آمار و احتمال: پرسش اول

$$F_Y(y) = Pr\{Y \leq y\} = Pr\{\max(X_1, \dots, X_n) \leq y\}$$

$$= Pr\{X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y\}$$

$$\overset{\text{استقلال}}{=} Pr\{X_1 \leq y\} Pr\{X_2 \leq y\} \cdots Pr\{X_n \leq y\}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y^n & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} ny^{n-1} & 0 < y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 n y^n\, dy = \frac{n}{n+1} y^{n+1} \Big]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

آمار و احتمال : پرسش دوم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \rightarrow \int_0^{\infty} a e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 1 \rightarrow a\left[-2e^{-x/2}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\rightarrow 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} x e^{-x/2}\,dx \underset{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{1}{2}\left(-2xe^{-x/2}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-2)e^{-\frac{x}{2}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\left[-2e^{-x/2}\right]_0^{\infty}\right) = \boxed{2}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x/2}\,dx \underset{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{1}{2}\left[-2x^2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{\infty} - \int(-2)(2)e^{-x/2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\underbrace{\int x e^{-x/2}\,dx}_{\text{به طور مشابه قبل} = 4}\right] = 8$$

$$\rightarrow Var(X) = 8 - 2^2 = \boxed{4}$$

پرسش سوم (آمار و احتمال)

۱) می‌دانیم $E[X|Y]$ تابعی از Y است:

$$\phi(y) = E[X|y]$$

$$\rightarrow E\big[E[X|Y]\big] = E[\phi(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx\right)}_{\phi(y)} dy$$

$$f_Y(y) f_{X|Y}(x|y) = f(x,y) \leftarrow \text{می‌دانیم}$$

$$\rightarrow E\big[E[X|Y]\big] = \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)}_{f(x,y)}\,dy\right)}_{= f_X(x)} dx = E[X]$$

۲) $$Var(X|Y) = E[X^2|Y] - \big(E[X|Y]\big)^2 \quad \text{(طبق تعریف واریانس)}$$

$$, Var\big(E[X|Y]\big) = E\big[E[X|Y]^2\big] - \Big(E\big[E[X|Y]\big]\Big)^2$$

$$\rightarrow E\big[Var(X|Y)\big] + Var\big(E[X|Y]\big)$$

$$= E\big[E[X^2|Y]\big] - \cancel{E\big[E[X|Y]^2\big]} + \cancel{E\big[E[X|Y]^2\big]} - \Big(E\big[E[X|Y]\big]\Big)^2$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2 = Var(X)$$

قسمت ۱ سوال

پرسش چهارم (آمار و احتمال) .

$Z=\min(X,Y)\ ,\quad W=X-Y$

$\rightarrow$ کافیست ثابت کنیم : $P\{Z=k,\ W=m\}=P\{Z=k\}P\{W=m\}$

$$P\{Z=k,W=m\}=P\{\min(X,Y)=k,\ X-Y=m\}\qquad \begin{matrix} k=0,1,\dots \\ m=0,\pm1,\pm2,\dots \end{matrix}$$

$$=P\{Z=k,\ W=m,\ X\geq Y\}+P\{Z=k,\ W=m,\ X<Y\}$$

$$=P\{Y=k,\ X=k+m,\ \underbrace{X\geq Y}_{m\geq 0}\}+P\{X=k,\ Y=k-m,\ \underbrace{X<Y}_{m<0}\}$$

$$\rightarrow P\{Z=k,\ W=m\}=\begin{cases} P\{X=k+m,\ Y=k\} & m\geq 0 \\ P\{X=k,\ Y=k-m\} & m<0 \end{cases}$$

$$\overset{X,Y\ \text{مستقل}}{=}\begin{cases} P\{X=k+m\}P\{Y=k\} & m\geq 0 \\ P\{X=k\}P\{Y=k-m\} & m<0 \end{cases}$$

$$\rightarrow P\{Z=k,\ W=m\}=\begin{cases} p^2q^{2k+m} & m\geq 0 \\ p^2q^{2k-m} & m<0 \end{cases}=\boxed{p^2q^{2k+|m|}}\quad (k\geq 0)$$

$$P\{Z=k\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}P\{Z=k,W=m\}=p^2q^{2k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{|m|}=p^2q^{2k}\frac{(1+q)}{\underbrace{(1-q)}_{p}}=p(1+q)q^{2k}$$

$$P\{W=m\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{Z=k,W=m\}=p^2q^{|m|}\sum_{k=0}^{\infty}(q^2)^k=p^2q^{|m|}\frac{1}{1-q^2}=pq^{|m|}\frac{1}{1+q}$$

$$\rightarrow P\{Z=k\}P\{W=m\}=p(1+q)q^{2k}\cdot pq^{|m|}\frac{1}{1+q}=p^2q^{2k+|m|}=P\{Z=k,\ W=m\}$$

