بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات مهندسی

۳ واحد

سرفصل دروس :

بخش اول - تئوری نمایش یک شکل موج دلخواه (یا تابع نخص) بوسیله یک سری سینوسی از مجموع توابع متعامد ← سری فوریه، تعمیم یافته ارتعاشات کلی

- سری فوریه مثلثاتی و توابع پریودیک
- سری فوریه نمایی (توابع پریودیک)
- انتگرال فوریه (توابع غیر پریودیک)
- تبدیل فوریه (توابع غیر پریودیک)

بخش دوم - معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

- تعریف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
- انواع معادلات با مشتق جزئی
- روش‌ها حل معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی

تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی
روش جدایی سازی متغیرها (معمولترین روش)
روش دالامبر
استفاده از تبدیل لاپلاس

معادله موج یک بعد
معادله انتقال حرارت یک بعدی
معادله موج دو بعدی
معادله حرارت دو بعدی

* استفاده از سری فوریه و تبدیل فوریه برای حل معادله بسل و ...

بخش سوم - اعداد مختلط

- اعداد و متغیرها مختلط و توابع آنها
- نگاشت mapping
- سری‌ها مختلط

۲/

ادامه سرفصل ریاضیات مهندسی :

- انتگرال های مختلط. قضیه کوشی - کوشی گورسا - قضیه مانده ها
محاسبه انتگرال های حقیقی ناسره با استفاده از قضیه مانده ها - انتگرال های مثلثاتی با استفاده از مانده ها
- سری های مختلط
- مانده ها و قطب ها
- کاربردهای نگاشت در حل مسائل شار مدار

مراجع کتب :

1- Advanced engineering mathematics by: Erwin kreyszig

ریاضیات مهندسی پیشرفته اروین کرویت سیگ ترجمه دکتر شیدفر فصل الهم [illegible]

2- Complex variables and applications by: charchill

متغیرها مختلط و کاربرد آنها نوشته چرچیل و ... ترجمه امیر خسروی

3- Advanced Engineering mathematics by: wylie

4- ~~Theory & problems~~ Fourier analysis with application to boundary value problems. Schaum's outline

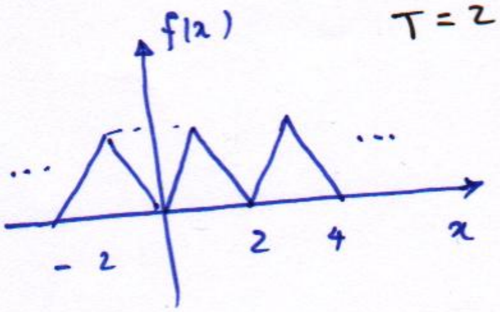
* مرجع مهم مطالب تدریس شده در کلاس درس و جزوه خواهد بود.
تمرینات درسی نیز داده خواهد شد.

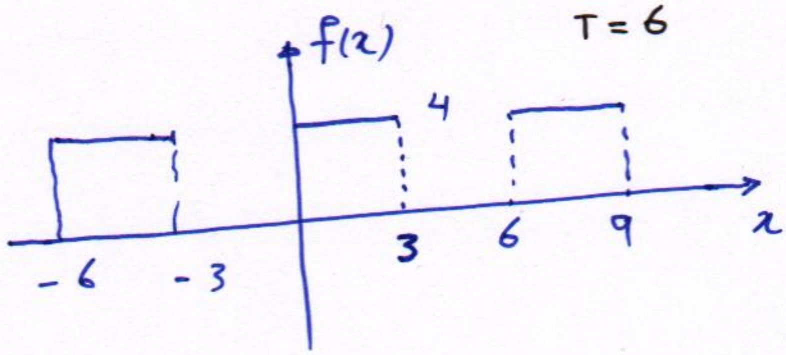
بخش اول - مبحث سری فوریه مثلثاتی و نمایی

