

به نام خدا



## قسمت دوم تمرین سوم درس هوش مصنوعی

استاد: دکتر رهبان

نویسنده: سید علیرضا میررکنی

شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۰۶۶۱۷

دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف - بهار ۱۴۰۳

سوال ۴: با توجه به زنجیره مارکوف داده شده، می توان نوشت:

$$P_{\infty}(S) = P(S|S) \times P_{\infty}(S) + P(S|R) \times P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(R) = P(R|S) \times P_{\infty}(S) + P(R|R) \times P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(R) + P_{\infty}(S) = 1$$

با جایگذاری اعداد موجود در زنجیره مارکوف در معادلات بالا، خواهیم داشت:

$$P_{\infty}(S) = 0.8 \times P_{\infty}(S) + 0.6 \times P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(R) = 0.2 \times P_{\infty}(S) + 0.4 \times P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(R) + P_{\infty}(S) = 1$$

از حل دستگاه معادلات بالا به دست می آید (دقت کنید که دو معادله اول کاملاً یکسان هستند):

$$P_{\infty}(R) = \frac{1}{4} = 0.25$$

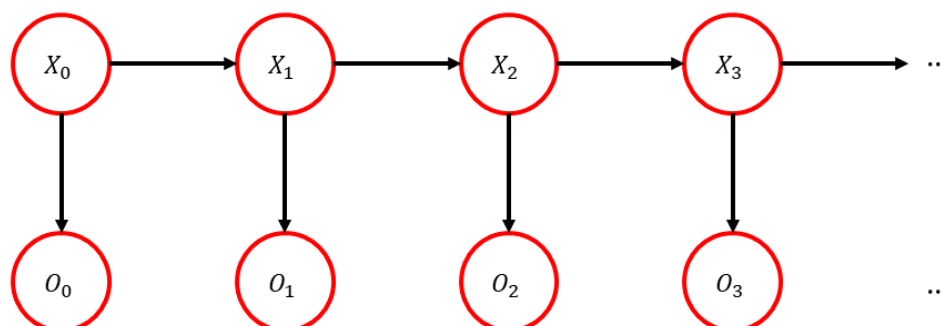
$$P_{\infty}(S) = \frac{3}{4} = 0.75$$

در نهایت می توان نوشت:

$$P_{\infty}(A) = P(A|S) \times P_{\infty}(S) + P(A|R) \times P_{\infty}(R) = 0.1 \times 0.75 + 0.6 \times 0.25 = 0.225 = \frac{9}{40}$$

## سوال ۵:

الف) HMM متناظر به این مسئله، به شکل زیر خواهد بود:



در این HMM، مقدار  $X_t$  Hidden Variable را در زمان  $t$  نمایش می دهد. در اینجا Hidden Variable (یا همان متغیر  $X$ ) یک متغیر باینری است که اگر مقدار آن در یک زمان مشخص برابر ۱ باشد، یعنی هیولا در آن زمان بیدار است و اگر مقدار آن برابر ۰ باشد، یعنی هیولا در آن زمان خوابیده است.

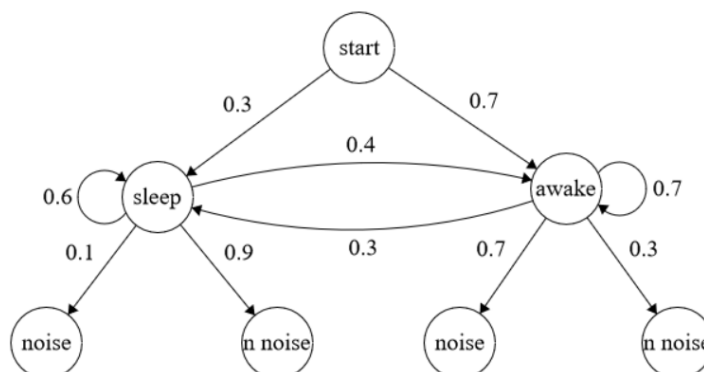
همچنین  $O_t$  متغیر باینری مشاهده (Observation) در لحظه  $t$  می باشد. اگر هیولا در لحظه  $t$  صدا تولید کند، مقدار  $O_t$  برابر ۱ خواهد شد و اگر هیولا در لحظه  $t$  صدا تولید نکند، مقدار  $O_t$  برابر ۰ می شود. به عبارت دیگر، مشاهدات ما در این HMM تولید شدن صدا توسط هیولا هستند.

