احتمال

آزمایش تصادفی

آزمایشی که در هر بار اجرای آن خروجی از قبل معلوم نباشه. با این حال تمام خروجی های ممکن آن معلوم است

مثال:

تاس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

سکه $\{H, T\}$

مدت انتظار برای اتوبوسی که هر نیم ساعت به ایستگاه میرسه برحسب دقیقه $\{t : 0 < t < 30\}$

فضای نمونه: مجموعه تمام حالتهای خروجی یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند و با S نمایش میدهد

پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد گویند

وقوع یک پیشامد: برای یک پیشامد مانند $A \subseteq S$ گوییم پیشامد A به وقوع پیوسته است هرگاه خروجی آزمایش تصادفی عضوی از پیشامد A باشه

مثال:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1\}$ $C = \{\text{زوج}\}$

$B = \{1, 2\}$ $D = \{\text{فرد}\}$

آزمایش:
- ۱ ← A و B و D
- ۳ ← D

پیشامدهای ترکیبی: عملیات مجموعه ای روی چند پیشامد

$O = A \cup B$

$Z = C \cap B$

مثلا

- ۱ ← O
- ۲ ← Z و O
- ۴ ← $\divideontimes$

احتمال: نظریه احتمال سه اصل دارد

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مسائل احتمال:

۱- فضای نمونه

۲- پیشامد مورد نظر

۳- احتمال وقوع

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب سکه تا آمدن شیر - احتمال اینکه در پرتاب ۲۰ شیر بیاید؟ احتمال اینکه حداقل ۱۰ پرتاب انجام شود؟

$S = \{ \{H\}, \{TH\}, \{TTH\}, \ldots \}$

تعداد پرتاب $\{ 1, 2, 3, \ldots \}$

$A_k = \{$ پرتاب k ام شیر $\}$

$$P(A_k) = P(\{\underbrace{TT\ldots T}_{k-1}\underbrace{H}_{k}\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$P(A_{20}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$B = \{$ حداقل ۱۰ پرتاب $\} \Rightarrow \begin{cases} P(B) = P(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12} \cup \ldots) \\ P(B^c) = P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_9) \end{cases}$

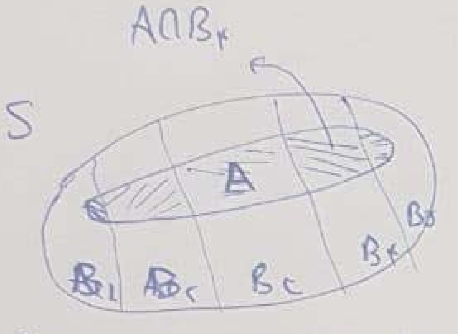
$$B = \{10, 11, 12, \ldots\} \Rightarrow B^c = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$$

$$P(B) = \sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

احتمال شرطی

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{فضای نمونه جدید}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\,P(B)$$

احتمال کل



$$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 = \cup B_i$$

$$A = A\cap S = A\cap(\cup B_i) = \underbrace{\cup(A\cap B_i)}_{\text{اشتراک ندارند}}$$

$$P(A) = P(\cup(A\cap B_i)) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \ldots$$
$$= \sum P(A\cap B_i) = \sum P(A|B_i)\,P(B_i)$$

قاعده بیز: معکوس کردن رخدادها

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{\sum P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

مثال: پرتاب تاس

$A = \{1\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{6}$

$B = \{1,2,4\}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

$C = \{1,2\}$ $\quad P(C) = \frac{1}{3}$

$D = \{2,4,6\}$ $\quad P(D) = \frac{1}{2}$

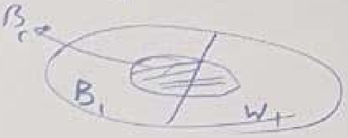
$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{0}{P(D)} = 0$$

$$P(B|D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(C|D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

