بسمه تعالی

سؤالات و پاسخ تشریحی درس سیگنال - آزمون ارشد کامپیوتر ۱۴۰۱

@mtsignal مهدی تقدسی

سطح سؤالات در کل، متوسط بوده است و همه سؤالات با اطلاعات جلد اول قابل حل بودند.

۵۶- $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی یک سیستم توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود، در مورد این سیستم کدام عبارت درست است؟

فصل اول

$$y(t)+\frac{dy(t)}{dt}=x(t)\frac{dx(t)}{dt}$$

۱) سیستم غیرخطی و وارون‌پذیر
۲) سیستم خطی و وارون‌ناپذیر
۳) سیستم خطی و وارون‌پذیر
۴) سیستم غیرخطی و وارون‌ناپذیر ✓

بررسی خطی بودن: معادله دیفرانسیل مذکور به دلیل وجود عبارت $x(t).x'(t)$ غیرخطی بوده و در نتیجه سیستم مورد نظر نیز غیرخطی می‌باشد.

بررسی وارون پذیری: به هیچ طریقی نمی‌توان ورودی $x(t)$ را تعیین کرد و برحسب خروجی نوشت. پس سیستم وارون ناپذیر است.

۵۷- $x(t)$ ورودی سیستم علّی LTI و $y(t)$ خروجی سیستم مطابق معادله دیفرانسیل زیر مرتبط هستند.

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

فصل نهم

اگر ورودی سیستم $x(t)=e^{-t}u(t)$ باشد، خروجی $y(t)$ کدام است؟

۱) $-e^{-t}u(t)-te^{-t}u(t)$
۲) $e^{-t}u(t)-te^{-t}u(t)$ ✓
۳) $-e^{-t}u(t)+te^{-t}u(t)$
۴) $e^{-t}u(t)+te^{-t}u(t)$

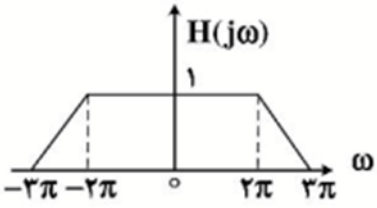
$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s}{s+1},\quad Re(s)>-1 \qquad , \qquad X(s)=\frac{1}{s+1},\quad Re(s)>-1$$

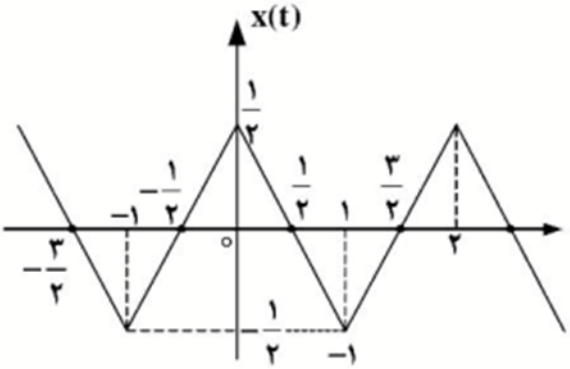
$$\Longrightarrow \quad Y(s)=X(s).H(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1},\quad Re(s)>-1$$

$$\Longrightarrow \quad y(t)=-te^{-t}u(t)+e^{-t}u(t)$$

۵۸- سیگنال پریوریک $x(t)$ مطابق شکل زیر است. اگر این سیگنال از سیستم LTI با پاسخ فرکانس $H(j\omega)$ داده شده در شکل عبور کند و خروجی را با $y(t)$ نمایش دهیم، دراین‌صورت $y(0)+y(\frac{1}{2})$ کدام است؟

فصل نهم (ده صفحه طلایی)





۱) $\frac{4}{\pi^2}$ ✓
۲) $\frac{4}{\pi}$
۳) $\frac{2}{\pi^2}$
۴) $\frac{2}{\pi}$

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} \underset{T=2,\ \omega_0=\pi}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\pi)\, e^{jk\pi t} \qquad (1)$$

$$H(k\pi)=\begin{cases}1 & , k=0, \pm1, \pm2\\ 0 & , o.w\end{cases}$$

برای محاسبه a_k داریم:

$$z(t)=\Lambda(t)-\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)=\Pi(t)*\Pi(t)-\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \quad , T=2 \ , \ \omega_0=\pi$$

$$\xrightarrow{F} Z(\omega)=\left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^2-\frac{\sin\omega}{\omega} \xrightarrow{\text{ک ۴۶}} a_k=\frac{1}{2}Z(k\pi) \Rightarrow \begin{cases}a_0=0\\ a_{\pm1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\\ a_{\pm2}=0\end{cases}$$

