99109393 علیرضا حبیب زاده

## 1.1

ابتدا توزیع $Y_n$ را می‌یابیم : (توزیع تجمعی یا CDF)

$$P(Y_n < y) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} < y) = P(X_1 < y \cap \ldots X_n < y)$$

خاصیت max
(همه کمتر هستند)

$$= P(X_1<y)P(X_2<y)\ldots P(X_n<y)$$

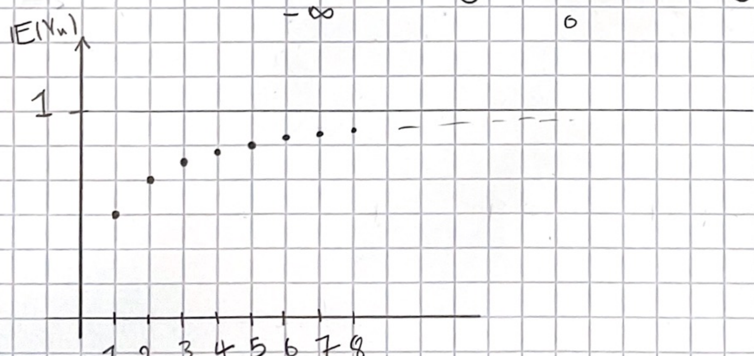
iid

$$= \left[\begin{cases} 1 & 1<y \\ y & 0<y\leq 1 \\ 0 & y\leq 0 \end{cases}\right]^n = \begin{cases} 1 & 1<y \\ y^n & 0<y\leq 1 \\ 0 & y\leq 0 \end{cases}$$

$$f_{(y)} = \frac{dP}{dy} = \begin{cases} ny^{n-1} & 0<y\leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

توزیع $Y_n$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(y)}\, y\, dy = \int_0^1 ny^{n-1}\, y\, dy = \frac{n}{n+1} y^{n+1}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{n}{n+1}}$$




## 1.2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(x)}\, dx = 1 = \int_0^{\infty} a e^{-x/2}\, dx = a e^{-x/2}(-2)\Big|_0^{\infty}$$

نرمال بودن توزیع

$$= 2a = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1/2}$$

I

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{2} e^{-x/2}\,dx \overset{*}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1/2)^2} = \boxed{2}$$

$*$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{-\partial/\partial\alpha} \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha^2} \xrightarrow{-\partial/\partial\alpha} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x}\,dx = \frac{2}{\alpha^3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$$

$$\langle X^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x/2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1/2)^3} = 8$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(x) = 8 - 2^2 = 4}$$

**1.3** $$\mathbb{E}_y\left[\mathbb{E}_x[X\mid Y]\right] = \mathbb{E}_y\left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx\right] \qquad (1)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad = \mathbb{E}_y\left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{x}{f_Y(y)} f_{XY}(x,y)\,dx\right]$$

$$\underset{\text{LOTUS طبق}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\cancel{f_Y(y)}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} x\, f_{XY}(x,y)\right] \cancel{f_Y(y)}\,dy$$

$$= \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} x\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \mathbb{E}_x(X)$$

مانند این است که داخل روی هر سطر (هر $y$) میانگین بگیریم سپس با وزن درست روی $y$ ها.

اگر هرکدام از $X$ یا $Y$ گسسته بوند کافی است قرار دهیم:

$$f_X(x) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k)\, P_{(X=k)}}_{\text{دلتای دیراک}} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

پس قضیه برای گسسته ها هم برقرار است.

II

(*) $\mathbb{E}[Var(X|Y)] = \mathbb{E}\left(\int_x x^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx - \left(\int_x x f_{X|Y}(x|y)\,dx\right)^2\right)$ ②

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$

$= \mathbb{E}_y\left(\dfrac{1}{f_Y(y)}\int_x x^2 f_{XY}(x,y)\,dx - \left(\int_x x\dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\right)^2\right)$

$= \underbrace{\int_y \frac{1}{\cancel{f_Y(y)}}\int_x x^2 f_{XY}(x,y)\,dx\,\cancel{f_Y(y)}\,dy}_{\langle x^2\rangle} - \int_y\left(\int_x x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\right)^2 f_Y(y)\,dy$

---

(**) $Var[\mathbb{E}[X|Y]] = Var\Big[\underbrace{\int_x x\frac{f_{XY}(x|y)}{f_Y(y)}\,dx}_{g(y)}\Big]$

