

به نام خدا



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

درس تئوری مخبرات پیشرفته

تکلیف کامپیوتری شماره یک

علیرضا قضاوی (۹۹۱۳۹۰۴)

فروردین ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۳	فهرست شکل‌ها
۴	فصل اول
۴	نگاهی به مدولاسیون‌های MSK و OQPSK
۵	۱-۱- شکل موج‌های مدولاسیون $\pi/4$ QPSK
۱۱	۱-۳- شکل موج‌های مدولاسیون MSK
۱۴	فصل دوم
۱۴	بررسی اجمالی چگالی طیف توان مدولاسیون CPFSK
۱۵	فصل سوم
۱۵	نگاهی به مدولاسیون CPM (Continuous Phase Modulation)
۲۲	مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱: دیاگرام زمانی برای مدولاسیون‌های BPSK و QPSK ۴
- شکل ۲: دنباله اطلاعات ورودی به مدولاتور ۵
- شکل ۳: الف: دنباله‌ی اطلاعاتی به فرم NRZ ، ب: مولفه‌های با شماره‌ده زوج دنباله اطلاعاتی و ج: مولفه‌های با شماره‌ده فرد دنباله اطلاعاتی ۶
- شکل ۴: شکل موج‌های متناظر با مدولاسیون‌های BPSK برای هر کدام از مولفه‌های هم‌فاز و متعامد در باند میانی و شکل موج متناظر با جمع مولفه‌های هم‌فاز و متعامد (سیگنال مدوله شده $\pi/4$ QPSK). خطوط سبز رنگ نشانگر پوش سیگنال ارسالی هستند ۶
- شکل ۵: منظومه‌ی سیگنالینگ BPSK ۷
- شکل ۶: منظومه‌ی سیگنالینگ $\pi/4$ QPSK با نگاشت گری ۷
- شکل ۷: پوش سیگنال مدوله شده‌ی سیگنالینگ $\pi/4$ QPSK ۸
- شکل ۸: دیاگرام زمانی و مولفه‌های هم‌فاز و متعامد در مدولاسیون OQPSK. [1] ۹
- شکل ۹: شکل موج‌های مربوط به سیگنالینگ OQPSK با شکل موج مستطیلی؛ مولفه‌ی هم‌فاز، مولفه‌ی متعامد شیف‌ت یافته، جمع دو مولفه متناظر با سیگنال خروجی مدولاتور OQPSK. خطوط سبز رنگ نشانگر پوش سیگنال ارسالی است ۹
- شکل ۱۰: تغییرات اندازه‌ی پوش سیگنال مدوله شده‌ی OQPSK با شکل موج مستطیلی ۱۱
- شکل ۱۱: مولفه‌های هم‌فاز، متعامد و سیگنال مدوله شده‌ی نهایی در مدولاسیون MSK ۱۲
- شکل ۱۲: نمونه‌ای از وقوع اعوجاج گذر از صفر؛ مطابق مطالب گزارش و تئوری، در MSK برخلاف OQPSK پالس مستطیلی و QPSK اعوجاج گذر از صفر نخواهیم داشت. [3] ۱۲
- شکل ۱۳: چگالی طیف توان مدولاسیون CPFSK برای چند مقدار مختلف h (اندیس مدولاسیون) و برای هر یک از مقادیر M (تعداد سیمبل‌ها) با فرض $Tb = 1s$ ۱۴
- شکل ۱۴: سیگنال پالس LRC و انتگرال آن برای دو مقدار مختلف پارامتر L ۱۵
- شکل ۱۵: دیاگرام داربست متناظر با مقادیر پارامتر L برابر با ۱ ۱۸
- شکل ۱۶: ترلیس حالت و یک مسیر واحد روی ترلیس برای دنباله داده شده برای 2RC ۱۹
- شکل ۱۷: دیاگرام حالت برای $L=1$ ۲۰
- شکل ۱۸: مسیر فاز $\varphi(t;I)$ برای ورودی داده شده به ازای $h = 23$ و پالس LRC با پارامترهای L های مختلف متناظر با پاسخ کامل و پاسخ نسبی ۲۱
- شکل ۱۹: استوانه‌ی فاز به ازای مقادیر مختلف پارامتر L ۲۱

فصل اول

نگاهی به مدولاسیون‌های OQPSK و MSK

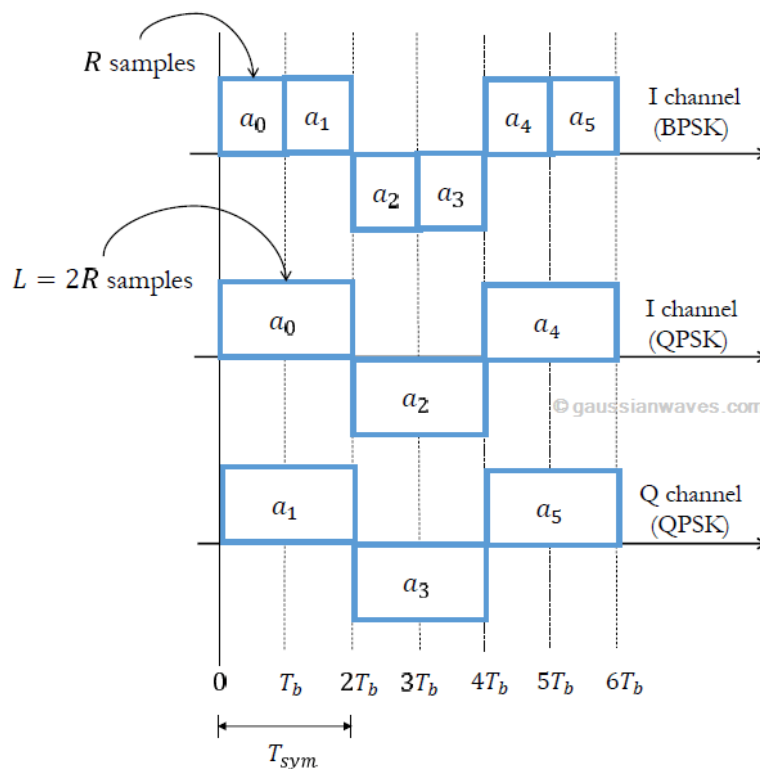
همانگونه که در درس اشاره شد، مدولاسیون $\frac{\pi}{4}$ QPSK را می‌توان به صورت مجموع دو مدولاسیون BPAM یا BPSK مجزا بر روی دنباله بیت‌های زوج و فرد تعبیر نمود (این دو تعبیر با هم دیگر معادلند). به این ترتیب شکل موج مدوله شده را می‌توان به صورت

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n}g(t - 2nT_b) \cos(2\pi f_c T_b) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n+1}g(t - 2nT_b) \sin(2\pi f_c T_b) \quad (1)$$

بازنویسی کرد که در آن:

$$s_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n}g(t - 2nT_b), s_q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n+1}g(t - 2nT_b) \quad (2)$$

$I_k \in \{-1, +1\}$ پیام‌های دودویی منبع، و T_b دوره ارسال هر بیت است (دوره ارسال هر سیمبل $QPSK$ به صورت $T_s = 2T_b$ است). حال فرض کنید $T_b = 1$ و $f_c = \frac{2}{T_b}$ باشد (البته در عمل $f_c T_b \gg 1$ ، اما در این تمرین برای مشاهده بهتر رفتار سیگنال‌ها این شرط رعایت نشده است) و دنباله‌ی ورودی به صورت ۱۱ ۰۰ ۱۰ ۱۱ ۰۰ ۱۰ ۰۰ به مدولاتور وارد شود. برای درک بهتر زمانبندی سیگنالینگ‌ها، شکل ۱ را ملاحظه کنید.

