بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

پروژه درس مکانیک سیالات 2

نگارش
علی سخایی

استاد درس: دکتر کریمی

پائیز-زمستان 1404

جریان حول ایرفویل

چکیده

در این مجموعه پروژه، جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر پیرامون ایرفویل‌های NACA با دو رویکرد متفاوت بررسی شده است. در بخش نخست، معادلات ناویر–استوکس پایا با استفاده از شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور (PINNs) و بدون شبکه‌بندی صریح دامنه حل شدند. میدان‌های سرعت و فشار از طریق کمینه‌سازی همزمان باقیمانده معادلات حاکم و شرایط مرزی بازسازی گردیدند و ضرایب آیرودینامیکی استخراج شدند. نتایج نشان داد مدل PINN در پیش‌بینی ضریب برآ دقت قابل قبولی دارد، اما در محاسبه ضریب پسا با انحراف همراه است که بیانگر حساسیت مدل به نحوه اعمال قیود فیزیکی و محاسبه نیروهای برشی است.

در بخش دوم، جریان پتانسیل پیرامون ایرفویل با روش پنل در MATLAB مدل‌سازی شد و توزیع فشار و ضرایب آیرودینامیکی محاسبه گردید. مقایسه دو رویکرد نشان می‌دهد PINN قابلیت مدل‌سازی جریان لزج را دارد، اما برای دستیابی به دقت فیزیکی بالاتر نیازمند تنظیم دقیق‌تر ساختار و تابع هزینه است، در حالی‌که روش پنل با هزینه محاسباتی کمتر نتایج سازگار با فرضیات جریان پتانسیل ارائه می‌دهد.

فهرست مطالب

صفحه

1 مقدمه 1

2 فاز دوم (PINNs) 3

2.1 تشریح مسئله 3

2.1.1 مشخصات شبکه عصبی (PINN) 5

2.1.2 معادلات حاکم 7

2.2 ساختار شبکه‌ی عصبی 9

2.3 نمودار تابع تلفات 10

2.4 بررسی استقلال حل از نورون و لایه 11

2.5 نتایج شبیه‌سازی 13

2.5.1 کانتور فشار 13

2.5.2 کانتور سرعت 14

2.5.3 خطوط جریان 15

2.5.4 ضرائب برآ و پسا 16

2.6 تحلیل خطا 17

3 فاز چهارم 19

3.1 تشریح مسئله 19

3.2 ویژگی‌های شبکه عصبی (PINNs) 21

3.3 معادلات حاکم 23

3.4 ساختار شبکه‌ی عصبی 24

3.5 نمودار تابع تلفات 25

3.6 بررسی استقلال حل از نورون و لایه 27

3.7 نتایج شبیه‌سازی 28

3.7.1 کانتور فشار 28

3.7.2 کانتور سرعت 29

3.7.3 خطوط جریان 30

3.7.4 ضریب برآ و پسا 31

3.8 تحلیل خطا 32

4 فاز پنجم 35

4.1 تشریح مسئله 35

4.2 بررسی استقلال از ند 39

4.3 اثر ضخامت ایرفویل روی ضریب پسا 40

4.4 تحلیل کانتورها 42
4.4.1 کانتور ψ (Stream function) 42
4.4.2 کانتور φ (Equipotential Lines) 43
4.5 صحت‌سنجی و اعتبارسنجی 44
4.5.1 صحت‌سنجی عددی 45
4.5.2 اعتبارسنجی با روابط تحلیلی/کلاسیک 46
4.5.3 مقایسه کیفی با ایرفویل ژوکوفسکی 47
5 نتیجه‌گیری 48
6 پیوست 50
6.1 ساختار کلاس PINN (پروژه 2) 50
6.2 تابع محاسبه‌گر ضریب برآ و پسا 54
6.3 ساختار کلاس PINN (پروژه 4) 56
6.4 ساختار کلی کد متلب (فاز 5) 62
7 مراجع 67