مثال: از یک جعبه با دو مهره سفید و ۳ مهره سیاه دو مهره به ترتیب خارج می‌کنیم
احتمال اینکه مهره اول سفید باشد؟ احتمال اینکه مهره دوم سیاه باشد؟
اگر مهره اول سفید باشد احتمال اینکه مهره دوم سیاه باشد؟
اگر مهره دوم سیاه باشد احتمال اینکه مهره اول سفید باشد؟

$W_1 = \{$مهره اول سفید$\}$ $\quad B_1 = \{$مهره اول سیاه باشد$\}$
$B_2 = \{$مهره دوم سیاه$\}$



$$P(W_1) = \frac{2}{5}$$
$$P(B_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(B_2) = P(B_2 \cap S)$$
$$= P(B_2 \cap (W_1 \cup B_1))$$
$$= P((W_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2))$$
$$= P(B_2 | W_1) P(W_1) + P(B_2 | B_1) P(B_1)$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$P(B_2 / W_1) = \frac{3}{4}$$
$$P(B_2 / B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(W_1 | B_2) = \frac{P(B_2 | W_1) P(W_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}$$

استقلال: دانستن پیشامد تأثیری روی احتمال پیشامد دیگر ندارد

$$P(A/B) = P(A) \implies P(A \cap B) = P(A/B) P(B) = P(A) P(B)$$

متغیر تصادفی

رابطه‌ای که به هر عضو فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد

$X : S \longrightarrow R$ → گسسته یا پیوسته

مثال: در پرتاب تاس

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{matrix} X(2i) = 1 \\ X(2i-1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow X \in \{0, 1\} \begin{matrix} \nearrow X(1) = X(3) = X(5) = 0 \\ \searrow X(2) = X(4) = X(6) = 1 \end{matrix}$$

$$Y(i) = i \Longrightarrow Y \in \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow Y(1) = 1,\ Y(2) = 2,\ Y(3) = 3,\ Y(4) = 4,\ Y(5) = 5,\ Y(6) = 6$$

توابع توزیع و چگالی احتمال (متغیرهای پیوسته)

$$F(x) = P(X \le x) \qquad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$$

$$F(-\infty) = 0 \qquad F(\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$P(X \in D) = \int_D f(x)\,dx$$

$$P(g(X) \in D') = P(X \in D) = \int_D f(x)\,dx$$

مثال: برای متغیر تصادفی X داریم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 \le x \le 5 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

احتمال اینکه $\{X \in (1, 2)\}$ چقدر است. احتمال اینکه $\frac{5}{16} < g(X) < \frac{1}{2}$ که در آن $g(X) = X^2 + \frac{1}{4}$

$$P(X \in (1, 2)) = \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{5}$$

$$P\left(g(X) \in \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{2}\right)\right) = P\left(X^2 \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)\right) = P\left(X \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} f(x)\,dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

دو متغیر تصادفی

آزمایش تصادفی بیش از یک متغیر تصادفی به عنوان خروجی دارد

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \Longrightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x',y')\, dx'\, dy'$$

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

$$P(g(X,Y) \in D') = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = P((X,Y) \in D)$$

توابع شرطی و استقلال

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \Rightarrow f(x,y) = f(x|y)\, f(y)$$ شرطی

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y)$$
$$= F(x)\, F(y)$$ استقلال

$$f(x,y) = f(x)\, f(y)$$

توابع حاشیه‌ای

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$ تابع حاشیه‌ای x

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

متوسط‌ها

$$g(X) \Rightarrow E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

میانگین
$$\mu_x = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

واریانس
$$\sigma_x^2 = E\{(X-\mu_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 f(x)\, dx$$

$$g(X,Y) \Rightarrow E\{g(X,Y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$$

$$E\{XY\} = \iint_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\, dx\, dy \overset{\text{مستقل}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy$$
$$= E\{X\} E\{Y\}$$

مثال
$$Z = X + Y \rightarrow E\{Z\} = E\{X\} + E\{Y\} \rightarrow \mu_z = \mu_x + \mu_y$$
$$E\{(Z-\mu_z)^2\} = E\{((X-\mu_x) + (Y-\mu_y))^2\}$$
$$= E\{(X-\mu_x)^2 + (Y-\mu_y)^2 + 2(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\}$$
$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2E\{XY\} - 2\mu_x\mu_y$$
$$\overset{\text{استقلال}}{=} \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

