Wavelet

علیرضا لرستانی

اطلاعات گزارش

تاریخ: 1399/10/21

واژگان کلیدی:
Wavelet Transform
WT
Pyramid
هرم
Quantize
FT
تبدیل فوریه
STFT
تبدیل فوریه زمان کوتاه
Denoising
Gaussian Pyramid
Laplacian Pyramid

چکیده

تبدیل موجک یا Wavelet یکی دیگر از ابزار های کاربردی پردازش تصاویر است که برخی از محدودیت هایی که روش هایی که تا کنون یاد گرفتیم داشتند را مرتفع میسازد. در این تمرین با این تبدیل و استفاده های مختلف آن آشنا میشویم و متد های گواگونی که اساس آن ها همین تبدیل موجک است را با هم بررسی میکنیم.

۱-مقدمه

در بخش های گذشته با ایده تبدیل فوریه آشنا شدیم و با استفاده از آن تکنیک های پردازشی گوناگونی را بررسی کردیم. با همه ی این اوصاف تبدیل فوریه یا FT محدودیت هایی داشت که در ادامه به بررسی آن ها میپردازیم. ایده اولیه در شکل گیری تبدیل موجک یا WT مرتفع سازی این محدودیت هاست. به طور کلی **موجک** دسته‌ای از توابع ریاضی هستند که برای تجزیه سیگنال پیوسته به مؤلفه‌های فرکانسی آن بکار می‌رود که رزولوشن هر مؤلفه برابر با مقیاس آن است. تبدیل موجک تجزیه یک تابع بر مبنای توابع موجک می‌باشد. موجک‌ها (که به عنوان موجک‌های دختر شناخته می‌شوند) نمونه‌های انتقال یافته و مقیاس شده یک تابع (موجک مادر) با طول متناهی و نوسانی شدیداً میرا هستند.

نوشتار حاضر، به بررسی تبدیل موجک و پیاده سازی (با زبان برنامه نویسی متلب) تعدادی عملیات پردازش تصویر بر اساس این ایده میپردازد.

* پست الکترونیک نویسنده مسئول:
alirezalorestani2010@gmail.com

1. دانشجو، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲-شرح تکنیکال

تبدیل:

یک عمل ریاضی است که با دریافت یک تابع و یا رشته آنرا به تابع یا رشته جدید تبدیل می کند.

چرا به تبدیل ها نیاز داریم؟

- تبدیل یک تابع میتواند اطلاعاتی اضافی از یک تابع یا اطلاعات مخفی شده در تابع را آشکار کند
- تبدیل یک معادله ممکن است آسان تر از اصل آن حل شود
- تبدیل یافته یک تابع/رشته ممکن است نیاز به فضای کمتری برای ذخیره داشته باشد و بنابراین امکان فشرده سازی دیتا را فراهم میکند
- یک عمل ممکن است به تبدیل یافته یک تابع ساده تر اعمال شود تا به خود آن(مثلا کانولوشن)

تبدیل فوریه:

یک تابع پیوسته و یا دارای گسستگی پریودیک می تواند توسط مجموعی از توابع سینوسی بیان شود.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

از مهم ترین کاربردهای تبدیل فوریه، یافتن فرکانسی خاص در سیگنال هاست.

اما نکته ای در این عملیات وجود دارد این است که تبدیل فوریه تمامی اجزای موجود در دل سیگنال را شناسایی می کند، اما هیچ اطلاعاتی در خصوص مکان این اجزا ارایه نمی کند.

به عبارت دیگر:

- تبدیل فوریه یا Fourier Transform اطلاعات موجود در تصویر(what) را بیان می کند، اما برای پرسش نسبت به محل وقوع (where) پاسخی را ارایه نمی کند.
- بیان تصویر در حوزه مکان یا spatial به شما مکان وقوع(where) را می دهد، ولی نمیدانید که آنجا چه اتفاقی افتاده(what).

در نتیجه ما به بیانی برای تصویر احتیاج داریم که به ما بگوید چه چیزی در تصویر، و کجا اتفاق افتاده است.

در این جا ایده تبدیل فوریه زمان کوتاه مطرح شد.

