فصل ۶: تابع شبکه

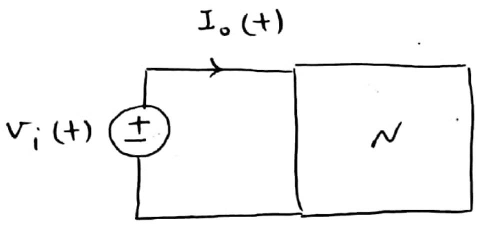
تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(s) = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}$$

تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر ← شرایط اولیه صفر

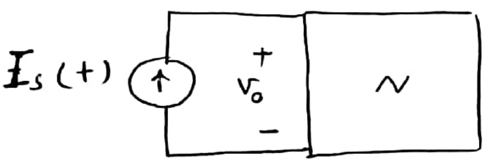
$$H(s) = \frac{L(y)}{L(x)} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

تابع شبکه حالات مختلفی دارد که به عنوان مثال می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:



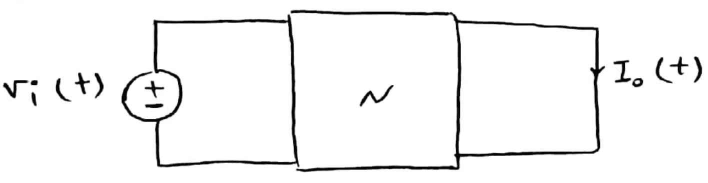
ادمیتانس نقطه تحریک

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)}$$



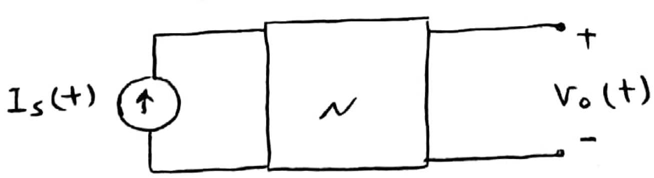
امپدانس نقطه تحریک

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_s(s)}$$



