فصل پنجم: میدان مغناطیسی ساکن در خلا

- منشا کلیه پدیده‌های الکترومغناطیسی، بارهای الکتریکی هستند.

بارهای ساکن ← تولید میدان الکتریکی ساکن

- حرکت بارهای الکتریکی تولید جریان الکتریکی می‌کند

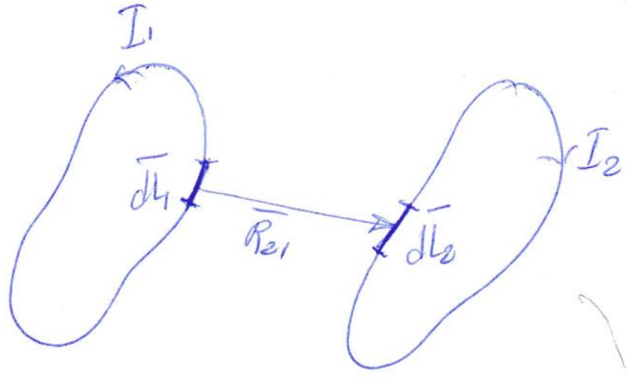
جریان الکتریکی منشا میدان‌های مغناطیسی هستند.

حرکت یکنواخت بارها ← تولید میدان مغناطیسی ساکن

جریان الکتریکی ← همرفتی: حرکت بار در خلا

← هدایتی: حرکت بارها در هادی‌ها

نیروی مغناطیسی دو مدار جریان



$$\overline{dF_{21}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \overline{dl_2} \times (I_1 \overline{dl_1} \times \hat{a}_{R_{21}})}{|\overline{R_{21}}|^2}$$

μ_0: قابلیت نفوذ مغناطیسی $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{H}{m}\right)$

قانون نیروی آمپر:

$$\overline{F_{21}} = \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \overline{dl_2} \times (I_1 \overline{dl_1} \times \hat{a}_{R_{21}})}{|\overline{R_{21}}|^2}$$

نیروی وارد بر مدار 2 ناشی از مدار 1

1- نیرو متناسب با حاصلضرب جریان‌هاست

2- نیرو با عکس مجذور فاصله بین دو المان جریان متناسب است

$$\begin{cases} \overline{F_{21}} = -\overline{F_{12}} \\ \overline{dF_{21}} \neq \overline{dF_{12}} \end{cases}$$

قانون بیو ساوار

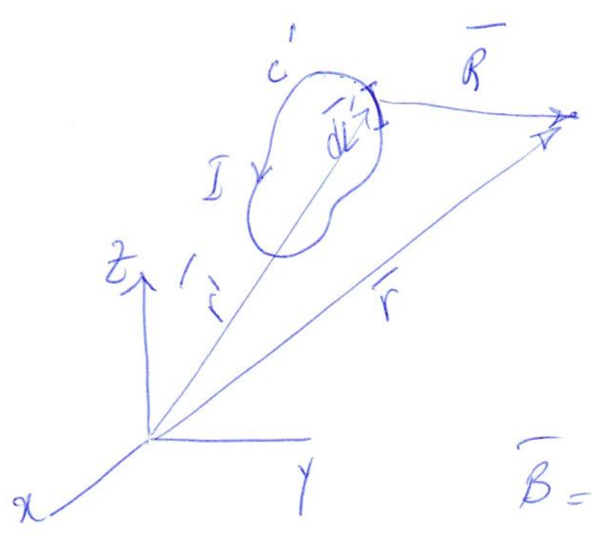
- میدان مغناطیسی مانند میدان الکتریکی یک میدان نیرو است و وقتی بارهای متحرک در آن قرار می‌گیرند به آنها نیرو وارد می‌کند.

