Subject: ریاضیات مهندسی   Date: ۹۷/۸/۹

شیوه حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی:

برخی از انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می توان با استفاده از روش های متداول در حل معادلات دیفرانسیل معمولی حل نمود.

مسئله ۱: معادله ی دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ را در صورتی که u تابعی دو متغیره برحسب x و y باشد حل کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow u=f(y) \Rightarrow f(y)=3y^2+\ln y+2$$

$$\Rightarrow u=3y^2+\ln y+2$$

مسئله ۲: معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ را در صورتی که u تابعی دو متغیره برحسب x و y باشد، حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \Rightarrow \int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\partial x=\int(0)\partial x+c_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(y) \Rightarrow \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x=\int f(y)\partial x+c_2$$

$$u(x,y)=xf(y)+g(y)$$

مسئله ۳: جواب معادله ی دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1$ با شرایط مرزی و اولیه زیر

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=p \;;\; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}=q \;;\; u(0,0)=p+q$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1 \xrightarrow{\text{نسبت به x انتگرال می گیریم}} \frac{\partial u}{\partial y}=x+f(y) \;,\; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}=f(y)=q$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+q \xrightarrow{\text{نسبت به y انتگرال می گیریم}} u=xy+qy+g(x) \longrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}= y+g'(x)$$

$$p=g'(x) \Rightarrow g(x)=px+c \Rightarrow u=xy+qy+px+c \Rightarrow u(0)=c=p+q$$

$$u(x,y)=xy+qy+px+p+q$$

MICRO®

Date :

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه‌ی اول :

صورت کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه‌ی اول بصورت زیر است:

$$P(x,y,z)\,\partial z/\partial x + Q(x,y,z)\,\partial z/\partial y = R(x,y,z)$$

که در آن z متغیر وابسته و x و y متغیرهای مستقل هستند. می‌توان نشان داد که برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بالا باید دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را تشکیل داد.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

حال اگر $u_1(x,y,z) = c_1$ و $u_2(x,y,z) = c_2$ دو جواب عمومی و مستقل دستگاه باشند آنگاه حل عمومی آن حل z را بدست خواهد داد. بنابراین در حالت کلی باید $h(u_1,u_2) = 0$ باشد. به عبارت دیگر باید رابطه بصورت $c_1 = f(c_2)$ بین c_1 و c_2 برقرار باشد.

مسئله ۱: معادله دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید:

$$\partial z/\partial x + (x+2)\,\partial z/\partial y = x$$

$$P(x,y,z)=1 \,,\quad Q(x,y,z) = (x+2) \,,\quad R(x,y,z) = x$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x+2} = \frac{dz}{x}$$

$$(x+2)\,dx = dy \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین انتگرال}} \frac{1}{2}x^2 + 2x = y + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - y$$

$$x\,dx = dz \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{1}{2}x^2 = z + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}x^2 - z$$

$$c_2 = f(c_1) \Rightarrow \underline{\frac{1}{2}x^2 - z} = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - y\right) \Rightarrow h\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - y \,,\ \frac{1}{2}x^2 - z\right) = 0$$

مسئله ۲: حل عمومی معادله $\partial u/\partial x + 2\,\partial u/\partial y = x$ برابر است با:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{x}$$

$$2dx = dy \Rightarrow y = 2x + c_1 \Rightarrow y - 2x = c_1$$

$$x\,dx = du \Rightarrow x^2/2 + c_2 = z \qquad x^2/2 - z = c_2$$

$$x^2/2 - z = f(y-2x)$$

$$z = x^2/2 - f(y-2x)$$

Subject :

Date : ۹۷,۸,۱

مسئله ۲: معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه‌ی یک زیر را حل کنید:

$$3\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad P(x,y,z)=3 \text{ و } Q(x,y,z)=-1 \;,\; R(x,y,z)=0$$

$$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{0} \Rightarrow \frac{dx}{3} = \frac{dz}{0} \Rightarrow 0\,dx = 3\,dz \Rightarrow z = c_1$$

$$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{-1} \Rightarrow 3\,dy = -dx \Rightarrow -x = 3y + c_2$$

$$c_2 = -x - 3y$$

$$c_1 = f(c_2) \Rightarrow z = f(-x-3y)$$

شیوه تفکیک متغیرها:

تابع $u = u(x,t)$ را در نظر بگیرید. اگر بتوانیم این تابع را به صورت $u(x,t) = F(x)G(t)$ تجزیه کنیم آن‌گاه قادر خواهیم بود از شیوه تفکیک متغیرها استفاده کنیم. مثلاً $u(x,t) = t\cos x + \frac{3t}{2}\sin x$ را در نظر بگیرید. این تابع را می‌توان به صورت $u(x,t) = t(\cos x + \frac{3}{2}\sin x)$ تجزیه نمود و عبارتی به صورت $u(x,t) = G(t)F(x)$ بدست آورد. اما توابعی مانند $u(x,t) = t^2\cos x + t\sin x$ را نمی‌توانیم به صورت حاصل‌ضرب از دو تابع $F(x)$ و $G(t)$ در آوریم. توجه داشته باشید که فقط در صورتی می‌توان از شیوه تفکیک متغیرها استفاده نمود که قادر باشیم $u(x,t)$ را به صورت $u(x,t) = F(x)G(t)$ تجزیه کنیم.

مسئله ۱: با استفاده از شیوه تفکیک متغیرها، معادله‌ی یک بعدی موج را با استفاده از شرایط مرزی و شرایط اولیه داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1) $u(x=0,t)=0 \qquad t>0$

شرایط مرزی و

2) $u(x=L,t)=0 \qquad t>0$

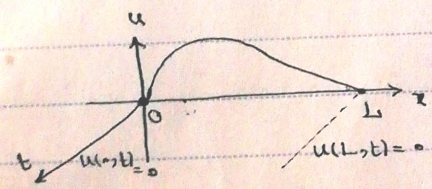
3) $u(x,t=0)=f(x) \qquad 0<x<L$

شرایط اولیه و

4) $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \qquad 0<x<L$

حل: (دیدگاه فیزیکی)؛

نخی یکنواخت به طول L را در نظر بگیرید که یک سر آن در موقعیت $x=0$ و سر دیگر آن در موقعیت $x=L$ ثابت شده است. [شرایط مرزی (۱) و (۲)] و در لحظه $(t=0)$ موقعیت هر نقطه از نخ (شکل اولیه نخ) با تابع $f(x)$ تعریف خواهد شد. [شرایط اولیه ۳] سرعت هر نقطه از نخ نیز در لحظه $t=0$ با تابع $g(x)$ بیان خواهد شد [شرایط اولیه ۴]. هدف در اینجا تعیین تابع $u(x,t)$ است که تغییر مکان هر نقطه از نخ را در هر لحظه به ما خواهد داد.



(تحلیل ریاضی)

گام اول: فرض که بتوان تابع $u(x,t)$ را به صورت $u(x,t)=F(x)G(t)$ نوشت. حال اگر این فرض را در صورت مسئله جایگزین کنیم، داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow F(x)\frac{d^2 G}{dt^2} = c^2 G \frac{d^2 F}{dt^2}$$

Date: ۹۷/۸/۱

تقسیم می‌شود ($c^2 F(x) G(t)$)

طرفین این رابطه را بر حاصل ضرب $c^2 F(x) \cdot G(t)$ تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2}=\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}$$

چون طرف چپ تساوی بالا تابعی از t و طرف راست تابعی از x است. لذا شرط اینکه تساوی بالا صادق باشد این است که هر دو برابر یک مقدار ثابت k باشد یعنی

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2}=\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=k$$

نکته: از طرفی چون به یک تساوی رسیدیم که در یک طرف آن فقط تابع $F(x)$ و در طرف دیگر آن فقط تابع $G(t)$ را داریم. لذا فرض تفکیک متغیر صحیح بوده است.

حال با استفاده از تساوی بالا دستگاه زیر را تشکیل خواهیم داد.