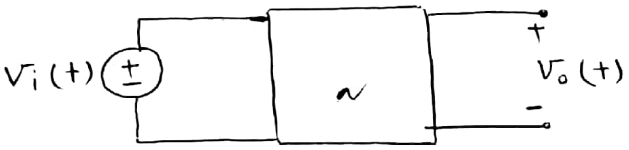
ادمیتانس انتقالی

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)}$$



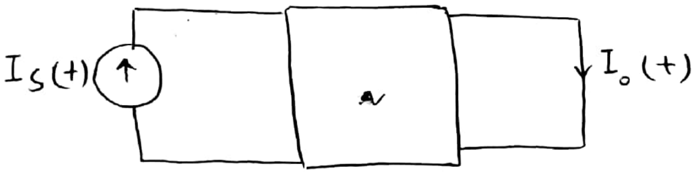
امپدانس انتقالی

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_s(s)}$$



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

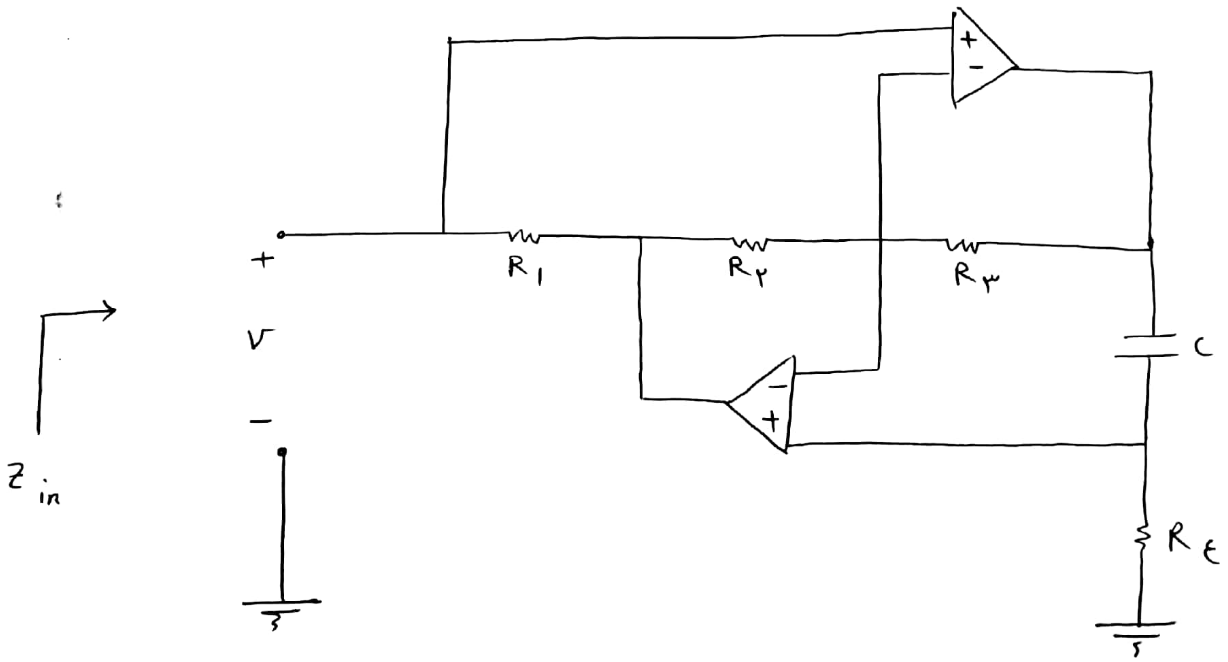
بهره ولتاژ



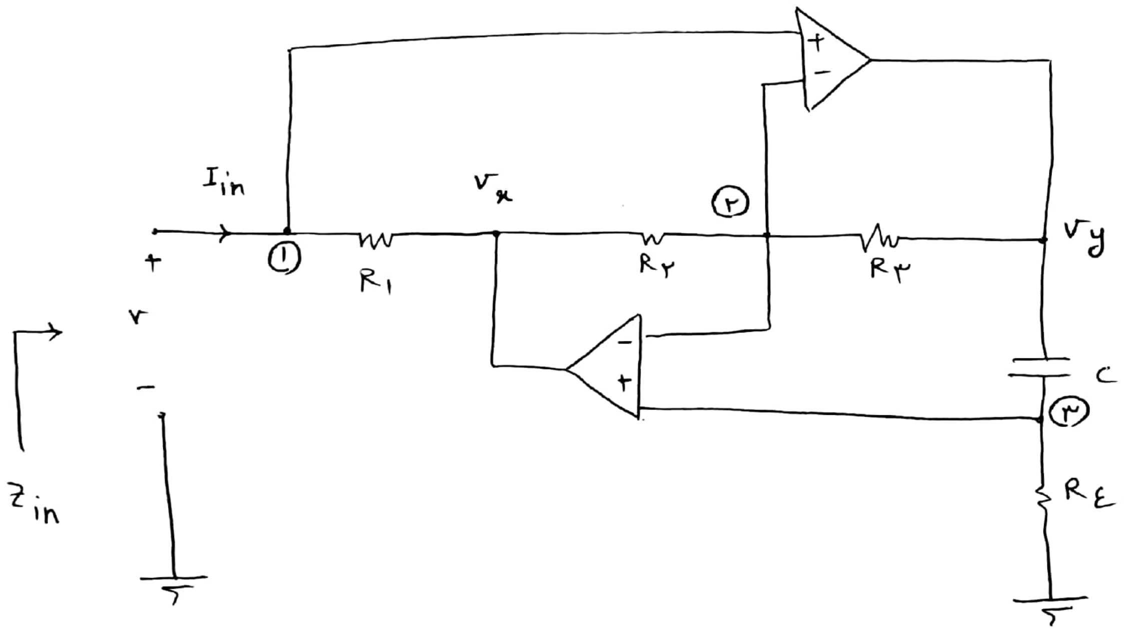
$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_s(s)}$$

بهره جریان

مثال: امپدانس ورودی شبکه زیر را بدست آورید. (فرض کنید آپ-امپ ایده‌آل است)



حل:



$$v_1 = v_2 = v_3 = v \qquad Z_{in} = H = \frac{V_{in}(s)}{I_{in}(s)}$$

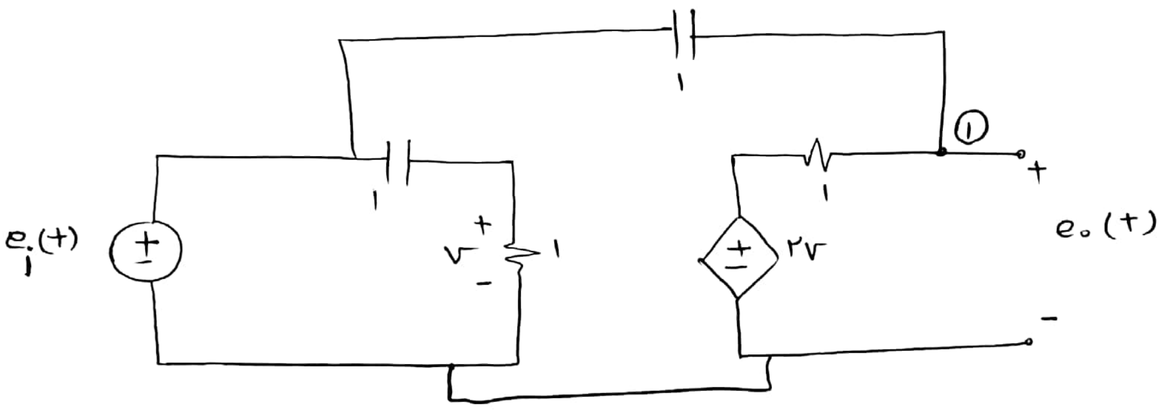
kcl ①: $I_{in} = \dfrac{v - v_x}{R_1} \longrightarrow v_x = -R_1 I_{in} + v$ (I)

