Beschreibungslogik | Übung 02

A. Mahdavi, C. Dhimitris, D. Marschner

Aufgabe 1.1

Gegeben Interpretationen $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{J}_1$
Behauptung Es gibt ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C mit $d \notin C^{\mathcal{I}_1}$ und $x \in C^{\mathcal{J}_1}$
Lösung Sei $C = \exists r.(A \sqcap B)$. Dann ist $d \notin C^{\mathcal{I}_1} = \{\}$ und $x \in C^{\mathcal{J}_1} = \{x\}$

Aufgabe 1.2

Gegeben Interpretationen $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{J}_2$
Behauptung $(\mathcal{I}_2, d) \sim (\mathcal{J}_2, x)$
Lösung Die Bisimulation $\rho = \Delta^{\mathcal{I}_2} \times \Delta^{\mathcal{J}_2}$ zeigt, dass $(\mathcal{I}_2, d) \sim (\mathcal{J}_2, x)$

Aufgabe 1.3

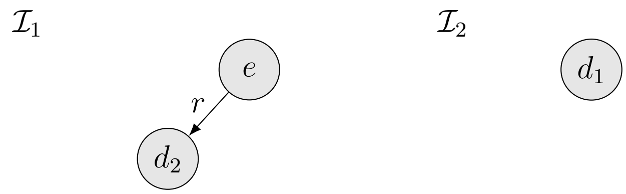
Gegeben Interpretationen $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{J}_3$
Behauptung Es gibt ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C mit $d \in C^{\mathcal{I}_3}$ und $x \notin C^{\mathcal{J}_3}$
Lösung Sei $C = \forall r.(\exists r.A \sqcap \exists r.B)$. Dann ist $d \in C^{\mathcal{I}_3} = \{d\}$ und $x \notin C^{\mathcal{J}_3} = \{\}$

Aufgabe 2 a)

Behauptung Die Eigenschaft $E = \{(\mathcal{I}, d) \mid \text{für alle } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ gilt } (d, e) \in r^{\mathcal{I}}\}$ kann nicht als $\mathcal{ALC}$-Konzept ausgedrückt werden, wobei r ein fester Rollenname ist.
Beweis Um zu zeigen, dass E nicht als $\mathcal{ALC}$-Konzept ausgedrückt werden kann, genügt es laut Theorem 3.5 (Methodologie-Theorem) zu zeigen, dass es zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ gibt, wobei $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und

$(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$.

Gegeben seien die folgenden Interpretationen $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$

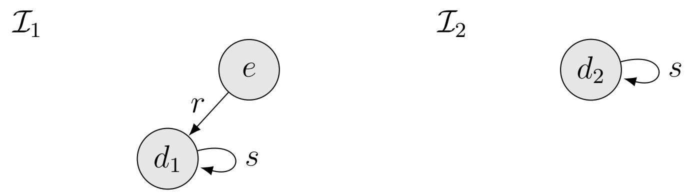


dann ist offensichtlich, dass $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$.
Die Eigenschaft $E = \{(\mathcal{I}, d) \mid$ für alle $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}\}$ beschreibt in Worten eigentlich nur, dass alle Elemente, die diese Eigenschaft haben, automatisch einen r-Vorgänger haben.
Wenn es so ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C gäbe, welches die Eigenschaft ausdrücken könnte, dann wäre offensichtlich $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$. Da $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ müsste dann laut Definition Bisimulation $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$ gelten. Das ist allerdings offensichtlich nicht der Fall, da d_2 gar keinen r-Vorgänger hat.
Somit haben wir gezeigt, dass es zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ gibt, wobei $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$.
Demzufolge ist E nicht als $\mathcal{ALC}$-Konzept ausdrückbar. □

Aufgabe 2 b)

Behauptung Die Eigenschaft $E = \{(\mathcal{I}, d) \mid$ es gibt ein $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ und $(e, d) \in s^{\mathcal{I}}\}$ kann nicht als $\mathcal{ALC}$-Konzept ausgedrückt werden, wobei r und s feste Rollennamen sind.
Beweis Um zu zeigen, dass E nicht als $\mathcal{ALC}$-Konzept ausgedrückt werden kann, genügt es laut Theorem 3.5 (Methodologie-Theorem) zu zeigen, dass es zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ gibt, wobei $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$.