مراحل تبدیل فوریه زمان کوتاه:

1- یک تابع پنجره با طول محدود انتخاب کنید.
2- پنجره را در زمان$t = 0$ بر روی سیگنال قرار دهید.
3- سیگنال را به کمک این پنجره برش بزنید.
4- روی سیگنال برش خورده FT را محاسبه کرده و نتیجه را ذخیره کنید.
5- پنجره را به مقدار کمی به سمت راست بلغزانید
6- .به مرحله 3 بروید تا اینکه به انتهای سیگنال برسید.

STFT اطلاعات زمانی را به کمک محاسبه FT های مختلف برای بازه های زمانی متوالی و سپس در کنار هم قرار دادن آنها فراهم میکند. که همان بیان مدنظر ماست.

اما این روش هم با سوالی بنیادی مواجه است:

"اندازه پنجره چقدر باشد؟"

- اگر پنجره خیلی بزرگ باشد: تبدیل به همان FT ساده میشود که اطلاعات فرکانسی خوب اما اطلاعات زمانی مناسبی در اختیار قرار نمیدهد.

- اگر پنجره خیلی کوچک باشد: اطلاعات زمانی خوب اما اطلاعات فرکانسی مناسبی ارائه نمیکند.

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ:

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به میگوید که حاصل ضرب رزولوشن فرکانسی و زمانی همواره از مقدار ثابتی کمتر خواهد بود.
در واقع ما نمیتوانیم ما به راه حلی برسیم که حداکثر بازدهی در هر دو را داشته باشد.

$$\Delta t \,.\, \Delta f \ \geq \ \frac{1}{4\pi}$$

و اما اکنون زمان خودنمایی نبدیل موجک فرا رسیده است.

تبدیل موجک:

ایده اصلی تبدیل موجک مانند فوریه زمان کوتاه است که تغییر زیر در آن گرفته شده است:
با استفاده از یک پنجره با **طول متغیر** می توان بر مشکل از پیش تعیین کردن رزلوشن غلبه کرد.
پنجره های با طول متغیر برای فرکانس های مختلف استفاده شوند:

- برای فرکانس های بالا از پنجره های باریک تر استفاده میکنیم
- برای فرکانس های پایین از پنجره های عریض استفاده میکنیم.

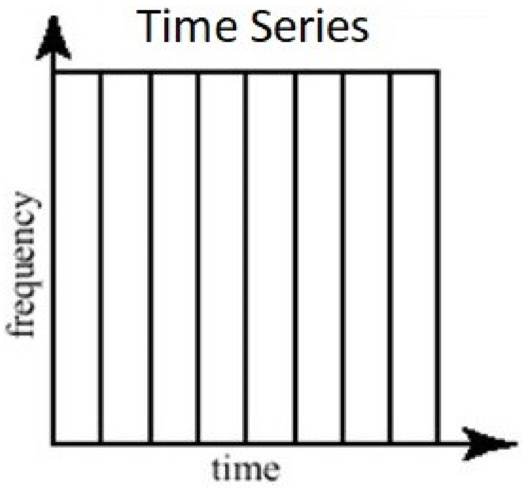
لازم به ذکر است که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ همچنان صادق است.
تابعی که برای پنجره ای کردن سیگنال استفاده میشود موجک نامیده میشود.

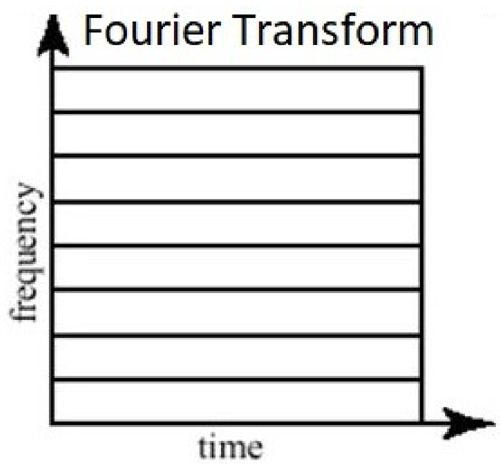
$$cwt(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