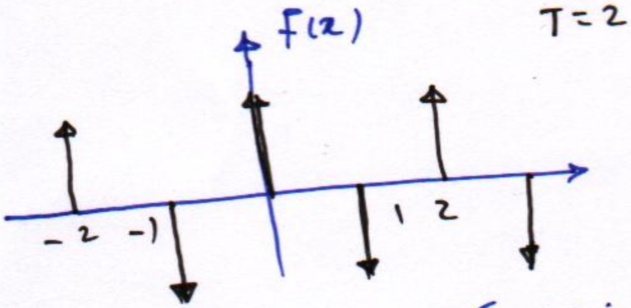
چند یادآوری در توضیح مورد نیاز برای ارائه :

۱- شکل موج پریودیک (متناوب)

$f(x+T) = f(x) \quad ; \quad T =$ دوره تناوب







یک قطار ضربه

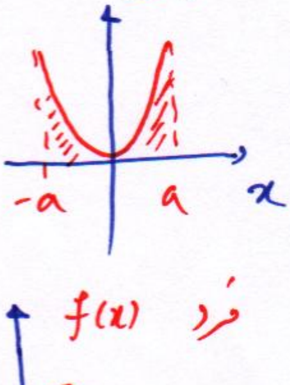
از لحاظ تئوری و عملی شکل موج پریودیک در فاصله محدود مورد نظر است نه بینهایت

۲- اگر $f(x)$ پریودیک باشد داریم :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \int_{C}^{C+T} f(x)\,dx \quad , \quad f(x+T) = f(x)$$

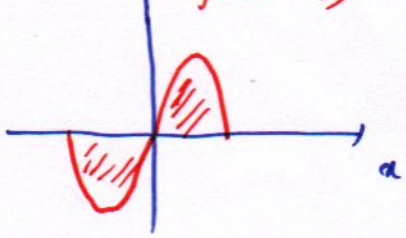
C ← عدد ثابت

زوج $f(x)$



$f(x)$ زوج (even) $\Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

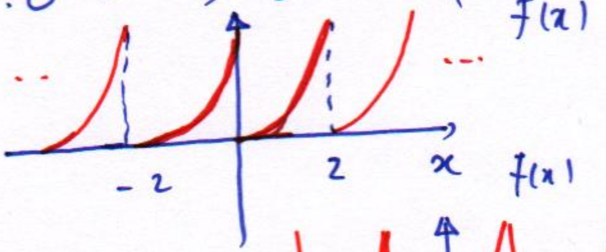
$f(x)$ فرد



$f(x)$ فرد (odd) $\Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

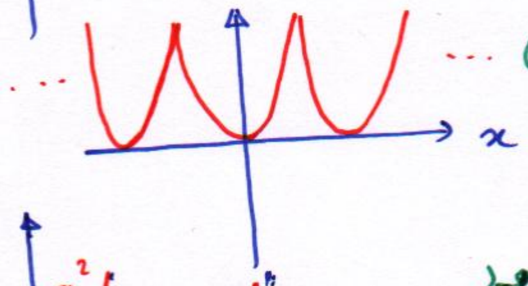
توجه: فرد و زوج بودن شکل‌ها پریودیک باید از روی شکل تابع و در نتیجه پریود برای شود، ضابطه آن تنها اکتفا نمی‌کنیم چون گاهی گمراه کننده می‌باشند. مثلاً:

$f(x) = x^2 , \quad 0 < x < \pi$



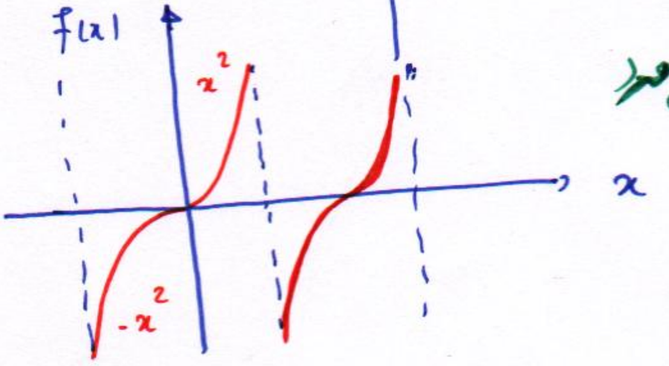
شکل نه زوج نه فرد

$f(x) = x^2 , \quad -\pi < x < \pi$



شکل زوج

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ; & 0 < x < \pi \\ -x^2 , & -\pi < x < 0 \end{cases}$$



شکل فرد

۳- الف- اگر f(x) زوج (even) و g(x) زوج باشد، آنگاه f(x)g(x) زوج است.

