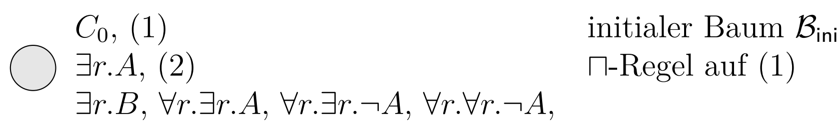
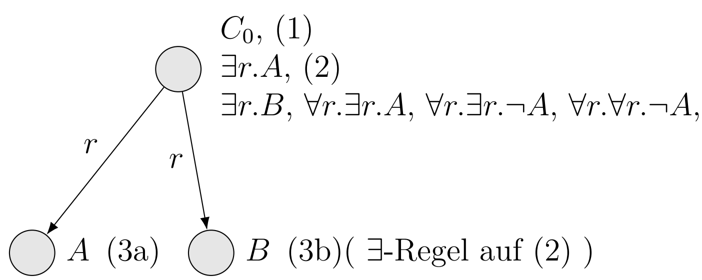
Beschreibungslogik | Übung 03

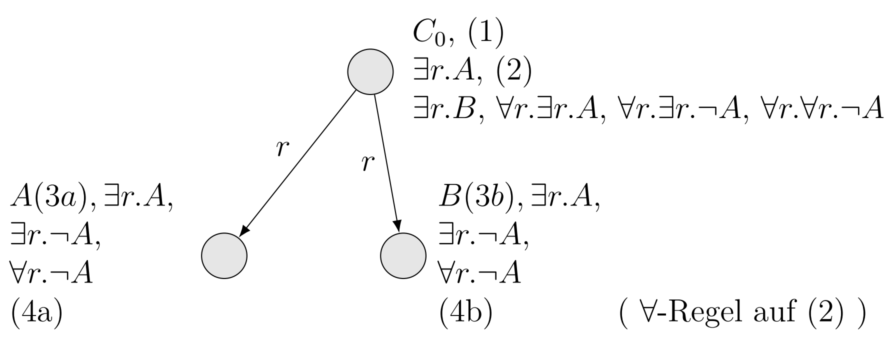
D. Marschner, A. Mahdavi
alma@uni-bremen.de

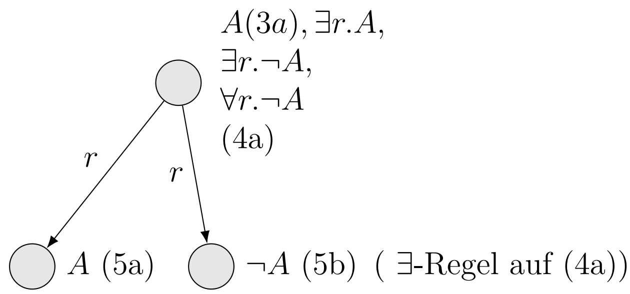
Aufgabe 1 a)

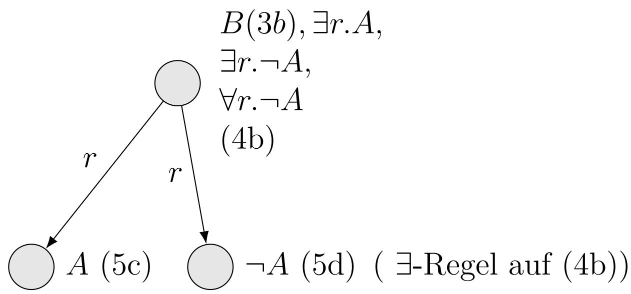
$C_0 = \exists r.A \sqcap \exists r.B \sqcap \forall r.\exists r.A \sqcap \forall r.\forall r.\neg A$

