ریاضیات مهندسی:

سرفصل ها:

۱- سری فوریه و انتگرال فوریه ✓ میانترم اول: ۶ نمره

۲- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ✓ میانترم دوم ۶ نمره

✓ ۳- اعداد مختلط و توابع تحلیلی پایان ترم ۸ نمره

✓ ۴- نگاشت

حل تمرین: یک نمره اضافه بر ۲۰ نمره

مراجع:

۱) بخش اول: ریاضیات مهندسی؛ کرویت سیگ، تئوری و مسائل ریاضیات مهندسی؛ دکتر اصغر برادران رحیمی مهندس مهدی طاهری مقدم

۲) بخش دوم: تئوری و مسائل ریاضیات مهندسی؛ دکتر اصغر برادران رحیمی و مهندس مهدی طاهری مقدم؛ کتاب [illegible] چنگ

۳) بخش سوم: ریاضیات مهندسی تالیف فرزین حاجی جمشیدی.

۴) بخش چهارم: ریاضیات مهندسی تالیف فرزین حاجی جمشیدی

تمرینات حل تمرین در هر جلسه به شما ارائه خواهد شد.

s.a.m

ص ۱
جلسه اول

سرفصل ها:
۱- سری فوریه و انتگرال فوریه
۲- معادلات با مشتقات جزئی
۳- توابع مختلط
۴- توابع تحلیلی
۵- انتگرال های مختلط

ریاضیات مهندسی:

تابع متناوب
سری فوریه

سری فوریه: (تعریف، خصوصیات)

سری فوریه برای توابع متناوب تعریف می شود. لذا در این بخش به تعریف توابع متناوب می پردازیم.

تابع متناوب:

$$\text{if } T>0 \quad \forall x\in D_f \Rightarrow (x+T)\in D_f$$

چنانچه $T>0$ وجود داشته باشد.

$$f(x+T)=f(x)$$

خصوصیات تابع متناوب:

1) اگر $f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} T$ (دوره تناوب اصلی) — کوچکترین دوره تناوب را تناوب اصلی گویند

$f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} 2T$ ($2x$ دوره تناوب)

$f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} nT$ (nx دوره تناوب)

2) اگر $f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} T$ (دوره تناوب اصلی)

$g(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} T$ (دوره تناوب اصلی)

$$\Rightarrow h(x)=\underbrace{af(x)+bg(x)}_{\text{هر ترکیب خطی دو تابع}} \xrightarrow{\text{متناوب}} T \text{ (دوره تناوب } T)$$

اثبات: $h(x+T)=af(x+T)+bg(x+T)$

فرض اول: $f(x)=f(x+T)$

فرض دوم: $g(x)=g(x+T)$

$$\Rightarrow h(x+T)=af(x)+bg(x) \Rightarrow h(x+T)=h(x) \checkmark$$

3) اگر $f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} T_1$ (دوره تناوب اصلی)

$g(x) \xrightarrow{\text{متناوب}} T_2$ (دوره تناوب اصلی)

$$\Rightarrow h(x)=\underbrace{af(x)+bg(x)}_{\text{هر ترکیب خطی}}$$

$h(x)$ در صورتی متناوب است که کوچکترین مضرب مشترک T_1 و T_2 وجود داشته باشد.

4) (نکته) یک عدد ثابت با هر دوره تناوب دلخواه متناوب است. (چون عدد ثابت دوره تناوب اصلی مشخص نشود)

s.a.m

5) اگر $f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}}$ (دوره‌ی تناوب T)

$\Rightarrow h(x) = A + f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}}$ (دوره‌ی تناوب T)

6)

اگر $f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}}$ (دوره‌ی تناوب T)

$h(x) = f(x/b) \xrightarrow{\text{متناوب}}$ (دوره‌ی تناوب bT)

$f(x) = f(x+T) \qquad x \to x + T'$

$f(ax) = f(ax + aT')$

$aT' = T \Rightarrow T' = T/a$

7)

اگر $f(x) \xrightarrow{\text{متناوب}}$ (دوره‌ی تناوب T)

$f(ax) \xrightarrow{\text{متناوب}}$ (دوره‌ی تناوب T/a)

مثال ①:

دوره تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید:

$\sin x , \cos x \qquad T = 2\pi$

$\sin 2x , \cos 2x \qquad T = 2\pi/2$

$\sin 3x , \cos 3x \qquad T = 2\pi/3$

$\vdots$

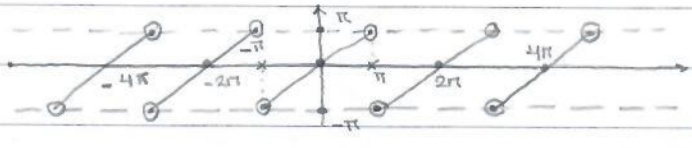
$\sin(nx), \cos(nx) \qquad T = 2\pi/n$

$\sin(\frac{2\pi}{T} nx), \cos(\frac{2\pi}{T} n x) \quad T = \dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{T} n} = T/n$

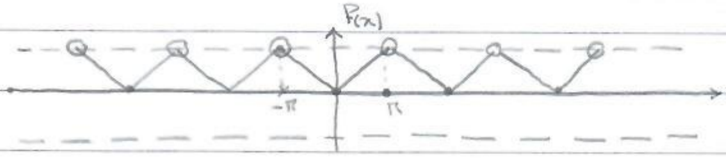
مثال ②:

نمودارهای توابع $f(x)$ زیر را که فرض می‌کنیم دوره‌ای با دوره‌ی 2π اند و فرمولشان به ازای $-\pi < x < \pi$ داده شده است را رسم کنید.