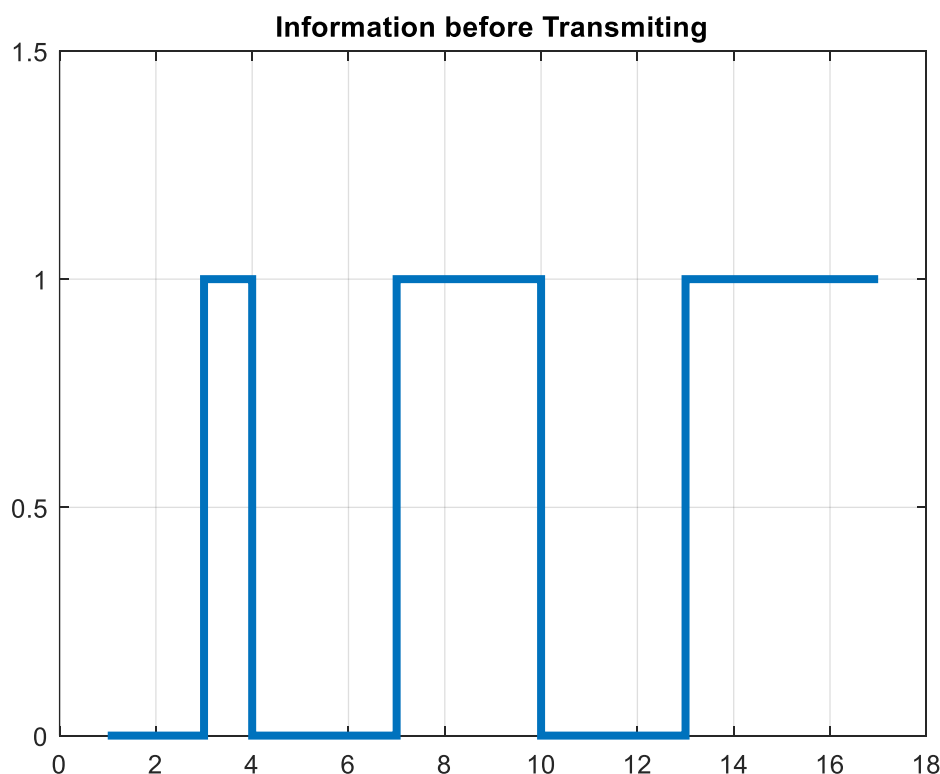


شکل ۱: دیاگرام زمانی برای مدولاسیون‌های BPSK و QPSK

۱-۱- شکل موج‌های مدولاسیون $\frac{\pi}{4}$ QPSK

الف) با فرض آن که $g(t)$ پالس مستطیلی با عرض $2T_b$ و دامنه‌ی ۱ باشد، $s_i(t) \cos(2\pi f_c T_b)$ ، $s_q(t) \sin(2\pi f_c T_b)$ و $s(t)$ را بر حسب زمان رسم کنید.

دنباله‌ی اطلاعاتی ورودی به صورت زیر است:



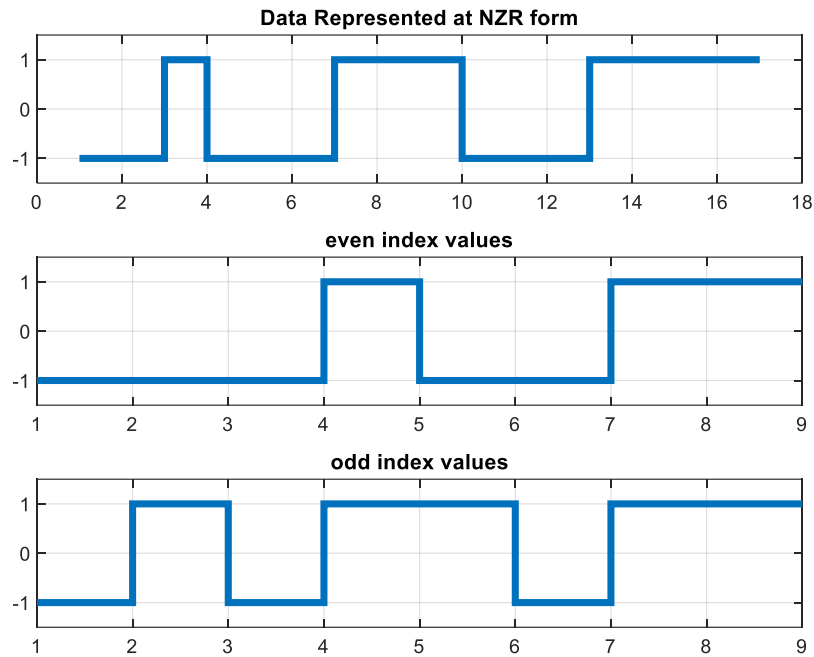
شکل ۲: دنباله اطلاعات ورودی به مدولاتور

برای مدولاسیون QPSK لازم است دنباله اطلاعاتی فوق را به فرم NRZ^۱ دربیاوریم. در واقع دنباله اطلاعات ورودی دنباله‌ای از ارقام باینری با مقادیر صفر و یک است، در حالی که دنباله‌ای که در مدولاتور نیاز داریم، باید متناظر با صفر و یک در دنباله اطلاعاتی، مقادیر -1 و $+1$ را داشته باشد. پس از این باید دنباله اطلاعات به فرم NRZ را به دو دسته تقسیم کنیم: مولفه‌های با شماره‌ده^۲ زوج و مولفه‌های با شماره‌ده فرد. این موارد در شکل ۳ نمایش داده شده است.

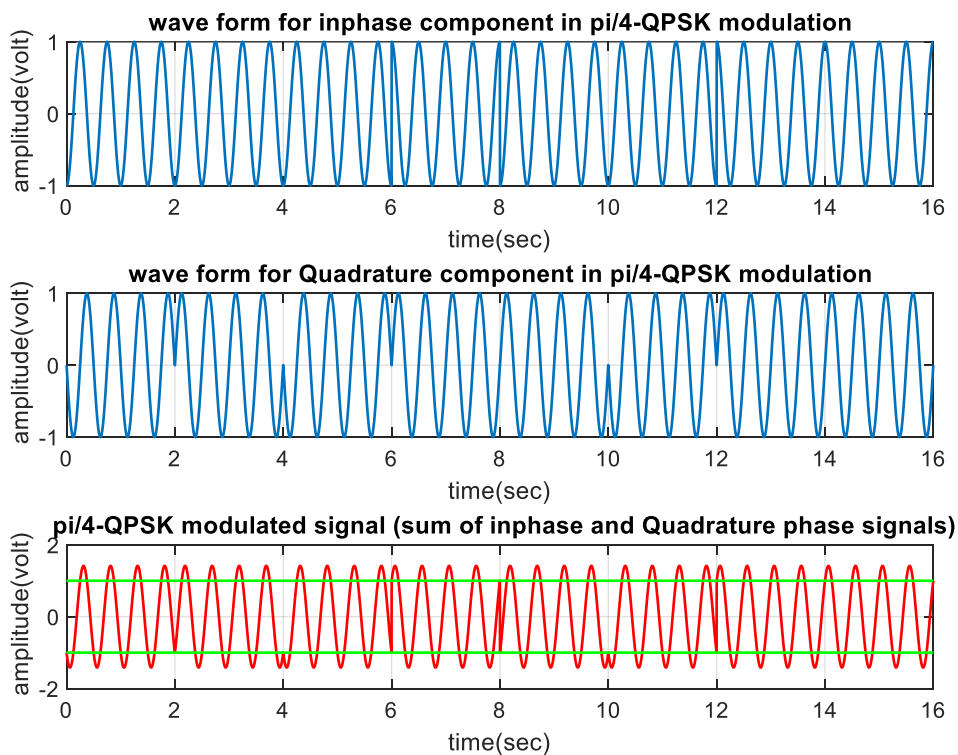
در شکل ۴ نمودارهای متناظر با $s_i(t) \cos(2\pi f_c T_b)$ ، $s_q(t) \sin(2\pi f_c T_b)$ و $s(t)$ بر حسب زمان رسم شده است. توجه کنید که هر کدام از دو شکل آبی رنگ نخست در شکل ۴ متناظر با یک مدولاتور BPSK با دوره تناوب $T_s = 2s$ و ریت ارسال سیمبول برابر با $R_s = \frac{1}{T_s} = 0.5 \text{ bits/second}$ است. مشاهده می‌کنیم که تغییرات دامنه در سیگنال مدوله شده نهایی داریم و دامنه سیگنال مدوله شده (قرمز رنگ) ثابت نیست و گذر از صفر داریم.

^۱ non return to zero

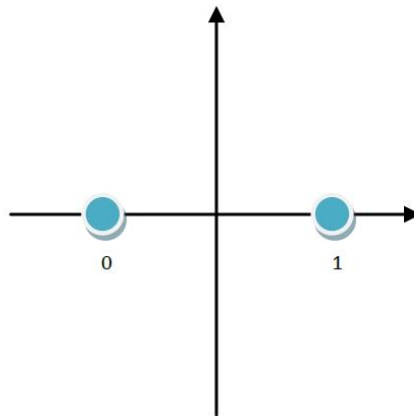
^۲ index



شکل ۳: الف: دنباله‌ی اطلاعاتی به فرم NRZ، ب: مولفه‌های با شمارنده زوج دنباله اطلاعاتی و ج: مولفه‌های با شمارنده فرد دنباله اطلاعاتی

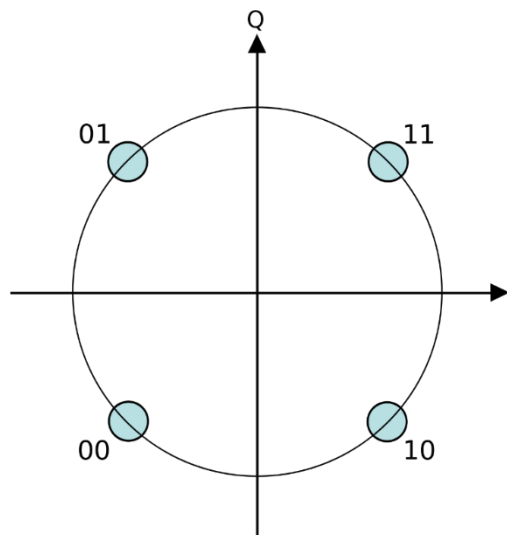


شکل ۴: شکل موج‌های متناظر با مدولاسیون‌های BPSK برای هر کدام از مولفه‌های همفاز و متعامد در باند میانی و شکل موج متناظر با جمع مولفه‌های هم فاز و متعامد (سیگنال مدوله شده‌ی $\pi/4$ QPSK). خطوط سبز رنگ نشانگر پوش سیگنال ارسالی هستند.