kcl ②: $\dfrac{v - v_x}{R_2} + \dfrac{v - v_y}{R_3} = 0$ (II)

kcl ③: $\dfrac{v - v_y}{\frac{1}{Cs}} + \dfrac{v}{R_4} = 0 \longrightarrow v_y = \dfrac{(1 + R_4 C s)}{R_4 C} v$ (III)

I, II, III $\Longrightarrow$ $H(s) = \dfrac{R_1 R_3 R_4 C}{R_2} s$ رفتار سلفی دارد:

مثال: در مدار شکل زیر تابع شبکه را بدست آورید. $H(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$



$$v=\frac{E_i\times 1}{1+\frac{1}{s}}=\frac{sE_i}{1+s} \qquad \text{kcl}①:\ (E_o-E_i)s+E_o-2v=0$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{s^2+2s}{(s+1)^2}$$

نکته: به ریشه‌های صورت کسر تابع شبکه، صفر تابع شبکه می‌گویند و به ریشه‌های مخرج تابع شبکه، قطب تابع شبکه گویند

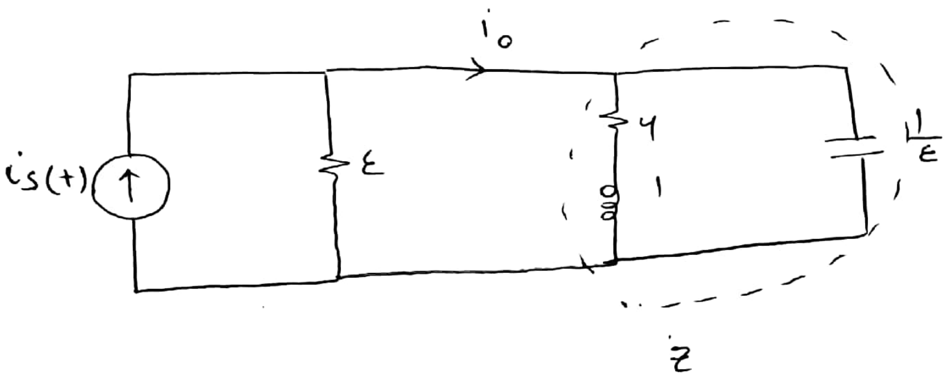
نکته: اگر ورودی مدار، ضربه باشد آنگاه تابع شبکه همان پاسخ ضربه است.

$$Y(s)=H(s)X(s) \overset{\star}{\Rightarrow} Y(s)=H(s) \Rightarrow y(t)=h(t)=L^{-1}(H(s))$$

$$x(t)=\delta(t) \Rightarrow X(s)=1 \ \star$$

مثال صفحه‌ی بعد

مثال: در مدار شکل زیر پاسخ ضربه را بدست آورید.



حل:

$$H(s) = \frac{I_o}{I_s} = \frac{I_o}{L(\delta(t))} = I_o$$

$$Z = \frac{(4+s)\frac{4}{s}}{4+s+\frac{4}{s}} = \frac{4(s+4)}{s^2+4s+4}$$

مقسم جریان: $I_o = \frac{4}{Z+4} I_s = \frac{s^2+4s+4}{s^2+7s+10} = 1 - \frac{s+4}{s^2+7s+10}$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5}\right) \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$i_o(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}$$

- حله موزو شم -

مثال: اگر فرض کنیم ورودی $x(t)=(e^{-t}-\cos t+\sin t)u(t)$ دارای پاسخ $y(t)=2\sin t\, u(t)$ باشد، پاسخ به ورودی ضربه را پیدا کنید.

حل: تابع شبکه آن را بدست می‌آوریم در نتیجه به ازای هر ورودی می‌توانیم خروجی آن را بدست آوریم.