Gegeben seien die folgenden Interpretationen $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$



dann ist offensichtlich, dass $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$.
Die Eigenschaft $E = \{(\mathcal{I}, d) \mid \text{es gibt ein } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ und } (e, d) \in s^{\mathcal{I}}\}$ beschreibt in Worten eigentlich nur, dass alle Elemente, die diese Eigenschaft haben, automatisch einen r-Vorgänger und einen s-Nachfolger haben.
Wenn es so ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C gäbe, welches die Eigenschaft ausdrücken könnte, dann wäre offensichtlich $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$. Da $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ müsste dann laut Definition Bisimulation $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$ gelten. Das ist allerdings offensichtlich nicht der Fall, da d_2 gar keinen r-Vorgänger hat.
Somit haben wir gezeigt, dass es zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ gibt, wobei $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$.
Demzufolge ist E nicht als $\mathcal{ALC}$-Konzept ausdrückbar. $\square$

Aufgabe 3

Siehe Abbildungen 1 und 2.

Aufgabe 4 a)

$\Delta^{\mathcal{I}} = \{d, e, f, g, h\}$
$A^{\mathcal{I}} = \{d, e, f, g\}$
$B^{\mathcal{I}} = \{f, g, h\}$
$\exists r.B^{\mathcal{I}} = \{d, f, g, e, h\}$
$(A \sqcup B)^{\mathcal{I}} = \{d, e, f, g, h\}$
$(A \sqcap \neg B)^{\mathcal{I}} = \{d, e\}$
$(\exists s.(A \sqcap \neg B))^{\mathcal{I}} = \{d, e\}$
$sub(C, \mathcal{T}) = \{A, B, \exists r.B, \forall r.B, A \sqcup B, A \sqcap \neg B, \exists s.(A \sqcap \neg B)\}$

$t_{\mathcal{I}}(d) = \{A, \exists r.B, \forall r.B, A \sqcup B, A \sqcap \neg B, \exists s.(A \sqcap \neg B)\}$
$t_{\mathcal{I}}(e) = \{A, \exists r.B, \forall r.B, A \sqcup B, A \sqcap \neg B, \exists s.(A \sqcap \neg B)\}$
$t_{\mathcal{I}}(f) = \{A, B, \exists r.B, \forall r.B, A \sqcup B\}$
$t_{\mathcal{I}}(g) = \{A, B, \exists r.B, \forall r.B, A \sqcup B\}$