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{d^2F}{dx^2}=k \Rightarrow \frac{d^2F}{dx^2}-kF=0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2}=k \Rightarrow \frac{d^2G}{dt^2}=c^2 G k$$

با استفاده از شرایط مرزی (۱) و (۲) داریم:

$$u(0,t)=0=F(0)\,G(t)=0$$

$$u(L,t)=0=F(L)\,G(t)=0$$

چون $G(t)$ برابر با صفر باعث می‌شود که $u=0$ باشد و این حل بدیهی معادله است لذا

$$F(0)=0\ ,\ F(L)=0$$

توجه: در صورتی که شرایط مرزی همگن نباشد نمی‌شد تفکیک داشته باشیم

$$u(x=0,t)=a$$

$$u(x=L,t)=b$$

$$a,b\neq 0$$

Subject Date :

آن گاه حل مسئله تا حدودی پیچیده تر خواهد شد

گام دوم: می خواهیم دستگاه معادلات ذیل را حل کنیم:

$$\frac{d^2F}{dx^2} - kF = 0$$

$$\frac{d^2G}{dt^2} - c^2kG = 0$$

برای این منظور سه حالت زیر را باید در نظر بگیریم؛

حالت اول: فرض می کنیم که $k=0$ باشد در این صورت

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0 \Rightarrow F(x) = Ax+B$$

با اعمال شرایط مرزی $F(0)=0$ و $F(L)=0$ خواهیم داشت.

$$F(0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$F(L)=0 \Rightarrow AL=0 \Rightarrow A=0$$

لذا چون $A=0$ و $B=0$ شد پس $F(x)=0$ است و این به معنای $u(x,t)=0$ است که حل بدیهی معادله است. لذا فرض $k=0$ نادرست است.

حالت دوم: فرض می شود که k مثبت باشد $(k=\mu^2)$. در این صورت با تعریف اپراتور $D=d/dx$، خواهیم داشت.

$$\frac{d^2F}{dx^2} - \mu^2F = 0 \Rightarrow D^2F - \mu^2F = 0$$

$$\Rightarrow (D^2-\mu^2)F = 0 \Rightarrow \begin{cases} D=+\mu \\ D=-\mu \end{cases} \qquad F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

$$F(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$F(L)=0 \Rightarrow Ae^{\mu L}+Be^{-\mu L}=0 \Rightarrow Ae^{\mu L}-Ae^{-\mu L} = A(e^{\mu L}-e^{-\mu L})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=0 \longrightarrow F(x)=0 \longrightarrow u(x,t)=0 \\ e^{\mu L}-e^{-\mu L}=0 \xrightarrow{L} e^{\mu L}=e^{-\mu L} \longrightarrow \mu=0 \longrightarrow k=0 \end{cases}$$

جواب بدیهی معادله است

$$\mu=0 \Downarrow k=\mu^2$$

که حالت اول $k=0$ نادرست بوده است پس $k=\mu^2$ نادرست خواهد بود.

آن گاه حل مسئله تا حدودی پیچیده تر خواهد شد

گام دوم: می خواهیم دستگاه معادلات ذیل را حل کنیم:

$$\frac{d^2F}{dx^2} - kF = 0$$

$$\frac{d^2G}{dt^2} - c^2kG = 0$$

برای این منظور سه حالت زیر را باید در نظر بگیریم؛

حالت اول: فرض می کنیم که $k=0$ باشد در این صورت

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0 \Rightarrow F(x) = Ax+B$$

با اعمال شرایط مرزی $F(0)=0$ و $F(L)=0$ خواهیم داشت.

$$F(0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$F(L)=0 \Rightarrow AL=0 \Rightarrow A=0$$

لذا چون $A=0$ و $B=0$ شد پس $F(x)=0$ است و این به معنای $u(x,t)=0$ است که حل بدیهی معادله است. لذا فرض $k=0$ نادرست است.

حالت دوم: فرض می شود که k مثبت باشد $(k=\mu^2)$. در این صورت با تعریف اپراتور $D=d/dx$ خواهیم داشت.

$$\frac{d^2F}{dx^2} - \mu^2F = 0 \Rightarrow D^2F - \mu^2F = 0$$

$$\Rightarrow (D^2-\mu^2)F = 0 \Rightarrow \begin{cases} D=+\mu \\ D=-\mu \end{cases} \qquad F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

$$F(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$F(L)=0 \Rightarrow Ae^{\mu L}+Be^{-\mu L}=0 \Rightarrow Ae^{\mu L}-Ae^{-\mu L} = A(e^{\mu L}-e^{-\mu L}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=0 \xrightarrow{\text{یا}} F(x)=0 \longrightarrow u(x,t)=0 \\ e^{\mu L}-e^{-\mu L}=0 \longrightarrow e^{\mu L}=e^{-\mu L} \longrightarrow \mu=0 \longrightarrow k=0 \end{cases}$$

که جواب بدیهی معادله است

$k=\mu^2$

که حالت اول $k=0$ نادرست بوده است پس $k=\mu^2$ نادرست خواهد بود.