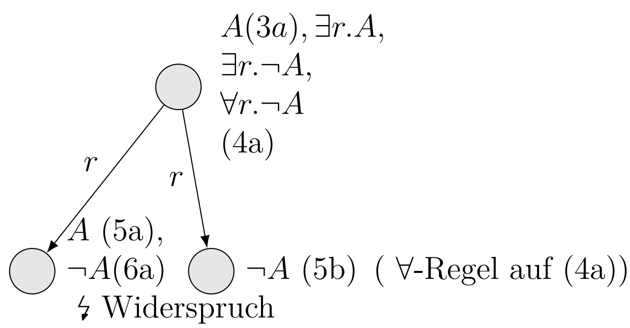


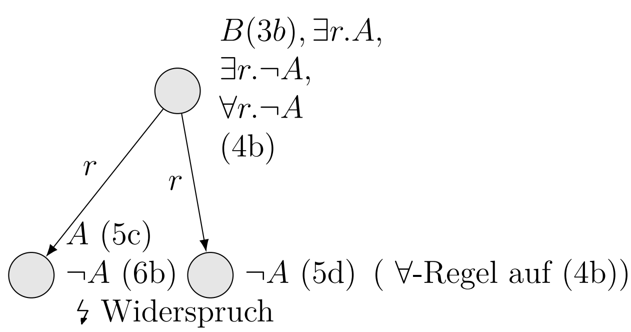












in Aufgabe 1 a) C_0 ist nicht erfüllbar, weil es keinen I-Baum gibt ohne offensichtlichen Wiederspruch und vollständig ist.

Aufgabe 1 b)

$C_0 = \neg(\forall r.(A \sqcup B) \sqcap \forall r.(A \sqcup \neg B)) \sqcap \neg\exists r.(\neg A \sqcap \neg B)$
schritt 1. (NNF berechnung)
$C_0 = (\exists r.\neg(A \sqcup B) \sqcup \exists r.\neg(A \sqcup \neg B)) \sqcap \forall r.\neg(\neg A \sqcap \neg B)$
$C_0 = (\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B)) \sqcap \forall r.(A \sqcup B)$

C_0, (2) — initialer Baum $\mathcal{B}_{\mathsf{ini}}$
$\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B))$,
$\forall r.(A \sqcup B)$ (3) — $\sqcap$-Regel auf (2)

$\mathcal{B}_1$

C_0, (2)
$\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B))$,
$\forall r.(A \sqcup B)$, (3)
$\exists r.(\neg A \sqcap \neg B)$, (4a) $\sqcup$-Regel auf(3)

r

$\neg A \sqcap B$ (5) $\exists$-Regel auf (3)und(4a)
$A \sqcup B$ (6) $\forall$-Regel auf (3)
$\neg A, B$ (7) $\sqcap$-Regel auf (5)

$\mathcal{B}_2$

C_0, (2)
$\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B))$,
$\forall r.(A \sqcup B)$, (3)
$\exists r.(\neg A \sqcap B)))$, (4b) $\sqcup$-Regel auf(3)

r

$\neg A \sqcap B$ (5) $\exists$-Regel auf (3)und(4b)
$A \sqcup B$ (6) $\forall$-Regel auf (3)
$\neg A, B$ (7) $\sqcap$-Regel auf (5)

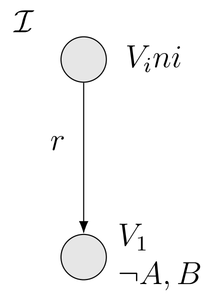
$\mathcal{B}_3$

C_0, (2)
$\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B))$,
$\forall r.(A \sqcup B)$, (3)
$\exists r.(\neg A \sqcap \neg B)$, (4a $\neg A \sqcap B$ (5)
$A \sqcup B$ (6)
$\neg A, B$ (7)
B (8)$\sqcup$-Regel auf (6)
–> erfüllbar

$\mathcal{B}_4$

$\neg A \sqcap B$ (5)
$A \sqcup B$ (6)
$\neg A, B$ (7)
A (8)$\sqcup$-Regel auf (6)
$\lightning$

Model $\mathcal{I}$ gemäß Beweis von theorem 4.8: v = V_ini, V_1
E = (V_ini, r, V_1)
$\mathcal{L}$: V –> $2^{sub(C_0)}$ ist Knotenbeschriftung