شکل ۵: منظومه‌ی سیگنالینگ BPSK

با توجه به شکل ۵، ملاحظه می‌کنیم که حداکثر جهش فاز در BPSK برابر 180° درجه است و بنابراین در هر کدام از مدولاتورهای BPSK که برای پیاده سازی $\frac{\pi}{4}$ QPSK استفاده شده است، نرخ جهش فاز برابر است با $\frac{1}{T_s} = 0.5 \text{ bits/second}$ خواهد بود. این جهش فاز را در دو نمودار نخست شکل ۴ نیز می‌توان مشاهده کرد.



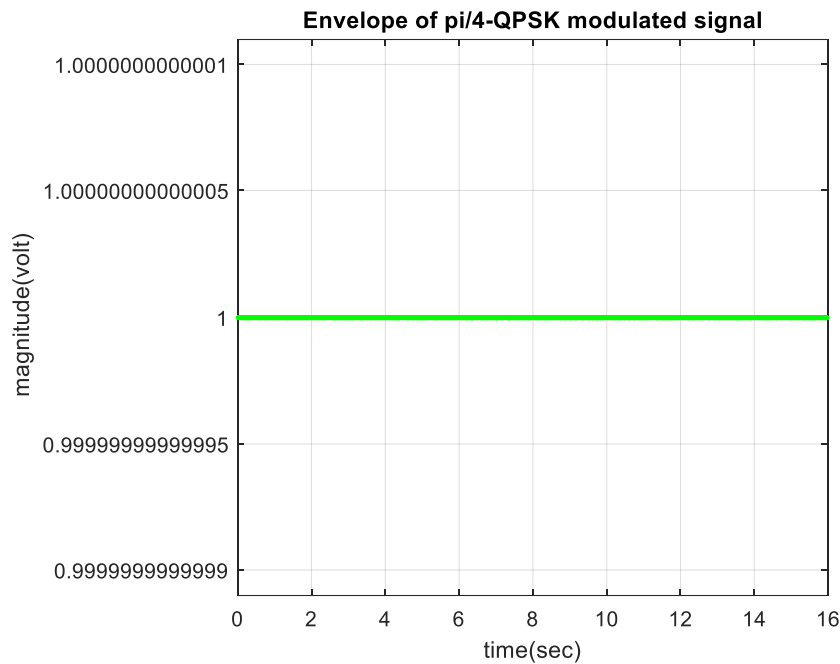
شکل ۶: منظومه‌ی سیگنالینگ $\frac{\pi}{4}$ QPSK با نگاشت گری

مطابق مطالب گفته شده در کلاس، پیاده سازی $\frac{\pi}{4}$ QPSK به شیوه افراز دنباله اطلاعاتی (که در این سوال نیز همین روش پیشنهاد شده است) با روش پیاده سازی مستقیم مدولاسیون دوتایی فاز معادل همديگرند. بنابراین سیگنال قرمز رنگ موجود در شکل ۴ همان شکل موج خروجی مدولاتور $\frac{\pi}{4}$ QPSK است. همانگونه که در شکل ۴ و نمودار قرمز رنگ قابل مشاهده است، پرش‌های فاز 0° درجه (ارسال دو سمبل آخر^۱)، 90° درجه (ارسال سه سمبل اول، انتقال از حالت ارسال سیمبل چهارم به پنجم و پنجم به ششم) و 180° درجه (انتقال از حالت ارسال سیمبل سوم به چهارم و انتقال حالت از ارسال سیمبل ششم به هفتم) در شکل موج خروجی $\frac{\pi}{4}$ QPSK بسته به دنباله اطلاعاتی ارسالی خواهیم داشت، که در این میان پرش فاز 180° درجه ماکزیمم پرش فاز در مدولاتور $\frac{\pi}{4}$ QPSK می‌باشد، هم چنین با توجه به

^۱ شمارش سیمبل‌ها از چپ به راست است.

نمودار قرمز رنگ، نرخ جهش فاز در سیگنالینگ $\pi/4$ QPSK برابر $\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_b} = 0.5 \text{ bits/second}$ است. این مطلب از روی منظومه‌ی سیگنالینگ $\pi/4$ QPSK نیز قابل دریافت است. همانگونه که در شکل ۶ مشاهده می‌شود ماکزیمم جهش فاز در مدولاتور $\pi/4$ QPSK برابر ۱۸۰ درجه می‌باشد. این جهش فازها به ترتیب می‌تواند مربوط به انتقال از حالت ارسال ۰۰ به حالت ارسال ۱۱ یا بلعکس و یا انتقال از حالت ارسال ۱۰ به حالت ارسال ۰۱ یا بلعکس باشد.

جهش فاز فوق موجب افزایش دامنه‌ی لوب‌های فرعی و لذا افزایش پهنای باند مدولاتور می‌گردد. برای رفع مشکل فوق، $Offset$ QPSK ($OQPSK$) معرفی شده است، که در قسمت بعدی بررسی می‌شود.



شکل ۷: پوش سیگنال مدوله شده‌ی سیگنالینگ $\pi/4$ QPSK

همچنین، همانگونه که در شکل ۴ و شکل ۷ مشاهده می‌شود، مقدار دامنه پوش^۱ مختلط سیگنال مدوله شده‌ی $\pi/4$ QPSK مقدار ثابت و برابر دامنه سیگنال پالس است. در تئوری هم دیده ایم که مدولاسیون‌های فاز مانند $\pi/4$ QPSK دارای پوش مختلط ثابتی هستند.

۱-۲- شکل موج‌های مدولاسیون $OQPSK$

ب- در روش $OQPSK$ ، به مولفه‌ی $s_q(t)$ تأخیری برابر با T_b اعمال می‌شود، یعنی:

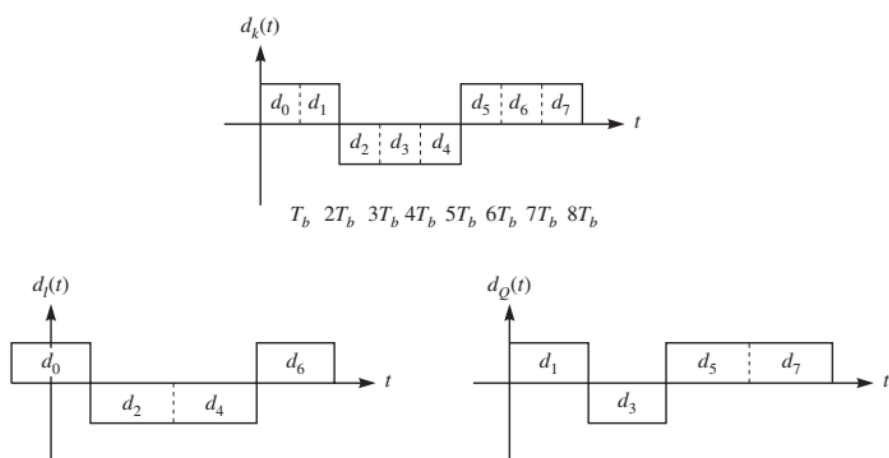
$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n}g(t - 2nT_b) \cos(2\pi f_c T_b) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n+1}g(t - 2nT_b - T_b) \sin(2\pi f_c T_b) \quad (3)$$

بازنویسی کرد که در آن:

$$\hat{s}_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n}g(t - 2nT_b), \hat{s}_q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{2n+1}g(t - 2nT_b - T_b) \quad (4)$$

^۱ envelope

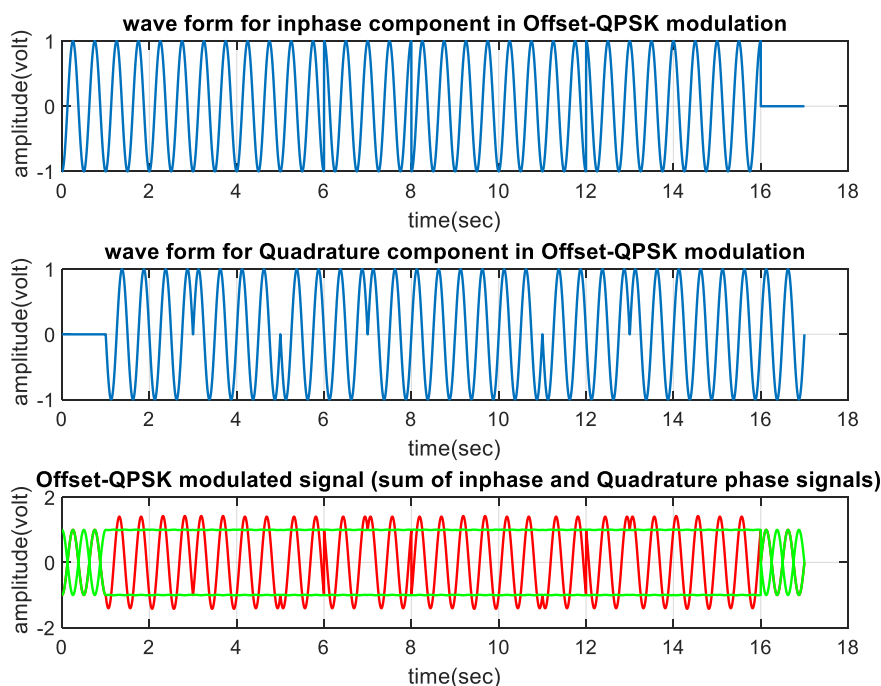
مجدداً با فرض آن که $g(t)$ پالس مستطیلی با عرض $2T_b$ و دامنه‌ی ۱ باشد، $\hat{s}_i(t) \cos(2\pi f_c T_b)$ ، $\hat{s}_q(t) \sin(2\pi f_c T_b)$ را بر حسب زمان رسم کنید.