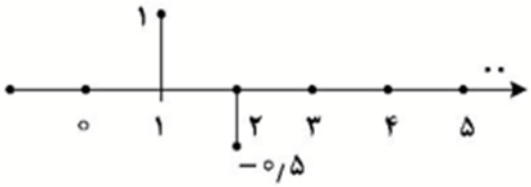
$$\xrightarrow{(1)} y(t)=\frac{2}{\pi^2}e^{-j\pi t}+\frac{2}{\pi^2}e^{j\pi t}=\frac{4}{\pi^2}\cos\pi t \Longrightarrow y(0)+y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

۵۹- تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم گسسته LTI به‌صورت زیر است:

$$H(e^{j\omega})=\frac{4}{5-4\cos(\omega)}$$

فصل ۴

اگر ورودی این سیستم $x(n)$ به‌صورت شکل زیر باشد و خروجی آن $y(n)$ باشد، مقدار $\sum_{k=0}^{+\infty} y(k)$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$ ✓

۴) ۲

روش اول:

$$H(\omega)=\frac{4}{5-2e^{j\omega}-2e^{-j\omega}} \xrightarrow{e^{j\omega}=z} H(z)=\frac{4}{1-2(z+z^{-1})+4}=\frac{4}{(1-2z^{-1})(1-2z)} \ , \ \frac{1}{2}<|z|<2$$

آماده برای مشتق

روش تجزیه فوق، یک روش معمول و کاربردی برای تجزیه این نوع عبارات بوده و تا به حال حداقل دوبار در کنکور سؤال آمده و در تستهای ۴۴ و ۴۵ انتهای فصل پانزدهم بیان شده است.

$$x(n)=\delta(n-1)-\frac{1}{2}\delta(n-2) \longrightarrow X(z)=z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}=z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) \quad , \quad |z|<\infty$$

$$Y(z)=X(z)\cdot H(z)=\frac{4z^{-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1-2z^{-1})(1-2z)}$$

حال برای محاسبه $y(n)$ ، $Y(z)$ را برحسب توان‌های منفی z مرتب می‌کنیم. برای این کار، صورت و مخرج $Y(z)$ را بر z تقسیم می‌نماییم:

$$Y(z)=\frac{4z^{-2}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1-2z^{-1})(z^{-1}-2)}=\frac{-2z^{-2}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1-2z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=-2z^{-2}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}} \quad , \quad 0<|z|<2$$

$$\Longrightarrow y(n)=2(2)^{n-2}u[-(n-2)-1]=2^{n-1}u[-n+1] \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}y(n)=y(0)+y(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

روش دوم: طبق جدول تبدیل فوریه زمان گسسته داریم:

$$H(\omega)=\frac{4}{5-4\cos\omega}=\frac{1}{\frac{5}{4}-\cos\omega}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\omega+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\xrightarrow{F^{-1}}h(n)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$x(n)=\delta(n-1)-\frac{1}{2}\delta(n-2) \Longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-2|}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}y(n)=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-2|}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+4\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{3}{2}$$

۶۰- تبدیل z پاسخ ضربه یک سیستم LTI علّی به‌صورت $H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ است. اگر ورودی این سیستم $x(n)=nu(n)$ باشد و خروجی آن را با $y(n)$ نمایش دهیم، دراین‌صورت $\lim_{n\to\infty}\frac{y(n)}{n}$ کدام است؟

فصل نهم

۱) ۴ ۲) ۲ ✓

۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$x(n)=nu(n)=(n+1)u(n)-u(n)\xrightarrow{Z}X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{(1-z^{-1})}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad , \quad |z|>1$$

$$\Longrightarrow Y(z)=X(z)\cdot H(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{2}{(1-z^{-1})^2}+\frac{-4}{1-z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>1$$

$$\Longrightarrow y(n)=2(n+1)u(n)-4u(n)+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{y(n)}{n}=2$$