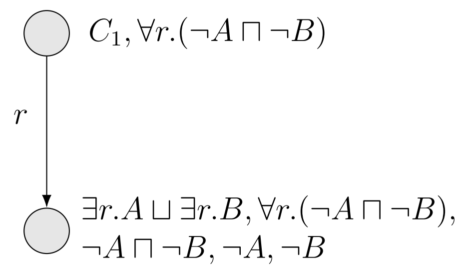
$\Delta^{\mathcal{I}}$ = V
$r^{\mathcal{I}} = \{(V, V') \in E\}$ für alle Rollennamen r
$A^{\mathcal{I}} = \{V | A \in \mathcal{L}(v)\}$ für alle Konzeptnamen A
$C_0^{\mathcal{I}} = ((\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B)) \sqcap \forall r.(A \sqcup B))^{\mathcal{I}}$
$= ((\exists r.(\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \exists r.(\neg A \sqcap B))^{\mathcal{I}} \cap \forall r.(A \sqcup B))^{\mathcal{I}}$
$= (\exists r.(\neg A \sqcap \neg B)^{\mathcal{I}} \vee \exists r.(\neg A \sqcap B)^{\mathcal{I}}) \cap \{V_{ini}\}$
$= \{V_{ini}\}$
$C_0^{\mathcal{I}} \neq$ => $\mathcal{I}$ ist Modell von C_0

Da wir einen I-Baum gefunden haben, der keinen offensichtlichen Widerspruch hat und vollständig ist, ist C_0 erfüllbar.

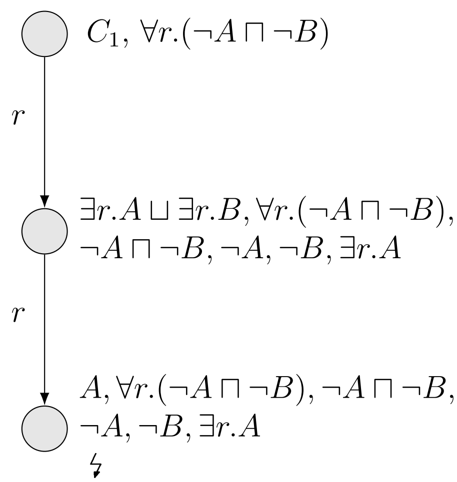
Aufgabe 2

Wir ordnen jeder Menge M_i von Monstern eine Multimenge MM_i wie folgt zu: Für jedes Monster $X \in M_i$ enthält MM_i die Zahl M(x)="100 minus die Anzahl j der erlegten Monster, mittels derer X generiert wurde "
Somit ist MM_i eine Multimenge über der Grundmenge $\mathbb{N}$. Da $<$ auf $\mathbb{N}$ wohldefiniert ist, ist mit Theorem 4.7 auch $<_{mul}$ auf $MM(\mathbb{N})$ wohldefiniert. Außerdem gilt $MM_i >_m ulMM_{i+1}$ für jedes $i >= 0$,dann mit jedem erlegten Monster X wird in M_i das Monster X durch beliebig viele neue Monster ersetyt, wobei für jedes neue Monster gilt: $m(X_{neu}) < m(X)$. Somit erhält man $MM_i + 1$ aus MM_i indem man m(x) durch die kleineren Zahlen $m(x_{neu_1}), m(x_{neu_2}), ..., m(x_{neu_n})$ mit $n \in \mathbb{N}$ ersetzt. Wegen der Wohldefiniertheit von $<_{mul}$ uns der Beobachtung $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$ muss die Folge der MM_i endilich sein.
□

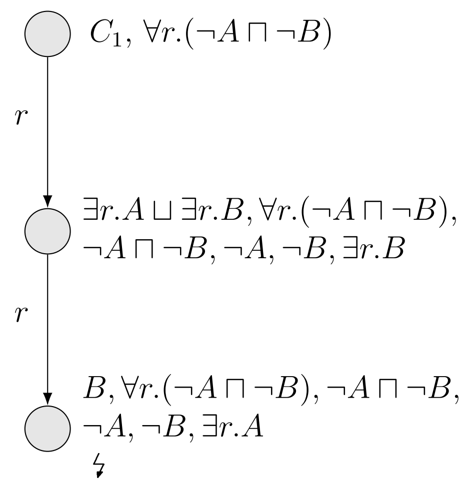
Aufgabe 3 a)