صفحه

فهرست اشکال

شکل 2.3.1 تغییرات تلفات شبکه عصبی برحسب تعداد تکرار..... 10
شکل 2.5.1 کانتور فشار حول ایرفویل در زاویه حمله 0..... 13
شکل 2.5.2 کانتور اندازه سرعت حول ایرفویل در زاویه حمله 0..... 14
شکل 2.5.3 خطوط جریان حول ایرفویل در زاویه حمله 0..... 15
شکل 3.5.1 تغییرات تلفات شبکه عصبی برحسب تعداد تکرار..... 25
شکل 3.7.1 کانتور فشار حول ایرفویل در زاویه حمله 5..... 28
شکل 3.7.2 کانتور اتدازه سرعت حول ایرفویل در زاویه حمله 5..... 29
شکل 3.7.3 خطوط جریان حول ایرفویل در زاویه حمله 5..... 30
شکل 4.1.1 نتایج بررسی استقلال عددی از تعداد تکینگی‌ها (N) در مدل توزیع چشمه–چاه روی وتر برای ایرفویل NACA0009 در زاویه حمله صفر..... 39
شکل 4.2.1 بررسی اثر تغییر ضخامت هندسی بر مقدار باقی‌مانده عددی ضریب پسا در مدل توزیع چشمه–چاه روی وتر برای ایرفویل NACA0009 در $\alpha=0°$ 40
شکل 4.4.1 توزیع خطوط جریان ψ پیرامون ایرفویل NACA0009 در جریان پتانسیل دوبعدی..... 42
شکل 4.4.2 توزیع خطوط هم‌پتانسیل ϕ پیرامون ایرفویل NACA0009 در جریان پتانسیل..... 43

فهرست جداول **صفحه**

جدول 2.2.1 ساختار شبکه عصبی..... 9
جدول 3.4.1 ساختار شبکه‌ی عصبی..... 24

1 مقدمه

ایرفویل‌ها از اجزای بنیادین سامانه‌های آیرودینامیکی به‌شمار می‌روند و نقش تعیین‌کننده‌ای در تولید نیروی برا و کنترل نیروی پسا در بسیاری از کاربردهای مهندسی ایفا می‌کنند. بال هواپیماها، پره‌های توربین‌های بادی و گازی، کمپرسورها و فن‌ها نمونه‌هایی از سامانه‌هایی هستند که عملکرد آن‌ها به ویژگی‌های هندسی و رفتار جریان اطراف ایرفویل وابسته است. پایداری، قابلیت مانور و بهره‌وری انرژی در چنین سامانه‌هایی به توزیع فشار و سرعت در اطراف ایرفویل و استخراج ضرایب آیرودینامیکی مانند ضریب برا (C_L) و ضریب پسا (C_D) وابسته است. حتی تغییرات کوچک در رفتار لایه مرزی یا جدایش جریان می‌تواند موجب افت عملکرد، افزایش پسا، کاهش بازده یا بروز ناپایداری‌های آیرودینامیکی شود. ازاین‌رو، مدل‌سازی دقیق جریان اطراف ایرفویل همواره یکی از محورهای اصلی پژوهش در مکانیک سیالات و آیرودینامیک بوده است.

به‌طور سنتی، تحلیل جریان پیرامون ایرفویل با دو رویکرد اصلی انجام می‌شود: آزمایش‌های تجربی (مانند تونل باد) و روش‌های عددی حل معادلات حاکم بر جریان سیال. هرچند آزمایش‌های تجربی به‌عنوان مرجع معتبر برای اعتبارسنجی مدل‌ها شناخته می‌شوند، اما اجرای آن‌ها پرهزینه، زمان‌بر و وابسته به تجهیزات پیشرفته است. در مقابل، روش‌های عددی امکان پیش‌بینی میدان جریان را فراهم می‌کنند، ولی نیازمند تنظیم مناسب شرایط مرزی، پارامترهای مدل و منابع محاسباتی قابل‌توجه هستند. در مسائل پیچیده یا مطالعات پارامتری گسترده (مانند تغییر زاویه حمله، عدد رینولدز یا هندسه)، هزینه زمانی و محاسباتی می‌تواند به یک چالش جدی تبدیل شود. از سوی دیگر، روش‌های تحلیلی و تقریبی مانند روش پنل و مدل‌های پتانسیل، با صرف زمان کمتر قادر به تخمین توزیع فشار و برا هستند، اما در بازنمایی اثرات لزجت، جدایش و پدیده‌های غیرخطی محدودیت دارند.