$\boxtimes$

پرسش پنجم (آمار و احتمال):

1) $X \sim N(22{,}8,\ 0{,}25)$

$$P(X \le 25) = \int_{-\infty}^{25} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 0{,}5}\, e^{\frac{-(x-22{,}8)^2}{2\times 0{,}25}}\, dx = \overset{\text{CDF}}{F_X(25)}$$

تغییر متغیر: $\frac{x-22{,}8}{0{,}5} = u \rightarrow \int_{-\infty}^{4.4} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-u^2}{2}}}_{N(0,1)}\, du = \phi(4.4) \simeq 0.99999459$

استفاده از جدول

2) $P(25 < X \le 26.5) = F_X(26.5) - F_X(25)$

$$\overset{\text{به طور مشابه}}{=} \phi\left(\frac{26.5-22{,}8}{0.5}\right) - \phi\left(\frac{25-22{,}8}{0.5}\right)$$

$$\simeq 1 - 0{,}99999459 = 0{,}00000541$$

3) هنگامی که 75% از بسته‌ها از آن سنگین‌تر هستند، یعنی 25% از آن سبک‌تر هستند. بنابراین از روی جدول مقدار z متناظر با 25% را بدست می‌آوریم که تقریباً برابر با 0,67- است. حال داریم:

$$-0{,}67 = \frac{x-22{,}8}{0{,}5} \rightarrow x = 22{,}8 - 0{,}335 = \boxed{22{,}465}$$

جبرخطی: پرسش اول

1) $a^T x = \sum a_i x_i \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \frac{d a^T x}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a^T x}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a^T x}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum a_i x_i}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \sum a_i x_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \quad \blacksquare$$

---

2) $x^T A x = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$\frac{d x^T A x}{dx} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial x^T A x}{\partial x_k} \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow$$

برای سطر k ام محاسبات را نشان می‌دهیم

$$\frac{\partial x^T A x}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i$$

$$= \underbrace{[a_{k1}\; a_{k2} \cdots a_{kn}]}_{\text{سطر k ام ماتریس A}} x + \underbrace{[a_{1k}\; a_{2k} \cdots a_{nk}]}_{\text{ترانهاده ستون k ام ماتریس A}} x$$

$$\rightarrow \frac{d x^T A x}{dx} = \begin{bmatrix} (\text{سطر اول A}) + (\text{ترانهاده ستون اول A}) \\ \vdots \\ (\text{سطر n ام A}) + (\text{ترانهاده ستون n ام A}) \end{bmatrix} x$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \text{سطر اول A} \\ \vdots \\ \text{سطر n ام A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ترانهاده ستون اول A} \\ \vdots \\ \text{ترانهاده ستون n ام A} \end{bmatrix} \right) x$$

$$= (A + A^T) x \quad \blacksquare$$

3) $x^T A = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1} \; \cdots \; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}}_{\text{ترم jام}} \; \cdots \right]$

$$\frac{dx^T A}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum x_i a_{i1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \sum x_i a_{i1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sum x_i a_{in} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \sum x_i a_{in} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{bmatrix} = A^T$$

(جواب A نیز درست است، زیرا ماتریس ژاکوبین به هر دو طریق سطری و ستونی نوشته می‌شود)

پرسش دوم (جبر خطی) :

۱) چندجمله‌ای مشخصه را در نظر بگیرید :

$$P(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$$

$$\left.\begin{aligned}P(0)&=c_0=|0I-A|=|-A|=(-1)^n|A|\\ P(0)&=c_0=(0-\lambda_1)\cdots(0-\lambda_n)=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow |A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$$

۲) راه اول : همان چندجمله‌ای مشخصه قسمت قبل را در نظر بگیرید، c_{n-1} را به دو طریق حساب می‌کنیم :