① $f(x) = x$

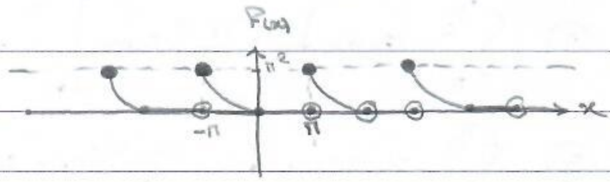


② $f(x) = |x|$



ص ۲ جلسه اول

③ $$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



سری فوریه : نمایش یک تابع متناوب است به صورت ترکیب خطی از توابع مثلثاتی.

* ✓ در نتیجه ما با توابعی رو به رو هستیم که دوره ی تناوب آن 2π است.

$$a_0 + \underbrace{a_1\cos x}_{2\pi} + \underbrace{b_1\sin x}_{2\pi} + a_2\cos 2x + b_2\cos 2x + \dots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

$$f(x) = \underset{?}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{?}{a_n}\cos nx + \underset{?}{b_n}\sin nx \qquad f(x) = f(x+2\pi)$$

نکته: فرض می کنیم که $f(x)$ سری فوریه خواهد داشت.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(x)\sin nx\,dx$$

قبل از وارد شدن به اثبات چند نکته را بیان می کنیم.

روابط مورد نیاز در بخش سری فوریه

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

روابط مثلثاتی

① $$\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{n}(\cos n\pi - 1) = -\frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right)$$

انتگرال های مورد نیاز برای محاسبه سری فوریه

n: زوج $\longrightarrow 0$

n فرد $\longrightarrow 2/n$

② $\int_{\pi}^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{\pi}^{\pi/2} = \frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - \sin(n\pi)\right] = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$

③ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx \, dx = \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$

مشتق	تكامل
x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

④ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx \, dx = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$

مشتق	تكامل
x	$\sin nx$
1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

⑤ $\int x^2 \cos nx \, dx = \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx$

مشتق	تكامل
x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

✓6) $\int e^x \cos nx \, dx = \frac{e^x}{n}\sin nx + \frac{e^x}{n^2}\cos nx + \int e^x\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)dx$

$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\int e^x \cos nx \, dx\right] = \frac{e^x}{n}\sin nx + \frac{e^x}{n^2}\cos nx$

$I = \frac{n^2}{(n^2+1)}\left[\frac{e^x}{n}\sin nx + \frac{e^x}{n^2}\cos nx\right]$

مشتق	تكامل
e^x	$\cos nx$
e^x	$\frac{1}{n}\sin nx$
e^x	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

7) $\int e^x \sin nx \, dx = -\frac{e^x}{n}\cos nx + \frac{e^x}{n^2}\sin nx + \int\left(-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)e^x dx$

$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\int e^x \sin nx \, dx\right] = -\frac{e^x}{n}\cos nx + \frac{e^x}{n^2}\sin nx$

$I = \int e^x \sin nx \, dx = \frac{n^2}{(n^2+1)}\left[-\frac{e^x}{n}\cos nx + \frac{e^x}{n^2}\sin nx\right]$

مشتق	تكامل
e^x	$\sin nx$
e^x	$-\frac{1}{n}\cos nx$
e^x	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

8) $\int x^2 \sin nx \, dx = -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx + \frac{2}{n^3}\sin nx$

مشتق	تكامل
x^2	$\sin nx$
$2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{n}\sin nx$

پاسخنامه جلسه اول :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx =$$

مشتق	انتگرال
x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{1}{n} \sin nx$
2	$\frac{-1}{n^2} \cos nx$
0	$-\frac{1}{n^3} \sin nx$

$$\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\left(\frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi \right) - \frac{2(-\pi)}{n^2} \cos n\pi =$$

$$\frac{4\pi}{n^2} \cos n\pi = \frac{4\pi}{n^2} (-1)^n$$

$$I = \int (x^3+1) \cos x \, dx =$$

مشتق	انتگرال
x^3+1	$\cos x$
$3x^2$	$\sin x$
$6x$	$-\cos x$
6	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$I = (x^3+1) \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c$$

فرمول اصلی $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ (جزء به جزء)

$$I = \int x \cos 3x \, dx =$$

مشتق	انتگرال
x	$\cos 3x$
1	$\frac{1}{3} \sin 3x$
0	$-\frac{1}{3} \cos 3x$

$$I = \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x + c$$

$$I = \int x e^{2x} \, dx =$$

مشتق	انتگرال
x	e^{2x}
1	$\frac{1}{2} e^{2x}$
0	$\frac{1}{4} e^{2x}$

$$I = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$I = \int \ln x \, dx =$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \qquad I = uv - \int v \, du = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x + c$

$dv = dx \rightarrow v = x$

ص۱

«ریاضیات مهندسی»

جلسه اوّل

تمرینات جلسه اوّل:

۱) حاصل انتگرال $I=\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx$ ، $(n\neq 0)$ را بدست آورید؟

۲) مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int (x^3+1)\cos x\,dx$ ؟

۳) حاصل انتگرال $I=\int x\cos 3x\,dx$ را بدست آورید؟

۴) حاصل انتگرال $I=\int x e^{2x}\,dx$ را بیابید؟

۵) حاصل انتگرال $I=\int \ln x\,dx$ را بیابید؟

۶) حاصل انتگرال $I=\int \sin^4 x\,dx$ را بدست آورید؟

۷) دوره تناوب تابع $f(x)=|\cos x|$ را بدست آورید؟

۸) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید؟

1) $I=\int \sin 3x \sin 2x\,dx$

2) $I=\int \sin 2x \cos 5x\,dx$

3) $I=\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{5}\,dx$

۹) دوره تناوب تابع $f(x)=|\sin \pi x|$ را بدست آورید؟ (برق ۷۸)