در سال‌های اخیر، پیشرفت سریع در حوزه یادگیری ماشین، به‌ویژه رویکردهای مبتنی بر فیزیک مانند شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور(Physics Informed Neural Networks - PINN) ، مسیر جدیدی برای حل مسائل مکانیک سیالات فراهم کرده است. ایده اصلی در PINN آن است که شبکه عصبی، به‌جای تکیه صرف بر داده، با استفاده از دانش فیزیکی مسئله (معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی) آموزش می‌بیند. در نتیجه، مدل می‌تواند میدان‌هایی مانند سرعت و فشار را به‌گونه‌ای بازسازی کند که هم با داده‌های مرزی سازگار باشند و هم معادلات فیزیکی را ارضا کنند. از مزایای این رویکرد می‌توان به عدم نیاز به شبکه‌بندی صریح و امکان تولید میدان پیوسته در کل دامنه اشاره کرد. بااین‌حال، چالش‌هایی

مانند انتخاب مناسب تابع هزینه، همگرایی فرآیند آموزش و حساسیت به شرایط مرزی همچنان مطرح است.

در این پژوهش، جریان سیال تراکم‌ناپذیر پیرامون یک ایرفویل مورد بررسی قرار گرفته و دو رویکرد متفاوت برای تحلیل آن به‌کار گرفته شده است. در گام نخست، یک مدل PINN توسعه داده شد که با استفاده از معادلات حاکم و شرایط مرزی، میدان‌های سرعت و فشار را بدون نیاز به مش‌بندی صریح بازسازی می‌کند و امکان تخمین نیروهای آیرودینامیکی را فراهم می‌سازد. در گام دوم، تحلیل تقریبی جریان با استفاده از روش پنل در محیط MATLAB انجام شد تا توزیع فشار و برا بر مبنای فرض جریان پتانسیل محاسبه گردد.

هدف اصلی این پروژه، مقایسه کیفی و کمی این دو روش از نظر دقت نتایج، هزینه محاسباتی و توانایی بازسازی ساختار جریان است. این مقایسه نشان می‌دهد روش‌های مبتنی بر فیزیک مانند PINN تا چه اندازه می‌توانند به‌عنوان جایگزین یا مکمل روش‌های کلاسیک تحلیلی عمل کنند و بررسی پنل‌متد نیز دید مناسبی درباره نقش فرضیات ساده‌ساز (مانند لزجت ناچیز و جریان غیرچرخشی) در کیفیت پیش‌بینی‌ها ارائه می‌دهد. نتایج این مطالعه می‌تولند درک بهتری از ظرفیت روش‌های نوین در تحلیل و بهینه‌سازی سامانه‌های آیرودینامیکی فراهم کند.

2 فاز دوم (PINNs)

در این بخش از پروژه، جریان تراکم‌ناپذیر پیرامون ایرفویل NACA 23018با استفاده از روش شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور (PINNs) مورد تحلیل قرار گرفته است. در این راستا، کانتورهای فشار، میدان سرعت و خطوط جریان استخراج و بررسی شده‌اند. همچنین تأثیر تعداد نقاط آموزشی، تعداد نورون‌ها و لایه‌های شبکه عصبی بر دقت و پایداری حل مورد ارزیابی قرار گرفته است. ساختار کلی کد و جزئیات پیاده‌سازی این بخش در قسمت پیوست گزارش ارائه شده است.

2.1 تشریح مسئله

در این پروژه، از روش شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور (PINNs) برای حل معادلات ناویر–استوکس در شرایط جریان پایا، تراکم‌ناپذیر و دوبعدی پیرامون ایرفویل NACA 23018 استفاده شده است. این رویکرد با بهره‌گیری از توان تقریبی شبکه‌های عصبی مصنوعی و ترکیب آن با معادلات حاکم فیزیکی، امکان شبیه‌سازی میدان جریان را بدون نیاز به شبکه‌بندی صریح فراهم می‌کند.