$= \langle g(y)^2\rangle - \langle g(y)\rangle^2$

$= \int_y\left(\int_x x\frac{f_{XY}(x|y)}{f_Y(y)}\,dx\right)^2 f_Y(y)\,dy - \Big(\underbrace{\int_y\int_x x\frac{f_{XY}(x|y)}{\cancel{f_Y(y)}}\,dx\,\cancel{f_Y(y)}\,dy}_{\langle x\rangle}\Big)^2$

(*), (**) $\Rightarrow \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y)) = \langle x^2\rangle$

$\cancel{- \int_y\left(\int_x x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\right)^2 f_Y(y)\,dy} + \cancel{\int_y\left(\int_x x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\right)^2 f_Y(y)\,dy}$

$- \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = Var(X)$

1.4
$\frac{}{7}$

$Z := \min(X,Y) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$P(Z < z) = P(\min(X,Y) < z) \not\equiv P(X < z, Y < z)$

$\overset{iid}{=} P(X<z)\, P(Y<z) = P^2(X<z)$ (تقارن بین توزیع ها)

$P(X<z) = \sum_0^{z-1} pq^k = p(1 + \text{——} + q^{z-1}) = \frac{p}{1-q}(1-q^z) = 1-q^z$

$A = 1 + \text{——} + q^{z-1}$

$qA = q + \text{——} q^z$

$A = \frac{1-q^z}{1-q}$

$\Longrightarrow P(\min(X,Y) < z) = (1-q^z)^2$

---

$P(Z = z) = P(Z < z+1) - P(Z<z)$

$\min(X,Y)$

$= (1-q^{z+1})^2 - (1-q^z)^2 = (q^z - q^{z+1})(2-q^z-q^{z+1})$

$= pq^z(2-q^z-q^{z+1})$

---

$W := X - Y \in \mathbb{Z}$

$P(W=w) = P(X-Y=w)$ اگر $w > 0$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P(X = w+y)\, P(Y=y)$

$= \sum pq^{w+y} \cdot pq^y = p^2 q^w \sum_0^{\infty} (q^2)^y = \frac{p^2 q^w}{1-q^2}$

$= \frac{pq^w}{1+q} \Longrightarrow P(W=w) = \frac{pq^{|w|}}{1+q}$ در حالت کلی چون X و Y متقارن اند

---

$\sum_{-\infty}^{+\infty} P(W=w) = 2\sum_0^{\infty} P(W=w) - P(W=0)$ : جهت اطمینان خاطر

$= 2\frac{p}{1+q}\sum_0^{\infty} q^w - \frac{p}{1+q} = \frac{p}{1+q}\left(\frac{2}{1-q} - 1\right) = \frac{\cancel{p}}{\cancel{1+q}} \cdot \frac{\cancel{1+q}}{\cancel{1-q}}$

$= 1$ ✓

IV

$$P(\min(X,Y)=z,\ X-Y=w) \qquad w \geqslant 0 \quad \text{فرض}$$

$$= P(Y=z,\ X=Y+w)$$

$$= P(Y=z,\ X=z+w) = pq^{z} \cdot pq^{z+w}$$

پس درحالت کلی با توجه به تقارن $X$ و $Y$ با تبدیل $w \to -w$ :

$$P(\min(X,Y)=z,\ X-Y=w) = p^{2}q^{2z+|w|} \qquad ④$$

---

$$Z := \min(X,Y) \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$P(Z \geqslant z) = P(\min(X,Y) \geqslant z) = P(X \geqslant z,\ Y \geqslant z)$$

$$\overset{i.i.d}{=} \left[P(X \geqslant z)\right]^{2} = \left[\sum_{k=z}^{\infty} pq^{k}\right]^{2} = q^{2z}$$

$$A = q^{z} + q^{z+1} + \cdots$$

$$qA = q^{z+1} + \cdots$$

$$A(\underbrace{1-q}_{p}) = q^{z} \Rightarrow A = \frac{q^{z}}{p}$$

$$P(Z=z) = P(Z \geqslant z) - P(Z \geqslant z+1)$$

$$= q^{2z} - q^{2(z+1)} = q^{2z}(1-q^{2}) = pq^{2z}(1+q)$$

---

$$P(Z=z)P(W=w) = pq^{2z}\cancel{(1+q)}\,\frac{pq^{|w|}}{\cancel{1+q}} = p^{2}q^{2z+|w|} \qquad ④$$

$$= P(Z=z,\ W=w) \qquad \blacksquare$$

مقصود قضیه این است که دو سکه یکسان را می‌اندازیم. فاصله‌ی بین اولین شیرها و زودترین شیر از هم مستقل است که البته از نظر من بدیهی نیست ولی به هرحال صراحتاً اثبات شد :