جداول احتمالات این HMM به همراه ماشین انتقال آن، با توجه به اطلاعات موجود در صورت مسئله، در پایین آمده اند.

$X_t$	$O_t$	$P(O_t X_t)$
0	0	0.9
0	1	0.1
1	0	0.3
1	1	0.7

$X_t$	$X_{t+1}$	$P(X_{t+1} X_t)$
0	0	0.6
0	1	0.4
1	0	0.3
1	1	0.7

$X_0$	$P(X_0)$
0	0.3
1	0.7



ب) با توجه به الگوریتم forward می توان نوشت:

$$f_0(X_0 = 0) = P(X_0 = 0)P(O_0 = 0|X_0 = 0) = 0.3 \times 0.9 = 0.27$$

$$f_0(X_0 = 1) = P(X_0 = 1)P(O_0 = 0|X_0 = 1) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$$

$$\begin{aligned} f_1(X_1 = 0) &= f_0(X_0 = 0)P(X_1 = 0|X_0 = 0)P(O_1 = 1|X_1 = 0) \\ &\quad + f_0(X_0 = 1)P(X_1 = 0|X_0 = 1)P(O_1 = 1|X_1 = 0) \\ &= 0.27 \times 0.6 \times 0.1 + 0.21 \times 0.3 \times 0.1 = 0.0225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(X_1 = 1) &= f_0(X_0 = 0)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(O_1 = 1|X_1 = 1) \\ &\quad + f_0(X_0 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 1)P(O_1 = 1|X_1 = 1) \\ &= 0.27 \times 0.4 \times 0.7 + 0.21 \times 0.7 \times 0.7 = 0.1785 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(X_2 = 0) &= f_1(X_1 = 0)P(X_2 = 0|X_1 = 0)P(O_2 = 1|X_2 = 0) \\ &\quad + f_1(X_1 = 1)P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(O_2 = 1|X_2 = 0) \\ &= 0.0225 \times 0.6 \times 0.1 + 0.1785 \times 0.3 \times 0.1 = 0.006705 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(X_2 = 1) &= f_1(X_1 = 0)P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(O_2 = 1|X_2 = 1) \\ &\quad + f_1(X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(O_2 = 1|X_2 = 1) \\ &= 0.0225 \times 0.4 \times 0.7 + 0.1785 \times 0.7 \times 0.7 = 0.093765 \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از اعداد به دست آمده در بالا، داریم:

$$\begin{aligned} P(O_0 = \text{no noise}, O_1 = \text{noise}, O_2 = \text{noise}) &= f_2(X_2 = 0) + f_2(X_2 = 1) \\ &= 0.006705 + 0.093765 = 0.10047 \end{aligned}$$

سوال ۶:

الف) به سادگی و با توجه به جداول احتمالات داده شده، می توان نوشت:

$$P(X_0 = 0, O_0 = B) = P(X_0 = 0)P(O_0 = B|X_0 = 0) = 0.3 \times 0.1 = 0.03$$

$$P(X_0 = 1, O_0 = B) = P(X_0 = 1)P(O_0 = B|X_0 = 1) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$$

$X_0$	$P(X_0, O_0 = B)$
0	0.03
1	0.56

ب) مجدداً با توجه به جداول احتمالات داده شده می توان نوشت:

$$P(X_1 = 0, O_0 = B, O_1 = B)$$

$$= P(X_0 = 0)P(O_0 = B|X_0 = 0)P(X_1 = 0|X_0 = 0)P(O_1 = B|X_1 = 0)$$

$$+ P(X_0 = 1)P(O_0 = B|X_0 = 1)P(X_1 = 0|X_0 = 1)P(O_1 = B|X_1 = 0)$$

$$= 0.3 \times 0.1 \times 0.5 \times 0.1 + 0.7 \times 0.8 \times 0.4 \times 0.1 = 0.0239$$

$$P(X_1 = 1, O_0 = B, O_1 = B)$$

$$= P(X_0 = 0)P(O_0 = B|X_0 = 0)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(O_1 = B|X_1 = 1)$$

$$+ P(X_0 = 1)P(O_0 = B|X_0 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 1)P(O_1 = B|X_1 = 1)$$

$$= 0.3 \times 0.1 \times 0.5 \times 0.8 + 0.7 \times 0.8 \times 0.6 \times 0.8 = 0.2808$$