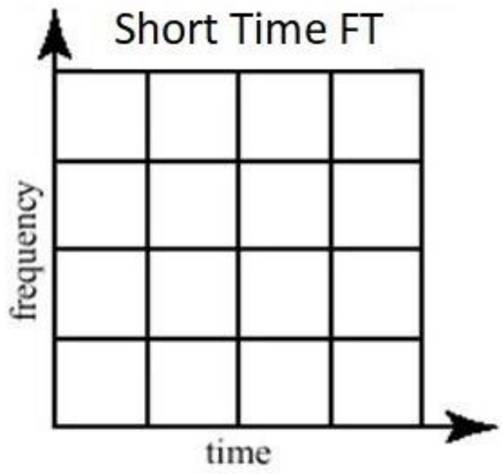
$\tau = translation, s = scale, \Psi(t) = mother\ wavelet, \left(\frac{t-\tau}{s}\right) = sale\ factor$

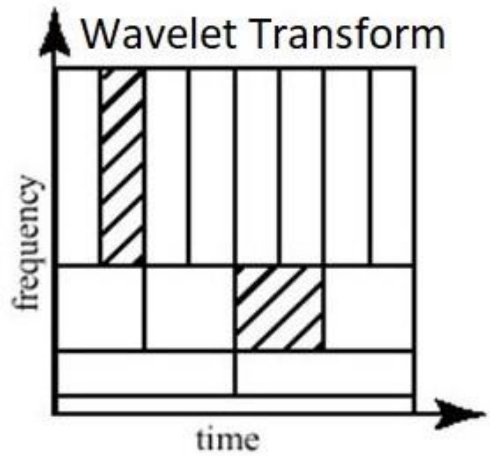
تبدیل فوریه در برابر تبدیل موجک:

همانطور که پیش تر گفته شد موجک نارسایی فوریه در مکان وقوع را پوشش میدهد.
و برای دستیابی به این هدف، ایده تقسیم سیگنال به بخش های کوچک تر با طول متغیر را مطرح میکند.
تصاویر زیر نحوه نگاه دو تبدیل فوریه زمان کوتاه و موجک به سیگنال را با یکدیگر مقایسه میکنند:









همانطور که در تصویر بالا مشاهده میکنید، در بخش اول (بالا سمت چپ) فقط رزولوشن زمانی را پوشش میدهد و همانطور که مشاهده میشود هیچ اطلاعاتی درباره ی فرکانس ندارد.

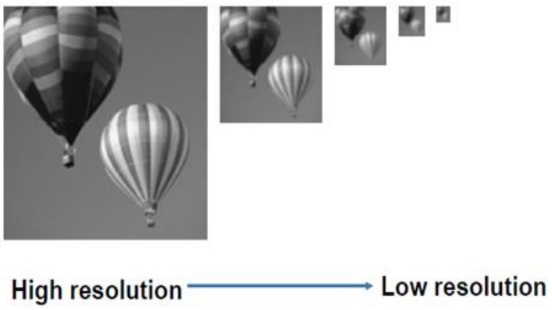
تصویر بعدی بیانگر تبدیل فوریه است که در آن فقط رزولوشن فرکانسی در نظر گرفته شده است اما هیچ اطلاعاتی درباره ی زمان در اختیار ما نمیگذارد.

تصویر بعدی فوریه زمان کوتاه را نشان میدهد که در آن هم رزولوشن زمانی و هم رزولوشن مکانی در نظر گرفته شده اند. اما عرض پنجره ها همگی یکسان اند.

و در نهایت تبدیل موجک را مشاهده میکنید که مانند فوریه زمان کوتاه هر دو رزولوشن زمانی و مکانی را پوشش میدهد با این تفاوت که در آن طول پنجره دیگر ثابت نیست و با توجه به اندازه فرکانس تغییر میکند.

هرم ها:

هرم یا نمایش هرمی نوعی نمایش سیگنال چند مقیاسی است که توسط جوامع بینایی ماشین، پردازش تصویر و جوامع پردازش سیگنال ساخته شده است، که در آن یک سیگنال یا یک تصویر تحت مجموعه ای از عملیات ها مانند smoothing و... قرار میگیرد و در نهایت مجموعه از تصاویر مشتق از تصویر اصلی با مقیاس های گوناگون را داریم.

