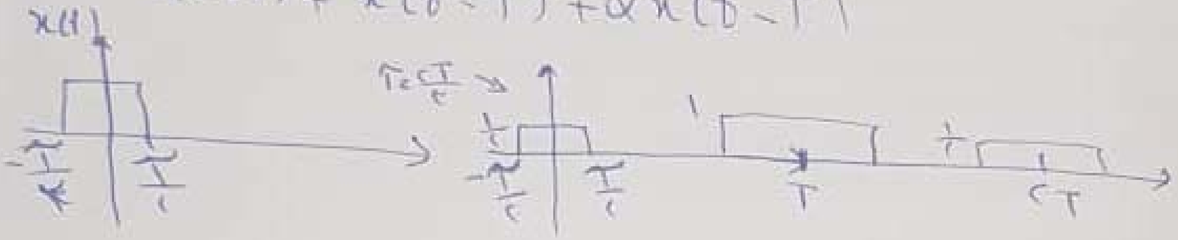
و $\frac{4T}{2}$ ، $\frac{3T}{2}$ = T خروجی را رسم کنید

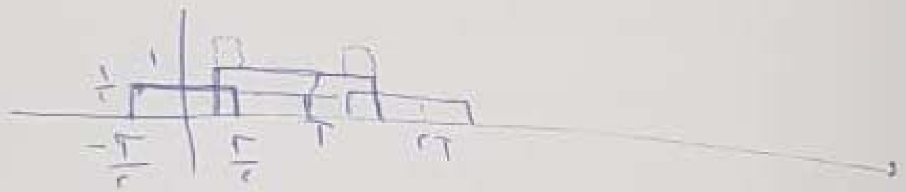
$$H_c(f)=\{1+\alpha e^{j\omega T}+\alpha e^{-j\omega T}\}e^{-j\omega T}$$

$$=\underbrace{\alpha}_{\delta(t)}+\underbrace{e^{-j\omega T}}_{\delta(t-T)}+\underbrace{\alpha e^{-j\omega 2T}}_{\delta(t-2T)}$$

$$x(t)\rightarrow \boxed{H_c(f)} \rightarrow y(t)$$

$$y(t)=\alpha x(t)+x(t-T)+\alpha x(t-2T)$$





$$H_{eq}(f)=\frac{k e^{-j\omega(t_d-T)}}{1+0.8\cos\omega T}$$

$$\frac{1}{1+0.8\cos\omega T}=1-0.8\cos\omega T+0.64\cos^2\omega T-0.512\cos^3\omega T$$

$$\cos\omega T=\frac{1}{2}e^{j\omega T}+\frac{1}{2}e^{-j\omega T}$$

$$\cos^2\omega T=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega T}+\frac{1}{4}e^{j2\omega T}$$

$$\cos^3\omega T=\frac{3}{4}\cos\omega T+\frac{1}{4}\cos 3\omega T=\frac{3}{8}e^{j\omega T}+\frac{3}{8}e^{-j\omega T}+\frac{1}{8}e^{j3\omega T}+\frac{1}{8}e^{-j3\omega T}$$

$K=1$ $t_d=4T$

$$H_{eq}(f)=\{-0.064e^{j3\omega T}+0.16e^{j2\omega T}-0.59e^{j\omega T}+1.32-0.59e^{-j\omega T}+0.16e^{-j2\omega T}-0.064e^{-j3\omega T}\}\times e^{-j2\omega T}$$

$\Delta=T$, $M=2$ $C_{-2}=C_2=-0.064$ $C_2=C_{-2}=0.16$ $C_1=C_{-1}=-0.59$

$C_0=1.32$