$X_1$	$P(X_1, O_0 = B, O_1 = B)$
0	0.0239
1	0.2808

ج) در ابتدا دقت کنید که می توان نوشت:

$$P(X_1|O_0 = B, O_1 = B) = \frac{P(X_1, O_0 = B, O_1 = B)}{P(O_0 = B, O_1 = B)}$$

$$\Rightarrow P(X_1|O_0 = B, O_1 = B) \propto P(X_1, O_0 = B, O_1 = B)$$

$$P(X_1 = 0|O_0 = B, O_1 = B) + P(X_1 = 1|O_0 = B, O_1 = B) = 1$$

با توجه به روابط و تساوی های بالا، متوجه می شویم که برای محاسبه  $P(X_1|O_0 = B, O_1 = B)$  کافی است احتمالات به دست آمده در قسمت قبل  $(P(X_1 = 1, O_0 = B, O_1 = B))$  و  $(P(X_1 = 0, O_0 = B, O_1 = B))$  را normalize کنیم. به عبارت دیگر داریم:

$$P(X_1 = 0|O_0 = B, O_1 = B)$$

$$= \frac{P(X_1 = 0, O_0 = B, O_1 = B)}{P(X_1 = 0, O_0 = B, O_1 = B) + P(X_1 = 1, O_0 = B, O_1 = B)}$$

$$= \frac{0.0239}{0.0239 + 0.2808} \approx 0.07844$$

$$P(X_1 = 1|O_0 = B, O_1 = B)$$

$$= \frac{P(X_1 = 1, O_0 = B, O_1 = B)}{P(X_1 = 0, O_0 = B, O_1 = B) + P(X_1 = 1, O_0 = B, O_1 = B)}$$

$$= \frac{0.2808}{0.0239 + 0.2808} \approx 0.92156$$

$X_1$	$P(X_1 O_0 = B, O_1 = B)$
0	0.07844
1	0.92156

سوال ۷:

الف) در ابتدا با توجه به اطلاعات مسئله، Transition Matrix را رسم می کنیم.

	D	E	F	G
D	$\frac{2}{5}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{6}{55}$
E	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$
F	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$
G	$\frac{6}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{2}{5}$

در ادامه Viterbi Value ها را برای هر کدام از متغیر های  $X_1$  تا  $X_4$  محاسبه می کنیم.

مرحله اول:

$$V(X_1 = D) = P(e_1|X_1 = D)P(X_1 = D) = 0.011 \times 0.25 = 0.00275$$

$$V(X_1 = E) = P(e_1|X_1 = E)P(X_1 = E) = 0.023 \times 0.25 = 0.00575$$

$$V(X_1 = F) = P(e_1|X_1 = F)P(X_1 = F) = 0.14 \times 0.25 = 0.035$$

$$V(X_1 = G) = P(e_1|X_1 = G)P(X_1 = G) = 0.712 \times 0.25 = 0.178$$

مرحله دوم:

$$V(X_2 = D) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_1 = D) \times P(X_2 = D|X_1 = D), V(X_1 = E) \times P(X_2 = D|X_1 = E), \\ V(X_1 = F) \times P(X_2 = D|X_1 = F), V(X_1 = G) \times P(X_2 = D|X_1 = G) \end{array} \right) \times P(e_2|X_2 = D)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.00275 \times \frac{2}{5}, 0.00575 \times \frac{6}{25}, \\ 0.035 \times \frac{3}{25}, 0.178 \times \frac{6}{55} \end{array} \right) \times 0.008 \approx 0.000155$$

$$V(X_2 = E) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_1 = D) \times P(X_2 = E|X_1 = D), V(X_1 = E) \times P(X_2 = E|X_1 = E), \\ V(X_1 = F) \times P(X_2 = E|X_1 = F), V(X_1 = G) \times P(X_2 = E|X_1 = G) \end{array} \right) \times P(e_2|X_2 = E)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.00275 \times \frac{18}{55}, 0.00575 \times \frac{2}{5}, \\ 0.035 \times \frac{6}{25}, 0.178 \times \frac{9}{55} \end{array} \right) \times 0.019 \approx 0.000553$$