$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)\longrightarrow$ به دنبال ضریب λ^{n-1} هستیم

ضریب λ^{n-1} : $-\lambda_1\lambda^{n-1}-\lambda_2\lambda^{n-1}-\cdots-\lambda_n\lambda^{n-1}=\underbrace{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}_{c_{n-1}}\lambda^{n-1}$

از طرفی: $P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$

برای محاسبه این دترمینان، $n!$ ترم داریم که یکی از آنها $(\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ است، بقیه ترم‌ها حداکثر $n-2$ عضو از قطر اصلی دارند، که در تولید ضریب λ^{n-1} نقشی نخواهند داشت. بنابراین ضریب λ^{n-1} (همان c_{n-1}) خواهد بود:

$$-a_{11}\lambda^{n-1} - a_{22}\lambda^{n-1} - \cdots - a_{nn}\lambda^{n-1} = -\underbrace{(a_{11} + \cdots + a_{nn})}_{c_{n-1}}\lambda^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{trace}(A) \quad \blacksquare$$

راه دوم: از تجزیه مقادیر تکین A استفاده می‌کنیم:

$$A = Q \Lambda Q^{-1} \Rightarrow Q^{-1} A Q = \Lambda$$

$$\Rightarrow \mathrm{trace}(\Lambda) = \mathrm{trace}(Q^{-1} A Q) = \mathrm{trace}(Q Q^{-1} A) = \mathrm{trace}(A)$$

$$= \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

۳)

$$\det(\lambda I - A) = \det\left((\lambda I - A)^T\right) = \underbrace{\det(\lambda I - A^T)}_{}$$

دترمینان یک ماتریس با ترانهاده آن برابر است

چندجمله‌ای مشخصه A^T

$\leftarrow$ A و A^T چندجمله‌ای های مشخصه یکسانی دارند، بنابراین مقادیر ویژه یکسانی خواهند داشت.

۴) فرض کنید بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ، q باشد. آنگاه داریم:

$$Aq = \lambda q \rightarrow A^{k-1}Aq = \lambda A^{k-1}q = \lambda^2 A^{k-2}q = \cdots = \lambda^k q \qquad (A^0 = I)$$

$$\rightarrow A^k q = \lambda^k q \rightarrow$$ λ^k مقدار ویژه A^k است

پرسش سوم (جبر خطی) :

۱) بدون از دست رفتن کلیت بحث فرض کنید λ_1 تا λ_k متمایزند، ثابت می‌کنیم q_1 تا q_k مستقل خطی هستند. باید ثابت کنیم اگر $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i = 0$ آنگاه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

می‌نویسیم :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i = 0 \xrightarrow[\text{و استفاده از خاصیت ۴ پرسش قبل (پرسش دوم)}]{\text{از طرف چپ در } A^n} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{A^n q_i}_{\lambda_i^n q_i} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i^n q_i = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

← به چشم معادلاتی برحسب α_i، هرچه بخواهیم معادله داریم (و تنها جواب $\forall i : \alpha_i = 0$ خواهد بود)

← اثبات دقیق : معادله را برای $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \alpha_1 q_1 & \alpha_2 q_2 & \dots & \alpha_k q_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} S = 0 \qquad (*)$$

که در آن :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Vandermonde}]{\text{ماتریس}} \det(S) = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

با فرض متمایز بودن λ_1 تا λ_k ، $\det(S) \neq 0 \Rightarrow S^{-1}$ وجود دارد ← طرفین (*) ضرب در S^{-1}

$$[\alpha_1 q_1, \dots, \alpha_k q_k] = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \qquad \square$$

۲)

$$Aq_i = \lambda_i q_i \xrightarrow[q_j^T]{\text{از چپ در}} q_j^T A q_i = \lambda_i q_j^T q_i \quad ①$$

$$Aq_j = \lambda_j q_j \xrightarrow[q_i^T]{\text{از چپ در}} q_i^T A q_j = \lambda_j q_i^T q_j$$

$$\xrightarrow[A^T = A \text{ و استفاده از}]{\text{از طرفین transpose}} q_j^T A q_i = \lambda_j q_j^T q_i \quad ②$$

$$①, ② \rightarrow \lambda_i q_j^T q_i = \lambda_j q_j^T q_i \rightarrow \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} q_j^T q_i = 0$$

$$\rightarrow q_j^T q_i = 0 \quad \boxtimes$$

پرسش چهارم (جبر خطی):