قضیه حد مرکزی: اگر X حاصل جمع N متغیر تصادفی مستقل باشد با افزایش N تا بی‌نهایت X گوسی خواهد شد

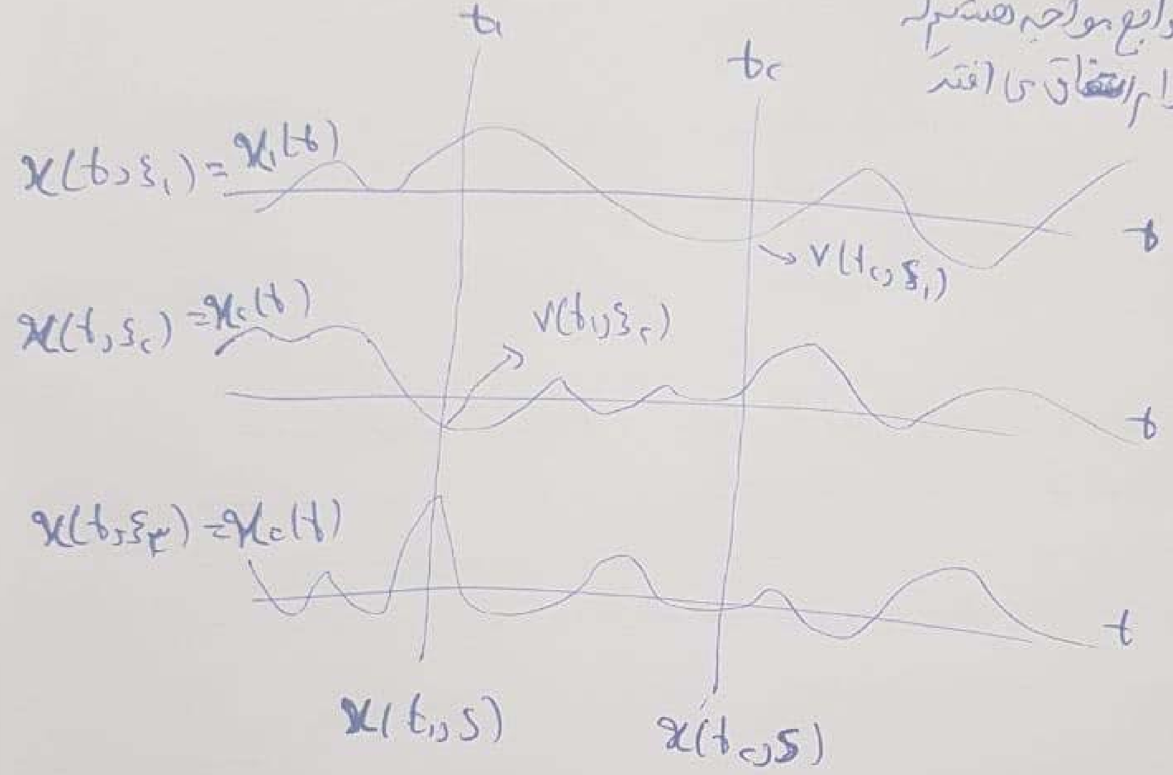
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

فرآیند های تصادفی

فرآیند تصادفی نتایج آزمایش تصادفی را به توابع زمانی نگاشت می کند: $X(t, S)$

مجموعه توابع را مجموعه آماری گوییم و هر تابع زمانی را یک تابع نمونه گوییم

با مجموعه ای از توابع مواجه هستیم که از قبل نمی دانیم کدام اتفاق می افتد



در یک زمان خاص مانند t فرآیند تبدیل به متغیر تصادفی می شود $x(t, S)$

به ازای یک خروجی آزمایش فرآیند به تبدیل به یک تابع زمانی می شود $x(t, \xi)$

در یک زمان خاص مانند t و یک خروجی خاص آزمایش تصادفی مانند ξ فرآیند تبدیل به یک عدد می شود