$x(t)=\delta(t)$

$y(t)=?$

$$H=\frac{L(y(t))}{L(x(t))} \qquad Y(s)=H(s)X(s)$$

$$X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}=\frac{2}{(s^2+1)(s+1)} \qquad Y(s)=\frac{2}{s^2+1}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=s+1 \qquad X(s)=1 \longrightarrow Y(s)=H(s)\times 1=H(s)=s+1$$

$$\Rightarrow y(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

نکته: پاسخ حالت دائمی سینوسی را می‌توان از روی تابع شبکه بدست آورد:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad Y(s)=H(s)X(s) \xrightarrow{s=j\omega} Y(j\omega_0)=H(j\omega_0)X(j\omega_0)$$

$$|Y(j\omega_0)|=|H(j\omega_0)|\,|X(j\omega_0)| \qquad \angle Y(j\omega_0)=\angle H(j\omega_0)+\angle X(j\omega_0)$$

$$y(t)=|Y|\cos(\omega_0 t+\angle Y)$$

فقط برای حالتی است که ورودی سینوسی باشد.

صفحه‌ی ۸۳

نکته: اگر $s = \pm j\omega_0$ قطب تابع شبکه باشد، آنگاه شبکه پاسخ حالت دائمی سینوسی ندارد.

مثال: تابع شبکه یک مدار بصورت زیر می‌باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی را به ازای ورودی زیر محاسبه کنید.

$$x(t) = \sin(2t + 40^\circ) \qquad H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+1)}$$

حل: چون فرکانس ورودی قطب تابع شبکه نیست ($\omega_0 = 2$)، این مدار پاسخ حالت دائمی سینوسی دارد.

$$\text{قطب تابع شبکه} \begin{cases} s = -1 \\ s = \pm j \end{cases} \qquad s = j\omega_0 = j2$$

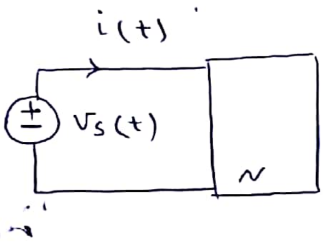
$$H(2j) = \frac{2j+2}{(2j+1)\left((2j)^2+1\right)} = \frac{2\sqrt{10}}{15} \angle 161^\circ = 0/42 \angle 161^\circ$$

$$x(t) = \cos(2t - 50) \longrightarrow X(2j) = 1 \angle -50$$

$$|Y| = |H||X| = 0/42 \qquad \angle Y = \angle H + \angle X = 161 - 50 = 111$$

$$y(t) = 0/42 \cos(2t + 111)$$

مثال: در مدار شکل زیر اگر معادله‌ی دیفرانسیل زیر بین ورودی و خروجی برقرار باشد، رفتار شبکه را در حالت دائمی سینوسی برای فرکانس $\omega = 4\ rad/s$ محاسبه کنید.



$$\frac{d^4 i}{dt^4} + 10\frac{d^3 i}{dt^3} + 40\frac{d^2 i}{dt^2} + 60\frac{di}{dt} + 784\, i = 10\frac{dv_s}{dt} + 40 v_s$$

حل: $(s^4 + 10s^3 + 40s^2 + 60s + 784) I(s) = (10s + 40) V_s(s)$

$$H = \frac{I(s)}{V_s(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{10s + 40}{s^4 + 10s^3 + 40s^2 + 60s + 784} \xrightarrow[\text{فرکانس ۴}]{\text{رفتار شبکه در}} H(4j) = \frac{40(1+j)}{400(1-j)}$$

$$H(4j) = \frac{j}{10} = j\omega C = 4jC \rightarrow C = \frac{1}{40}\ F$$

شبکه رفتار خازنی دارد.

تابع شبکه از جنس ادمیتانس است.

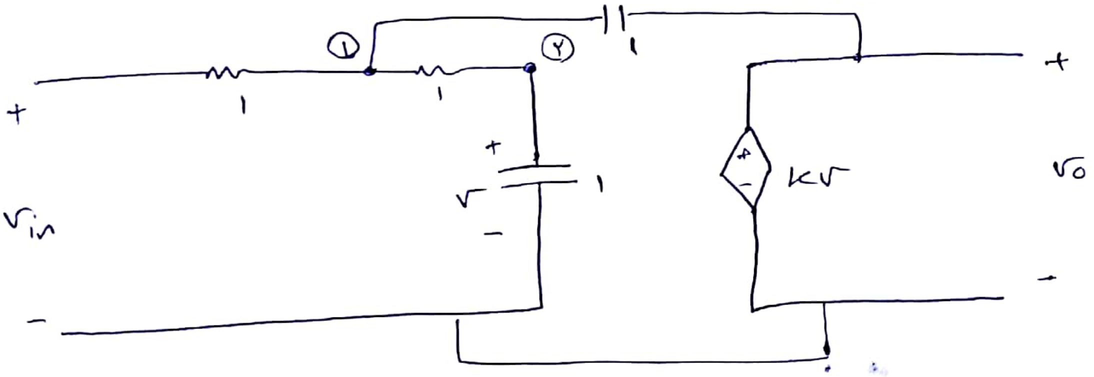
$\frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$ سلف

$j\omega C$ خازن

* هر قطب یک تابع شبکه، یک فرکانس طبیعی تغییر شبکه متناظر (خروجی) است. اما لزوماً هر فرکانس طبیعی یک تغییر شبکه، یک قطب تابع شبکه نیست.