شکل ۸: دیاگرام زمانی و مولفه‌های هم فاز و متعامد در مدولاسیون OQPSK [1].

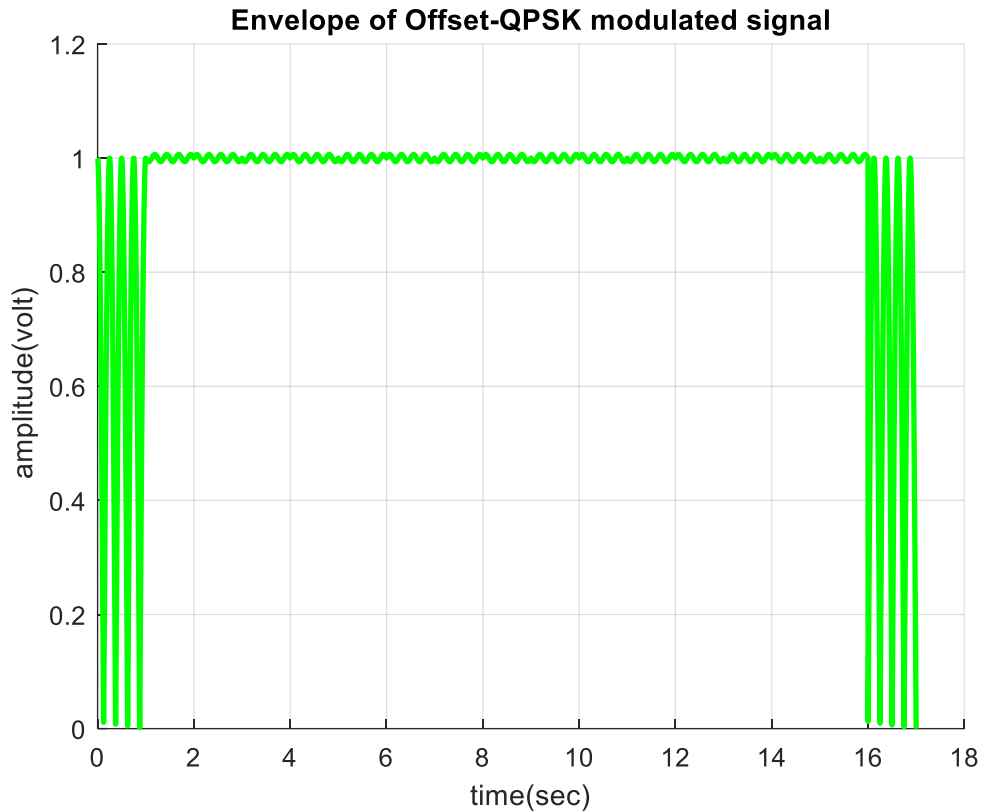
دیاگرام زمانی مدولاسیون OQPSK در شکل ۸ نشان داده شده است.

شکل موج‌های خواسته شده به صورت شکل ۹ است. ملاحظه می‌شود که تغییرات دامنه در سیگنال مدوله شده نهایی داریم و دامنه سیگنال مدوله شده (قرمز رنگ) ثابت نیست و گذر از صفر داریم.



شکل ۹: شکل موج‌های مربوط به سیگنالینگ OQPSK با شکل موج مستطیلی؛ مولفه‌ی هم فاز، مولفه‌ی متعامد شیف‌ت یافته، جمع دو مولفه متناظر با سیگنال خروجی مدولاتور OQPSK. خطوط سبز رنگ نشانگر پوش سیگنال ارسالی است.

همانگونه که در کلاس درس بیان شد و در شکل ۸ برای سادگی ارجاع آورده شده است، در مدولاسیون OQPSK هر سیمبل ارسالی (دو بیت) به جای آن که همانند $\frac{\pi}{4}$ QPSK در $2T_b$ ارسال شود. در طی $3T_b$ ارسال می شود (یک و نیم برابر $\frac{\pi}{4}$ QPSK). البته همانگونه که در شکل ۸ مشاهده می کنیم، این تایمینگ ها به جز T_b ثانیه اول و آخر با هم همپوشانی دارند. به هر حال نتیجه ای که می توان از شکل ۸ گرفت آن است که OQPSK در دو مرحله تغییر فاز را اعمال می کند. در $2T_b$ ثانیه اول ارسال هر سیمبل، بیت زوج متناظر با مولفه هم فاز ارسال می شود. مطابق شکل ۶، بیت زوج بیانگر این است که سیمبل ارسالی در کدام یک از دو ربع بالایی یا دو ربع پایینی منظومه ی سیگنالینگ است. به طور مشابه در میانه ی ارسال بیت زوج یعنی پس از گذشت T_b ثانیه از شروع ارسال مولفه هم فاز (با تأخیر نسبت به مولفه هم فاز)، ارسال مولفه متعامد (بیت فرد سیمبل) آغاز می شود، همانند قبل بیت فرد بیانگر آن است که سیگنال ارسالی در کدام یک از دو ربع سمت راست یا چپ منظومه ی سیگنالینگ است. بنابراین در یک بازه زمانی بالا یا پایین بودن سیگنال ارسالی در منظومه و در بازه زمانی دیگر (که به اندازه T_b نسبت به بازه اول تأخیر داشته و دیرتر اعمال می شود) چپ یا راست بودن موقعیت سیگنال ارسالی در منظومه ی سیگنالینگ مشخص می شود. بنابراین حداکثر چرخش فاز در سیگنال نهایی مدوله شده، در معین کردن بالا یا پایین بودن و یا چپ یا راست بودن، $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. پس برای چرخش فاز 180° درجه ای متناظر در $\frac{\pi}{4}$ QPSK، در این مدولاسیون دو چرخش فاز 90° درجه ای در دو بازه زمانی داریم که نسبت به همدیگر تأخیر دارند، بنابراین حداکثر چرخش فاز در OQPSK برخلاف $\frac{\pi}{4}$ QPSK که 180° درجه بود، برابر 90° درجه است. این موارد همگی از روی شکل ۹ قابل مشاهده است. همانگونه که مشاهده می شود در هر کدام از مولفه های هم فاز و متعامد مانند قبل مدولاتور BPSK داریم که حداکثر چرخش فاز 180° درجه ای را به صورت مجزا دارند. اما چون در این جا این دو مولفه نسبت به هم تأخیر دارند در سیگنال نهایی مدوله شده شیفต์ فاز 180° درجه ای در طی دو مرحله 90° درجه شیفต์ فاز اعمال می شود و بنابراین حداکثر چرخش فاز در سیگنال خروجی مدولاتور OQPSK که با رنگ قرمز نشان داده شده است، به 90° درجه کاهش یافته در بحث طیف نیز خواهیم دید که OQPSK و QPSK دارای چگالی طیف توان و دامنه ی لوب های فرعی یکسانی هستند، صرفاً تفاوت آنها بعد از فیلتر شدن در باند میانی است. در واقع، به علت جهش فاز از یک فاصله ارسال به فاصله بعد، دامنه لوب های فرعی افزایش می یابد که منجر به افزایش پهنای باند خواهد شد. جهت اجتناب از آن از یک فیلتر باند میانی بعد از مدولاتور استفاده می شود. پوش سیگنال $\frac{\pi}{4}$ QPSK فیلتر شده لحظاتی دارای دامنه ی صفر نیز می باشد، لذا نسبت ماکزیمم دامنه به می نیمم آن مساوی بی نهایت است. اما برای OQPSK این نسبت حدود $\sqrt{2}$ است. لذا با بکارگیری آن می توان از تقویت کننده RF ارزانتری بهره جست. [2]



شکل ۱۰: تغییرات اندازه‌ی پوش سیگنال مدوله شده‌ی *OQPSK* با شکل موج مستطیلی

در شکل ۱۰ تغییرات اندازه‌ی پوش سیگنال مدوله شده‌ی *OQPSK* نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود به جز بازه زمانی ارسال یک بیت ($T_b = 1 \text{ second}$) در ابتدا و انتها، تغییرات پوش سیگنال ارسالی مدوله شده نرم و آرام است.