مثال: عموماً فرآیند تصادفی را به صورت یک تابع زمانی که وابسته به یک سری پارامتر تصادفی است تعریف می‌کنند

مثلاً فرآیند به شکل

$$x(t) = e^{-at} \quad t>0$$

که در آن a یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی $(1,2)$ است $a \in (1,2)$

$$f(a) = \begin{cases} 1 & 1 \leq a \leq 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

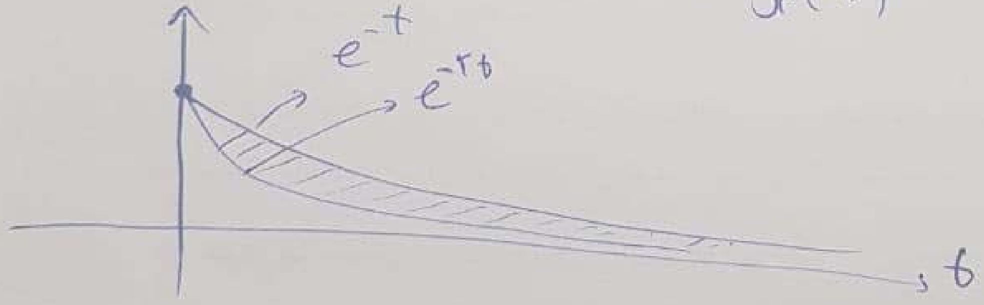
اگر a معلوم باشد $x(t)$ یک تابع زمانی خواهد بود

$$a = 1.5 \longrightarrow x(t) = e^{-1.5t} \quad t>0$$

در یک زمان خاص مثلاً $t=1$ تبدیل به یک متغیر تصادفی می‌شود

$$x(t_1, a) = x(1, a) = e^{-a} = g(a)$$ تابعی از متغیر تصادفی a که خودش یک متغیر تصادفی است

$$x(t_2, a) = x(2, a) = e^{-2a} = g_2(a)$$



پس می‌توان t را به عنوان یک پارامتر معلوم فرض کرد که تصادفی نیست

باید توابع احتمال توام پارامترها را داشت

$$x(t) = a + tb \Longrightarrow f(a,b)$$ باید تابع معلوم باشد

میانگین ها

$x(t)$

$$\mu_x(t) = \overline{x(t)} = E\{x(t)\}$$ ← متوسط آماری

$$R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)\,x^*(t_2)\}$$ خودهمبستگی

$$R_x(t,t) = E\{|x(t)|^2\}$$

$x(t), y(t)$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E\{x(t_1)\,y^*(t_2)\}$$ همبستگی متقابل

$$C_{xy}(t_1,t_2) = E\{(x(t_1)-\mu_x(t_1))(y^*(t_2)-\mu_y^*(t_2))\}$$

کوواریانس دو فرآیند تصادفی

$$C_{xy}(t_1,t_2) = 0 \quad \forall (t_1,t_2) \Rightarrow$$ دو فرآیند ناهمبسته

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E\{x(t_1)\}\,E\{y^*(t_2)\}$$

مثال: برای فرآیند $x(t) = e^{-at}$ که در آن a متغیر تصادفی $f(a) = \begin{cases} 1 & 1<a<2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = E\{\underbrace{e^{-at}}_{g(a)}\} = \underbrace{\int e^{-at} f(a)\,da}_{\int g(a)f(a)\,da} = \int_1^2 e^{-at}\,da$$

$$= \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$$ ← تابعی از زمان

$$\mu_x(1) = \frac{e^{-1}-e^{-2}}{1} = E\{x(1)\} \qquad \mu_x(2) = \frac{e^{-2}-e^{-4}}{2} = E\{x(2)\} = E\{\underbrace{e^{-2a}}_{g(a)}\}$$