* وجود قطب در مبدأ نشانگر وجود یک حلقه سلفی یا کات‌ست خازنی در مدار است.

مثال: در مدار شکل زیر تابع شبکه $H(s)=\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$ را بدست آورید و مقدار k را طوری تعیین نمائید که شبکه پایدار باشد.



حل:

$v_o = kv$ KCL ①: $\frac{v_1-v_{in}}{1}+\frac{v_1-v}{1}+\frac{v_1-v_o}{\frac{1}{s}}=0$

KCL ②: $\frac{v-v_1}{1}+\frac{v}{\frac{1}{s}}=0 \xrightarrow{v=\frac{v_o}{k}} v_1=\frac{s+1}{k}v_o$

$\longrightarrow H(s)=\frac{v_o}{v_{in}}=\frac{k}{s^2+(3-k)s+1}$

زمانی شبکه پایدار اکیداً است که قطب ها سمت چپ محور موهومی باشند، به عبارت دیگر ریشه ها می توانند حقیقی منفی یا موهومی سمت چپ محور باشند ($Re(s)<0$) و شبکه پایدار مجانبی است هرگاه $Re(s)\leq 0$ و قطبهای روی محور موهومی ساده باشند (قطبهای غیرتکراری)

حالت اول: $\Delta<0 \to s_{1,2}=\frac{-(3-k)\pm j\sqrt{(3-k)^2-4}}{2}$ $s_{1,2}=\alpha\pm j\beta$

$(3-k)^2-4<0 \to (3-k)^2<4 \to -2<3-k<2 \to 1<k<5$

$\alpha<0 \to -(3-k)<0 \to k<3$ $\longrightarrow \boxed{1<k<3}$

حالت دوم: $\Delta>0 \to s_{1,2}=\frac{-(3-k)\pm\sqrt{(3-k)^2-4}}{2}$

$(3-k)^2-4>0 \to \begin{cases}(3-k)>2\\ (3-k)<-2\end{cases} \to \begin{cases}k<1\\ k>5\end{cases} \longrightarrow \boxed{k<1}$

$-(3-k)+\sqrt{(3-k)^2-4}<0 \to (3-k)>\sqrt{(3-k)^2-4} \to \begin{cases}(3-k)<0 & \times \text{ برقرار نیست}\\ (3-k)>0 \to k<3\end{cases}$

$-(3-k)-\sqrt{(3-k)^2-4}<0 \to -(3-k)<\sqrt{(3-k)^2-4} \to \begin{cases}-(3-k)<0 \to k<3\\ -(3-k)>0 & \times \text{ برقرار است}\end{cases}$

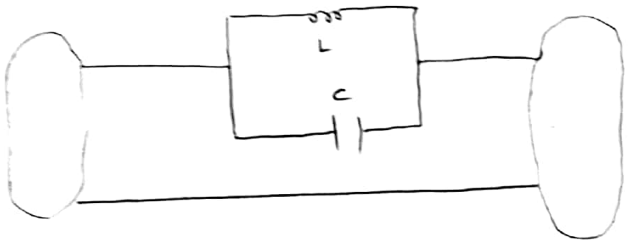
بنابراین مدار برای $k<3$ پایدار اکید است.

قطب روی محور، $3-k=0 \to k=3 \to$ مدار برای $k\leq 3$ پایدار مجانبی است.

* در توابع شبکه صفرهای ناپایدار در اثر مدارات تشدید سری در شاخه‌های عمودی و یا مدارات تشدید موازی در شاخه‌های افقی در فرکانس تشدید ایجاد می‌شوند.