$\mathcal{B}_1$

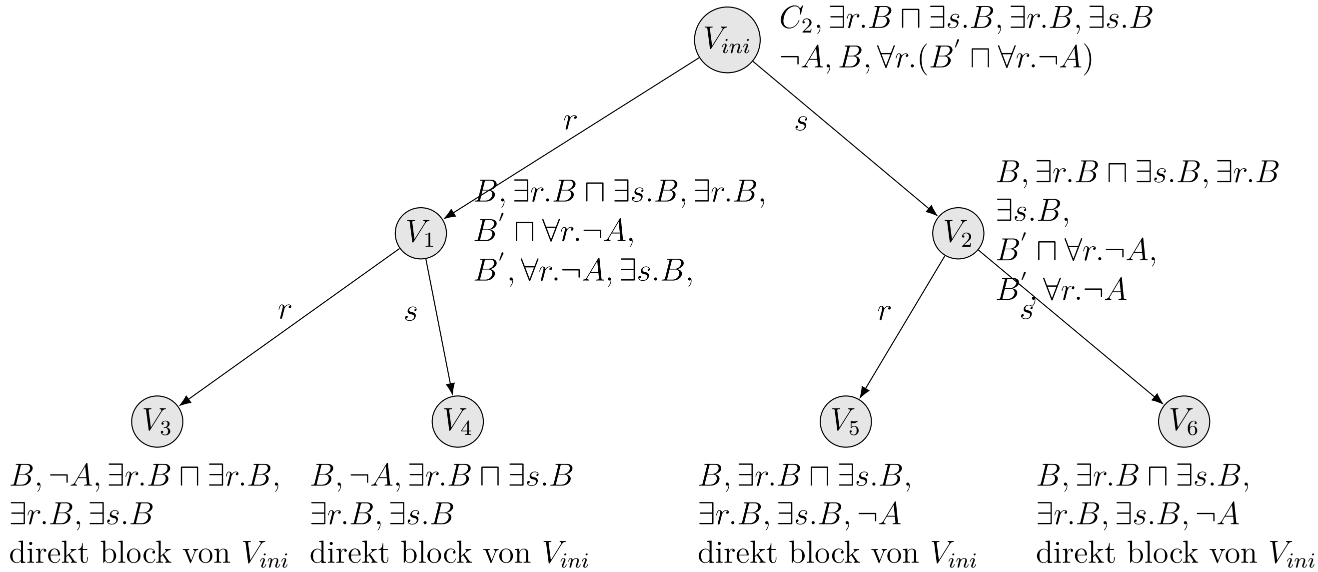


$\mathcal{B}_2$



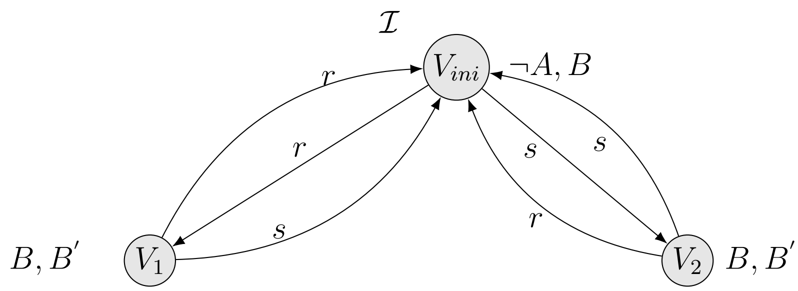
–> nicht erfülbar.

Aufgabe 3 b)



V_3, V_4, V_5, V_6 direkt block von V_{ini}

$$
\begin{gathered}
(\exists r.B \sqcap \exists s.B)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} = \{V_{ini}, V_1, V_2\} \\
(C_2)^{\mathcal{I}} = (\neg A \sqcap B \sqcap \forall r.(B^{'} \sqcap \forall r.\neg A))^{\mathcal{I}} \\
=(\neg A)^{\mathcal{I}} \cap (B)^{\mathcal{I}} \cap (\forall r.(B^{'} \sqcap \forall r.\neg A))^{\mathcal{I}} \\
= \{V_{ini}\} \cap \Delta^{\mathcal{I}} \cap \{V_{ini}\} \\
= \{V_{ini}\}
\end{gathered}
$$



Wie gezeigt gibt es einen vollständigen I-Baum ohne offensichtlichen Wiederspruch. Also ist C_2 bezüglich $\mathcal{T}_2$ erfüllbar.