مثال: برای دو فرآیند $v(t)=t+X$ و $w(t)=tY$ متوسط‌ها و توابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل را بیابید

$$\mu_v(t)=E\{v(t)\}=E\{t+X\}=t+E\{X\}=t+\mu_x$$

$$\mu_w(t)=E\{w(t)\}=E\{tY\}=tE\{Y\}=t\mu_y$$

$$R_v(t_1,t_2)=E\{v(t_1)v(t_2)\}=E\{(t_1+X)(t_2+X)\}$$

$$=E\{t_1t_2+(t_1+t_2)X+X^2\}=t_1t_2+(t_1+t_2)E\{X\}+E\{X^2\}$$

$$R_{vw}(t_1,t_2)=E\{v(t_1)w(t_2)\}=E\{(t_1+X)(t_2Y)\}$$

$$=E\{t_1t_2Y+t_2XY\}=t_1t_2E\{Y\}+t_2\underbrace{E\{XY\}}_{f(x,y)\text{ باید معلوم باشد}}$$

مثال: برای فرآیند $x(t)=\cos(\omega_c t+\varphi)$ که φ تصادفی است $\underbrace{f(\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0 & \text{ع.ص}\end{cases}}_{\text{توزیع یکنواخت روی } (0,2\pi)}$

$$\mu_x(t)=E\{x(t)\}=\underbrace{E\{\cos(\omega_c t+\varphi)\}}_{\varphi}=\int_0^{2\pi}\cos(\omega_c t+\varphi)f(\varphi)d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos(\omega_c t+\varphi)d\varphi=0$$

میانگین ثابت

$$R_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)x(t_2)\}=E\{\cos(\omega_c t_1+\varphi)\cos(\omega_c t_2+\varphi)\}$$

$$=E\{\tfrac{1}{2}\cos\omega_c(t_1-t_2)+\tfrac{1}{2}\cos(\omega_c(t_1+t_2)+2\varphi)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cos\omega_c\underbrace{(t_1-t_2)}_{\tau}=\tfrac{1}{2}\cos\omega_c\tau=R_x(\tau)$$

به اختلاف زمانی ربط دارد

فرآیندهای ایستان

فرآیندی را ایستان به معنای اکید (SSS) گوییم که مشخصات آماری آن با تغییر مبدا زمان تغییر نکند.

فرآیندی را ایستان به معنای وسیع (WSS) گوییم که $\mu_x(t)=\mu$ و $R_x(t_1,t_2)=R_x(t_1-t_2)$

فرآیندهای ارگادیک

برای شناخت و تحلیل فرآیند متوسط‌های آماری باید در اختیار باشند؛ کل مجموعه توابع باید در اختیار باشد.

آیا با داشتن یک تابع نمونه و متوسط‌های زمانی می‌توان به متوسط آماری رسید؟

$$\langle x_i(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)\,dt \overset{?}{=} E\{x(t)\}$$

مثال: برای فرآیند $x(t)=\cos(\omega_c t+\varphi)$ که $f(\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & \varphi\in(0,2\pi)\\ 0 & o.w.\end{cases}$

فرض کنید یک تابع نمونه در اختیار است $\varphi=\varphi_0$

$$\langle x(t)\rangle = \langle \cos(\omega_c t+\varphi_0)\rangle = 0 = E\{x(t)\}$$

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \langle \cos(\omega_c t_1+\varphi_0)\cos(\omega_c t_2+\varphi_0)\rangle$$

$$= \langle \tfrac{1}{2}\cos\omega_c(t_1-t_2) + \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c(t_1+t_2)+2\varphi_0)\rangle$$

$t_1=t,\ t_2=t-\tau$

$$= \langle \tfrac{1}{2}\cos\omega_c\tau + \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c(2t-\tau)+2\varphi_0)\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos\omega_c\tau = E\{x(t_1)x(t_2)\} = R_x(\tau)$$

فرآیندی که متوسط های زمانی توابع نمونه و متوسط های آماری فرآیند برابر باشند
ارگادیک گویند