- طبق قانون نیروی آمپر، نیرویی که مدار اول به مدار دوم وارد می‌کند در حقیقت نیرویی است که میدان مغناطیسی جریان اول بر جریان دوم (بارهای متحرک) وارد می‌کند.

$$\bar{F}_{21} = \oint_{c_2} I_2 d\bar{l}_2 \times \underbrace{\oint_{c_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\bar{l}_1 \times \hat{a}_{R_{21}}}{|\bar{R}_{21}|^2}}_{\bar{B}_1 =}$$

$\bar{B}_1 =$ میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 در محل عنصر جریان $I_2 d\bar{l}_2$ است.

$$\bar{F}_{21} = \oint_{c_2} I_2 d\bar{l}_2 \times \bar{B}_1$$



$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\bar{l}' \times \hat{a}_R}{|\bar{R}|^2}$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \quad , \quad \hat{a}_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\bar{l}' \times \bar{R}}{|\bar{R}|^3}$$

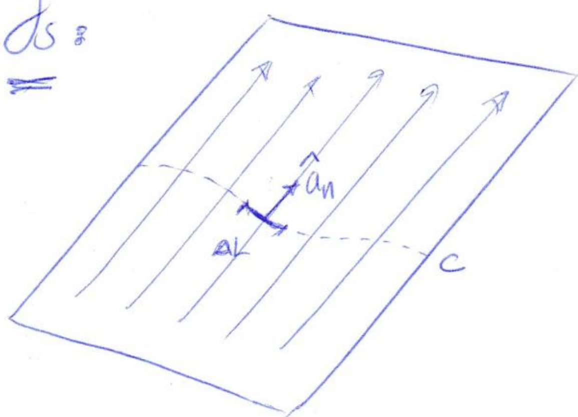
$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

توزیع جریان → خطی : جریان روی مسیر خطی توزیع شده باشد : I

سطحی : جریان روی یک سطح توزیع شده است $\bar{J}_s$

حجمی : جریان در یک حجم توزیع شده است . $\bar{J}_v$

$\bar{J}_s$:



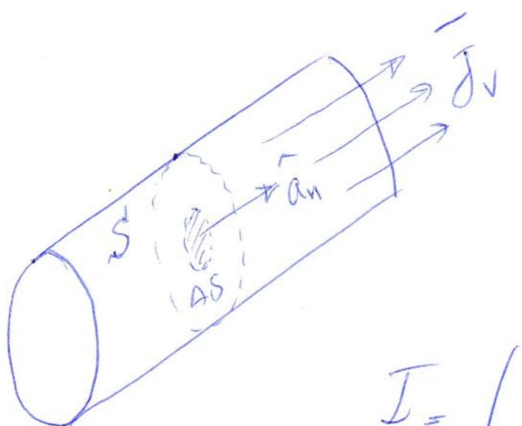
$$\bar{J}_s = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta L}\,\hat{a}_n \quad \left(\frac{A}{m}\right)$$

- ΔI جریان گذرنده از عنصر طول ΔL است
بطوری که ΔL بر جهت جریان عمود باشد

- $\hat{a}_n$ بردار یکه در جهت جریان و عمود بر ΔL است.

$$I = \int_C \bar{J}_s \cdot \bar{dL}$$

$\bar{J}_v$:



$$\bar{J} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}\,\hat{a}_n \quad \left(\frac{A}{m^2}\right)$$

$$I = \int_S \bar{J}_v \cdot \bar{ds}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\,d\bar{l} \times \bar{R}}{|\bar{R}|^3}$$

$I d\bar{l}$: جریان I در عنصر طول $d\bar{l}$

$d\bar{l}$ معمولاً هم جهت با جریان است.

جریان با توزیع سطحی و حجمی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از جریان‌های خطی در نظر گرفت.

برای توزیع حجمی:

$$I\,d\bar{l} = (J\,ds)\,d\bar{l} = \bar{J}\,ds\,dl = \bar{J}\,dv$$

جهت جریان با جهت $d\bar{l}$ یکسان است

لذا جهت را از $d\bar{l}$، به $\bar{J}$ می‌دهیم

برای توزیع سطحی:

$$I\,d\bar{l} = (J\,dl')\,d\bar{l} = \bar{J}\,dl'\,dl = \bar{J}\,ds$$

با رسم شکل توضیح بده

توزیع خطی:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C'} \frac{I\,d\bar{l}' \times \bar{R}}{|\bar{R}|^3} \qquad I(r')$$

توزیع سطحی:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\bar{J}_s \times \bar{R}\,ds'}{|\bar{R}|^3} \qquad \bar{J}_s(r')$$