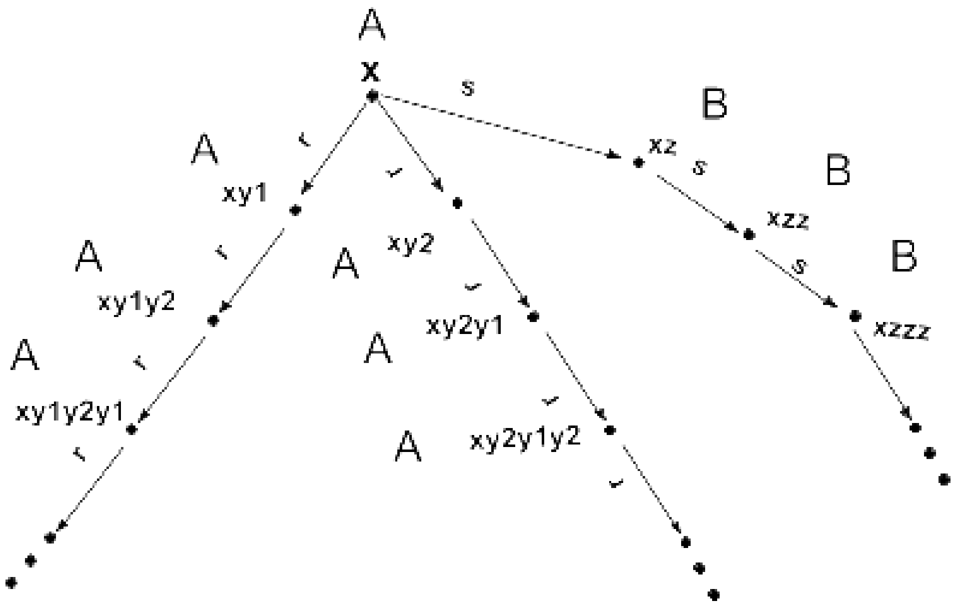


Abbildung 1: Unravelling der Interpretation $\mathcal{J}_2$

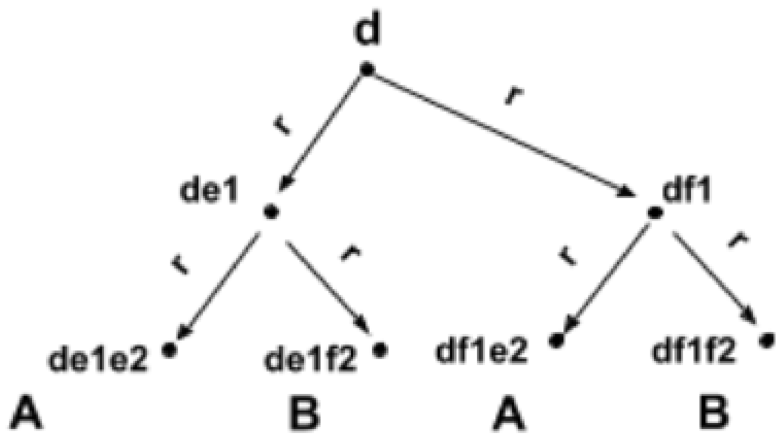
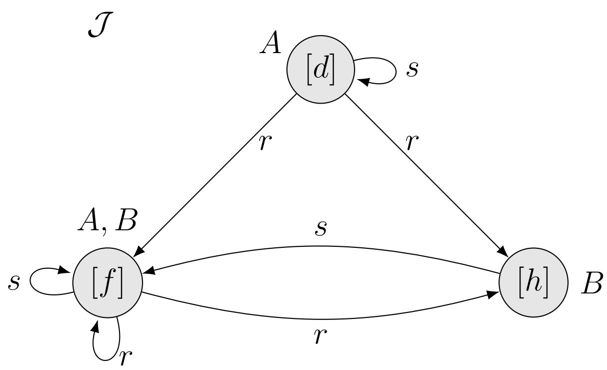


Abbildung 2: Unravelling der Interpretation $\mathcal{I}_3$

$t_{\mathcal{I}}(h) = \{B, \forall r.B, A \sqcup B\}$

Weil d und e die gleichen Typen haben, gilt: $[d] \simeq [e]$ und weil f und g die gleichen Typen haben gilt: $[f] \simeq [g]$.
Damit gibt es 3 Äquivalenzklassen: $[d] = \{d, e\}$,$[f] = \{f, g\}$ und $[h] = \{h\}$.

Die Filtration $\mathcal{J}$ bzgl. C und $\mathcal{T}$:



Aufgabe 4 b)

Ja es gilt $(\mathcal{I}, d) \sim (\mathcal{J}, [d])$, denn für alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und $D \in sub(C, \mathcal{T})$ gilt: $d \in D^{\mathcal{I}}$ gdw. $[d] \in D^{\mathcal{J}}$.

Aufgabe 5 a)

Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine TBox eine endliche Menge von Konzeptinklusionen ist (Definition 2.5). Weiterhin wissen wir, dass die Erfüllbarkeit von Konzepten bezüglich TBoxen definiert ist in Definition 2.6. Hier ist C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{T}$ besitzt ein Modell $\mathcal{I}$ in dem $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.
Beweis für Aufgabenstellung a) Nehmen wir an, C sei ein $\mathcal{ALC}$-Konzept und $\mathcal{I}$ eine Interpretation, wobei $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$. Dann gilt auch $C \equiv \bot$. Hier besteht aber ein Widerspruch, denn laut Definition 2.6 (i) ist C nur erfüllbar, wenn auch $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ $\square$

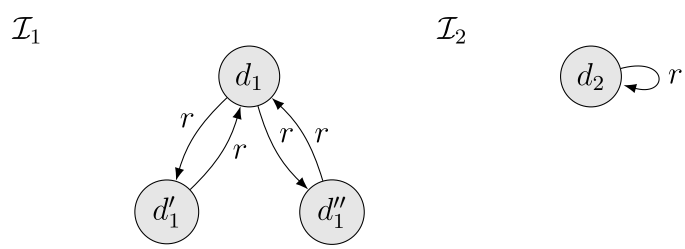
Aufgabe 5 b)

Hier müssen wir zeigen, dass alle Elemente sowohl in C als auch in D sind.
Beweis für Aufgabenstellung b) Wir zeigen, dass es kein Element gibt, dass in C aber nicht in D besteht, und dass diese Elemente $\top$ subsumieren.

