باللطیف

رضا ادینه پور

۹۸۱۴۳۰۳

امتحان پایانترم ریاضیات مهندسی

پارامترها : $\left.\begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}\right\}$

#1
$$\begin{cases} u_{xx} = t\,u_t \quad ; \; 0<x<\pi \;,\; t>1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad\qquad u(x,t)=? \\ u(x,1) = 5\sin ax + 8\sin bx = 5\sin x + 8\sin 2x \end{cases}$$

$$u = F(t)\cdot G(x) \Rightarrow F G'' = t F' G \Rightarrow \frac{G''}{G} = t\frac{F'}{F} = K$$

$$(\mathrm{I}) \text{ if } (K=0) : \frac{G''}{G} = 0 \Rightarrow S^2 = 0 \Rightarrow G(x) = A_1 x + B_1$$

اعمال شرایط مرزی :
$$\begin{cases} u(0,t) = G(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \\ u(\pi,t) = G(\pi) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \end{cases} \quad \times$$
تناقض
غیرقابل قبول

$$(\mathrm{II}) \text{ if } K = \lambda^2 > 0 : \frac{G''}{G} = \lambda^2 \Rightarrow G'' - \lambda^2 G = 0 \Rightarrow S = \pm\lambda$$

$$\Rightarrow G(x) = A_2 \cosh x + B_2 \sinh x$$

اعمال شرایط مرزی :
$$\begin{cases} u(0,t) = G(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \\ u(\pi,t) = G(\pi) = B_2 \sinh \pi = B_2 \underbrace{\left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}\right)}_{\text{مخالف صفر}} = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \end{cases} \quad \times$$

$$(\mathrm{III}) \text{ if } K = -\lambda^2 < 0 : \frac{G''}{G} = -\lambda^2 \Rightarrow G'' + \lambda^2 G = 0 \Rightarrow S^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow S = \pm\lambda j$$

$$\Rightarrow G(x) = A_3 \cos\lambda x + B_3 \sin\lambda x$$

اعمال شرایط مرزی :
$$\begin{cases} u(0,t) = G(0) = 0 \Rightarrow A_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\sin nx} \\ u(\pi,t) = G(\pi) = 0 \Rightarrow B_3 \sin\lambda\pi = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = n} \end{cases}$$
تابع ویژه

مقدار ویژه

ادامه سوال ۱ :

$$t\,\frac{F'}{F} = -\lambda^2 \Rightarrow tF' = -n^2 F \Rightarrow tF' + n^2 F = 0$$

$$\Rightarrow D + n^2 = 0 \Rightarrow D = -n^2 \xrightarrow[t = e^{z}]{\text{معادله کوشی اویلر}} f(z) = A_4 e^{-n^2 z} \xrightarrow{z = \ln t}$$

$$f(t) = A_4 e^{-n^2 \ln t} = A_4 (t)^{-n^2} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (t)^{-n^2} \sin nx$$

$$\Rightarrow u(x,1) = 5\sin x + 8\sin 2x \qquad \Rightarrow u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1)^{-n^2} \sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 5\sin x + 8\sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 5\sin x \to n=1 \to A_1 = 5 \\ 8\sin 2x \to n=2 \to A_2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 5(t)^{-1} \sin x + 8(t)^{-4} \sin 2x = \frac{5}{t}\sin x + \frac{8}{t^4}\sin 2x$$

#2 (الف)

$$f(z) = \left(\frac{a}{b} \cdot \bar{z}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\bar{z}\right)^2 = \frac{1}{4}(x - jy)^2$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 2xyj) = \underbrace{\frac{1}{4}(x^2 - y^2)}_{u} \underbrace{- \frac{1}{2}xy}_{v} j \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) \\ v = \frac{-1}{2}xy \end{cases}$$

قضیه کوشی ریمان : $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = +\dfrac{1}{2}x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-1}{2}x \end{cases} \neq , \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}x \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-1}{2}y \end{cases} \neq$

<= ~~[illegible]~~ شرط کوشی ریمان برقرار نیست ($\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$) پس این تابع مشتق پذیر نمی باشد

ب) $f(z) = u + jv$ تحلیلی است

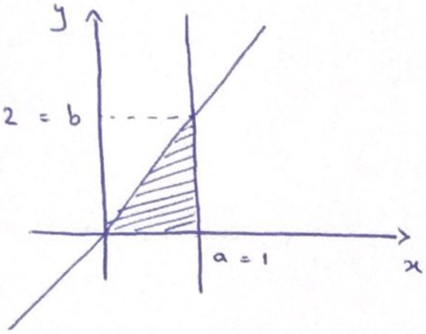
$$u(x,y) = x^2 + 2xy \Rightarrow f'(a + jb) = f'(1 + 2j) = ?$$

می دانیم : $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}$ $\rightarrow$ $f(z)$ تحلیلی است $\rightarrow$ شرط کوشی ریمان صادق است $\rightarrow$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x \end{cases} \Rightarrow f'(z) = (2x + 2y) + j(-2x)$$

$$\Rightarrow f'(\underset{x}{1} + \underset{y}{2}j) = (2(1) + 2(2)) + j((-2) \times (1)) = \boxed{6 - 2j}$$

#3

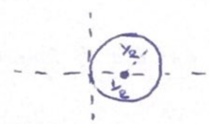


$$\omega = f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow x + jy = \frac{1}{u + j\bar{v}}$$

$$x + jy = \frac{u - j\bar{v}}{u^2 + \bar{v}^2} = \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2 + \bar{v}^2} \\ y = \dfrac{-\bar{v}}{u^2 + \bar{v}^2} \end{cases}$$