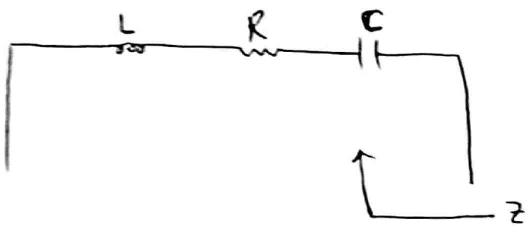
نکته: یک مدار تشدید LC موازی در بازوی افقی یک شبکه‌ی نردبانی در فرکانس تشدید خودش یک جفت صفر انتقال ایجاد می‌کند.

$$S = \frac{\pm J}{\sqrt{LC}}$$



(یادآوری مدار یک)

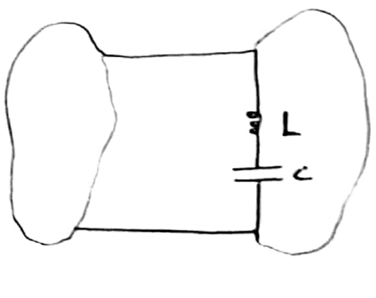
فرکانس تشدید فرکانسی است که در آن قسمت موهومی امپدانس یا ادمیتانس مساوی با صفر می‌شود.



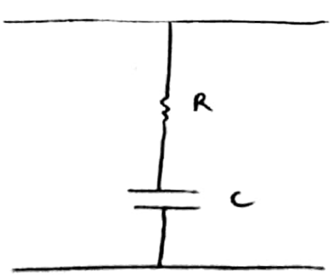
$$Z = R + JwL + \frac{1}{Jwc} = R + J\left(wL - \frac{1}{wc}\right)$$

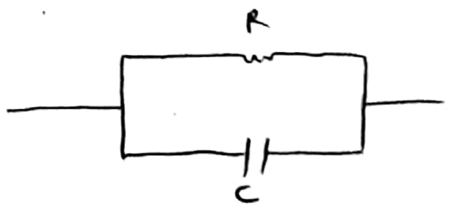
$$\Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

نکته: هر LC سری در بازوی عمودی شبکه‌ی نردبانی یک جفت صفر انتقال در فرکانس تشدید خودش ایجاد می‌کند.



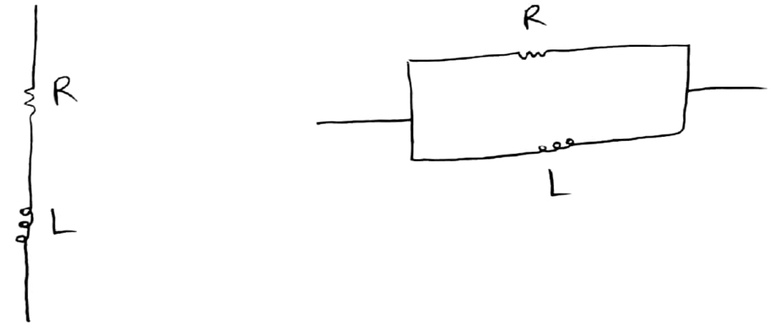
نکته: مدار RC سری در بازوی عمودی و مدار RC موازی در بازوی افقی یک صفر انتقال در $S = \frac{-1}{RC}$ تولید می‌کند.



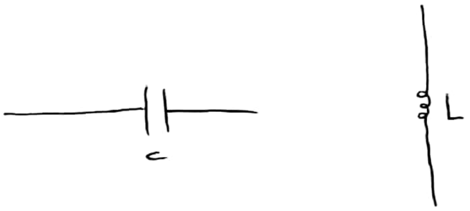


$$S = \frac{-1}{RC}$$

نکته: مدار RL سری در بازوی عمودی و مدار RL موازی در بازوی افقی یک صفر انتقال در $s=\frac{-R}{L}$ تولید می‌کند.

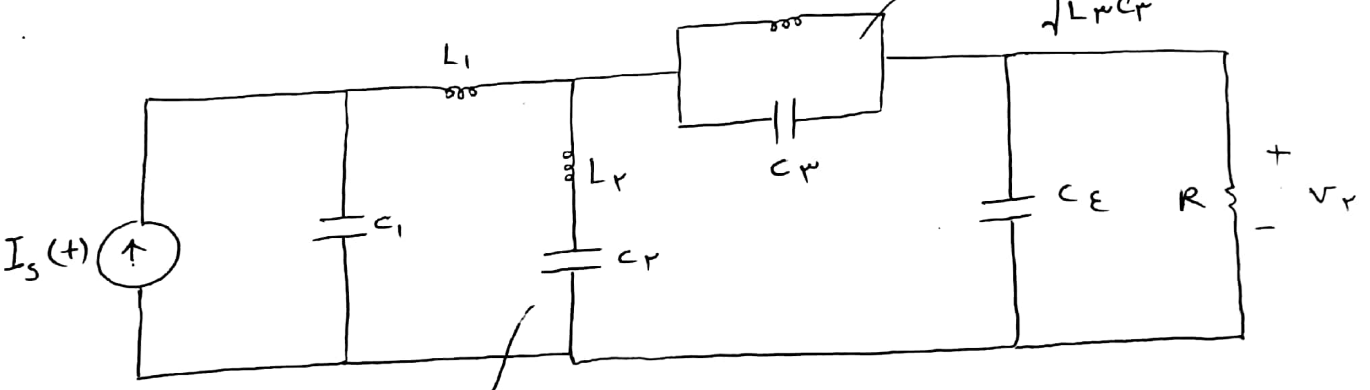


نکته: یک خازن در بازوی افقی و یا یک سلف در بازوی عمودی یک صفر انتقال در $s=0$ تولید می‌کند.