اگر برای فرآیند ارگادیک بودن را داشته باشیم

$$\langle x(t)\rangle = E\{x(t)\}$$

$$\langle x(t)x(t-\tau)\rangle = E\{x(t)x(t-\tau)\} = R_x(\tau)$$

$$P_x = \langle |x(t)|^2\rangle = E\{|x(t)|^2\} = R_x(0)$$ متوسط توان فرآیند

فرآیندهای گوسی: فرآیندی که نمونه های زمانی آن متغیرهای گوسی باشند
فرآیند توسط $E\{x(t)\}$ و $R_x(t_1,t_2)$ قابل بیان است

طیف توان

توزیع توان فرآیند در حوزه فرکانس

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} G_x(f)$$

$$R_x(0) = P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df$$

مثال: فرآیند $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ که φ یکنواخت $f(\varphi) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi} & \varphi\in(0,2\pi)\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0\tau \longrightarrow G_x(f) = \frac{1}{4}\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}\delta(f+f_0)$$

$$P = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df$$

سیگنال‌های فیلتر شده

ایستان $\quad x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$

$R_x(\tau) \qquad R_y(\tau)$

$G_x(f) \qquad G_y(f)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$\underbrace{R_{yx}(t_1, t_2)}_{E\{y(t_1)x(t_2)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) E\{x(t_1-\lambda)x(t_2)\}\, d\lambda$$

(ایستا)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) R_x(\tau-\lambda)\, d\lambda = h(\tau) * R_x(\tau)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda)\, d\lambda\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(\lambda)\} h(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x(\lambda) h(t-\lambda)\, d\lambda = \mu_x(\tau) * h(\tau)$$

$$= \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, d\lambda = H(0)\mu_x$$

پاسخ فرکانسی سیستم در فرکانس صفر

مثال: $\quad x(t) \to \boxed{\frac{d}{dt}} \to y(t) \qquad H(f) = j2\pi f \Leftarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) = (2\pi f)^2 G_x(f)$$

$$= -(j2\pi f)^2 G_x(f) \Rightarrow R_y(\tau) = -\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}$$

مثال: تبدیل هیلبرت

$x(t) \to \boxed{H_Q(f)} \to \hat{x}(t) = y(t) \qquad H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$

$$|H_Q(f)|^2 = 1$$

$$\begin{cases} R_{\hat{x}x}(\tau) = h_Q(\tau) * R_x(\tau) = \hat{R}_x(\tau) \\ R_{x\hat{x}}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_{\hat{x}}(f) = |H_Q(f)|^2 G_x(f) = G_x(f) \\ R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau) \end{cases}$$

نویز

سیگنال های ناخواسته که با سیگنال اصلی ترکیب می شوند → منشأ انسانی ← سیستم های مخابراتی دیگر
→ منشأ طبیعی ← حرکت الکترون ها

نویز حرارتی: اگر محیط دارای دما باشد ذرات بار (الکترون ها) آزادانه و تصادفی حرکت می کنند
سیگنال ناشی از این حرکت ها نویز حرارتی

اگر یک مقاومت R در دمای T باشد حرکت الکترون ها ولتاژ $v(t)$ را ایجاد می کند که توزیع گوسی دارد