توزیع حجمی:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}_v \times \bar{R}\,dv'}{|\bar{R}|^3} \qquad \bar{J}_v(r')$$

$\bar{B}$: چگالی شار مغناطیسی، القای مغناطیسی ، تسلا = Webber/m^2

$\text{Tesla} = 10^4\ \text{Gauss}$

نیروی وارد بر بار متحرک در میدان مغناطیسی ساکن

- عنصر $Id\bar{l}$ را در میدان $\bar{B}$ در نظر می‌گیریم: $d\bar{F} = Id\bar{l}\times\bar{B}$
- جریان I از حرکت بارهای الکتریکی با چگالی حجمی ρ_v و سرعت $\bar{v}$ بدست می‌آید. $\bar{J} = \rho_v\bar{v}$

$$Id\bar{l} = \bar{J}\,ds\,dl = \rho_v\bar{v}\,ds\,dl = \rho_v(ds\,dl)\bar{v} = \rho_v\,dv\,\bar{v} = dq\,\bar{v}$$

$$d\bar{F} = dq\,\bar{v}$$

لذا نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q که با سرعت $\bar{v}$ در میدان مغناطیسی $\bar{B}$ حرکت می‌کند عبارت است از:

$$\bar{F} = q\bar{v}\times\bar{B}$$

* نیروی $\bar{F}$ عمود بر میدان مغناطیسی است. (در الکتریکی هم‌راستا میدان الکتریکی است $F=qE$)

* نیروی $\bar{F}$ چون بر جهت حرکت عمود است لذا $W=\int \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0$
نیروی مغناطیسی بر خلاف نیروی الکتریکی قادر به انجام کار نیست

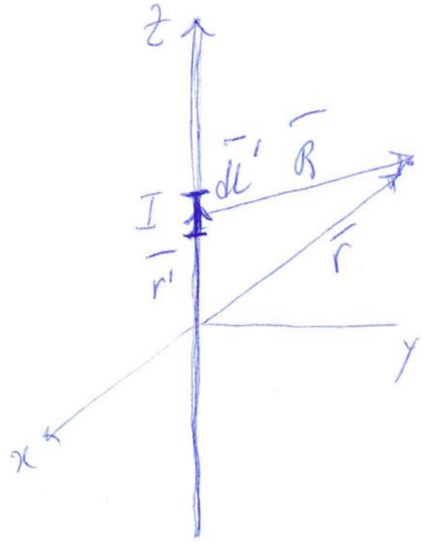
* $\text{if } \bar{v}=0 \to \bar{F}=0$

در محیطی که میدان الکتریکی $\bar{E}$ و مغناطیسی $\bar{B}$ هر دو وجود دارند، نیروی وارد بر بار متحرک q که با سرعت $\bar{v}$ حرکت می‌کند عبارت است از:

$$\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v}\times\bar{B} = q(\bar{E}+\bar{v}\times\bar{B})$$

نیروی لورنتس

مثال: میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم جریان بی‌نهایت با جریان ثابت I در امتداد محور z:



حل:

۱- دستگاه مختصات استوانه‌ای $\bar{B}(r,\varphi,z)$

۲- بررسی تقارن ← جهت: نقطه نمی‌توان مشخص کرد

اندازه: $\bar{B}(r,\varphi,z)=\bar{B}(r)$

۳- حل مستقیم:

$$\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{c'}\frac{I\,\bar{dl}'\times\bar{R}}{|\bar{R}|^3}$$

$$\bar{dl}'=dz'\hat{a}_z \quad , \quad \bar{R}=\bar{r}-\bar{r}' \quad , \quad \bar{r}=z\hat{a}_z+r\hat{a}_r \quad , \quad \bar{r}'=z'\hat{a}_z+\cancel{r'\hat{a}_r'}=z'\hat{a}_z$$

$$\bar{R}=r\hat{a}_r+z\hat{a}_z-z'\hat{a}_z=r\hat{a}_r+(z-z')\hat{a}_z$$

$$|\bar{R}|=\left(r^2+(z-z')^2\right)^{1/2}$$

$$\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,dz'\hat{a}_z\times\left[r\hat{a}_r+(z-z')\hat{a}_z\right]}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