هدف این بخش، تحلیل رفتار جریان پیرامون ایرفویل مذکور و بررسی ویژگی‌های آیرودینامیکی آن است. ایرفویل NACA 23018 از سری پنج‌رقمی ناکا بوده و دارای بیشینه انحنا برابر با 3% در 15% طول وتر و بیشینه ضخامت برابر با 18% طول وتر است. این مشخصات هندسی، آن را به گزینه‌ای مناسب برای کاربردهایی با الزامات آیرودینامیکی خاص تبدیل کرده است.

فرضیات سیالاتی

- **جریان پایدار:** فرض می‌شود ویژگی‌های جریان، از جمله سرعت و فشار، در طول زمان تغییر نمی‌کنند. به بیان دیگر، تمامی مشتقات زمانی برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند و میدان جریان در وضعیت ماندگار تحلیل می‌شود.
- **جریان تراکم‌ناپذیر:** چگالی سیال ثابت فرض شده و تغییرات آن نسبت به فشار و دما ناچیز در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، برای سیال تراکم‌ناپذیر از معادله پیوستگی با فرم ساده‌شده استفاده می‌شود.

- **سیال نیوتنی:** سیال مورد بررسی نیوتنی در نظر گرفته شده است؛ یعنی تنش برشی در سیال رابطه‌ای خطی با نرخ تغییرات سرعت دارد و ویسکوزیته آن در شرایط پایدار ثابت باقی می‌ماند.
- **جریان لزج:** اثرات ویسکوزیته (لزجت) در شبیه‌سازی لحاظ شده‌اند. برای نمایش این اثرات، از مدل ویسکوزیته سینماتیکی استفاده شده که نقش مهمی در انتقال مومنتوم و شکل‌گیری لایه‌ی مرزی دارد.

فرضیات هندسی

- **ایرفویل NACA 23018:** هندسه مورد استفاده در این شبیه‌سازی مربوط به ایرفویل استاندارد NACA 23018 از سری پنج‌رقمی ناکا است. مشخصات هندسی آن شامل توزیع انحنا و ضخامت بوده که از روابط تحلیلی مربوط به سری پنج‌رقمی NACA به‌دست می‌آید. در این مدل‌سازی فرض شده سطح ایرفویل کاملا صاف و بدون ناهمواری است و از دو منحنی پیوسته (سطح فوقانی و تحتانی) تشکیل شده است.
- **مقیاس طولی:** طوب وتر (chord length) ایرفویل به‌صورت بی‌بعد برابر با $c = 1$ در نظر گرفته شده است. تمامی ابعاد هندسی و مختصات بر اساس این مقیاس نرمال‌سازی شده‌اند. این فرض باعث ساده‌سازی تحلیل عددی و بی‌بعدسازی معادلات حاکم شده است.

فرضیات مرزی

- **شرایط مرزی ورودی (Inlet):** در مرز ورودی دامنه محاسباتی، جریان یکنواخت فرض شده است. مؤلفه سرعت در راستای جریان برابر با U_∞ و مؤلفه عمود بر آن صفر در نظر گرفته می‌شود. این شرایط معادل ورود یک جریان پایدار، با سرعت ثابت و بدون اغتشاش به دامنه است.
- **شرایط مرزی دور از ایرفویل[1]:** در نواحی دور از سطح ایرفویل فرض می‌شود اثر هندسه ناچیز بوده و میدان جریان به حالت آزاد بازمی‌گردد. در نتیجه، سرعت برابر با U_∞ و فشار برابر با فشار اتمسفریک در نظر گرفته می‌شود.

Far Field [1]

- **شرایط مرزی روی سطح ایرفویل[2]:** در سطح ایرفویل، شرط عدم لغزش (No-Slip) برقرار است. بر این اساس، هر دو مؤلفه سرعت سیال در تماس با سطح برابر صفر در نظر گرفته می‌شود؛ یعنی هیچ سرعت نسبی بین سیال و دیواره وجود ندارد.
- **شرایط مرزی خروجی[3] :** در مرز خروجی دامنه، فشار سیال برابر با فشار مرجع (اتمسفریک یا صفر گیج) فرض می‌شود. این شرط امکان خروج جریان از دامنه را بدون ایجاد بازتاب یا اغتشاش مصنوعی فراهم می‌کند.