$$\overline{v^2} = \sigma_v^2 = \frac{2(\pi k T)^2}{3h} R$$

میانگین آن صفر و واریانس آن ←

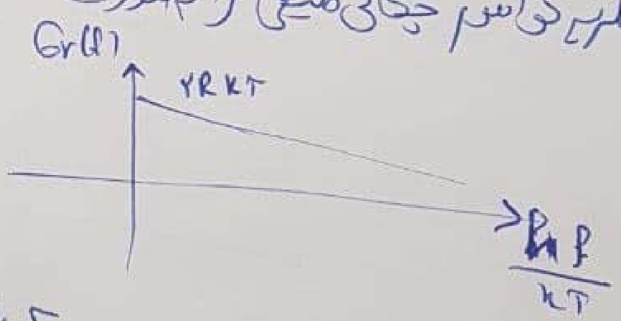
$T \rightarrow$ دما بر حسب کلوین

$k = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ بولتزمان

$h = 6.62 \times 10^{-34}$ ژول پلانک

نظریه کوانتم چگالی طیفی را به صورت

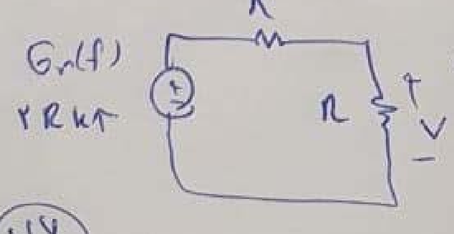
$$G_v(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1}$$



$$G_v(f) = 2RkT\left(1 - \frac{h|f|}{2kT}\right) \quad f \ll \frac{kT}{h}$$

اگر $T_0 = 290\,K \ (17°C) \rightarrow kT_0 = 4 \times 10^{-21}\ W.s \rightarrow |f| < 10^{12}\ Hz \leftarrow G_v$ ثابت

$$\Rightarrow G_v(f) = 2RkT$$



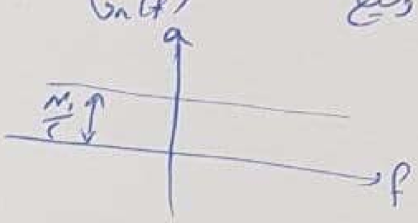
$\xrightarrow{\text{تطبیق}} v = \frac{v_s}{2}$ & $P_n = \frac{\langle (\frac{v_s}{2})^2 \rangle}{R} = \frac{\langle v_s^2 \rangle}{4R}$

$$\Rightarrow G_a(f) = \frac{G_v(f)}{4R} = \frac{1}{2} kT$$

نویز سفید

خیلی از منابع نویز دیگر مثل نویز گوسی ایجاد می‌کنند که طیف توان ثابتی در محدوده فرکانسی بالایی دارند ← تمام مولفه‌های فرکانسی را یک نسبت دارد و نویز سفید نام دارد
وسیع

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2}$$



$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

← نمونه‌های زمانی نویز سفید ناهمبسته و مستقل‌اند

برای هر نویز دیگر غیر حرارتی دمای نویز را می‌توانیم تعریف کنیم

$$2G_n(f) = kT \rightarrow T = \frac{2G_n(f)}{k} = \frac{N_0}{k}$$

فیلتر کردن نویز

نویز سفید گوسی با $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ از یک سیستم LTI با $H(f)$ عبور کرده است

$$n(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow n'(t)$$

$G_n(f)$ $\qquad$ $G_{n'}(f)$

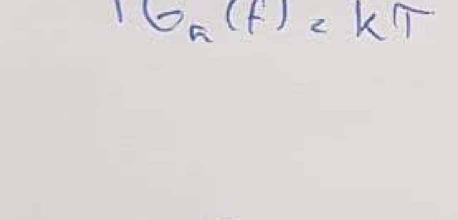
نویز رنگی

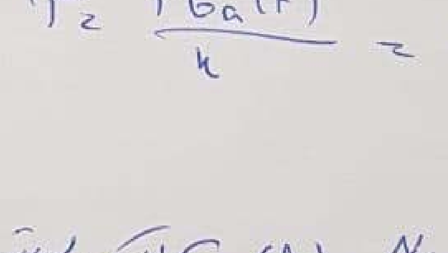
$$G_{n'}(f) = |H(f)|^2 G_n(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

$$R_{n'}(\tau) = \frac{N_0}{2}\mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}$$

$$P_{n'} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{n'}(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,df$$