۱-۳- شکل موج‌های مدولاسیون *MSK*

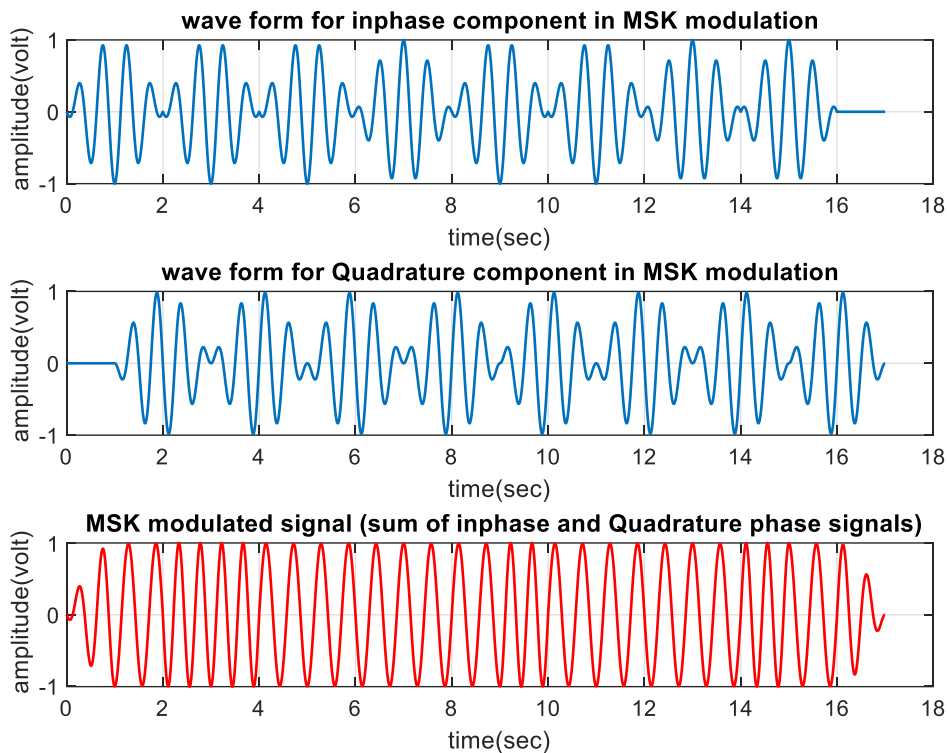
ج) سیگنالینگ ^۱*MSK*: فرض کنید در *OQPSK* به جای شکل پالس مستطیلی از

$$g(t) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi t}{2T_b}), & 0 \leq t \leq 2T_b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۵)$$

استفاده شود. $\hat{s}_i(t) \cos(2\pi f_c T_b)$ ، $\hat{s}_q(t) \sin(2\pi f_c T_b)$ و $\hat{s}(t)$ را بر حسب زمان رسم کنید.

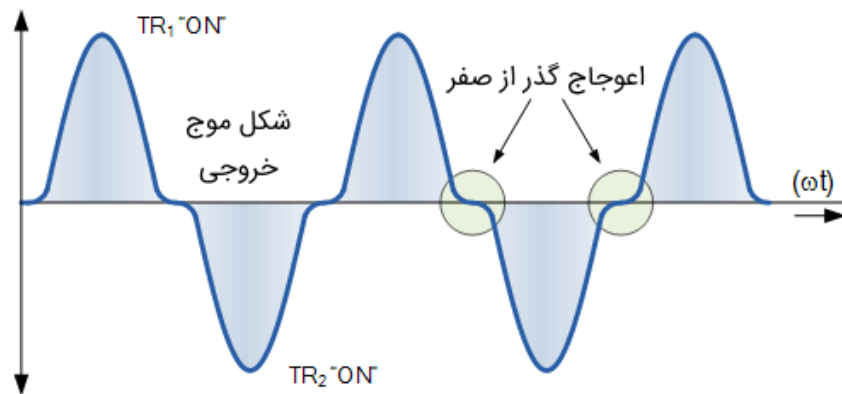
در این صورت شکل‌های خواسته شده به صورت شکل ۱۱ خواهد بود.

^۱ Minimum Shift Keying



شکل ۱۱: مولفه‌های هم فاز، متعامد و سیگنال مدوله شده‌ی نهایی در مدولاسیون MSK

با مقایسه شکل ۱۱ با شکل ۴ و شکل ۹ مشاهده می‌کنیم که برخلاف $\frac{\pi}{4}$ QPSK و OQPSK (با شکل موج مستطیلی) که دامنه ثابت نداشته و گذر از صفر دارد، در این مدولاسیون شکل موج نهایی مدوله شده (قرمز رنگ) دارای دامنه ثابت بوده و اعوجاج گذر از صفر (تغییر ناگهانی مقدار سیگنال از مثبت به منفی) نخواهیم داشت.^۱ نمونه‌ای از وقوع این نوع اعوجاج در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲: نمونه‌ای از وقوع اعوجاج گذر از صفر؛ مطابق مطالب گزارش و تئوری، در MSK برخلاف OQPSK با پالس مستطیلی و QPSK اعوجاج گذر از صفر نخواهیم داشت. [3]

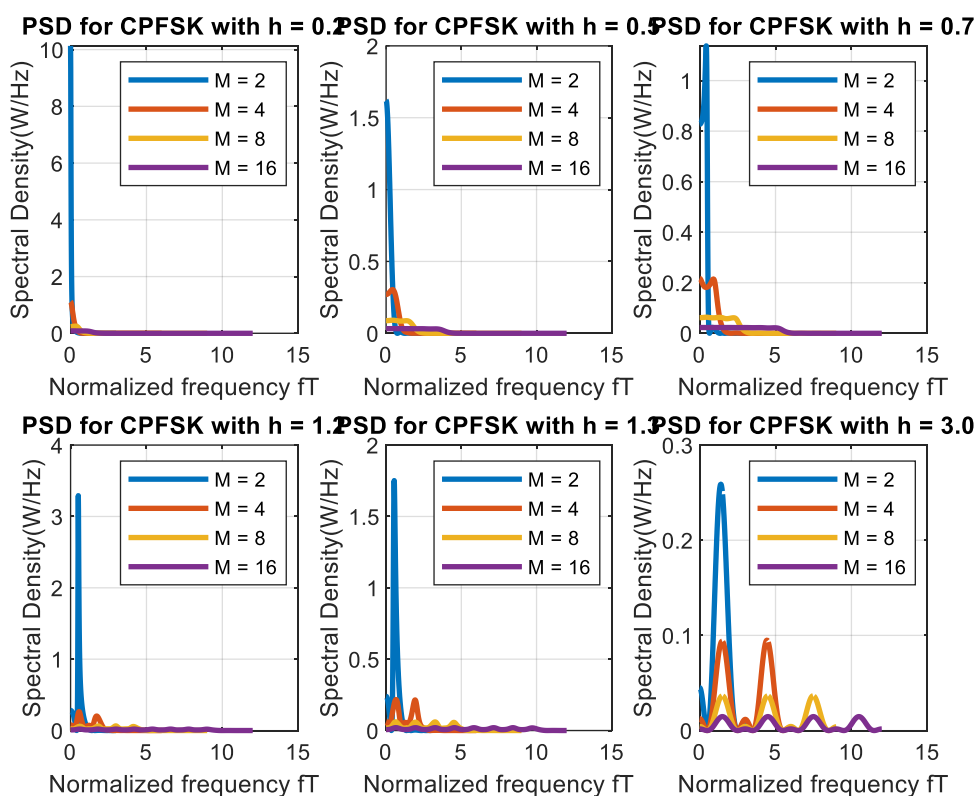
^۱ اعوجاج گذر از صفر، یک «ناحیه تخت» (Flat Spot) یا «باند مرده» (Dead band) با ولتاژ صفر در شکل موج خروجی تولید کرده که از یک نیم شکل موج به دیگری عبور می‌کند. دلیل این امر این است که گذار ترانزیستورها، دقیقاً در نقطه گذر از صفر رخ نمی‌دهد و به همین دلیل، تاخیر کوچکی بین خاموش شدن ترانزیستور اول و روشن شدن ترانزیستور دوم ایجاد می‌شود. این تاخیر باعث می‌شود هر دو ترانزیستور در یک لحظه خاموش باشند.

سیگنالینگ MSK دارای شکل موج مدوله شده‌ی با پیوستگی فاز از یک فاصله سیگنالینگ به فاصله سیگنالینگ بعدی است و تغییرات فاز در آن بسیار ملایم و آرام بوده و از نظر پهنای باند نسبت به $\frac{\pi}{4} QPSK$ و OQPSK (با شکل موج مستطیلی) به مراتب بهتر عمل می‌کند.