WGR

**1.5** $f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\sigma = 0.5\ kg$

$\mu = 22.8\ kg$

1. $P = \int_{-\infty}^{25kg} f_W(w)\,dw = 0.9999946 = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{25-22.8}{0.5\sqrt{2}}\right)\right)$

2. $P = \int_{25kg}^{26.5kg} f_W(w)\,dw = \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{26.5-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{25-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$

$= 5.4 \times 10^{-6}$

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-t^2}\,dt \qquad t = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{a-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\int_{w_0}^{\infty} f_W(w)\,dw = 0.75 \Rightarrow \int_{-\infty}^{w_0} f_W(w)\,dw = 0.25$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{w_0-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] = 0.25$$

$$\Rightarrow \mathrm{erf}\left(\frac{w_0-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) = -0.5 \Rightarrow w_0 = \mu + \sqrt{2}\sigma\,\mathrm{erf}^{-1}(-0.5)$$

$$= 22.46\ kg$$

---

**2.1** 1. $a^T x = \sum_i a_i x_i \qquad \frac{d a^T x}{d x_j} = \frac{d}{d x_j}\sum_i a_i x_i$

$$= \sum_i a_i \frac{d}{dx_j} x_i = \sum a_i \delta_{ij} = a_j \Longrightarrow \frac{d}{dx} a^T x = a$$

j دلخواه بود

VI

2. $x^T A x = \sum_i \sum_j x_i A_{ij} x_j$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \sum_j x_i A_{ij} x_j = \sum_i \sum_j \delta_{ik} A_{ij} x_j + \sum_i \sum_j x_i A_{ij} \delta_{jk}$$

$$= \sum_j A_{kj} x_j + \sum_i A^T_{ki} x_i = (Ax + A^T x)_k$$

$$\Rightarrow \frac{d x^T A x}{dx} = (A + A^T) x$$

3. مشتق از جنس بردار نسبت به بردار است. طبق تعریف مشتق نسبت به بردار که همان گرادیان است، تغییر ستون، همان تغییر مولفه‌ی مشتق‌گیری است.

$$(x^T A)_j = \sum_i x_i A_{ij} \qquad \left(\frac{d x^T A}{dx}\right)_{jk} = \frac{\partial (x^T A)_j}{\partial x_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i x_i A_{ij} = A_{kj} \qquad \Rightarrow \frac{d x^T A}{dx} = A^T$$

---

2.2 1. معادله‌ی ویژه مقدار را تشکیل می‌دهیم:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I) x = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

این که چند جمله‌ای برحسب $\lambda$ است که می‌توان آن را به صورت ضرب ریشه‌ها نوشت:

$$|A - \lambda I| = \alpha (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \text{ --- } (\lambda - \lambda_n)$$

درنتیجه $\lambda$ ها چندجمله‌ای مشخصه به n ریشه تجزیه می‌شود. (باید دقت کنیم که در حالت کلی هم ویژه مقادیر مضاعف با توان اضافه در ضرب لحاظ شوند)

$\alpha$ را میتوان با ضریب $\lambda^n$ در دو طرف یافت:

$$|A-\lambda I| = \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

تنها یک جمله در det هست که $\lambda^n$ دارد و آن ضرب قطر است:

$$(A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) \cdots (A_{nn}-\lambda) \xrightarrow[\text{ضریب } \lambda^n]{} (-1)^n$$

$$|A-\lambda I| = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

در دو طرف قرار میدهیم $\lambda = 0$ :

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$$

2. در همان تساوی قبلی ضریب $\lambda^{n-1}$ را بررسی میکنیم. (چون به ازای همه‌ی $\lambda$ ها برقرار است ضریب هر یک از توان ها باید یکی باشد)

در det ماتریس $A-\lambda I$ باید $n-1$ جمله از قطر انتخاب شوند تا $\lambda$ داشته باشند.

