**Условие**

В системе имеется служебная программа для сохранения $I$-адресов, по которым обращаются пользователи. Предполагается, что каждый пользователь в любую минуту обращается не более чем по одному IP-адресу; программа записывает в файл для каждого пользователя $U$ и каждой минуты M значение $IP(u, m)$, равное $IP - \text{адресу}$, к которому пользователь U обращался в минуту M. Если пользователь U в минуту M не обращался ни по какому IP-адресу, то $IP(U, M) := 0$

Система была использована для проведения сложной атаки на удаленные сайты. Атака проводилась с обращением к t разным IP-адресам за t последовательных минут; в минуту 1 атакующий обращался по адресу $i_1$; в минуту 2 он обращался по адресу $i_2$; и т. д. вплоть до адреса $i_t$ в минуту t.
В журнале не оказалось ни одного пользователя U, который бы обращался по всем атакованным IP-адресам в соответствующее время; другими словами, нет такого U, что $IP(U, M) = i_m$ для каждой минуты m от 1 до t.

Подмножество S пользователей будет называться подозрительной группой, если в каждую минуту m от 1 до t был по крайней мере один пользователь U из S, для которого $IP(U, M) = i_m$. (Другими словами, к каждому IP-адресу в соответствующий момент обращался по крайней мере один пользователь из группы.) Итак, для заданного набора всех значений IP(U, M) и числа K существует ли подозрительная группа с размером не более k?
Показать, что это задача является NP-полной.

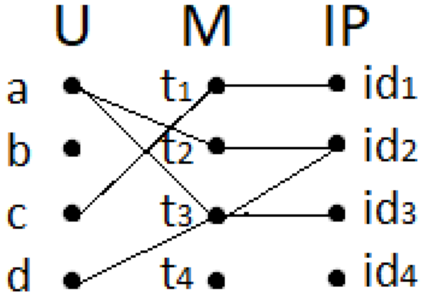
**Решение**

**Шаг 1.** Докажем, что наша задача лежит в классе $\boldsymbol{NP}$.

Если нам дано решение  (т.е множество пользователей), то можно за полиномиальное время проверить является ли оно решением.

Т.к нас интересуют только “правильные”  запросы (в i-ю минуту пользователь обратился к i-му $IP - \text{адресу}$), то можно каждому пользователю сопоставить множество минут, в которое выполнены правильные запросы.

Если нам дано множество пользователей, то можно за $O(t^2)$ проверить, содержит ли оно элемент от 1 до $t$.



**Шаг 2.** Докажем, что наша задача является **NP-сложной**.

Рассмотрим задачу о вершинном покрытии  (Вершинное покрытие для неориентированного графа  $G = (V, E)$ — это множество его вершин $S$, такое, что, у каждого ребра графа хотя бы один из концов входит в вершину из S. Размером (size) вершинного покрытия называется число входящих в него вершин. ). Известно, что задача о вершинном покрытие $NP - \text{полная}$.

Докажем что вершинное **покрытие** $\leq_p$ **наша задача.**

Пусть дан некоторый граф. Пронумеруем рёбра графа от 1 до $|E| = t$, которые будут соответствовать нашим “правильным” запросам.

Тогда каждой вершине соответствует множество “правильных” запросов (вершина $v$ = пользователь из $U$).

Если возможно выбрать какое-то множество пользователей размером не больше, чем $\boldsymbol{k}$, которое покроет все запросы от 1 до $t$, то в исходном графе найдется вершинное покрытие мощности не более, чем $\boldsymbol{k}$**.**  И обратное, что если невозможно выбрать множество пользователей размером не больше, чем k, то какое-то ребро останется непокрытым, то есть какой-то запрос не будет совершен.

Из того, что наша задача $NP - \text{сложная}$ и что она принадлежит $NP$, следует её $NP - \text{ полнота}$.