مثال: صفرهای تابع شبکه $H(s)=\frac{V_2(s)}{I_s(s)}$ را برای مدار شکل زیر پیدا کنید.

$$s=\frac{\pm j}{\sqrt{L_3C_3}}$$



$$s=\frac{\pm j}{\sqrt{L_2C_2}}$$

* در توابع شبکه مدارهای تشدید سری در شاخه‌های افقی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های عمودی در فرکانس تشدید صفرهای ناپایدار ایجاد می‌کنند.

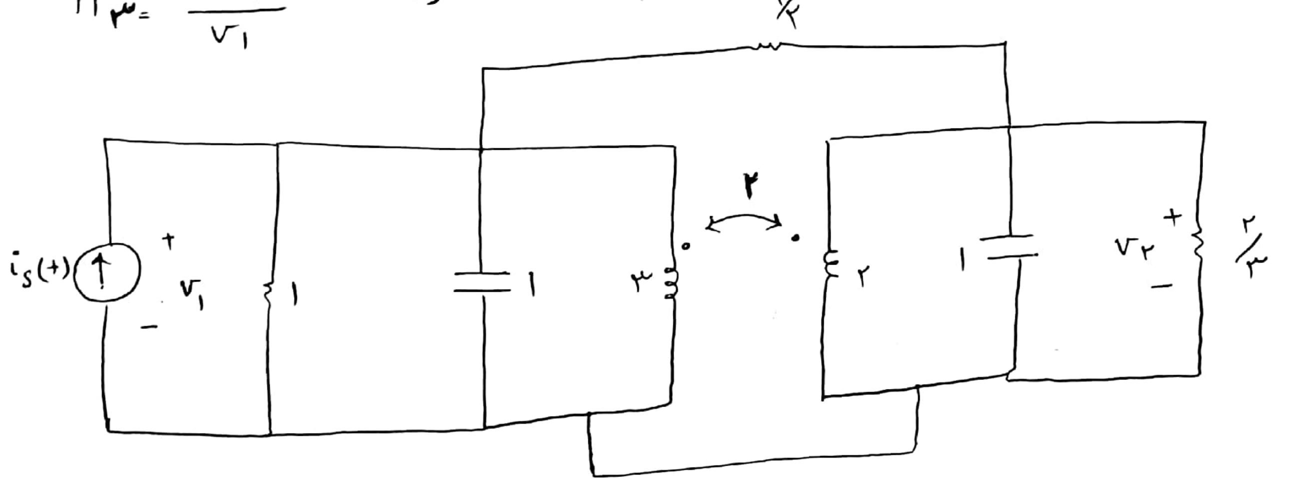
جلسه بیستم

مدار و متغیرهای V_1 و V_2

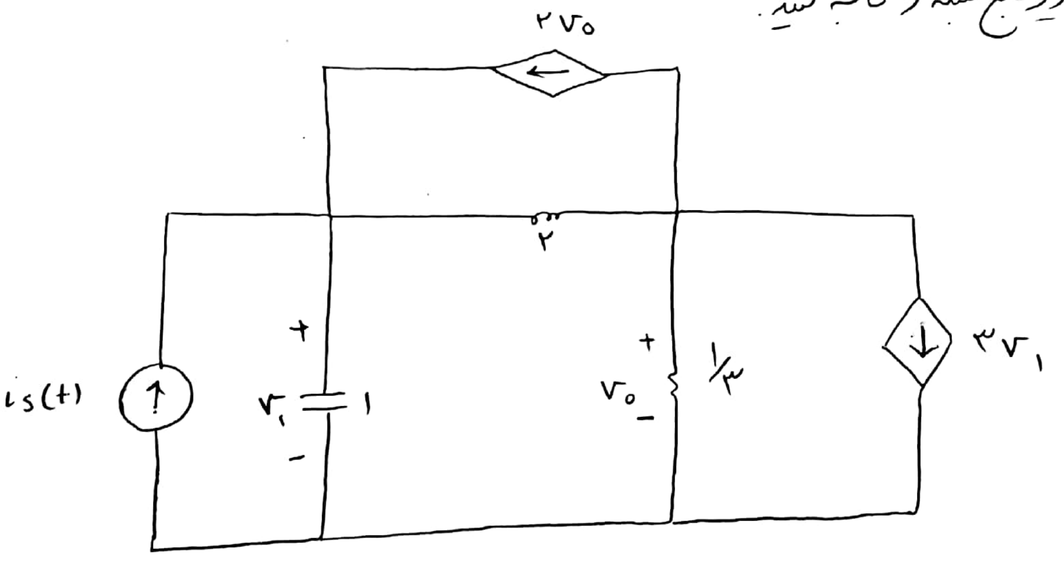
تمرین تحویلی : در مدار شکل زیر H_1 و H_2 و H_3 را محاسبه کنید و فرکانس های طبیعی V را محاسبه کنید.