$$V(X_2 = F) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_1 = D) \times P(X_2 = F|X_1 = D), V(X_1 = E) \times P(X_2 = F|X_1 = E), \\ V(X_1 = F) \times P(X_2 = F|X_1 = F), V(X_1 = G) \times P(X_2 = F|X_1 = G) \end{array} \right) \times P(e_2|X_2 = F)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.00275 \times \frac{9}{55}, 0.00575 \times \frac{6}{25}, \\ 0.035 \times \frac{2}{5}, 0.178 \times \frac{18}{55} \end{array} \right) \times 0.12 \approx 0.006991$$

$$V(X_2 = G) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_1 = D) \times P(X_2 = G|X_1 = D), V(X_1 = E) \times P(X_2 = G|X_1 = E), \\ V(X_1 = F) \times P(X_2 = G|X_1 = F), V(X_1 = G) \times P(X_2 = G|X_1 = G) \end{array} \right) \times P(e_2|X_2 = G)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.00275 \times \frac{6}{55}, 0.00575 \times \frac{3}{25}, \\ 0.035 \times \frac{6}{25}, 0.178 \times \frac{2}{5} \end{array} \right) \times 0.763 \approx 0.054326$$

همانطور که مشاهده می شود، بیشینه Viterbi Value برای همه حالات زمانی حاصل می شود که  $X_1 = G$  باشد.

مرحله سوم:

$$V(X_3 = D) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_2 = D) \times P(X_3 = D|X_2 = D), V(X_2 = E) \times P(X_3 = D|X_2 = E), \\ V(X_2 = F) \times P(X_3 = D|X_2 = F), V(X_2 = G) \times P(X_3 = D|X_2 = G) \end{array} \right) \times P(e_3|X_3 = D)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.000155 \times \frac{2}{5}, 0.000553 \times \frac{6}{25}, \\ 0.006991 \times \frac{3}{25}, 0.054326 \times \frac{6}{55} \end{array} \right) \times 0.009 \approx 0.000053$$

$$V(X_3 = E) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_2 = D) \times P(X_3 = E|X_2 = D), V(X_2 = E) \times P(X_3 = E|X_2 = E), \\ V(X_2 = F) \times P(X_3 = E|X_2 = F), V(X_2 = G) \times P(X_3 = E|X_2 = G) \end{array} \right) \times P(e_3|X_3 = E)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.000155 \times \frac{18}{55}, 0.000553 \times \frac{2}{5}, \\ 0.006991 \times \frac{6}{25}, 0.054326 \times \frac{9}{55} \end{array} \right) \times 0.021 \approx 0.000187$$

$$V(X_3 = F) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_2 = D) \times P(X_3 = F|X_2 = D), V(X_2 = E) \times P(X_3 = F|X_2 = E), \\ V(X_2 = F) \times P(X_3 = F|X_2 = F), V(X_2 = G) \times P(X_3 = F|X_2 = G) \end{array} \right) \times P(e_3|X_3 = F)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.000155 \times \frac{9}{55}, 0.000553 \times \frac{6}{25}, \\ 0.006991 \times \frac{2}{5}, 0.054326 \times \frac{18}{55} \end{array} \right) \times 0.131 \approx 0.002329$$

$$V(X_3 = G) = \max \left( \begin{array}{l} V(X_2 = D) \times P(X_3 = G|X_2 = D), V(X_2 = E) \times P(X_3 = G|X_2 = E), \\ V(X_2 = F) \times P(X_3 = G|X_2 = F), V(X_2 = G) \times P(X_3 = G|X_2 = G) \end{array} \right) \times P(e_3|X_3 = G)$$

$$= \max \left( \begin{array}{l} 0.000155 \times \frac{6}{55}, 0.000553 \times \frac{3}{55}, \\ 0.006991 \times \frac{6}{25}, 0.054326 \times \frac{2}{5} \end{array} \right) \times 0.83 \approx 0.018036$$

همانطور که مشاهده می شود، بیشینه Viterbi Value برای همه حالات زمانی حاصل می شود که  $X_2 = G$  باشد.