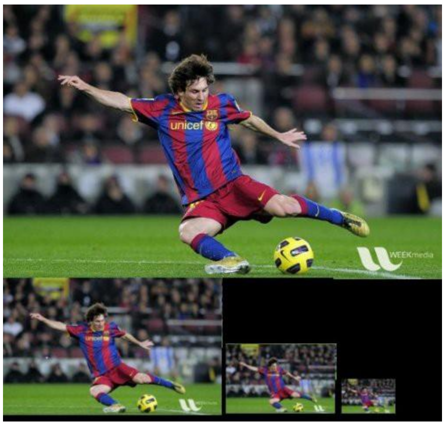


دو نوع اصلی از هرم وجود دارد:

- lowpass
- Bandpass

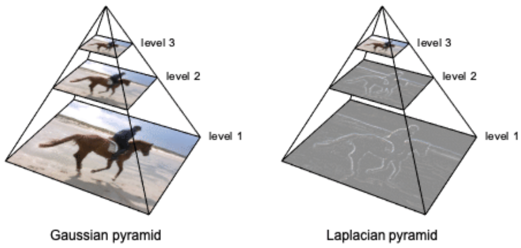
هرم گوسین:

در پایین ترین سطح این هرم تصویر اصلی قرار دارد و هر چه جلو تر میرویم در هر مرحله یک فیلتر گوسین به تصویر اعمال میشود و بدین ترتیب فرکانس های بالای تصویر دور ریخته میشود و سایز تصویر نیز نصف میشود.



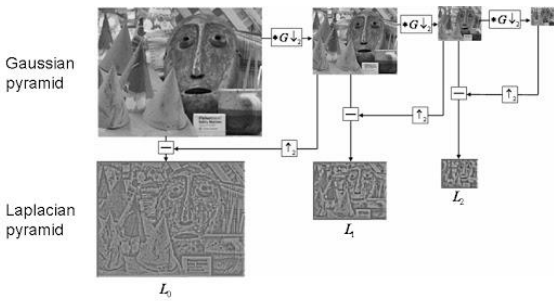
هرم لاپلاسین :

پیش از این توضیح دادیم که هرم گوسی با استفاده از هموارکننده ی گوسین و سپس subsampling آن تصویر هموار شده ایجاد می شود. درمورد هرم لاپلاسی میتوان اینگونه گفت که این هرم در سطح اول از طریق تفاضل بین تصویر اولیه و تصویر گوسی سطح دوم که به اندازه ی سایز تصویر اول scale-up شده است بدست می آید، و سطح های بعدی نیز به همین ترتیب ایجاد می شود. به عبارت دیگر میتوان گفت که تصاویر در هرم لاپلاسیان همان دور ریز تصاویر در هر سطح از هرم گوسین است.



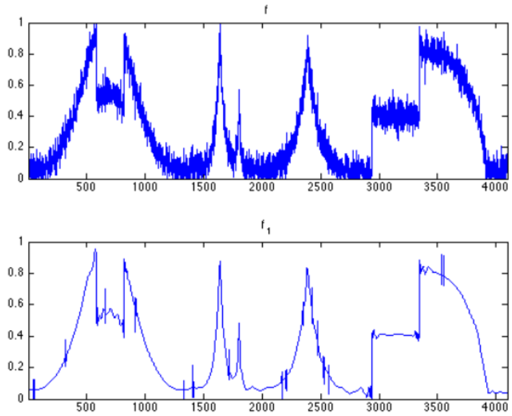
طبق توضیحات داده شده میتوان نتیجه گرفت با داشتن هرم لاپلاسین و همچنین بالا ترین سطح هرم گوسین میتوان به سایر سطوح هرم گوسین و همچنین تصویر اصلی رسید.

به تصویر زیر دقت کنید:



باشروع از بالاترین سطح در هر مرحله کافی است تصویر در هرم گوسین را 2 برابر کرده و با تصویر در هرم لاپلاسین جمع بزنیم.

