شرایط لازم برای مشتق پذیری تابع $f(z)$ (شرایط کوشی ریمان):

$$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$$

(1) مشتقات جزئی درجه اول u و v نسبت به x و y وجود داشته باشند.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

در این صورت ممکن است تابع مشتق پذیر باشد ولی اگر شرایط کوشی ریمان برقرار نباشد تابع مشتق پذیر نیست.

توجه: در صورتی که تابع مشتق پذیر باشد مشتق تابع

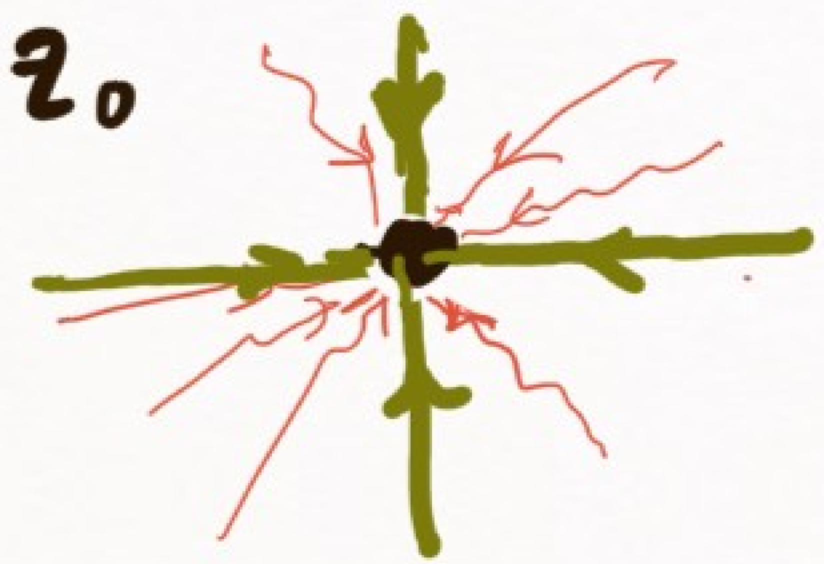
(1) $f'(z)$ بطور معمولی

(2) $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

(3) $$f'(z) = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -j\frac{\partial f}{\partial y}$$

اثبات شرایط کوشی ریمان:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+j\Delta v}{\Delta x+j\Delta y}$$



جایی که حد مشتق باید از تمام مسیرهایی که $\Delta z\to 0$ میل می‌کنند دارای حد باشیم.

فقط دو مسیر را انتخاب می‌کنیم:

$\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y=0\end{cases}$ محور xها

$\begin{cases}\Delta x=0\\ \Delta y\to 0\end{cases}$ محور yها

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+j\Delta v}{\Delta x+j\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{j\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{j\Delta v}{j\Delta y}=-j\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta y=0\\ \Delta x\to 0}}\frac{\Delta u+j\Delta v}{\Delta x+j\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+j\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}$$

باید مساوی باشند.

$$\Leftarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(این مشتق گیری که فقط در مسیر محور x و محور y ها در نظر گرفته شده است)

شرایط کوشی ریمان در فرم قطبی :

$$f(z) = u(r,\theta) + j\,v(r,\theta)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} y/x$$

میتوان ثابت کرد که :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

برای اثبات از مشتق زنجیره‌ای استفاده شده :

مثال ۱- تابع $f(z)=\mathrm{Re}\{z\}$ $\Leftarrow$

$$f(z)=\mathrm{Re}\{z\}=x=x+j0$$

مشتق در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

$$u=x\ ,\quad v=0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=1\ ;\ \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

چون شرایط کوشی ریمان برقرار نیست.

مثال ۲- $f(z)=z^2\,\mathrm{Re}\{z\}$ $\Leftarrow$

$$f(z)=x(x^2-y^2)+2x^2y$$

$$\begin{cases} u(x,y)=x^3-xy^2 \\ v(x,y)=2x^2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2\ ,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x^2 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2xy\ ;\quad -\dfrac{\partial v}{\partial x}=-4xy \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2-y^2=2x^2 \\ -2xy=4xy \end{cases} \Longrightarrow$$

مشتق ممکن است در این نقاط موجود باشد.

