ML 3 تمرین 99109393 علیرضا حبیب‌زاده

.1

$$p(y=1|x) = \frac{1}{1+e^{-x^T w}}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} 1 & 80 & 18 \end{bmatrix} \quad , \quad w = \begin{bmatrix} -5 \\ 0.1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$x^T w = -5 + 8 + 4.5 = 7.5$$

$$\boxed{P = \frac{1}{1+e^{-7.5}} \approx 0.9994}$$

(1

$$x^T = \begin{bmatrix} 1 & t & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow x^T w = -5 + \frac{t_0}{10} + 4$$

$$= \frac{t}{10} - 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1+e^{-t/10+1}} \Rightarrow e^{-t/10+1} = \frac{1}{P_0} - 1$$

(2

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = 10\left[1 - \ln\left(\frac{1}{P_0} - 1\right)\right] = 10 \ln\left[\frac{e P_0}{1-P_0}\right] h}$$

$$\boxed{\approx 31.97\, h = 31:58'}$$

″ کاستی

که اگر $P_0 \to 1$ به بی‌نهایت میل می‌کند. (مطابق انتظار) (دلیلش آهسته)

.2

سوال فرض کرده داده‌های x یک بعدی هستند یعنی فقط x_i داریم و 1 :

$$x \cdot w_k = w_k^0 + x_i w_k^1$$

ولی ما حالت کلی را حل می‌کنیم که طول بردار X دلخواه است .

ضمنا سوال تعمیم یافته‌ی k حالته به این صورت نیست و این مدل ایراداتی دارد .
برای مثال در حالت دو حالته به مدل قبلی میل نمی‌کند . و در ضمن جنس هم ندارد .

$$\log p(Y|X) = \log \Big[\underbrace{\prod p(Y_i|X_i)}_{\text{استقلال نمونه ها}} \Big] = \mathcal{L}$$

$$= \sum \log p(Y_i|X_i) = \sum_{i=1}^{N} \log \left[\frac{e^{X_i \cdot W_{y_i}}}{\sum_{j=1}^{k} e^{X_i \cdot W_j}} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot W_{y_i} - \sum_{i=1}^{N} \log \sum_{J=1}^{K} e^{X_i \cdot W_J}$$

بردار ضرب های مربوط به داده‌های iام را می‌سازیم :

$$v_i = \begin{bmatrix} x_i^T w_1 \\ \vdots \\ x_i^T w_k \end{bmatrix}$$

و بردار Y هم نشان میدهد کدام j رخ داده :

$$Y_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$ خانه‌ی j_i ام

$$\Rightarrow Y_i^T v_i = x_i^T w_{y_i}$$

$$\Rightarrow L' = \sum_{i=1}^{N} Y_i^T v_i - \sum_{i=1}^{N} \log \sum_{j=1}^{k} e^{v_{ij}}$$

حال این‌ها را در ماتریس می‌کنیم :

$$Y = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{K \times N}$$

$$V \equiv \begin{bmatrix} x_1^T w_1 & \cdots & x_N^T w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^T w_K & \cdots & x_N^T w_K \end{bmatrix}_{K \times N}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{---} \; w_1^T \; \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \; w_K^T \; \text{---} \end{bmatrix}_{K \times d} \times \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_N \\ | & & | \end{bmatrix}_{d \times N}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K} Y_{ji} V_{ji} - \sum_{i=1}^{N} \log \sum_{j=1}^{K} e^{V_{ji}}$$

$$= tr[V^T Y] - \sum_{i=1}^{N} \log \sum_{j=1}^{K} e^{V^T_{ij}}$$

$$V^T = X^T W = \begin{bmatrix} \text{---} \; x_1^T \; \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \; x_N^T \; \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_K \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$f(x, w_1 \cdots w_K) = \mathcal{L} - \lambda \sum_{j=1}^{K} w_j^T w_j$$

(2

$$\frac{\partial f}{\partial w_j} = \frac{\partial L}{\partial w_j} - 2\lambda w_j$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial w_j}\right)^{l} = \sum_{i=1}^{N} Y_{ji} X_{li} - \sum_{i=1}^{N} \frac{e^{x_i \cdot w_j}}{\sum_{m=1}^{K} e^{V_{mi}}} X_{li}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial W} = X Y^T - X P^T = X (Y - P)^T$$

که اینجا حاصل مشتق یک ماتریس است. با جلو رفتن روی ستون ها W مورد مشتق عوض می‌شود و سطرها مولفه‌ی W را مشخص می‌کند.

دقت کنید ماتریس X را به این صورت تعریف کردیم:

$$X = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_N \\ | & & | \end{bmatrix}_{d \times N}$$

که اینجا P ماتریس احتمالات است:

$$P_{ij} = \frac{e^{x_j \cdot w_i}}{\sum_{m=1}^{K} e^{x_j \cdot w_m}}$$

نهایتا :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial W} = X(Y-P)^T - 2\lambda W}$$ 2)

که یک حالت ماتریسی است :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial W}}_{d\times k} = \underbrace{\underbrace{X}_{d\times N}\,\underbrace{(\underbrace{Y-P}_{k\times N})^T}_{N\times k}}_{d\times k} - 2\lambda \underbrace{W}_{d\times k}$$

3) مدل gradient descent ساده است :

$$W_{k'}^{(t+1)} = W_{k'}^{(t)} - \eta \left[\frac{\partial f}{\partial W}\right]_{k'}$$

ستون k' این ماتریس
که $d\times k$
است.