در درس دیدیم که MSK هم از خانواده OQPSK و هم از خانواده CPFSK (نوعی CPM) است که با شبیه سازی فوق سازگار است و پیوستگی فاز را ملاحظه می‌کنیم. همچنین مشاهده می‌کنیم در هر فاصله‌ی سیگنالینگ تعداد قله و دره‌ها عوض می‌شود و بنابراین مدولاسیون MSK را جزو مدولاسیون‌های FSK نیز دسته بندی می‌کنند.

بررسی اجمالی چگالی طیف توان مدولاسیون CPFSK

با توجه به روابط $3.4 - 62$ و $3.4 - 61$ در کتاب درسی برای محاسبه چگالی طیف توان برای مدولاسیون CPFSK، چگالی طیف توان این مدولاسیون برای چند مقدار مختلف h (اندیس مدولاسیون)^۱ و برای هر یک از مقادیر M (تعداد سیمبل‌ها) در شکل ۱۳ رسم شده است. توجه کنید که مشابه سوال قبل $T_b = 1$ s در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۳: چگالی طیف توان مدولاسیون CPFSK برای چند مقدار مختلف h (اندیس مدولاسیون) و برای هر یک از مقادیر M (تعداد سیمبل‌ها) با فرض $T_b = 1$ s

توجه کنید که این چگالی طیف توان‌ها برای سیگنال‌های باند پایه رسم شده است و برای سادگی چون می‌دانیم چگالی طیف توان حقیقی و زوج است، نمودارها فقط برای فرکانس‌های نرمال شده‌ی مثبت رسم شده است. همانگونه که در ردیف اول شکل ۱۳ مشاهده می‌کنیم نمودارهای چگالی طیف توان برای $h < 1$ پهنای باند کمی داشته، هم چنین هموار و خوش‌رفتار است. اما هرچه مقدار h به سمت یک نزدیک تر می‌شود، طیف بسیار قله دار تر^۲ شده و برای h های به اندازه کافی نزدیک به مقدار واحد، شکل طیف ضربه‌هایی که در $\log_2 M$ فرکانس رخ می‌دهند نزدیک تر می‌شود. همانگونه که در ردیف پایین شکل ۱۳ مشاهده می‌کنیم شکل طیف‌ها برای $h > 1$ وسیع تر شده و از نظر پهنای باند نامناسب تر می‌شوند. به همین دلیل بود که در کلاس نیز گفته شد که در سیستم‌های مخابراتی متداول و عملی که در آن‌ها CPFSK استفاده می‌شود اندیس مدولاسیون (h) به نحوی طراحی و انتخاب می‌شود که در پهنای باند صرفه جویی شود و بنابراین در عمل از $h < 1$ استفاده می‌شود.

^۱ modulation index

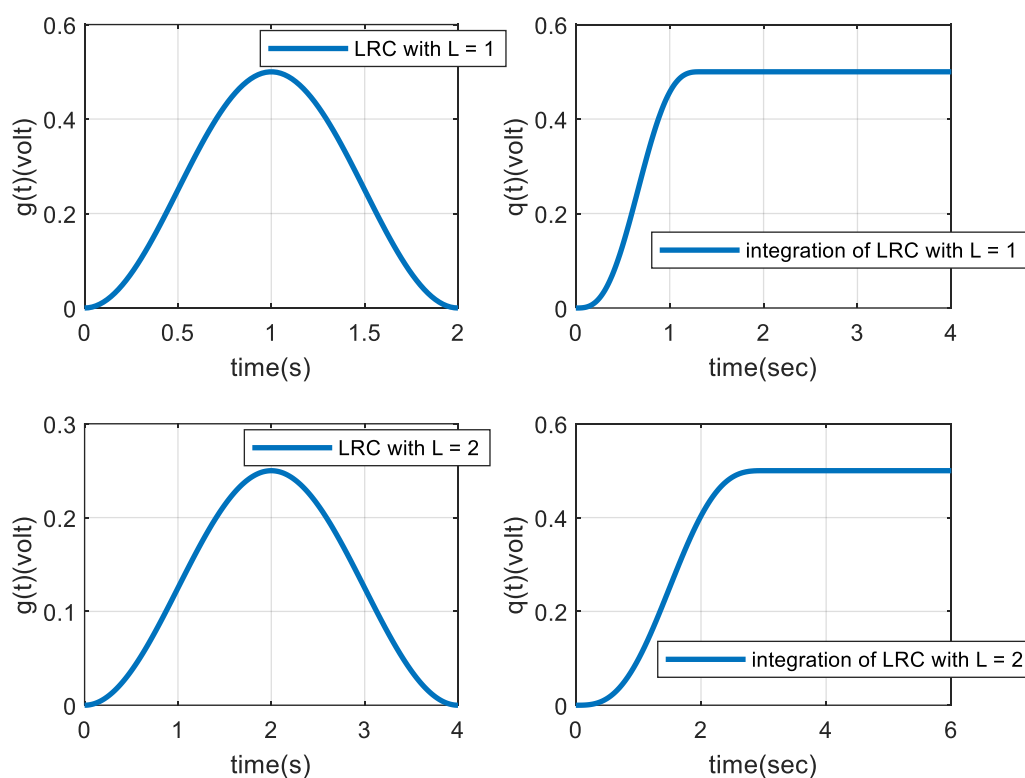
^۲ peaked

نگاهی به مدولاسیون CPM (Continuous Phase Modulation)

مطابق صورت دستور کار مدولاسیون CPM باینری ($M = 2$) با $h = \frac{2}{3}$ ، $T_b = 1s$ و شکل پالس LRC^1 را در نظر بگیرید. شکل موج LRC به صورت زیر است:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} (1 - \cos \frac{2\pi t}{LT}), & 0 \leq t \leq LT \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (6)$$

توجه داریم در اینجا $T_s = 2 \times T_b = 2s$ خواهد بود. سیگنال پالس LRC و انتگرال آن را به ازای دو مقدار مختلف پارامتر L در شکل ۱۴ آورده ایم. همانگونه که در تئوری نیز دیده ایم، افزایش L با هزینه‌ی افزایش مقدار حافظه مورد نیاز، می‌توان به مدولاتور CPM کارآمدتر از لحاظ پهنای باند رسید.



شکل ۱۴: سیگنال پالس LRC و انتگرال آن برای دو مقدار مختلف پارامتر L

توجه کنید که در شکل ۱۴، $q(t)$ انتگرال $g(t)$ تعریف شده به صورت LRC است که به صورت زیر است:

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2LT} (t - \frac{LT}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{LT}), & 0 \leq t \leq LT \\ 0.5, & t > T \end{cases} \quad (7)$$

در درس دیدیم که:

^۱ یعنی Raised Cosine با پارامتر L

$$\varphi(t; I) = 4\pi T f_d \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k q(t - kT) \quad (8)$$

و در فاصله سیگنالینگ n ام، $nT \leq t < (n+1)LT$ و با توجه به رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varphi(t; I) = 2\pi T f_d \sum_{k=-\infty}^{n-2} I_k + \frac{2\pi f_d}{L} \left[(t - nT) - \frac{LT}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi(t - nT)}{LT} \right) \right] I_{n-1} \\ + \frac{2\pi f_d}{L} \left[(t - nT) - \frac{LT}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi(t - nT)}{LT} \right) \right] I_n \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن جملات اول و دوم شامل حافظه مدولاتور است که همانگونه که در درس دیدیم حافظه دار بودن CPM باعث پیوستگی فاز آن می‌شود. با تعریف (۱۰) و با در نظر گرفتن تعریف اندیس مدولاسیون خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varphi(t; I) = \theta_n + \frac{\pi h}{LT} \left[(t - nT) - \frac{LT}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi(t - nT)}{LT} \right) \right] I_{n-1} \\ + \frac{\pi h}{LT} \left[(t - nT) - \frac{LT}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi(t - nT)}{LT} \right) \right] I_n \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن:

$$\theta_n = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k \quad (11)$$

با جایگذاری $h = \frac{2}{3}$ در (۱۱) داریم:

$$\theta_n = \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k \quad (12)$$

و بنابراین θ_n دارای $p = 3$ حالت است که عبارتند از:

$$\theta_n = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\} \quad (13)$$

چون سوال حالت‌ها را به بازه $[-\pi, \pi]$ محدود کرده، می‌توان (۱۳) را به فرم معادل زیر نوشت:

$$\theta_n = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right\} \quad (14)$$

اگر $L = 1$ باشد اینها تنها حالت‌های روی ترلیس هستند. از طرف دیگر اگر $L > 1$ تعداد حالت‌های اضافی داریم که ناشی از ماهیت پاسخ جزئی پالس $g(t)$ است. این حالت‌های اضافی را می‌توان با بیان $\varphi(t; I)$ داده شده در رابطه (۱۰) معرفی نمود. دومین جمله‌ی طرف راست رابطه (۱۰) که **بردار حالت وابسته**^۱ نامیده می‌شود، به سمبل‌های اطلاعات $(I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_{n-L+1})$ بستگی داشته و بیانگر جمله‌ی فاز متناظر پالس‌هایی است که به مقدار نهایی خود نرسیده‌اند. جمله‌ی سوم بیانگر اثر فاز ناشی از سمبل اخیر I_n است. لذا حالت سیگنال CPM (یا مدوله ساز) برای پالس پاسخ جزئی با طول LT و $L > 1$ در زمان $t = nT$ را به صورت ترکیبی از **حالت فاز** و **حالت وابسته** به صورت زیر نمایش داد.