۱)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{-1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \tfrac{1}{2}) - (-1)(\tfrac{-1}{2})$$

$$= \cdots = (\lambda - 1)(\lambda + \tfrac{1}{2}) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

مقادیر ویژه

$$q = \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix}$$

$$Aq_1 = (1) q_1 \rightarrow \begin{bmatrix} q_b \\ \frac{1}{2}(q_a + q_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix} \rightarrow q_a = q_b \rightarrow q_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

$$Aq_2 = (\tfrac{-1}{2}) q_2 \rightarrow \begin{bmatrix} q_b \\ \frac{1}{2}(q_a + q_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} q_a \\ \frac{-1}{2} q_b \end{bmatrix} \rightarrow q_b = \frac{-1}{2} q_a \rightarrow q_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad (\alpha_2 \neq 0)$$

بردارهای ویژه

۲)

$$A[q_1\ q_2] = A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix} = [\lambda_1 q_1\ \ \lambda_2 q_2] = [q_1\ q_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}}_{\Lambda}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

P^{-1} با P^T برابر نیست ؛
این ویژگی فقط وقتی که ماتریس A متقارن
باشد درست است.

۳)

$$A^k = (P\Lambda P^{-1})^k = P\Lambda \underbrace{P^{-1}P}_{I}\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^k & 0\\ 0 & (-1/2)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$P^{-1} = \frac{-2}{3}\begin{bmatrix}-1/2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3 & 2/3\\ 2/3 & \frac{-2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = 0 \rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

پرسش پنجم (جبرخطی):

۱) توجه شود که چون A، full rank است، آنگاه A^TA حتماً وارون‌پذیر است.

$$A = U\Sigma V^T \longrightarrow$$

طبق تعریف می‌دانیم که U و V، orthogonal هستند. یعنی $U^T = U^{-1}$, $V^T = V^{-1}$

$$\rightarrow A^TA = (V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) \underset{U^TU = I}{=} V(\Sigma^T\Sigma)V^T$$

$$\Sigma^T\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_m^2) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

در نتیجه $V(\Sigma^T\Sigma)V^T$، تجزیه مقدار تکین A^TA می‌باشد.

$$(A^TA)^{-1} = V^T(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^T$$

$$(\Sigma^T\Sigma)^{-1} = \operatorname{diag}(\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \ldots, \sigma_m^{-2}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

اما دقت شود که در تجزیه مقدار تکین، مقادیر تکین باید به صورت نزولی باشند در حالی که $(\Sigma^T\Sigma)^{-1}$ به صورت صعودی قرار دارند

حل مشکل صعودی بودن: ماتریس P با مقادیر ۱ در قطر مخالف و ۰ در بقیه المان‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$P \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow P^T = P, \quad P^TP = I = PP$$

$$\rightarrow (A^TA)^{-1} = VPP(\Sigma^T\Sigma)^{-1}PPV^T = \boxed{(VP)(P(\Sigma^T\Sigma)^{-1}P)(VP)^T} \rightarrow$$

تجزیه مقدار تکین $(A^TA)^{-1}$

$$, \; P(\Sigma^T\Sigma)^{-1}P = \operatorname{diag}(\sigma_m^{-2}, \sigma_{m-1}^{-2}, \ldots, \sigma_1^{-2})$$

نزولی است

$VP \longrightarrow$ orthogonal (واضح)

(۲

$$(A^TA)^{-1}A^T = \left(V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^T\right)\left(V\Sigma^TU^T\right) = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^TU^T$$

$$(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_m^{-1}) \in R^{m\times n} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_m^{-1} & \end{array}\right]$$

(که باز هم به صورت صعودی است، از تکنیک قبلی استفاده می‌کنیم

$$(A^TA)^{-1}A^T = (VP)(P(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^TP)(UP)^T$$

(۳

$$A(A^TA)^{-1} = U\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^T$$

$$\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_m^{-1}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\rightarrow A(A^TA)^{-1} = (UP)(P\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}P)(VP)^T$$

(۴

$$A(A^TA)^{-1}A^T = U\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^TV^T$$

$$\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_m^{-1})\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\rightarrow A(A^TA)^{-1}A^T = UIV^T$$