I) if $x = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{u}{u^2 + \bar{v}^2} \Rightarrow u^2 + \bar{v}^2 = u \Rightarrow u^2 - u + \frac{1}{4} + \bar{v}^2 = \frac{1}{4}$

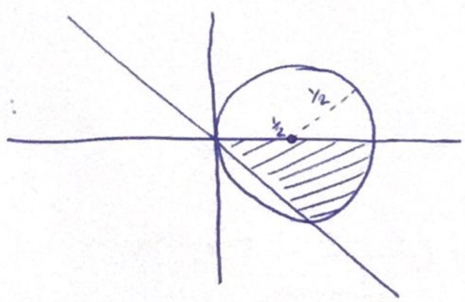
$\Rightarrow (u - \frac{1}{2})^2 + \bar{v}^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow$ دایره‌ای به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$



II) if $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{-\bar{v}}{u^2 + \bar{v}^2} \Rightarrow \bar{v} = 0$

III) if $y = 2x \longrightarrow y - 2x$ خطی گذرنده از مبدأ $\Rightarrow \dfrac{-\bar{v}}{u^2 + \bar{v}^2} = \dfrac{2u}{u^2 + \bar{v}^2} \Rightarrow \bar{v} = -2u$

شکل نهایی :



$$\begin{cases} \bar{v} = 0 \\ \bar{v} = -2u \\ (u - \frac{1}{2})^2 + \bar{v}^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

4 الف)

$$\oint_{|z|=1} z^{2b}\sin\left(\frac{a}{z}\right)dz = \oint_{|z|=1} z^{4}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}_{f(z)}dz$$

تابع $f(z)$ در همه جا تحلیلی است غیر از ($z=0$) که یک نقطه ویژه اساسی است و برای محاسبه مقدار مانده در این نقطه باید بسط لوران نوشته شود زیرا داخل $|z|=1$ قرار دارد

$$z^4\sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!(z^3)} + \frac{1}{5!(z^5)} - \cdots\cdots\right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \underbrace{\frac{1}{5!(z)}}_{a_{-1}} - \cdots\cdots$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{5!} \Rightarrow \int_{|z|=1} f(z) = 2\pi j$ (مجموع مانده‌ها در نقطه تکین تابع $f(z)$ که داخل $|z|=1$ قرار دارد) $= 2\pi j\left(\frac{1}{5!}\right) = \boxed{\frac{\pi j}{60}}$

ب)

$$\oint_{|z|=1+b}\frac{e^{az}}{(z-b)^n}dz = \oint_{|z|=3}\frac{e^{z}}{(z-2)^n}dz = ? \qquad n>1$$

$z-2=0 \Rightarrow \underbrace{z=2}$ $\longrightarrow$ $|z|=3$ داخل

قطب مرتبه n ام برای $f(z)$ است

محاسبه مانده

$$a_{-1} = \lim_{z\to 2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\cancel{(z-2)^n}\cdot\frac{e^z}{\cancel{(z-2)^n}}\right)^{(n)} = \lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(n-1)!} = \frac{e^2}{(n-1)!}$$

می‌دانیم: $(e^z)^{(n)} = e^z \Rightarrow \int_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi j\cdot\left(\frac{e^2}{(n-1)!}\right)$

4 (ج)

$$\int_0^\infty \frac{a\,dx}{(x^2+b^2)^{n+1}} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^{n+1}} \quad ; n>1$$

1) چند جمله‌ای p و q نسبت به هم اول باشند ✓

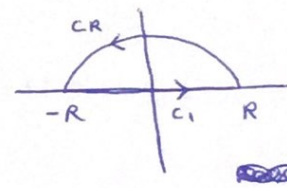
2) فقط $q(x)=0$ ریشه مختلط داشته باشد $\Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm 2j$ (مرتبه n+1)

3) درجه مخرج بیشتر از صورت باشد ✓

وقتی $R \to \infty$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{dz}{(z^2+4)^{n+1}} = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \cancel{\int_{C_R} f(z)\,dz}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$



$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi j\,(\text{مجموع مانده‌های قطب‌ها داخل نیم دایره به شعاع بی‌نهایت})$$

مخرج نقاط منفرد : $z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm 2j \Rightarrow$ تنها قطب قابل قبولی که داخل کانتور قرار دارد $Z=+2j$ است

(مرتبه n+1)

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j\left(\underset{\text{مرتبه } n+1}{\operatorname{Res}\{2j\}}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2j} f(z) = \lim_{z\to 2j} \frac{1}{(n+1-1)!}\left(\cancel{(z-2j)^{n+1}} \times \frac{1}{\cancel{(z-2j)^{n+1}}\cdot(z+2j)^{n+1}}\right)^{(n)} = \lim_{n\to 2j} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+2j)^{n+1}}\right)^{(n)}$$

+ .... time is limited !!!

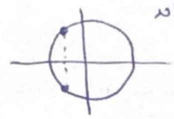
#4 (د)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+2\cos\theta}\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{jz}}{1+\cancel{2}\,\frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{j}\int \frac{dz}{z+z^2+1} \xrightarrow{\text{نقطه تکین}} z^2+z+1=0 \Rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{|z|=1}$$

$$\left|\frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

دایره واحد



هر دو نقطه داخل دایره
حساب می‌شوند

$$\text{Res}\ \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{z^2+z+1}\Big|_{z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} = \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{2z+1}\Big|_{z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} = \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{(-1+\sqrt{3}j)+1}$$

$$= \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}j} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{Res}\ \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{z^2+z+1}\Big|_{z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j} = \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{(-1-\sqrt{3}j)+1} = \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{-\sqrt{3}j} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+2\cos\theta}\, d\theta = 2\pi j \left(\text{مجموع مانده‌ها در نقاط تکین داخل ناحیه } |z|=1\right) = 2\pi j\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$