مثال ۳- $f(z)=z^2$ در جلسه قبل دیدیم که این تابع تحلیلی بود و مشتق آن $f'(z)=2z$

بود. حال چک کنیم شرایط کوشی ریمان:

$$f(z)=z^2=(x+jy)^2=x^2-y^2+2jxy$$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=2x \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \ , \ -\frac{\partial v}{\partial x}=-2y$$

$\Longrightarrow$ شرایط کوشی ریمان به ازای جمیع نقاط برقرار است.

حال با سه روش مشتق:

① $f(z)=z^2 \Longrightarrow f'(z)=2z=\boxed{2x+2jy}$

② $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=\boxed{2x+2jy}$

③ $f'(z)=-j\frac{\partial f}{\partial y}=-j\left[\frac{\partial u}{\partial y}+j\frac{\partial v}{\partial y}\right]=-j\left[-2y+j2x\right]=\boxed{2x+2jy}$

$\Longrightarrow$ در هر سه حالت پاسخ یکی است.

قضیه - اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در صورتی که

الف - u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و لازم باشند.

ب - شرایط کوشی ریمان در مورد u و v برقرار باشد. آنگاه تابع $f(z)$ مشتق پذیر است.

توجه: توابع چندجمله‌ای $f(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ در همه نقاط مشتق پذیر می‌باشند.

توابع $w=\sin z$ و $w=\cos z$ و $w=e^z$ و $w=\sinh z$ و $w=\cosh z$

نیز مشتق پذیر می‌باشند. بعداً در مورد این توابع بیشتر بحث خواهد شد.

تعریف تابع تحلیلی یا آنالیتیک :

تابع $f(z)$ در نقطهٔ z_0 تحلیلی گوییم اگر این تابع در z_0 و حداقل یک همسایگی آن مشتق‌پذیر باشد.

نتیجه : اگر تابعی فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد نیز

$f(z)=|z|^2$ (فقط در مبدأ)

یا تابعی در چند نقطه جدا از هم مشتق‌پذیر باشد چون شرط حداقل یک همسایگی را ندارد لذا در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

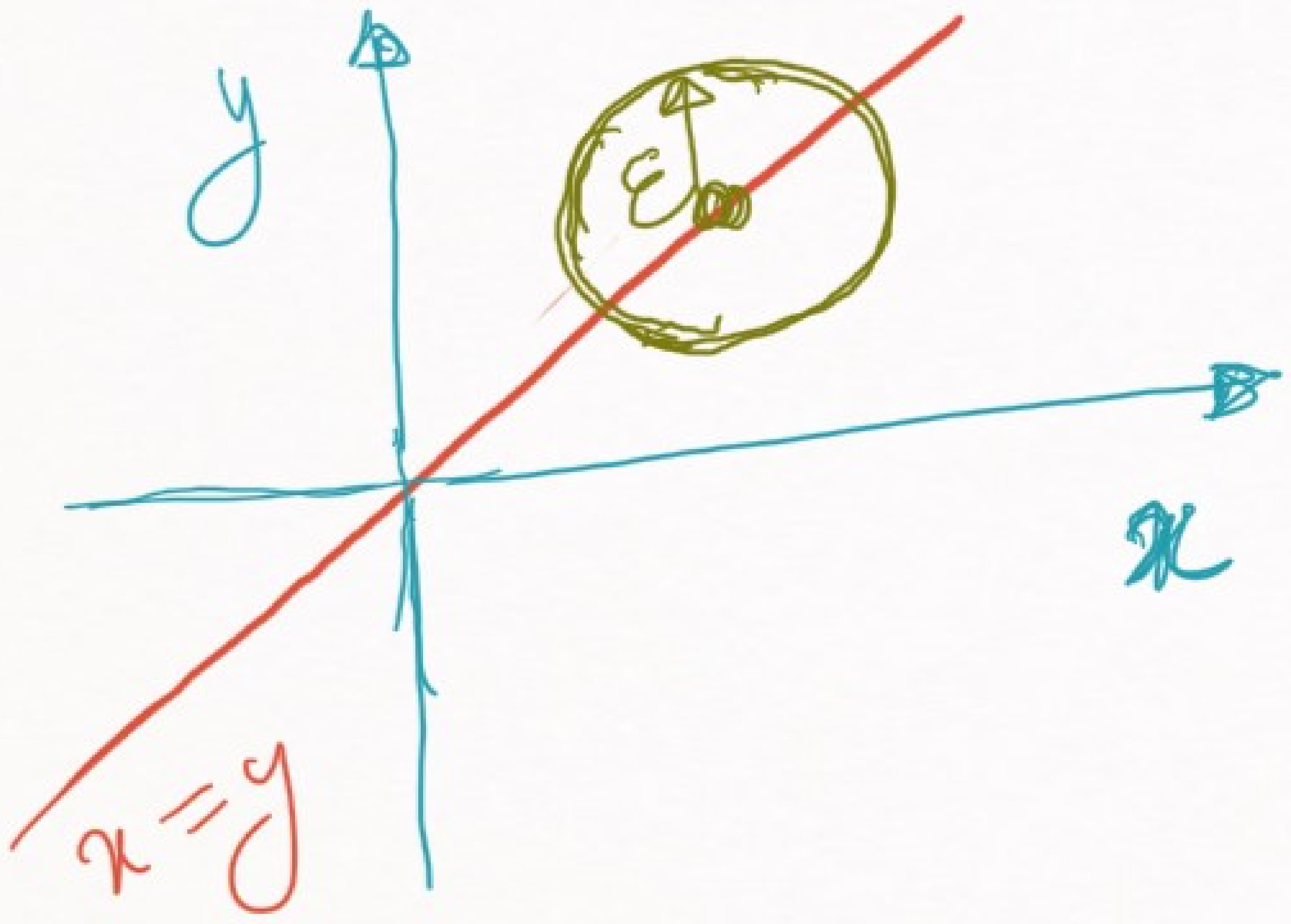
$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \Longrightarrow u(x,y)=x^2+y^2,\quad v=0$$