حذف نویز:



اگر y (t) یک سیگنال ثبت شده تجربی همراه با توصیف اساسی باشد ، g (t) یک مدل برای فرایند جمع شدن نویز که g (t) را به y (t) تبدیل می کند ، توسط معادله زیر توصیف می شود:

$$y_i = g(t_i) + \sigma \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

در رویکرد معمول حذف نویز ، نویز را به عنوان سیگنال با فرکانس بالا به سیگنال اصلی اضافه می کنند. برای ردیابی این فرکانس بالا می توان از تبدیل فوریه استفاده کرد و در نهایت با فیلتر کافی آن را از بین برد.

این استراتژی حذف نویز از نظر مفهومی روشن و کارآمد است زیرا فقط به محاسبه DFT سیگنال داده شده بستگی دارد. با این حال ، مواردی وجود دارد که باید مورد توجه قرار گیرند.

برجسته ترین این موارد زمانی بروز می کند که سیگنال اصلی دارای اطلاعات مهم مربوط به همان فرکانس نویز باشد. وقتی نمایش سیگنال از دامنه فرکانس بدست می آید ، فیلتر کردن این فرکانس باعث از دست رفتن محسوس اطلاعات سیگنال هدف می شود.

در مواردی که شرح داده شده است ، روش موجکها به دلیل این واقعیت که سیگنال با استفاده از نمایش زمان فرکانس "dual" مورد مطالعه قرار می گیرد ، مناسب تر است ، که اجازه می دهد فرکانسهای نویز را از فرکانسهای سیگنال با ارزش جدا کند. تحت این روش ، نویز به عنوان یک سیگنال ثابت با فرکانس بالا در کل محدوده زمانی نشان داده می شود و بنابراین شناسایی آن آسان تر از استفاده از تجزیه و تحلیل فوریه است.

پس از مشخص شدن نمایش نویز ، روند حذف شروع می شود. ثابت شده است که یک استراتژی مناسب برای حذف نویز، برابر با صفر قرار دادن ضرایب مرتبط با فرکانس نویز است. این عبارت یک چشم انداز سراسری را برای حذف نویز را نشان می دهد ، روشهای مختلف denoising در نحوه ردیابی و ضبط ضرایب از نمایش متفاوت است. جزئیات مفهومی چندین مورد از این روشها در بخشهای بعدی ارائه شده است.

روش اصلی و ساده برای حذف نویز از یک سیگنال آلوده به آن شامل اصلاح ضرایب موجک ها به روشی هوشمندانه است به طوری که ضرایب "کوچک" مرتبط با نویز اساساً نادیده گرفته می شوند. از این رو می توان از ضرایب به روز شده برای بازسازی عملکرد اصلی و عاری از تأثیر نویز استفاده کرد. در استراتژی ضمنی است که فقط چند ضریب موج "بزرگ" d_{jk} با سیگنال اصلی مرتبط هستند و شناسایی و حذف ضرایب دیگر به شما امکان بازسازی کامل سیگنال اساسی g را می دهد. روش های مختلفی از این ایده استفاده می کنند و آن را به روش های مختلف پیاده سازی می کنند.

در روش جریمه خطی ، هر ضریب موجک تحت تأثیر انقباض خطی خاص مربوط به سطح تفکیک ضریب است. یک عبارت ریاضی برای این نوع رویکرد با استفاده از جمع شدگی خطی در معادله نشان داده شده است:

$$\tilde{d}_{jk} = \frac{\hat{d}_{jk}}{1 + \lambda 2^{2js}}$$

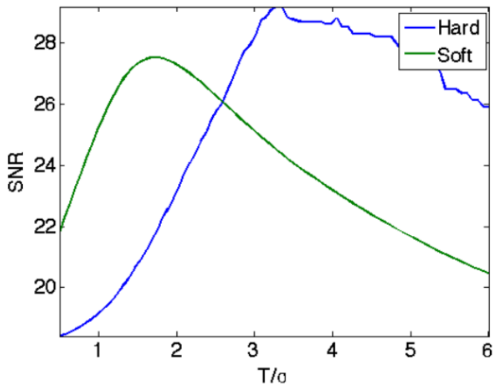
در معادله زیر، پارامتر s شاخص صاف شناخته شده سیگنال اساسی g است ، در حالی که پارامتر λ یک عامل هموار کننده است که تعیین آن برای این نوع تجزیه و تحلیل حیاتی است.