مرحله چهارم:

$$V(X_4 = D) = \max \left( \frac{V(X_3 = D) \times P(X_4 = D|X_3 = D), V(X_3 = E) \times P(X_4 = D|X_3 = E),}{V(X_3 = F) \times P(X_4 = D|X_3 = F), V(X_3 = G) \times P(X_4 = D|X_3 = G)} \right) \times P(e_4|X_4 = D)$$

$$= \max \left( \frac{0.000053 \times \frac{2}{5}, 0.000187 \times \frac{18}{55},}{0.002329 \times \frac{9}{55}, 0.018036 \times \frac{6}{55}} \right) \times 0.181 \approx 0.000356$$

$$V(X_4 = E) = \max \left( \frac{V(X_3 = D) \times P(X_4 = E|X_3 = D), V(X_3 = E) \times P(X_4 = E|X_3 = E),}{V(X_3 = F) \times P(X_4 = E|X_3 = F), V(X_3 = G) \times P(X_4 = E|X_3 = G)} \right) \times P(e_4|X_4 = E)$$

$$= \max \left( \frac{0.000053 \times \frac{6}{25}, 0.000187 \times \frac{2}{5},}{0.002329 \times \frac{6}{25}, 0.018036 \times \frac{3}{25}} \right) \times 0.687 \approx 0.002028$$

$$V(X_4 = F) = \max \left( \frac{V(X_3 = D) \times P(X_4 = F|X_3 = D), V(X_3 = E) \times P(X_4 = F|X_3 = E),}{V(X_3 = F) \times P(X_4 = F|X_3 = F), V(X_3 = G) \times P(X_4 = F|X_3 = G)} \right) \times P(e_4|X_4 = F)$$

$$= \max \left( \frac{0.000053 \times \frac{3}{25}, 0.000187 \times \frac{6}{25},}{0.002329 \times \frac{2}{5}, 0.018036 \times \frac{6}{25}} \right) \times 0.033 \approx 0.000195$$

$$V(X_4 = G) = \max \left( \frac{V(X_3 = D) \times P(X_4 = G|X_3 = D), V(X_3 = E) \times P(X_4 = G|X_3 = E),}{V(X_3 = F) \times P(X_4 = G|X_3 = F), V(X_3 = G) \times P(X_4 = G|X_3 = G)} \right) \times P(e_4|X_4 = G)$$

$$= \max \left( \frac{0.000053 \times \frac{6}{55}, 0.000187 \times \frac{9}{55},}{0.002329 \times \frac{18}{55}, 0.018036 \times \frac{2}{5}} \right) \times 0.018 \approx 0.000130$$

همانطور که مشاهده می شود، بیشینه Viterbi Value برای همه حالات زمانی حاصل می شود که  $X_3 = G$  باشد.

با ادامه دادن الگوریتم، متوجه می شویم که باید مقادیر  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$  و  $X_8$  را به ترتیب برابر  $G, G, G, E, F, F, D$  قرار دهیم. دقت کنید که برای ادامه الگوریتم، علاوه بر محاسبه دستی برای اطمینان بیشتر از برنامه

ای که به زبان پایتون نوشته ایم استفاده کرده ایم. کد این برنامه را می توانید در [این لینک](#) مشاهده کنید. کافی است با

اجرای این برنامه، احتمال وقوع هر کدام از مقادیر متغیر پنهان را به شرط مشاهده انجام شده در زمان مشخص، به ترتیب

به آن ورودی بدهید و در هر لحظه مسیر بیشینه به همراه اطلاعات اضافه دیگر (شامل همه مسیر ها و Viterbi Value

ها) را مشاهده کنید. در نهایت، نت های قطعه داده شده به شکل زیر هستند:

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 = GGGEFFFD$$

ب) مراحل Particle Filtering را به ترتیب اجرا می کنیم (Particle های اولیه  $P_1 = D$ ,  $P_2 = E$ ,  $P_3 = F$  و  $P_4 = G$  هستند).

• Weighting:

$$W(P_1) = P(e_1|X_1 = D) = 0.011$$

$$W(P_2) = P(e_1|X_1 = E) = 0.023$$

$$W(P_3) = P(e_1|X_1 = F) = 0.140$$

$$W(P_4) = P(e_1|X_1 = G) = 0.712$$

• Resampling:

$$\text{probability of sampling } P_1 = \frac{0.011}{0.011 + 0.023 + 0.140 + 0.712} = 0.0124$$

$$\text{probability of sampling } P_2 = \frac{0.023}{0.011 + 0.023 + 0.140 + 0.712} = 0.0260$$