مثال - $f(z)=x^2+iy^2$

$$\begin{cases} u=x^2 \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ v=y^2 \longrightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=2y \end{cases} \Longrightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$$

تابع روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر است

ولی در این نقاط تحلیلی نیست چون در همسایگی این نقاط مشتق‌پذیر نیست.



ادامه مثال صفحه قبل - ملاحظه شد که تابع در همسایگی مشتق‌پذیر نیست پس در $x=y$ تحلیلی نیست. توجه هرچه شعاع همسایگی را کوچک کنیم باز هم نقاطی پیدا می‌شود که در همسایگی z_0 مشتق‌پذیر نباشد.

مثال - $f(z)=y^2-x^2+i(x^2+y^2)$

$$\begin{cases} u=y^2-x^2 \\ v=x^2+y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_x=-2x\ ,\ v_x=2x \\ u_y=2y\ ,\ v_y=2y \end{cases}$$

شرایط کوشی در $y=-x$ برقرار است ولی در همسایگی مشتق‌پذیر نیست لذا تحلیلی نیست.

مثال - $f(z)=z^2$ در تمام نقاط تحلیلی است.

نتیجه - چندجمله‌ای‌ها برحسب z در همه جا تحلیلی می‌باشند.

تعریف تابع تام: تابعی که در تمام نقاط تحلیلی باشد تابع تام گویند.

نوع ۲- مجموع و حاصلضرب و نسبت دو تابع از صدق که مخرج صفر نشود تحلیلی، تحلیلی می باشد.

نوع ۳- در نقطه‌ای که مشتق‌پذیر و مشتق پیوسته باشد، مشتق تابع تحلیلی بصورت زیر محاسبه میشود:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -j\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$u = x + e^x \cos y$

$v = ?$

مثال - $Real(f(z)) = e^x \cos y + x$ مشتق تابع $f(z)$ را در نقطه $z = 2+3j$ پیدا کنید.

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} = (1+e^x \cos y) + je^x \sin y$$