Date : ۹۷/۸/۱

حالت سوم: فرض کنیم K منفی باشد $(K=-\mu^2)$ داریم:

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\mu^2F=0 \qquad D^2F+\mu^2F=0 \Rightarrow (D^2+\mu^2)F=0 \Rightarrow D^2+\mu^2=0 \Rightarrow D=\pm j\mu$$

لذا جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود.

$$F(x)=A\sin\mu x+B\cos\mu x$$

با اعمال شرایط مرزی $F(0)=0$ و $F(L)=0$ خواهیم داشت.

$$F(0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$F(L)=0 \Rightarrow A\sin\mu L=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \longrightarrow F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0 & \text{جواب بدیهی معادله است} \\ \sin\mu L=0 \longrightarrow \mu L=n\pi \Rightarrow n=1,2,3,\dots \Rightarrow \mu_n=\frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

پس می توان نوشت:
$$F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

این بدین معنا می گوید که به ازای هر n یک عدد μ، B و F مربوط به آن n را خواهیم داشت.

از طرفی معادله ی زیر را نیز با فرض $K=-\mu_n^2$ باید حل نماییم

$$\frac{d^2G}{dt^2}-c^2KG=0 \;;\; \frac{d^2G}{dt^2}+c^2\mu^2G=0$$

به ازای $\lambda_n^2=c^2\mu_n^2$ داریم:
$$\frac{d^2G}{dt^2}+\lambda_n^2G=0$$

که جواب عمومی آن عبارت است از:
$$G_n(t)=P_n\cos\lambda_nt+Q_n\sin\lambda_nt$$

حال با توجه به رابطه $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ داریم

$$u_n(x,t)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\left[P_n\cos\lambda_nt+Q_n\sin\lambda_nt\right]$$

حال با فرض $B_n P_n = C_n$ و $B_n Q_n = D_n$ خواهیم داشت:

$$u_n(x,t) = \left[C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t \right] \sin \frac{n\pi}{L} x$$

گام سوم: چون معادله موج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ یک معادله خطی و همگن است لذا مجموع جوابهای آن نیز، جواب معادله خواهد بود. لذا داریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t \right] \sin \frac{n\pi}{L} x$$

حال با استفاده از شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ و جایگذاری در رابطه بالا خواهیم داشت.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

با توجه به اینکه رابطه بالا، سری فوریه تابع $f(x)$ است و با توجه به آنچه در فصل اول در ارتباط با سری فوریه سینوسی بیان کردیم، دوره‌ی تناوب تابع $f(x)$ که فرض می‌شود نوشته نشده است. به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$\frac{2n\pi}{T} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow T = 2L$$

C_n به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$C_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x \, dx$$

لذا با جایگذاری $T = 2L$ خواهیم داشت.

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

لذا با توجه به سینوسی بودن تابع سری فوریه $f(x)$، تابع $f(x)$ می‌بایست تابعی فرد باشد. یا می‌بایست فرض کنیم تابع $f(x)$ تابعی فرد است.

Date : ۹۷/۸/۱

حال از شرط اولیه $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ استفاده کرده و داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-C_n\lambda_n \sin\lambda_n t + D_n\lambda_n \cos\lambda_n t \right] \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\lambda_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

با توجه به سینوسی بودن بسط فوریه $g(x)$ خواهیم داشت.

$$D_n\lambda_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(x) \sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

$$D_n\lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} g(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow D_n = \frac{2}{\lambda_n L}\int_0^{L} g(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

حال با یادآوری $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos\lambda_n t + D_n \sin\lambda_n t \right] \sin\frac{n\pi}{L}x$ و جایگذاری D_n و C_n در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) \cos\lambda_n t + \left(\frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) \sin\lambda_n t \right] \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\lambda_n^2 = c^2\mu_n^2 \quad ; \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L}$$

نکته: همانطور که در ابتدای این بخش عنوان شد، فقط در صورتی می‌توانیم از شیوه تفکیک متغیرها استفاده کنیم که قادر باشیم تابع $u(x,t)$ را به صورت $u(x,t) = F(x)\,G(t)$ تجزیه کنیم.