^۱ Correlative State Vector

$$S_n = \{\theta_n, I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_{n-L+1}\} \quad (۱۵)$$

در این مورد تعداد حالات برای $h = \frac{m}{p}$ برابر است با

$$N_0 = \begin{cases} pM^{L-1}, & M \text{ is even} \\ 2pM^{L-1}, & M \text{ is odd} \end{cases} \quad (۱۶)$$

حال فرض کنید که حالت مدوله ساز در $t = nT$ ، S_n است. اثر سیمبل جدید در فاصله $nT \leq t \leq (n+1)T$ تغییر حالت از S_n به S_{n+1} است. لذا در $t = (n+1)T$ حالت عبارتست از

$$S_{n+1} = (\theta_{n+1}, I_n, I_{n-1}, \dots, I_{n-L+2})$$

که در آن

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi h I_{n-L+1}$$

در این سوال یک روش CPM دودویی با شاخص مدوله سازی $h = \frac{2}{3}$ و پالس LRC در نظر گرفته شده است. می‌خواهیم حالت‌های S_n ، ترلیس حالت و درخت فاز را رسم کنیم. برای هر کدام از این حالت‌های فاز، دو حالت وجود دارد که ناشی از حافظه‌ی روش CPM است. لذا تعداد کلی حالت‌های فاز $N_s = 6$ به شرح زیر است.

$$(0,1), (0,-1), \left(\frac{2\pi}{3}, 1\right), \left(\frac{2\pi}{3}, -1\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, 1\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, -1\right)$$

اگر سیستم در حالت $\theta_n = -\frac{2\pi}{3}$ بوده و $I_{n-1} = -1$ باشد در این صورت^۱

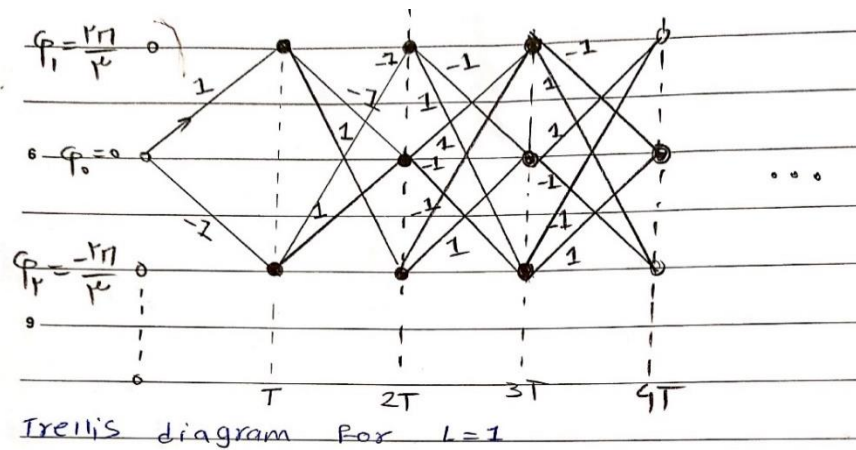
$$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi h I_{n-1} = -\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \equiv \frac{2\pi}{3}$$

دیاگرام داربست^۲ برای سیگنال مدوله شده‌ی CPFSK در شکل ۱۵ و شکل ۱۶ رسم شده است.^۳ تأکید می‌شود که انتقال از یک حالت به حالت دیگر در این شکل، بیانگر مسیرهای درست فاز نیست. بلکه این انتقال‌ها، بیانگر گذارهای فاز برای حالت‌های (نهایی) در نمونه‌های زمانی $t = nT$ است.

^۱ مشابه مثال ۱،۹،۴ در کتاب درسی

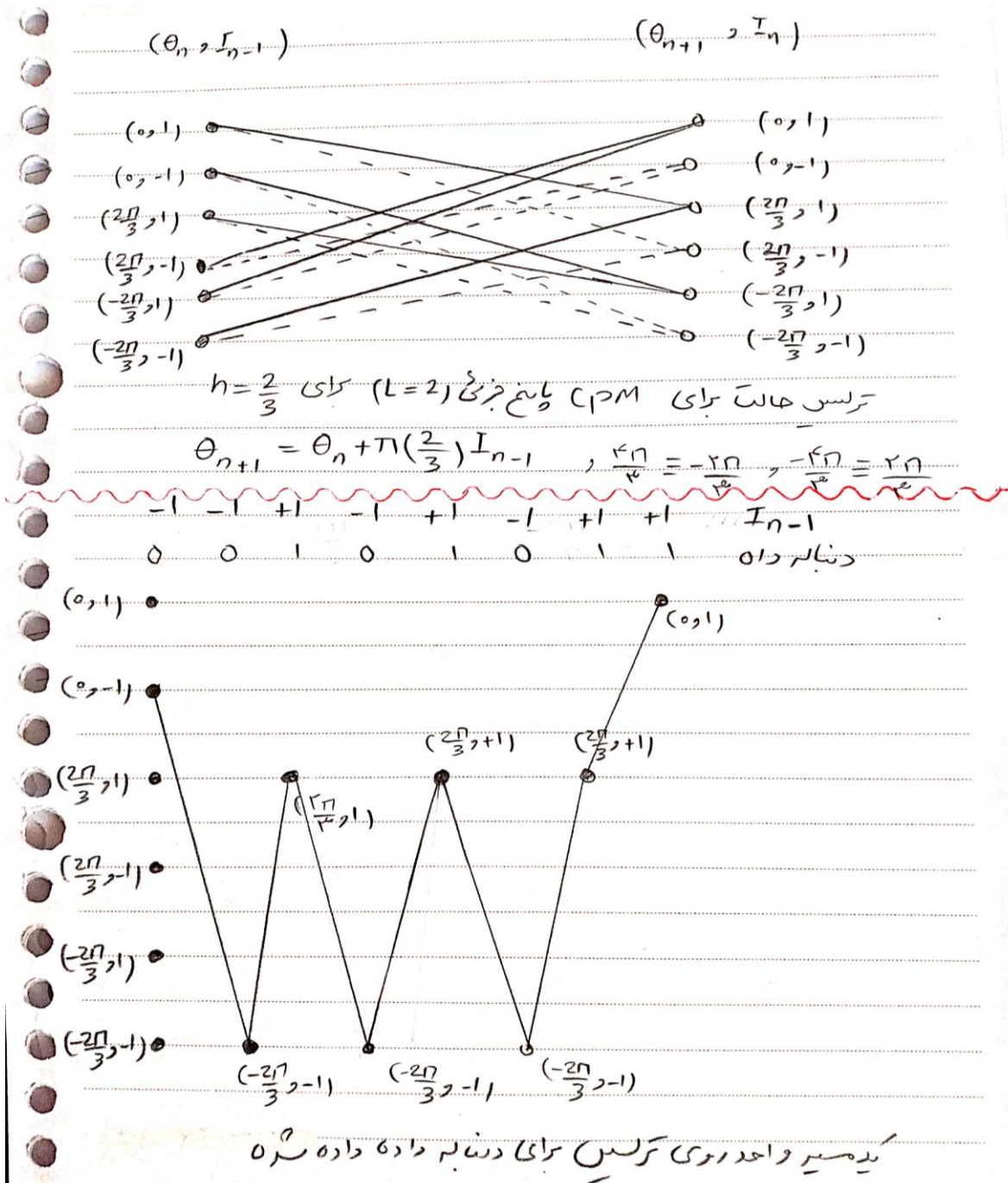
^۲ trellis diagram

^۳ به این علت که فاز یک فضای متناهی 2π (در همنهستی به پیمانه ۲) عضوی است، می‌توانیم دیاگرام داربست رسم کنیم. همانطور که از درس فرآیند می‌دانیم، دیاگرام ترلیس برای متغیرهای تصادفی وابسته‌ای قابل رسم است که ماهیت مارکف داشته باشند.