اگر جمله کجعی از قطر انتخاب نشود حاصل صفر خواهد شد چون در $\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}$ که $a_i$ شماره سطر است سطر تکراری خواهیم داشت. پس همه‌ی جملات از قطر است.
(تنها جمله ای که $\lambda^{n-1}$ دارد از جمله‌ی حاصل از ضرب عناصر قطری است)

$$(A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) \cdots (A_{nn}-\lambda)$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } \lambda^{n-1}} (-1)^{n-1}(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}) = (-1)^{n-1}\, tr(A)$$

حال در سمت راست:

$$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda) \cdots (\lambda_n-\lambda)$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } \lambda^{n-1}} \cancel{(-1)^{n-1}}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n) = \cancel{(-1)^{n-1}}\, tr(A)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{1}^{n} \lambda_i = tr(A)}$$

VIII

از این قضیه استفاده می‌کنیم که $\det(B) = \det(B^T)$ B دلخواه مربعی

و $(\lambda I)^T = \lambda I$

$$Q_1(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$Q_2(\lambda) = \det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - (\lambda I)^T)$$
$$= \det((A - \lambda I)^T)$$
$$= \det(A - \lambda I) = Q_1(\lambda)$$

پس چند جمله‌ای که ریشه‌های آن ویژه مقادیر A است با چند جمله‌ای که ریشه‌های آن ویژه مقادیر $A^T$ است برابراند، پس این دو مجموعه با هم برابراند.

4. $\lambda$ یک ویژه بردار دارد که آن را $x$ می‌نامیم. مطابق تعریف:

$$Ax = \lambda x$$

حال ثابت می‌کنیم $x$ ویژه بردار $A^k$ نیز هست:

$$A^k x = A^{k-1}(Ax) = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda A^{k-1} x$$
$$= \lambda A^{k-2}(Ax) = \lambda A^{k-2}(\lambda x) = \lambda^2 A^{k-2} x$$
$$\vdots$$
$$= \lambda^k x$$

پس $x$ ویژه بردار $A^k$ نیز هست و از قضا ویژه مقدار متناظر آن $\lambda^k$ است.

---

2.3. 1. فرض خلف می‌کنیم که مستقل خطی نباشند. در آن صورت مجموعه‌ی با بیشترین عضو از این بردار ویژه‌های متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز که مستقل خطی هستند را پیدا می‌کنیم و مرتب می‌کنیم. (با فرض well_ordering): عضو بعدی را می‌توان بر حسب این‌ها نوشت.

اگر این مجموعه همه‌ی k تا باشد که تمام است. اگر نباشد حداقل یک بردار هست که مانده:

$$\sum_{1}^{j} \alpha_i q_i = q_m \quad \xrightarrow[A]{\text{ضرب}} \quad \sum \alpha_i A q_i = A q_m$$

$$\sum_{1}^{j} \alpha_i \lambda_i q_i = \lambda_m q_m = \lambda_m \sum_{1}^{j} \alpha_i q_i$$

$$\Longrightarrow \sum_{1}^{j} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0} q_i = 0 \quad \times$$

تناقض است چون فرض کرده بودیم $\{q_1, \dots, q_j\}$ مستقل خطی هستند اما ضرایب ناصفری $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ (به دلیل تمایز) پیدا شدند که این جمع را صفر کنند.

تنها حالت ممکن این است که این مجموعه ماکسیمال خود $\{q_1, \dots, q_k\}$ باشد و بردار اضافی نداشته باشیم.

2. $(Aq_i)^T q_j = (\lambda_i q_i)^T q_j = \lambda_i (q_i^T q_j)$

$$= q_i^T A^T q_j \underset{A = A^T}{=} q_i^T A q_j = q_i^T \lambda_j q_j$$

$$= \lambda_j (q_i^T q_j)$$

$$\Longrightarrow \lambda_i (q_i^T q_j) = \lambda_j (q_i^T q_j) \Longrightarrow \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} \underbrace{q_i^T q_j}_{= 0} = 0$$

$$\Longrightarrow q_i^T q_j = 0 \Longrightarrow q_i \perp q_j$$

---

2.4 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\quad A\vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow (A - I\lambda)\vec{x} = 0, \quad \vec{x} \neq 0$

$$|A - I\lambda| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1/2)\lambda - 1/2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1/2) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1/2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

یا هر ضریب ناصفری از این‌ها

نرمالایز شده:

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

X

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{1+2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & \cancel{2-2}^{\,0} \\ \cancel{1-1}^{\,0} & \overset{3}{\cancel{2+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq P^{-1}$$ خیر تساوی برقرار نیست.

$$\cancel{A^k = (P\Lambda P^{-1})^k = (P\Lambda \cancel{P^{-1}})(\cancel{P}\Lambda P^{-1}) \cdots \cancel{\ }(P\Lambda P^{-1})}$$
$$\cancel{= P\Lambda^k P^{-1}}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Lambda$

$$P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} = A \checkmark$$

3. $A^k = (P\Lambda P^{-1})^k = (P\Lambda \cancel{P^{-1}})(\cancel{P}\Lambda \cancel{P^{-1}}) \cdots (\cancel{P}\Lambda \cancel{P^{-1}})(\cancel{P}\Lambda P^{-1})$

$$= P\Lambda^k P^{-1}$$

$$\implies \lim_{k\to\infty} A^k = P \lim_{k\to\infty} A^k P^{-1} = P \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}^k P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & \\ & b^k \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = P \begin{bmatrix} \overbrace{\lim_{k\to\infty} 1^k}^{1} & \\ & \underbrace{\lim_{k\to\infty} (-1/2)^k}_{0} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} =$$

$$= 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

2.5 1 $\cancel{A^T = (U\Sigma V^T)^T = V^{T^T} \Sigma^T U^T = V \Sigma U^T}$

$$\cancel{(A^TA)^{-1} = (V\Sigma \cancel{U^T} \cdot U \Sigma V^T)^{-1} = (V\Sigma^2 V^T)^{-1} = \underbrace{V^{T^{-1}}}_{V} \Sigma^{2^{-1}} \underbrace{V^{-1}}_{V^T}}$$

$$A_{n\times m} = U_{n\times n} \Sigma_{n\times m} V^T_{m\times m}$$

1 $A^T = V \Sigma^T U^T \longrightarrow A^TA = V\Sigma^T \underbrace{\cancel{U^T U}}_{I} \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$

$$(A^TA)^{-1} = (V\Sigma^T\Sigma V^T)^{-1} = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1} V^T \qquad V^{-1} = V^T,\ V^{T^{-1}} = V$$

$$\underset{m \leq n}{\Sigma_{n\times m}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \\ & 0_{n-m\times m} & \end{pmatrix} \Longrightarrow \Sigma^T \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_m^2)$$

$$(\Sigma^T \Sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m^2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_m^2}\right)$$

$$(A^T A)^{-1} = \underbrace{V_{m \times m}}_{U' = V} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{V_{m \times m}^T}_{V' = V} = U' \Sigma' V'^T$$

$\sigma_i'$ ها همان $\Sigma'_{ii}$ هستند $1 \leqslant i \leqslant m$

② $(A^TA)^{-1}A^T = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\underbrace{\cancel{V^T V}}_{I}\Sigma^T U^T$

$$= V \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0_{m\times n-m} \\ & & \sigma_m & \end{bmatrix}_{m\times n} U^T$$

$$= V \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \ddots & & 0_{m\times n-m} \\ & & \frac{1}{\sigma_m} & \end{bmatrix} U^T = U'\Sigma'V'^T$$

$$U' = V, \quad V' = U, \quad \Sigma' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \ddots & & 0_{m\times n-m} \\ & & \frac{1}{\sigma_m} & \end{bmatrix}$$

③ $A(A^TA)^{-1} = U\Sigma\cancel{V^T V}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^T = U\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^T$

$$= U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \\ & 0_{n-m\times m} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m^2 \end{bmatrix} V^T = U \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m \\ & 0_{n-m\times m} & \end{bmatrix} V^T$$

$$= U'\Sigma'V'^T \implies U' = U, \; V' = V, \; \Sigma' = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m \\ & 0_{n-m\times m} & \end{bmatrix}$$

④ $A(A^TA)^{-1}A^T = U\Sigma\cancel{V^T V}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\cancel{V^T V}\Sigma^T U^T$

$$= U\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T U^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \\ & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_m & \end{bmatrix} U^T = U \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_m \\ & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_m & \end{bmatrix} U^T$$

XIV

$$= U \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} U^T = \underbrace{U}_{U' = U} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n-m} \\ 0_{n-m\times m} & 0_{n-m\times n-m} \end{bmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{U^T}_{V' = U}$$

$$= U'\Sigma'V'^T$$