$$\Rightarrow f'(2+3j) = (1+e^2 \cos 3) + je^2 \sin 3$$

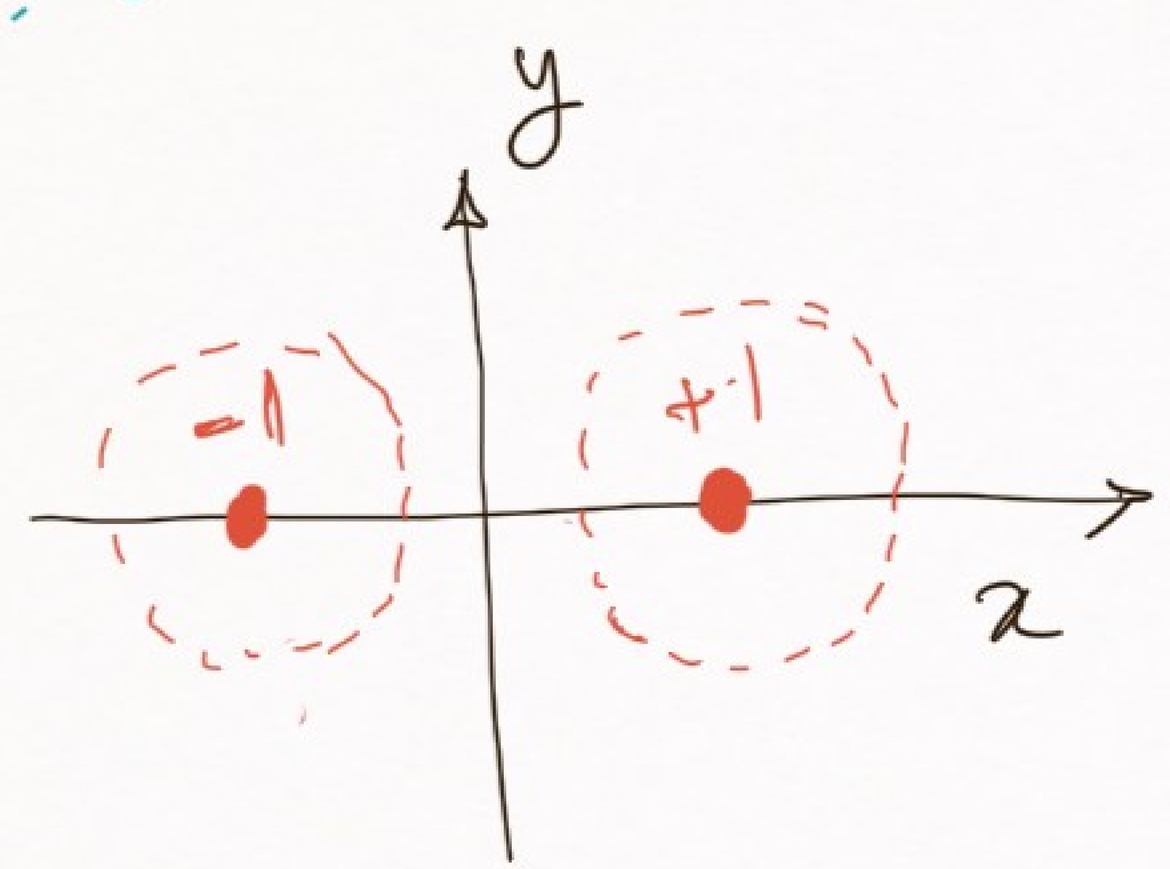
جای کوشی ریمان $-\frac{\partial u}{\partial y}$

نتیجه ۴- اگر تابع تحلیلی $f(z)$ در مختصات قطبی داده شود:

$$f(z) = u(r,\theta) + j\,v(r,\theta)$$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + j\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-j\theta} = e^{-j\theta}\frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{و} \quad f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\,j\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-j\theta}$$

تعریف نقطه منفرد یا تکین: نقطه‌ای که حوزه تابع در آن نقطه تحلیلی نیست ولی در تمام نقاط یا بعضی از نقاط همسایگی آن نقطه تحلیلی است.



مثال- تابع $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ در نقاط $z = \pm 1$ تحلیلی نیست ولی در همسایگی این نقاط تحلیلی است.

مثال- $f(z) = \frac{1}{\sin \pi/z}$

$$\sin \pi/z = 0 \Rightarrow \pi/z = n\pi \Rightarrow z = \frac{1}{n}$$ نقاط منفرد تابع

تعریف تابع همساز یا هارمونیک: تابع $u(x,y)$ را همساز گوییم هرگاه u پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم بوده و در معادله لاپلاس صدق کند

$$\nabla^2 u = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

معادله لاپلاس در قطبی

مثال: $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ در چه نقاطی هارمونیک است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ u_{yy} = \dfrac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Longrightarrow u_{xx}+u_{yy} = 0$$

در تمام نقاط هارمونیک است.