باید گفت که آستانه خطی فقط برای سیگنال فضایی همگن با سطوح مهم نظم کافی است. در صورت عدم رعایت شرایط خانگی و نظم ، آستانه موجک غیرخطی یا جمع شدگی معمولاً مناسب تر است.

donoho1995 و donoho1995b یک استراتژی غیرخطی برای آستانه گذاری پیشنهاد کردند. طبق رویکرد آنها ، آستانه گذاری را می توان با اجرای یک قانون آستانه سخت یا نرم انجام داد. عبارات ریاضی آنها به ترتیب در معادلات زیر نشان داده شده است:

$$\delta_{\lambda}^{H}\left(\hat{d}_{jk}\right) = \begin{cases} 0 & if \quad |\hat{d}_{jk}| \leq \lambda \\ \hat{d}_{jk} & if \quad |\hat{d}_{jk}| > \lambda \end{cases}$$

$$\delta_{\lambda}^{S}\left(\hat{d}_{jk}\right) = \begin{cases} 0 & if \quad |\hat{d}_{jk}| \leq \lambda \\ \hat{d}_{jk} - \lambda & if \quad \hat{d}_{jk} > \lambda \\ \hat{d}_{jk} + \lambda & if \quad \hat{d}_{jk} < -\lambda \end{cases}$$



در هر دو روش ، نقش پارامتر λ به عنوان مقدار آستانه به عنوان برآوردگر منجر به تخریب ، کاهش یا افزایش مقدار ضریب موجک ، حیاتی است.
چندین نویسنده درباره خصوصیات و محدودیت های این دو استراتژی بحث کرده اند. آستانه سخت ، به دلیل ناپیوسته بودن ناشی از آن ، حتی به تغییرات کوچک در داده ها نیز می تواند ناپایدار و حساس باشد. از طرف دیگر ، آستانه نرم هنگامی که ضرایب واقعی زیاد هستند می تواند تعصب غیرضروری ایجاد کند. اگرچه روشهای پیچیده تری برای ارائه اشکالات استراتژیهای غیرخطی توصیف شده معرفی شده است ، بحث در این گزارش به روشهای سخت و نرم محدود می شود.

Term-by-Term Thresholding

یک مشکل آشکار در استفاده از روشهای آستانه موجک ، نحوه انتخاب مقدار مناسب برای آستانه ، λ است. در واقع روش‌های مختلفی برای تعیین مقدار پارامتر مورد نظر

وجود دارد. به معنای کلی ، این استراتژی ها را می توان در دو گروه آستانه های سراسری و آستانه های وابسته به سطح طبقه بندی کرد. آستانه سراسری به معنای انتخاب یک مقدار λ است که برای همه ضرایب موجک اعمال می شود. آستانه های وابسته به سطح بیانگر این است که برای هر سطح وضوح یک λ مقدار آستانه (احتمالاً) متفاوت اعمال می شود. همه گزینه ها نیاز به برآورد سطح نویز σ دارند. انحراف معیار مقادیر داده به طور واضح برآورد خوبی نیست ، مگر اینکه عملکرد اصلی پاسخ g به طور منطقی مسطح باشد. donoho1995 تخمین σ را در حوزه موجک با استفاده از عبارت موجود در معادله زیردر نظر گرفت:

$$\widehat{\sigma} = \frac{median\left(\left|\hat{d}_{J-1,k}\right|\right)}{0.6745}, \quad k = 0, 1, ..., 2^{J-1} - 1$$

The minimax threshold

donoho1995 با به حداقل رساندن رسیک در برآورد یک تابع ، مقدار آستانه بهینه λ^M را بدست آورد. آستانه مینیماکس پیش بینی شده به داده های موجود بستگی دارد و سطح نویز آلوده کننده سیگنال را نیز در نظر می گیرد:

$$\lambda^M = \widehat{\sigma}\lambda_n^*$$

$$\lambda_n^* = \inf_{\lambda} \sup_{d} \left\{ \frac{R_\lambda(d)}{n^{-1} + R_{oracle}(d)} \right\}$$

$$R_\lambda(d) = E\left(\delta_\lambda \hat{d}\right)^2$$

The universal threshold

donoho1995 این آستانه را به عنوان جایگزینی برای آستانه های مینیماکس ، که برای همه ضرایب موجک اعمال می شود ، پیشنهاد داد. آستانه جهانی در معادله زیر تعریف شده است:

$$\lambda^U = \widehat{\sigma}\sqrt{2 \log n}$$

این آستانه به راحتی به خاطر سپرده می شود و اجرای آن در نرم افزار ساده تر است و از مشکل بهینه سازی ضمنی در روش minimax جلوگیری می شود. همچنین ، آستانه سزاسزی با احتمال زیاد اطمینان می دهد که هر نمونه در تبدیل موجک که عملکرد اصلی آن دقیقاً صفر است ، صفر برآورد می شود ، اگرچه سرعت همگرایی (بسته به اندازه نمونه) کند است.

۳-شرح نتایج و نتیجه گیری

در ادامه به بررسی عملیات های یاد گرفته شده بر روی تصویر زیر میپردازیم:

ابتدا تصویر را gray scale میکنیم.

6.1.1

هرم لاپلاسین 9 مرحله ای را از روی آن تشکیل میدهیم:

مرحله ی آخر این هرم زمانی ست که تنها یک پیکسل باقی مانده است.

سپس طبق توضیحات داده شده در مرحله شرح تکنیکال به بازسازی تصویر از روی هرم لاپلاسین میپردازیم:

حال مقادیر psnr و mse را برای تصویر بازسازی شده در مقایسه با تصویر اصلی محاسبه میکنیم:

MSE	PSNR
0	inf

نتایج خبر از تطابق کامل تصویر بازسازی شده با تصویر اصلی میدهند. به عبارت دیگر هرم لاپلاسین شامل تمام داده های مورد نیاز ماست و در هیچ داده ای از بین نمیرود.

6.1.2

هرم 3 مرحله ای را از روی آن تشکیل میدهیم:

مجددا مانند بخش قبل تصویر را بازسازی میکنیم:

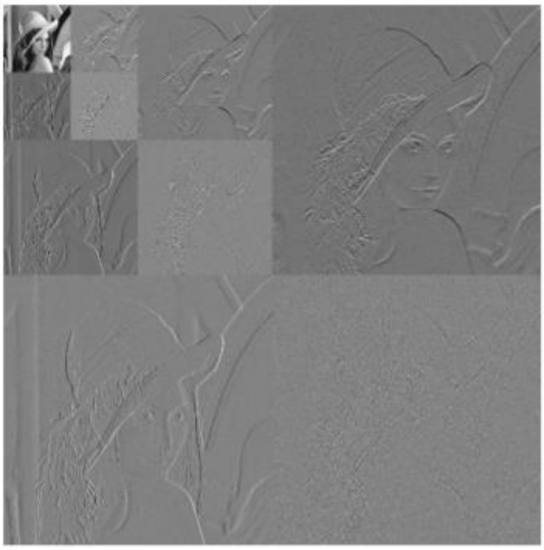
مجددا مقادیر PSNR و MSE را محاسبه میکنیم:

MSE	PSNR
0	inf

همانطور که از مرحله قبل انتظار داشتیم این تصویر نیز عینا مطابق تصویر اصلی است.

6.1.3

هرم موجک 3 مرحله ای را از روی آن تشکیل میدهیم:



سپس تصویر اصلی را از روی این تصویر بازسازی میکنیم:

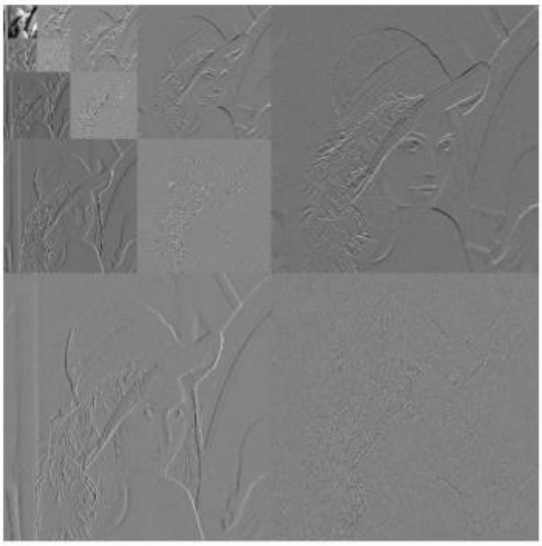
سپس مقدار PSNR و MSE را برای تصویر بازسازی شده محاسبه میکنیم:

MSE	PSNR
0	inf

باز هم مطابقت کامل و باز هم حفظ کلیه داده ها!