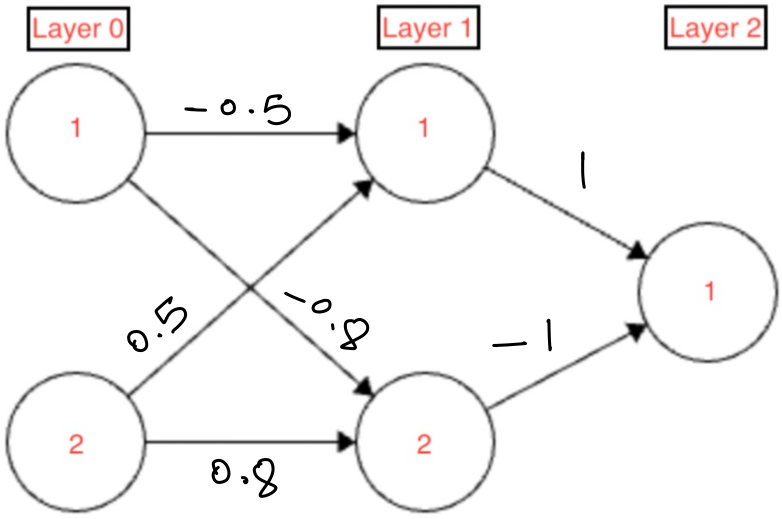
$$= W_{k'}^{(t)} - \eta\left[X\left(Y_{k'}^T - P_{k'}^T\right) - 2\lambda W_{k'}^{(t)}\right]$$

یا کل حالات W ها را به صورت ماتریسی :

$$\boxed{W^{(t+1)} = W^{(t)} - \eta\left[X(Y-P)^T - 2\lambda W^{(t)}\right]}$$ 3)

(همه update rule ها)

3.



$$Z_1^1 = -0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 + 0.1 = 0.2$$

$$Z_2^1 = -0.8 \times 0.4 + 0.8 \times 0.6 + 0.1 = 0.26$$

$$Z_1^2 = \sigma(0.2) - \sigma(0.26) + 0.2 = 0.167$$

1)

$$\hat{y} = a_1^2 = \sigma(z_1^2) = \sigma\left(\sigma(0.2) - \sigma(0.26) + 0.2\right) = \boxed{0.780}$$

$$\sigma(z) = Ln(1+e^z) = Ln\left(e^z(e^{-z}+1)\right)$$

$$= \boxed{z + Ln(1+e^{-z})}$$ 2)

3)

$$l = \frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 \Rightarrow \frac{\partial l}{\partial a_1^{(2)}} = (a_1^{(2)} - y)$$

همین هم خوب است

$$a_1^{(2)} = \sigma(z_1^{(2)}) \Rightarrow \frac{\partial a_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} = \frac{e^{z_1^{(2)}}}{1+e^{z_1^{(2)}}} = \frac{e^{z_1^{(2)}}}{e^{a_1^{(2)}}}$$

$$z_1^{(2)} = \sum W_{1k}^{(2)} a_k^{(1)} + b_2 \Rightarrow \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial W_{j,1}^{(2)}} = \delta_{j,1}\, a_1^{(1)}$$

از منظور سوال برعکس است : $(w_{1,j})$

$$\frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial W_{1,j}^{(2)}} = a_j^{(1)}$$

با مشتق زنجیره‌ای (یا همان الگوریتم انتشار به عقب) : (تنها یک مسیر داریم)

$$\frac{\partial \ell}{\partial W_{1,1}^{(2)}} = \frac{\partial \ell}{\partial a_1^{(2)}} \cdot \frac{\partial a_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} \cdot \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial W_{1,1}^{(2)}}$$

$$= (a_1^{(2)} - y)\, \frac{e^{z_1^{(2)}}}{1+e^{z_1^{(2)}}}\, a_1^{(1)}$$

$$= (0.78 - 1)\, \frac{e^{0.167}}{1+e^{0.167}} \cdot \sigma(0.2) = -0.095$$

14

$$W_{1,1}^{(2)\prime} = W_{1,1}^{(2)} - \eta \frac{\partial \ell}{\partial W_{1,1}^{(2)}} = 1 - 1 \times (-0.095) \boxed{= 1.095}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial W_{1,1}^{(1)}} = \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial a_1^{(2)}}}_{\checkmark} \cdot \underbrace{\frac{\partial a_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}}}_{\checkmark} \cdot \underbrace{\frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial a_1^{(1)}}}_{W_{1,1}^{(2)}} \cdot \underbrace{\frac{\partial a_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}}}_{e^{z_1^{(1)}}/1+e^{z_1^{(1)}}} \cdot \underbrace{\frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial W_{1,1}^{(1)}}}_{x_1}$$

$$= (0.78-1)\,\frac{e^{0.167}}{1+e^{0.167}}\cdot 1 \cdot \frac{e^{0.2}}{1+e^{0.2}}\cdot 0.4 = -0.026$$

$$W_{1,1}^{(1)'} = W_{1,1}^{(1)} - \eta\,\frac{\partial \ell}{\partial w_{1,1}^{(1)}} = -0.5 - 1\times(0.026)$$

$$\boxed{= -0.474}$$

(5