شکل ۱۵: دیاگرام داربست متناظر با مقادیر پارامتر L برابر با ۱

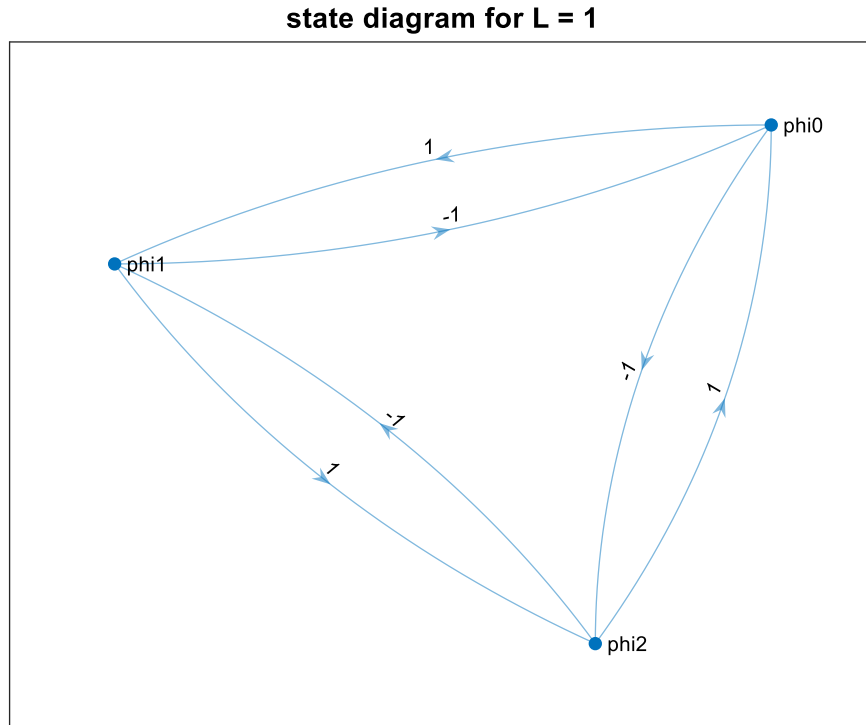
متناظر با دیاگرام داربست فوق، دیاگرام حالت به ازای $L = 1$ در شکل ۱۷ آمده و به ازای $L=2$ ترلیس حالت در شکل ۱۶ است.



شکل ۱۶: ترلیس حالت و یک مسیر واحد روی ترلیس برای دنباله داده شده برای $2RC$

می‌دانیم I_n در روابط قبلی، متغیری تصادفی است که مقدار آن وابسته به k بیت اطلاعاتی فاصله سیگنالینگ n ام است. چون از CPFSK باینری استفاده می‌کنیم، $k=1$ در نظر می‌گیریم. و چون در CPFSK از مدولاتور PAM قبل از مدولاتور FSK استفاده می‌کنیم، بنابراین I_n به صورت زیر است:

$$I_n \in \{A_m = 2m - 1 - M, \quad m = 1, \dots, M\} = \{A_m = 2m - 3, \quad m = 1, 2\}$$



شکل ۱۷: دیاگرام حالت برای $L=1$

همچنین با فرض نگاشت گری و $M = 2$ ، جدول مقادیر متناظر I_n برای هر کدام از سیمبل‌های ارسالی برای واحد مدولاتور BPAM در BCPFSK مشخص می‌شود. بر این اساس، مسیر فاز $\varphi(t; I)$ برای ورودی 0 0 1 0 1 0 1 1 به ازای $L = 1$ (پاسخ کامل^۲) و در $L = 2$ (پاسخ نسبی^۳) در شکل ۱۸ آورده شده است. ملاحظه می‌کنیم که فاز در مدولاسیون CPM پیوسته است. این امر مطابق انتظار بود و در تئوری نیز CPM همانگونه که از نامش پیداست، دارای فاز پیوسته است. توجه کنید، همانطور که می‌دانیم فاز ۳۶۰ درجه و فاز ۰ درجه معادل یکدیگرند و فاز یک میدان متناهی است. نکته دیگر آنکه تغییرات فاز برای L های مختلف متفاوت است و مزیت PR در پهنای باند اشغال شده نمایان می‌شود. چراکه PR دارای تغییرات فاز کمتر و در نتیجه پهنای باند کمتر می‌شود.

با رسم $I = \cos(\varphi(t; I))$ و $Q = \sin(\varphi(t; I))$ بر حسب زمان، در یک نمودار ۳ بعدی، همه‌ی سیگنال‌ها در سطح یک استوانه ظاهر می‌شوند. چنین استوانه فاز^۴ی در شکل ۱۹ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تفاوت در گستردگی تغییرات فاز دو مارپیچ^۵ (استوانه) نسبت به محور زمان است. از تجزیه تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها می‌دانیم که تغییرات آرام فاز برای سیگنال PR باعث می‌شود طیف آن مناسب تر از طیف FR بوده و پهنای باند کمتری اشغال کند.

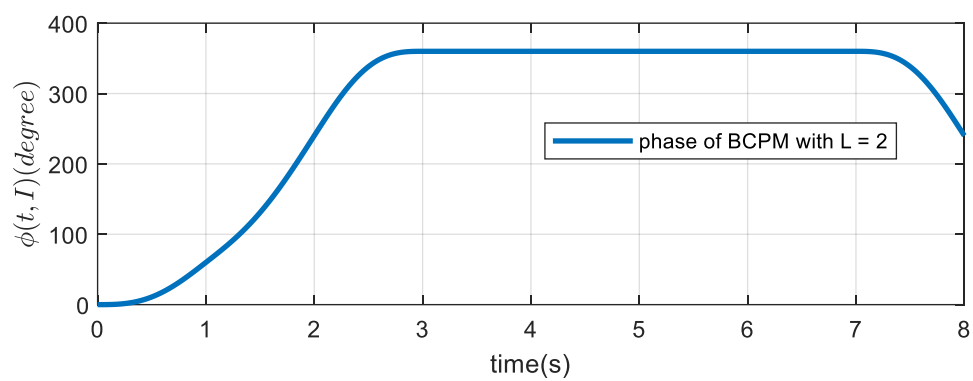
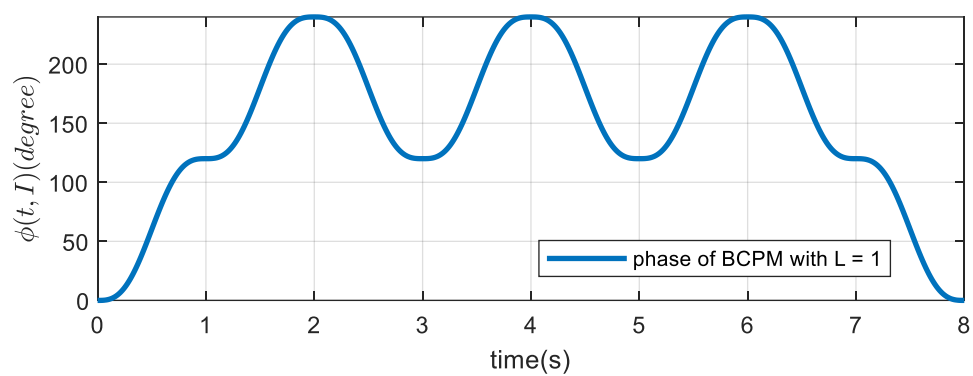
^۱ دنباله ورودی اینجا از چپ به راست به مدولاتور وارد می‌شود.

^۲ full response

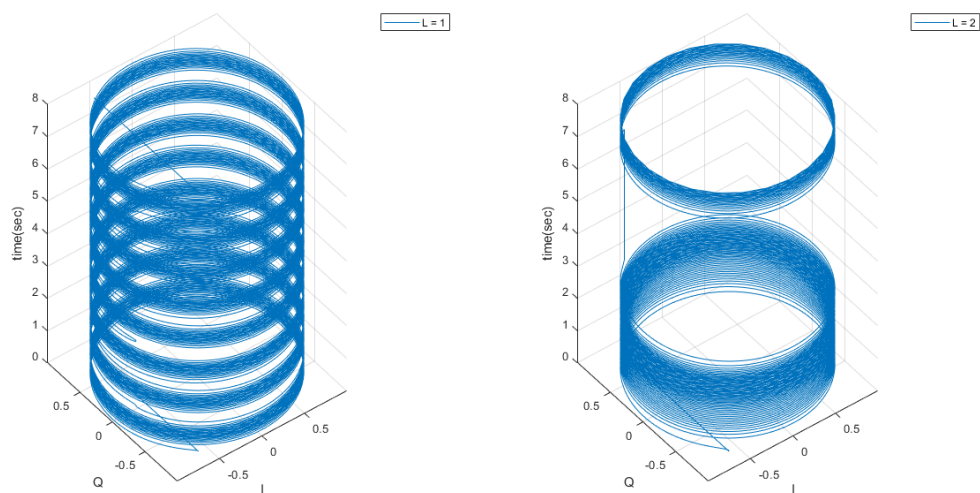
^۳ partial response

^۴ phase cylinder

^۵ helix



شکل ۱۸: مسیر فاز $\phi(t; I)$ برای ورودی داده شده به ازای $h = \frac{2}{3}$ و پالس LRC با پارامترهای L های مختلف متناظر با پاسخ کامل و پاسخ نسبی



شکل ۱۹: استوانه‌ی فاز به ازای مقادیر مختلف پارامتر L

- [1] Salehi, Massoud; Proakis, John;, "Offset QPSK (OQPSK)," in *Digital Communications*, McGraw-Hill Education, 2007, p. 126.
- [۲] م. نصیری کناری, در جزوه تئوری مخابرات پیشرفته, دانشگاه صنعتی شریف, p. 25.
- [3] "Faradars," [Online]. Available: <https://blog.faradars.org/crossover-distortion-in-amplifiers/>.