2.1.1 مشخصات شبکه عصبی (PINN)

در این بخش، ساختار دقیق شبکه عصبی مورد استفاده برای حل معادلات ناویر–استوکس به کمک روش PINN تشریح می‌شود:

ساختار شبکه عصبی

- **تعداد لایه‌ها:** شبکه شامل 5 لایه پنهان است. با احتساب یک لایه ورودی و یک لایه خروجی، مجموعا 7 لایه در معماری شبکه وجود دارد.
- **تعداد نورون‌ها در هر لایه:** هر یک از لایه‌های پنهان دارای 50 نورون بوده و به‌صورت کامل (Fully Connected) به لایه‌های مجاور متصل هستند.
- **توابع فعال‌سازی:** در تمامی لایه‌های پنهان از تابع فعال‌سازی غیرخطی tanh استفاده شده است. این تابع به شبکه کمک می‌کند تا رفتارهای پیچیده و غیرخطی معادلات ناویر–استوکس را مدل‌سازی کند.

ورودی‌ها و خروجی‌ها

- **ورودی‌ها:** مختصات دوبعدی (x, y) نقاط داخل دامنه جریان به‌عنوان ورودی به شبکه داده می‌شوند. این ورودی‌ها مکان فیزیکی هر نقطه را مشخص می‌کنند.

Wall [2]

Outlet [3]

- **خروجی‌ها:** شبکه برای هر نقطه سه کمیت فیزیکی را پیش‌بینی می‌کند:
  1. U سرعت در راستای محور x
  2. V سرعت در راستای محور y
  3. P فشار در نقطه مورد نظر

فرآیند بهینه‌سازی و آموزش شبکه عصبی

- **روش‌های بهینه‌سازی**

در فرآیند آموزش شبکه عصبی برای حل معادلات ناویر–استوکس، از ترکیب دو الگوریتم بهینه‌سازی استفاده شده است:

1. **الگوریتم Adam:** در مرحله‌ی ابتدایی، آموزش شبکه با استفاده از الگوریتم Adam انجام شده است. این روش با به‌روزرسانی تدریجی پارامترهای شبکه و استفاده از گرادیان‌های تصادفی، همگرایی اولیه سریعی فراهم می‌کند و برای داده‌های نسبتا بزرگ بسیار مؤثر است.
2. **الگوریتم L-BFGS:** پس از مرحله پیش‌آموزش با Adam، از الگوریتم شبه‌نیوتنی L-BFGS برای دستیابی به همگرایی دقیق‌تر استفاده شده است. این الگوریتم برای مسائل مبتنی بر فیزیک که نیازمند دقت بالاتر هستند مناسب بوده و در مراحل پایانی آموزش موجب اصلاح بهتر وزن‌های شبکه می‌شود.

- **تنظیمات نرخ‌یادگیری**

برای کنترل نرخ یادگیری در طول فرآیند آموزش، از برنامه‌ریز نرخ یادگیری (Learning Rate Scheduler) استفاده شده است. با کاهش تدریجی نرخ یادگیری در طول آموزش، امکان همگرایی پایدارتر فراهم شده و از نوسانات ناخواسته در انتهای فرآیند آموزش جلوگیری می‌شود.

- **حجم داده‌های آموزشی**

شبکه عصبی روی مجموعه‌ای شامل حدود 50000 نقطه آموزشی آموزش دیده است. این داده‌ها شامل موارد زیر هستند:

- نقاط داخلی دامنه جریان (پیرامون ایرفویل)
- نقاط مرزی روی سطح ایرفویل (برای اعمال شرایط مرزی)
- نقاط مرزی دوردست (Far-field)

انتخاب نقاط به‌صورت تصادفی و یکنواخت در بخش‌های مختلف دامنه انجام شده است تا پوشش مناسبی از فضای حل و شرایط مرزی فراهم شود.