Nehmen wir an, C und D seien $\mathcal{ALC}$-Konzepte und $\mathcal{I}$ ist eine Interpretation.
Wenn $e \in C^{\mathcal{I}}$ dann folgt daraus, dass $e \notin \neg C^{\mathcal{I}}$.
Und wenn auch $e \in D^{\mathcal{I}}$ dann folgt $e \notin \neg D^{\mathcal{I}}$.
Somit ist auch $e \notin (\neg C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}}$.
Und auch $e \in (C \sqcap D)^{\mathcal{I}}$.
Hier kommen wir zur Schlussfolgerung.
Laut Definition 2.9 (iii) wird $\top$ von $(C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$ subsumiert gdw. $\mathcal{T} \models C \equiv D$.
Somit bestehen Konzepte C und D, in dieser Interpretation, aus den Elementen die sich aus der Konjunktion erschließen.
Was bedeutet, dass C und D die gleichen Elemente besitzen.
Und somit auch $C \equiv D$. □

Aufgabe 6 a)

Gegeben seien die folgenden Interpretationen $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ und das $\mathcal{ALC}$-Konzept $C = \geqslant 2r.\top$.



Dann ist offensichtlich $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$ aber $d_2 \notin C^{\mathcal{I}_2}$. □

Aufgabe 6 b)

Zusätzlich muss gelten: ... und $(d_2, d_2'), (d_2, d_2'') \in r^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_2 \neq d_2'$ und $d_2 \neq d_2''$ für einen Rollennamen r.
Das bedeutet, wir wollen den Fall verhindern, dass eine Bisimulation wie $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ zustande kommt, da demnach d_2 mit der Kante r zu sich selbst nicht ausreicht. Daher würde durch die modifizierte Bedingung gelten: $(\mathcal{I}_1, d_1) \not\sim (\mathcal{I}_2, d_2)$.
Modifizierte Bedingung 4. Wenn $d_1 \rho d_2$ und (d_1, d_1'), $(d_1, d_1'') \in r^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \neq d_1''$ und $(d_2, d_2'), (d_2, d_2'') \in r^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_2 \neq d_2'$ und $d_2 \neq d_2''$ für einen Rollennamen r, dann gibt es $d_2', d_2'' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \rho d_2'$ und $d_1'' \rho d_2''$ sowie $(d_2, d_2'), (d_2, d_2'') \in r^{\mathcal{I}_2}$

Aufgabe 6 c)

Es ist nur der Induktionsschritt $\geqslant nr.C$ nötig, weil $\leqslant nr.C$ dadurch bereits inbegriffen ist.

Indiktionsschritt: Fall für Konzepte der Form ($\geqslant nr.C$)
$C = \geqslant nr.D$ **für alle natürlichen Zahlen n**
Für die Richtung " $\Rightarrow$ " argumentieren wir so:
$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$
$\Rightarrow$ es gibt ein $e_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $(d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ und $e_1 \in D$ [Regel: Semantik "$\geqslant n$"]
$\Rightarrow$ es gibt ein $e_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $(d_2, e_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ und $e_1 \rho e_2$ [Regel: Bedingung 4. (modifiziert) Bisim.ALCQ]
$\Rightarrow e_2 \in D^{\mathcal{I}_2}$ [Regel: Induktionsvorraus.]
$\Rightarrow d_2 \in \geqslant nr.D$ [Regel: Sematik "$\geqslant n$".]

Das Argument für die Rückrichtung " $\Leftarrow$ " ist analog, unter der Verwendung von der neuen modifizierten Bedingung (4) für Bisimulation.