$$\text{probability of sampling } P_3 = \frac{0.140}{0.011 + 0.023 + 0.140 + 0.712} = 0.1580$$

$$\text{probability of sampling } P_4 = \frac{0.712}{0.011 + 0.023 + 0.140 + 0.712} = 0.8036$$

$$\Rightarrow P_{1_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.6284) = P_4 = G$$

$$P_{2_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.1842) = P_3 = F$$

$$P_{3_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.5482) = P_4 = G$$

$$P_{4_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.7700) = P_4 = G$$

• Elapse Of Time:

$$P(D|G) = 0.109$$

$$P(E|G) = 0.164$$

$$P(F|G) = 0.327$$

$$P(G|G) = 0.400$$

$$P(D|F) = 0.120$$

$$P(E|F) = 0.240$$

$$P(F|F) = 0.400$$

$$P(G|F) = 0.240$$

$$\Rightarrow P_{1_{new}} = \text{sample}((X_2|G), 0.3556) = F$$

$$P_{2_{new}} = \text{sample}((X_2|F), 0.8090) = G$$

$$P_{3_{new}} = \text{sample}((X_2|G), 0.1113) = E$$

$$P_{4_{new}} = \text{sample}((X_2|G), 0.5338) = F$$

• Weighting :

$$W(P_1) = P(e_2|X_2 = F) = 0.120$$

$$W(P_2) = P(e_2|X_2 = G) = 0.763$$

$$W(P_3) = P(e_2|X_2 = E) = 0.019$$

$$W(P_4) = P(e_2|X_2 = F) = 0.120$$

• Resampling :

$$\text{probabilty of sampling } P_1 = \frac{0.120}{0.120 + 0.763 + 0.019 + 0.120} = 0.1174$$

$$\text{probabilty of sampling } P_2 = \frac{0.763}{0.120 + 0.763 + 0.019 + 0.120} = 0.7466$$

$$\text{probabilty of sampling } P_3 = \frac{0.019}{0.120 + 0.763 + 0.019 + 0.120} = 0.0186$$

$$\text{probabilty of sampling } P_4 = \frac{0.120}{0.120 + 0.763 + 0.019 + 0.120} = 0.1174$$

$$\Rightarrow P_{1_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.0043) = P_1 = F$$

$$P_{2_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.3455) = P_2 = G$$

$$P_{3_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.2198) = P_2 = G$$

$$P_{4_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.2875) = P_2 = G$$

• Elapse Of Time :احتمالات مشابه Elapse Of Time قبلی هستند.

$$\Rightarrow P_{1_{new}} = \text{sample}((X_3|F), 0.0570) = D$$

$$P_{2_{new}} = \text{sample}((X_3|G), 0.8803) = G$$

$$P_{3_{new}} = \text{sample}((X_3|G), 0.5927) = F$$

$$P_{4_{new}} = \text{sample}((X_3|G), 0.6177) = G$$

• Weighting :

$$W(P_1) = P(e_3|X_3 = D) = 0.009$$

$$W(P_2) = P(e_3|X_3 = G) = 0.830$$

$$W(P_3) = P(e_3|X_3 = F) = 0.131$$

$$W(P_4) = P(e_3|X_3 = G) = 0.830$$

• Resampling :

$$\text{probability of sampling } P_1 = \frac{0.009}{0.009 + 0.830 + 0.131 + 0.830} = 0.0050$$

$$\text{probability of sampling } P_2 = \frac{0.830}{0.009 + 0.830 + 0.131 + 0.830} = 0.4611$$

$$\text{probability of sampling } P_3 = \frac{0.131}{0.009 + 0.830 + 0.131 + 0.830} = 0.0728$$

$$\text{probability of sampling } P_4 = \frac{0.830}{0.009 + 0.830 + 0.131 + 0.830} = 0.4611$$

$$\Rightarrow P_{1_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.5034) = P_3 = F$$

$$P_{2_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.8624) = P_4 = G$$

$$P_{3_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.7918) = P_4 = G$$

$$P_{4_{new}} = \text{sample}(\text{weights}, 0.3254) = P_2 = G$$

پس ذرات نهایی به ترتیب برابر  $P_1 = F$  و  $P_2 = P_3 = P_4 = G$  شدند و این بدین معنی است که به احتمال  $\frac{3}{4}$  نت سوم همان  $G$  می باشد.