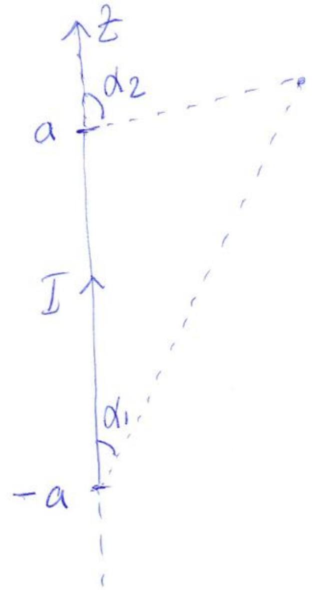
$\hat{a}_r \rightarrow \hat{a}_\varphi \rightarrow \hat{a}_z \rightarrow \hat{a}_r$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\hat{a}_\varphi\,dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}r\hat{a}_\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\bar{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

اندازه میدان تابع r و در جهت $\hat{a}_\varphi$ است.

116

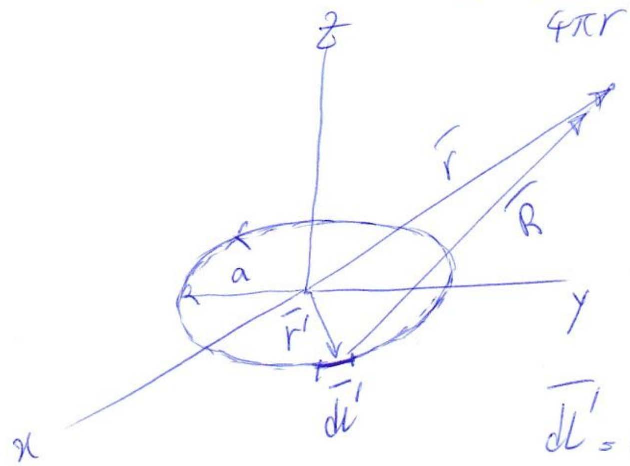


$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,\hat{a}_\varphi$$

if $a \to \infty$: $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_1 = 0$

$\cos\alpha_2 = -1$, $\cos\alpha_1 = 1$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(1-(-1))\,\hat{a}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$



مسأله ۲:

$$\bar{dl}' = \bar{dl}'_\varphi = r'd\varphi'\,\hat{a}_\varphi'\Big|_{r'=a} = a\,d\varphi'\,\hat{a}_\varphi'$$

$$\bar{dl}' = a\,d\varphi'(-\sin\varphi'\hat{a}_x + \cos\varphi'\hat{a}_y)$$

در دستگاه استوانه‌ای

$$\begin{cases} \bar{r}' = r'\hat{a}_r' + z'\hat{a}_z = r'\hat{a}_r' \\ r' = a\cos\varphi'\hat{a}_x + a\sin\varphi'\hat{a}_y \end{cases}$$

در دستگاه کروی:

$$\begin{cases} \bar{r} = r\hat{a}_r = \\ \bar{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y + r\cos\theta\,\hat{a}_z \end{cases}$$

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' = (r\sin\theta\cos\varphi - a\cos\varphi')\hat{a}_x + (r\sin\theta\sin\varphi - a\sin\varphi')\hat{a}_y + r\cos\theta\,\hat{a}_z$$

$$|\bar{R}| = \left[(r\sin\theta\cos\varphi - a\cos\varphi')^2 + (r\sin\theta\sin\varphi - a\sin\varphi')^2 + r^2\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\bar{R}|^3 = \left[r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta(\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi')\right]^{3/2}$$

117

$\bar{dl}' \times \bar{R} = \dots$

$\vdots$

اعمال شرط $r \gg a$:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta\right)$$

$$\bar{m} = \pi a^2 I \hat{a}_m = S \hat{a}_m = \pi a^2 I \hat{a}_z$$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی :

چرخش انگشتان در جهت جریان، شست جهت $\hat{a}_m$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta\right)$$

q

$-q$

$$\bar{P} = q d \hat{a}_z \quad \bar{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta\right)$$