مثال





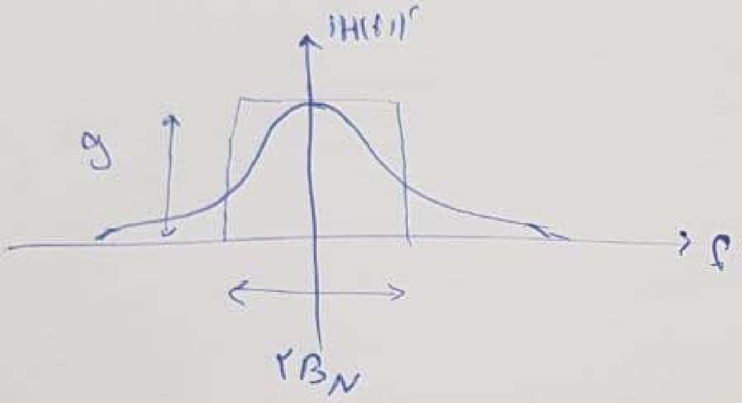
$$G_{n'}(f) = \frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \rightarrow R_{n'}(\tau) = N_0 B \operatorname{sinc} 2B\tau$$

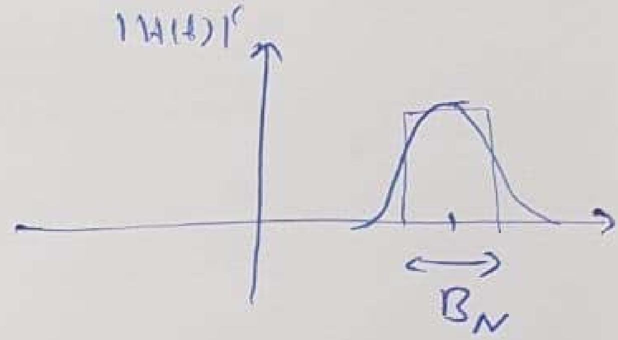
$$\boxed{P_{n'} = N_0 B}$$

پهنای باند معادل نویز

$$N = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{0}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

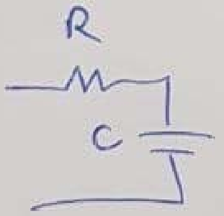
$$\begin{cases} B_N = \dfrac{1}{g}\displaystyle\int_{0}^{\infty} |H(f)|^2 df \\ g = |H(f)|^2_{max} \end{cases} \Rightarrow N = \underbrace{g}_{\text{بهره توان}}\, N_0 \underbrace{B_N}_{\text{پهنای باند}}$$





B_N پهنای باند فیلتر ایده‌آل مستطیلی است که توان نویز سفید خروجی آن و توان نویز سفید خروجی سیستم یکی باشد

مثال: مدار RC



$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(RC\omega)^2} \Rightarrow g = 1$$

$$B_N = \frac{1}{4RC}$$

مثال: مدولاسیون و سیگنال های تصادفی

فرض کنید $z(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \varphi)$ که در آن $x(t)$ یک فرایند تصادفی ایستان و φ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی $(0, 2\pi)$ است که مستقل از $x(t)$ است.

$$E\{z(t)\} = E\{x(t)\cos(\omega_c t + \varphi)\}$$
$$= E\{x(t)\}\, E\{\cos(\omega_c t + \varphi)\}$$
$$= A \times 0 = 0$$

$$R_z(t_1, t_2) = E\{z(t_1) z(t_2)\}$$
$$= \frac{1}{2} E\{x(t_1)x(t_2)\}\, E\{\cos\omega_c(t_1 - t_2) + \cos(\omega_c(t_1 + t_2) + 2\varphi)\}$$
$$= \frac{1}{2} R_x(t_1, t_2)\cos\omega_c(t_1 - t_2)$$
$$= \frac{1}{2} R_x(\tau)\cos\omega_c\tau$$

$$G_z(f) = \frac{1}{4} G_x(f - f_c) + \frac{1}{4} G_x(f + f_c)$$

در حالت کلی که $x(t)$ و $y(t)$ مستقل از هم باشند و توأم ایستان باشند

$$\left.\begin{array}{l} z(t) = x(t)y(t) \\ R_z(\tau) = R_x(\tau)R_y(\tau) \end{array}\right\} \Longrightarrow G_z(f) = G_x(f) * G_y(f)$$