مثال - تمرین: $u(x,y) = e^x \sin y$ نیز هارمونیک است.

قضیه - اگر $f(z) = u + jv$ تحلیلی باشد آنگاه:

الف - u و v همساز باشند.

ب - v مزدوج همساز u می‌گویند.

توجه: عکس این قضیه نیز صادق است یعنی اگر شرایط الف و ب صادق باشد تابع f تحلیلی است.

$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y) \Longrightarrow$ تابع تحلیلی است پس در شرایط کوشی ریمان صدق میکند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \nabla^2 u = 0$$

پس تابع u همساز است.

به همین صورت برای v نیز اثبات می‌شود. یعنی

$$\nabla^2 v = 0$$

نکته مهم : اگر تابع $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ ، f تحلیلی بوده و مقدار $u(x,y)$ معلوم باشد مقدار $v(x,y)$ را بدست آورید. (v را مزدوج همساز u گوییم)

$f(z)$ تحلیلی

$u(x,y)$ معلوم $\Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \text{معلوم} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow v = \underbrace{\int \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dy}_{g} + \varphi(x)$

$u(x,y) = ?$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \text{معلوم} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial g}{\partial x} = -\left[\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right]' - \varphi'(x)$$

$\Longrightarrow \varphi'(x) = \text{معلوم} \longrightarrow \varphi(x)$ معلوم $\Longrightarrow v(x,y)$ معلوم

سوال : اگر $u(x,y)=y^3-3xy^2$ باشد در این صورت تابع مزدوج همساز آن را بدست آورید.

$v(x,y)=?$

حل-

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2 y \Longrightarrow v(x,y) = ?$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Longrightarrow$$ (ضرورت اثبات نیست)

انتگرال بگیری نسبت y

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -6xy \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow v(x,y) = -\frac{6}{2} x y^2 + \phi(x)$$

مشتق بگیری

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} \Longrightarrow 3y^2 - 3x^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left[-3y^2 + \phi'(x)\right] \Longrightarrow \phi'(x) = 3x^2$$

$$\Longrightarrow \phi(x) = x^3 + c \Longrightarrow \boxed{v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C}$$

$$f(z) = \underbrace{y^3 - 3x^2 y}_{u(x,y)} + j\,(\underbrace{x^3 - 3xy^2 + C}_{v(x,y)}) \overset{?}{\Longrightarrow} f(z) = j\,(z^3 + C)$$

نکته مهم ۲- اگر $f(z)$ تحلیلی باشد و $f(z)=u(x,y)+j\,v(x,y)$ یعنی تابع بر حسب x و y باشد

برای نوشتن تابع f بر حسب z بجای $y=0$ قرار داده و $x \to z$ میگذاریم

مثال قبل-

$$f(x,y) = y^3 - 3x^2y + j(x^3 - 3xy^2 + C)$$

$$f(z)\Big|_{\substack{y=0\\ x=z}} = j(z^3 + C)$$

عدد او

مثال- $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ مزدوج همساز در تابع مختلط تحلیلی

مانند بالا درستی را محاسبه کردید. مشابه مثال قبل انجام شود:

$$v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+C \Longrightarrow$$

$$f(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)+j\left(2^x\sin(y\ln 2)+C\right) \Longrightarrow f(z)=2^z+jC$$

توجه- اگر تابع f تحلیلی و بر حسب r و θ باشد در این صورت

$$f(z)=f(r,\theta)\Big|_{\substack{\theta=0\\ r=z}}$$

تمرین ۱- نشان دهید که اگر v مزدوج همساز تابع u باشد آنگاه u مزدوج همساز $-v$ خواهد بود.

می‌دانیم $f=u+iv$ تحلیلی است و باید نشان دهیم که $g=-v+iu$ نیز تحلیلی است.

تمرین ۲- مقدار b را طوری بدست آورید که $u=\cos bx \cosh y$ همساز باشد سپس مزدوج همساز آن را بدست آورید.

$$b=\pm 1 \quad , \quad v=-\sin x \cdot \sinh y + c$$

تمرین ۳- از $f(z)=u+iv$ و f تحلیلی باشد و $u(x,y)=x^3+bx^2y+cxy^2-y^3$ تابع $f(z)$ را بدست آورید.

پاسخ

$$f(z)=(1-i)z^3$$