ب- f(x) ″ ، g(x) فرد ″ ″ فرد است.

ج- ″ فرد و g(x) فرد ″ ″ زوج است.

۴- تعریف دو تابع متعامد (orthogonal)

دو تابع f(x) و g(x) را در فاصله (a,b) متعامد گوییم هرگاه

اشاره علامت مزدوج

$g^*(x) = g(x)$ برای توابع حقیقی

$$\int_a^b f(x)\, g^*(x)\, dx = 0$$

مثال- $g(x) = x$ و $f(x) = 1$ در فاصله $(-1, 1)$

$g(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ در فاصله $(0, \pi)$

۵ - تعریف مجموعه توابع متعامد:

یک مجموعه توابع $\left\{\varphi_i(x)\right\}_{i=1}^{M}$ را متعامد گوئیم ~~[illegible]~~ (در فاصله (a,b))

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j^*(x)\,dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_i^*(x)\,dx = \int_a^b \left|\varphi_i(x)\right|^2 dx \neq 0 \quad , \quad i = j = 1, 2, \dots, M$$

اگر $\int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx = 1$ باشد مجموعه فوق را متعامد یکه orthonormal گوئیم.

مثال- مجموعه توابع

$$\left\{\cos nx\right\}_{n=0}^{m} = \left\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos mx\right\}$$

در فاصله $(0,\pi)$ یک مجموعه متعامد است ولی یکه نیست.

اولاً -

$$\int_0^{\pi} 1 \times \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx\Big|_0^{\pi} \boxed{= 0}$$

ثانیاً -

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x + \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_0^{\pi} \boxed{= 0} \quad , \ n \neq m$$

به شرطی که

ثالثاً -

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cdot \cos nx\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2nx}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dx + \int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx}{2}\,dx = \boxed{\pi/2}$$

به شرطی که

$n = m$

4/

مثال - مجموعه

$$\left\{1, \cos w_0 x, \cos 2w_0 x, \dots \cos m w_0 x, \sin w_0 x, \sin 2w_0 x, \sin 3w_0 x, \dots \sin n w_0 x\right\}$$

در فاصله $(-T/2, T/2)$, $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ متعامد است.

اروز -

زوج ، فرد

1 - $\int_{-T/2}^{T/2} 1 \times \sin n w_0 x \, dx = \boxed{0}$

2 - $\int_{-T/2}^{T/2} 1 \times \cos m w_0 x \, dx = 2\int_{0}^{T/2} \cos m w_0 x \, dx$

$= \frac{2}{m w_0} \sin m w_0 x \Big|_{0}^{T/2} = \frac{2}{m w_0} \sin m \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \boxed{0}$

3 - $\int_{-T/2}^{T/2} \sin n w_0 x \cos m w_0 x \, dx = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\cos(m-n) w_0 x - \cos(m+n) w_0 x\right] dx$

$= \dots = \boxed{0}$, $m \neq n$

4- $\int_{-T/2}^{T/2} \cos m w_0 x \cdot \cos m w_0 x \, dx = \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 m w_0 x \, dx}_{= T/2} \neq 0$; $m = m$

5 - $\int_{-T/2}^{T/2} \sin n w_0 x \cdot \sin n w_0 x \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 n w_0 x \, dx \neq 0$; $n = n$

۷

تمرین - نشان دهید که مجموعه توابع نمایی $\{1, e^{\pm j\omega_0 x}, e^{\pm 2j\omega_0 x}, \ldots, e^{\pm jm\omega_0 x}\}$

در فاصله $(0, T)$ که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است، متعامد می باشند.