Aufgabe 3 c)

Behaupt $\mathcal{T}_3 \models Student \sqsubseteq Happy$?
Antwort Die Behauptung ist wahr

Beweis Wir formulieren die Behauptung zunächst einmal um.
$\mathcal{T} \models Student \sqsubseteq Happy \leftrightarrow C_0 = Student \sqcap \neg Happy$ unerfüllbar
Oder anders formulieren
$C_1 = \neg C_0 = \neg(Student \sqcap \neg Happy) = \neg Student \sqcup Happy$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}_3$?
Wir zeigen über den Tableau Algorithmus im folgenden, dass $C_1 = \neg C_0$ erfülbar bzgl. $\mathcal{T}_3$, denn wir finden einen vollständigen I-Baum ohne offensichtlichen Wiederspruch. Dadurch wird die Behauptung bewiesen, da C_1 bzgl. $\mathcal{T}_3$ erfüllbar.

$$\begin{gathered}
\mathcal{T}_3 \text{ umformen zu } \{T \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\} \\
\mathcal{T}_3\{Student \sqsubseteq \exists solves.Exercise, \\
\exists solves.T \sqsubseteq Happy\} \\
= \{T \sqsubseteq (\neg Student \sqcup \exists solves.Exercise) \sqcap \\
(\neg \exists solves.T \sqcup Happy)\} \\
= \{T \sqsubseteq (\neg Student \sqcup \exists solves.Exercise) \sqcap \\
(\forall solves.\neg T \sqcup Happy)\}
\end{gathered}$$

Über Tableau-Algorithmus Modell $\mathcal{I}$ für $\mathcal{T}$ finden :
Abkürzungen: Student≡ S
Exercise≡ E
Happy≡ H
solves≡ r
$\mathcal{T} = \{T \sqsubseteq (\neg S \sqcup \exists r.E) \sqcap (\forall r.\neg T \sqcup H)\}$
$C_0 = \neg S \sqcup H$

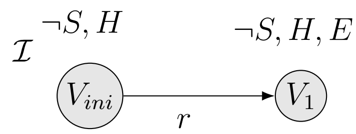
V_{ini}

$C_0, (\neg S \sqcup \exists r.E) \sqcap (\forall r.\neg T \sqcup H),$	(1)init Baum
$(\neg S \sqcup \exists r.E), (\forall r, \neg T \sqcup H),$	(2)⊓Regel
$\exists r.E, \neg S, H$	(3)⊔Regel

$\downarrow r$

V_1

$E,$	(4)∃Regel
$(\neg S \sqcup \exists r.E) \sqcap (\forall r.\neg T \sqcup H),$	(5)T-Box Regel
$(\neg S \sqcup \exists r.E), (\forall r.\neg T \sqcup H),$	(6)⊓Regel
$\neg S, H$,	(7)⊔Regel



$C_0 = \neg S \sqcup H$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}_3$
$(C_0)^{\mathcal{I}} = (\neg S \sqcup H)^{\mathfrak{I}} = V_{ini}, V_1$

Aufgabe 5)

Wir formulieren die Behauptung zunächst einmal um.
$\mathcal{T}$ umformen zu $\{T \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$:
$\mathcal{T} = \{T \sqsubseteq \exists r.A, T \sqsubseteq \forall \overline{r}.\forall \overline{r}.\neg A\}$
$=\{T \sqsubseteq (\neg T \sqcup \exists r.A) \sqcap (\neg T \sqcup \forall \overline{r}.\forall \overline{r}.\neg A)\ \}$
$C_0 = A$