6.1.4

هرم موجک چندی سازی شده را برای تصویرمان تشکیل میدهیم:



سپس به محاسبه دو مقدار MSE و PSNR میپردازیم:

MSE	PSNR
1.425	44.324

در این حالت با مقدار کمی از دست رفتن دیتا مواجهیم اما مقدار آن بسیار ناچیز وقابل چشم پوشی است.

6.2

در این بخش ابتدا اندکی نویز به تصویر اضافه خواهیم کرد سپس به رفع آن با تکنیک های اشاره شده میپردازیم:

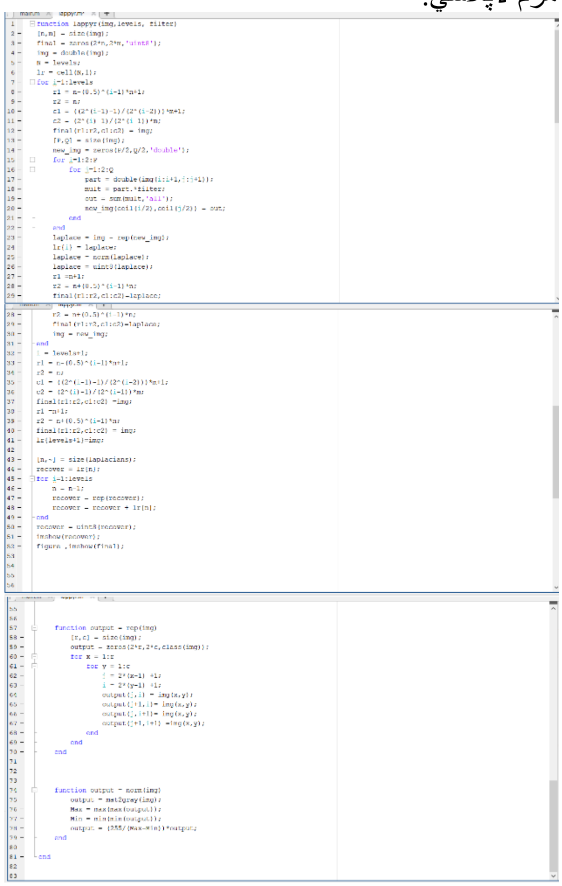
تصویر نویزی

تصویر denosie شده با تکنیک soft threshold

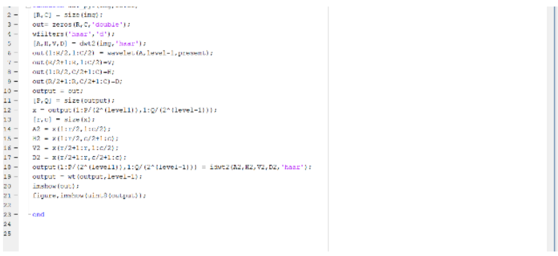
تصویر denoise شده با تکنیک hard threshold

4-پیوست

هرم لاپلاسي:

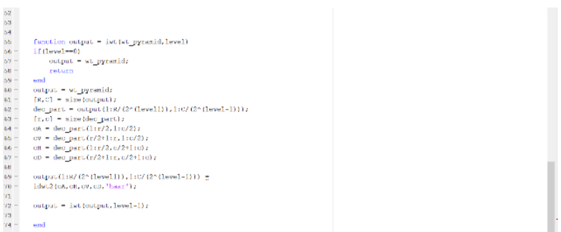


هرم ویولت:



ویولت چندي ساز شده:

حذف نویز:



منابع:

https://fa.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%88%D8%AC%DA%A9

https://en.wikipedia.org/wiki/Pyramid_(image_processing)

https://cnx.org/contents/-yxzQLO-@2/Signal-Denoising-using-Wavelet-based-Methods#uid24

http://www.numerical-tours.com/matlab/denoisingwav_1_wavelet_1d/