توجه در این تمرین باید ثابت نمایند که

مزدوج

$$\int_0^T e^{jn\omega_0 x} e^{-jm\omega_0 x} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

تعریف سری فوریه تعمیم یافته (در حالت کلی):

سری فوریه تعمیم یافته یک تابع فیزیکی بسط آن به صورت مجموعه ای بی شمار از توابع متعامد فیزیکی از مجموعه توابع $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد کلیه در فاصله (a, b) باشد می توان تحت شرایطی هر تابع $f(x)$ را بصورت مجموع این توابع متعامد بصورت زیر نمایش داد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \cdots + C_n \varphi_n(x) + \cdots$$

که ضرایب C_n ضرایب سری فوریه می باشند.

توجه مهم - حالات خاص:

اگر $\varphi_n(x) =$ مجموعه متعامد سینوس و کسینوس ها $\Longrightarrow$ سری فوریه مثلثاتی

اگر $\varphi_n(x) =$ مجموعه توابع متعامد نمایی $\Longrightarrow$ سری فوریه نمایی

اگر $\varphi_n(x) =$ مجموعه متعامد دیگر مثلاً بسل - لاگرانژ و ... $\Longrightarrow$ سری فوریه بسل - یا لژاندر و ... گردد.

محاسبه ضرایب C_n :

برای محاسبه ضرایب رابطه صفحه قبل یعنی $f(x)=\sum c_n\varphi_n(x)$ را در $\varphi_m^*(x)$ ضرب می‌کنیم و از a تا b انتگرال می‌گیریم.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

$$\int_a^b f(x)\varphi_m^*(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\varphi_m^*(x)\,dx$$

طرفین را باز می‌کنیم

چون مجموعه متعامد است

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi_m^*(x)\,dx=\int_a^b \underbrace{C_1\varphi_1(x)\varphi_m^*(x)}_{1\neq m}\,dx+\int_a^b \underbrace{C_2\varphi_2(x)\varphi_m^*(x)}_{2\neq m}\,dx+\cdots$$

$$+\int_a^b \underbrace{C_m\varphi_m(x)\varphi_m^*(x)}_{m=n}\,dx+\cdots\int_a^b C_{m+1}\varphi_{m+1}(x)\varphi_m^*(x)\,dx+\cdots$$

مخالف صفر $\neq 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi_m^*(x)\,dx=0+0+0+\int_a^b C_n\varphi_n(x)\varphi_n^*(x)\,dx+0+0$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\varphi_n^*(x)\,dx=C_n\int_a^b|\varphi_n(x)|^2\,dx$$

$$\Longrightarrow C_n=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n^*(x)\,dx}{\int_a^b|\varphi_n(x)|^2\,dx}$$

توجه: برای حالت مجموعه متعامد یکه $\int_a^b|\varphi_n(x)|^2\,dx=1$ می‌باشد.

سری فوریه مثلثاتی : سری فوریه مثلثاتی یک تابع پریودیک با پریود T نمایشی از آن تابع بصورت مجموع بی‌نهایت جمله از توابع مجموعه متعامد سینوس‌ها و کسینوس‌ها می‌باشد.

$$\{1, \sin w_0 x, \sin 2w_0 x, \dots, \sin n w_0 x, \cos w_0 x, \cos 2w_0 x, \dots, \cos m w_0 x, \dots\}$$

یعنی :

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n w_0 x + b_n \sin n w_0 x}$$

اگر رابطه بالا را باز کنیم یعنی :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos w_0 x + a_2 \cos 2w_0 x + a_3 \cos 3w_0 x + \dots + b_1 \sin w_0 x$$
$$+ b_2 \sin 2w_0 x + b_3 \sin 3w_0 x + \dots$$

توجه : a_0 را مؤلفه dc سری گویند که متوسط تابع در طول یک پریود است.

طریقه محاسبه a_0 و a_n و b_n

با توجه به تعریف سری فوریه تعمیم یافته ما حساب کردن این سه ضریب باشد که چگونه محاسبه شدند.