Um die Erfüllbarkeit C_0 bzgl. $\mathcal{T}$ zu prüfen, konstruieren wir einen I-Baum mit $C_0, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(V_{ini})$. Aufgrund der Tbox-Regel ist $\mathcal{T} \in$ L(x), wobei x beliebiger Knoten aus V ist. Durch die $\sqcap$ Regel angewendet auf $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(v)$ mit v $\in$ V ist beliebiger Knoten, erhalten wir $(\neg T \sqcup \exists r.A) \in \mathcal{L}(v)$ und $(\neg T \sqcup \forall \overline{r}.\forall \overline{r}.\neg A) \in \mathcal{L}(v)$.
Sei $C = (\neg T \sqcup \exists r.A)$ und $D = (\neg T \sqcup \forall \overline{r}.\forall \overline{r}.\neg A)$, dann ist nach vorheriger Erklärung C $\in \mathcal{L}(v)$ und D $\in \mathcal{L}(v)$, wobei v $\in$ V ein beliebiger Knoten aus dem I-Baum ist.
Da wir auch die $\sqcup$Regel auf C und D anwenden müssen, und $\neg T \in \mathcal{L}(v)$ ein offensichtlicher Widerspruch wäre, erhalten wir $\exists r.A \in L(v)$ und $(\forall \overline{r}.\forall \overline{r}.\neg A) \in L(v)$ für alle I-Bäume mit bislang keinen offensichtlichen Wiederspruch.
Wenn aber $\forall \overline{r} \forall \overline{r}.\neg A \in \mathcal{L}(v)$, dann gibt es ein u $\in$ V mit (u,r,v) $\in$ E und $\forall \overline{r}.\neg A \in \mathcal{L}(u)$. Das wiederum bedeutet, es gibt ein w $\in$ V mit (w,r,u) $\in$ E und $\neg A \in \mathcal{L}(w)$. Wir können also sagen, das $\neg A \in \mathcal{L}(w)$, wobei w irgend ein Knoten ist. Da aber $\exists r.A \in L(v)$, wobei v beliebiger Knoten ist, gibt es sicher ein r-Vorgänger w' von w mit $\exists r.A \in L(w')$ und (w',r,w) $\in$ E. Das würde bedeuten, dass $A, \neg A \in L(w)$, wobei w mindestens ein Knoten in jedem möglichen I-Baum ist. Also hat jeder I-Baum immer einen offensichtlichen Wiederspruch, sodass der Tableau-Algorithmus sicher ein falsches Ergebnis liefert.

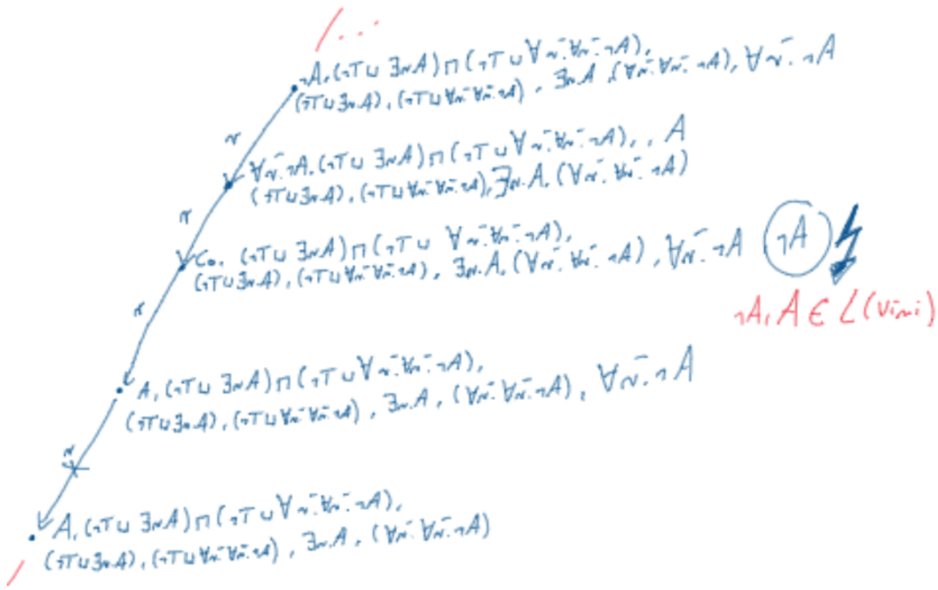


Abbildung 1: Aufgabe 5 - Tableau Algorithmus - Widerspruch wie im Text erklärt