در مورد چگونگی ارتباط بین قطب های شبکه و فرکانس های طبیعی بحث کنید.

$$H_2 = \frac{V_2}{I_s} \qquad H_1 = \frac{V_1}{I_s} \qquad H_3 = \frac{V_2}{V_1}$$

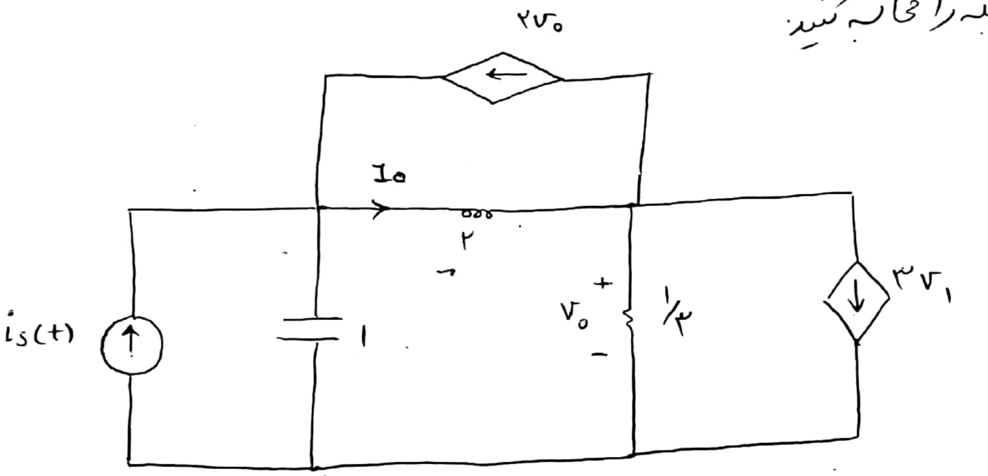


تمرین تحویلی : در مدار شکل زیر تابع شبکه را محاسبه کنید.



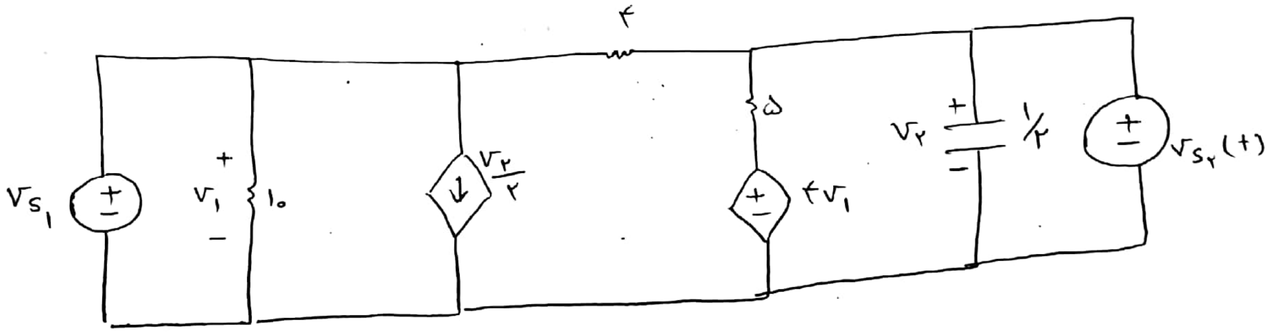
$$H = \frac{V_o}{I_s}$$

تمرین تحویلی : در مدار شکل زیر تابع شبکه را محاسبه کنید.



$$H = \frac{I_0}{I_s}$$

تمرین تحویلی : در مدار شکل زیر تابع شبکه را محاسبه کنید.



$$H = \frac{V_2}{V_1}$$

تمرین تحویلی : در مدار شکل زیر تابع شبکه را محاسبه کنید و مقدار k را در R=1 طوری بدست آورید که شبکه پایدار باشد.

$$H = \frac{V_2}{V_s}$$