

به نام خدا



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

سررسید: ۲۱ مهرماه

پاییز ۱۴۰۲

## یادگیری ماشین

مدرس: مهدی جعفری

تمرین صفر: مروری بر جبرخطی و آمار و احتمال

- **سررسید پاسخ این تمرین ساعت ۵۹: ۲۳ روز ۲۱ مهرماه است.**
- این تمرین نظری است و بخش عملی ندارد.
- مهلت ارسال بخش نظری تمرین‌ها ۱۰ روز است و تاخیر مجاز ندارد.
- این تمرین به علت آن که پیش از ترمیم منتشر شده است، ۱۴ روز مهلت ارسال دارد.
- در صورت کشف تقلب، بار اول برای افراد درگیر تقلب، نمره‌ی همان سوال(های) خاص صفر در نظر گرفته می‌شوند. در صورت تکرار، نمره کل تمرین صفر در نظر گرفته می‌شود و در صورت تکرار، درس برای افراد حذف خواهد شد.
- تمامی پاسخ‌های خود را در یک فایل با فرمت (HW0-[SID]-[Fullname].zip (pdf) روی کوئرا قرار دهید.

## پرسش‌ها

### ۱ آمار و احتمال

#### ۱.۱ پرسش اول

با فرض آن که متغیرهای تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  توزیع یکنواخت  $Uniform(0, 1)$  دارند، متغیر تصادفی  $Y_n$  را به صورت  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$  تعریف می‌کنیم. امید ریاضی  $Y_n$  را به دست آورید.

#### ۲.۱ پرسش دوم

متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نمایی زیر است. مقدار  $a$  و واریانس و میانگین  $X$  را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{\frac{-x}{a}} & x \geq 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

#### ۳.۱ پرسش سوم

برای هر دو متغیر تصادفی دلخواه  $X$  و  $Y$  ثابت کنید:

۱.

$$\mathbb{E}_y[\mathbb{E}_x[X|Y]] = \mathbb{E}_x[X]$$

۲.

$$var[X] = \mathbb{E}[var[X|Y]] + var[\mathbb{E}[X|Y]]$$

#### ۴.۱ پرسش چهارم

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع زیر باشند. نشان دهید  $X - Y$  و  $\min(X, Y)$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

$$P(X = k) = P(Y = k) = pq^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad q = 1 - p$$

#### ۵.۱ پرسش پنجم

فرض کنید وزن بسته‌های شن می‌تواند با توزیع نرمال با میانگین  $22.8kg$  و انحراف معیار  $0.5kg$  مدل شود.

۱. احتمال آن که یک بسته‌ی تصادفی انتخاب شده وزن کمتر از  $25kg$  داشته باشد را به دست آورید.

۲. احتمال آن که یک بسته‌ی تصادفی انتخاب شده وزن بین  $25kg$  و  $26.5kg$  داشته باشد را به دست آورید.

۳. وزنی که ۷۵٪ بسته‌ها از آن سنگین‌تر هستند را به دست آورید (تا دو رقم اعشار).

## ۲ جبر خطی

### ۱.۲ پرسش اول

با فرض آنکه  $x$  و  $a$  بردارهای ستونی و  $A$  ماتریس مربعی باشد، موارد زیر را اثبات کنید:

$$1. \frac{da^T x}{dx} = a$$

$$2. \frac{dx^T Ax}{dx} = (A + A^T)x$$

$$3. \frac{dx^T A}{dx} = A^T$$

### ۲.۲ پرسش دوم

موارد زیر را اثبات کنید

۱. دترمینان ماتریس  $A$  برابر است با حاصل ضرب مقادیر ویژه ماتریس

۲.  $trace(A)$  برابر است با حاصل جمع مقادیر ویژه ماتریس

۳. مقادیر ویژه ماتریس  $A$  و  $A^T$  برابرند

۴. اگر  $\lambda$  مقدار ویژهی ماتریس  $A$  باشد،  $\lambda^k$  مقدار ویژهی ماتریس  $A^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) خواهد بود

### ۳.۲ پرسش سوم

فرض کنید ماتریس  $A$  یک ماتریس مربعی است و فرض کنید که  $\lambda_1$  تا  $\lambda_M$  مقادیر ویژه  $A$  و  $q_1$  تا  $q_M$  بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر باشند.

۱. نشان دهید اگر  $k$  تا از مقادیر ویژه متمایز باشند، در شرایطی که  $k \leq M$ ، آن‌گاه بردارهای ویژه متناظر مستقل خطی هستند.

۲. اگر در قسمت قبل، ماتریس  $A$  علاوه بر مربعی بودن، متقارن نیز باشد، آن‌گاه برای  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ثابت کنید که  $q_i$  بر  $q_j$  عمود است. ( $q_i$  و  $q_j$  بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_i$  و  $\lambda_j$  هستند).

### ۴.۲ پرسش چهارم

ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید

۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن را بدست آورید.

۲. تجزیهی مقادیر ویژهی ماتریس  $A$  را بدست آورید. یعنی  $A$  را به صورت  $P \Lambda P^{-1}$  بنویسید. بررسی کنید که  $P^{-1} = P^T$  است؟

۳. مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$$

## ۵.۲ پرسش پنجم

ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  در حالی که  $m \leq n$  و  $\text{Rank}(A) = m$  است را در نظر بگیرید. می‌دانیم تجزیه‌ی مقدار تکین به صورت  $A = U\Sigma V^T$  است. با داشتن این اطلاعات تجزیه‌ی مقدار تکین ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

۱.  $(A^T A)^{-1}$

۲.  $(A^T A)^{-1} A^T$

۳.  $A(A^T A)^{-1}$

۴.  $A(A^T A)^{-1} A^T$

موفق باشید