2.1.2 معادلات حاکم

معادلات فیزیکی

- معادله پیوستگی (حفظ جرم):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- معادلات حرکت (Momentum Equations)

معادله حرکت در جهت x :

$$u * \frac{\partial u}{\partial x} + v * \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu * \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

معادله حرکت در جهت y :

$$u * \frac{\partial v}{\partial x} + v * \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu * \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

معادلات مقادیر باقیمانده[4]

- مقدار باقیمانده پیوستگی:

$$Residual_{cont} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

- مقدار باقیمانده حرکت در جهتx :

$$Residual_{mom_x} = u * \frac{\partial u}{\partial x} + v * \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu * \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- مقدار باقیمانده حرکت در جهت y :

$$Residual_{mom_y} = u * \frac{\partial v}{\partial x} + v * \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu * \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

معادلات توابع هزینه[5]

- هزینه PDE :

$$Loss_{PDE} = \left(\frac{1}{N}\right) * \Sigma \left(Residual_{cont}^2 + Residual_{mom_x^2} + Residual_{mom_y^2}\right)$$

- هزینه شرایط مرزی (BC) :

$$Loss_{BC} = MSE(u_{pred}, u_{target}) + MSE(v_{pred}, v_{target}) + MSE(p_{pred}, 0)$$

- هزینه کل:

$$Loss_{total} = w_{BC} * Loss_{BC} + Loss_{PDE}$$

Residuals [4]

Loss Functions [5]

2.2 ساختار شبکه‌ی عصبی

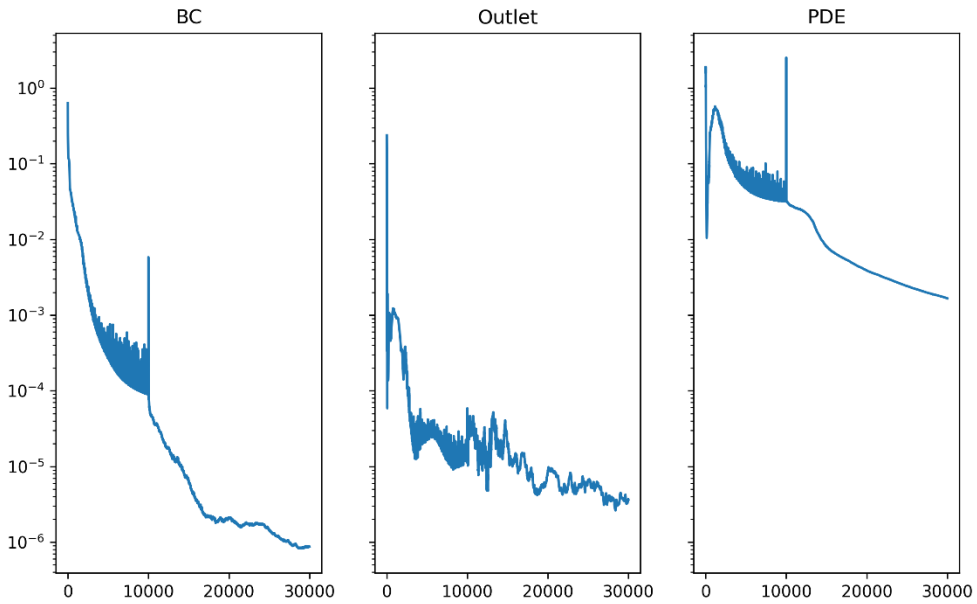
جدول 2.2.1 ساختار شبکه عصبی

جزء	توضیحات	تعداد/مشخصات
لایه ورودی (Input Layer)	ورودی‌ها شامل مختصات مکانی (x) و (y) هستند. شبکه بر اساس مکان، متغیرهای جریان را پیش‌بینی می‌کند.	2 نورون
لایه‌های مخفی (Hidden Layers)	این لایه‌ها مسئول یادگیری روابط غیرخطی معادلات ناویر–استوکس هستند و امکان مدل‌سازی رفتار پیچیده جریان را فراهم می‌کنند.	5 لایه، هر کدام 50 نورون
تابع فعال‌سازی (Activation)	پس از هر لایه مخفی اعمال می‌شود. خروجی آن در بازه ([-1,1]) بوده و برای مسائل مبتنی بر معادلات دیفرانسیل مناسب است.	Tanh
لایه خروجی (Output Layer)	خروجی‌ها شامل مؤلفه‌های سرعت (u, v)، فشار (p) و تنش‌های نرمال و برشی هستند. این لایه فاقد تابع فعال‌سازی است.	6 نورون

در مجموع، شبکه یک تابع پیوسته و غیرخطی در فضای هندسی (x, y) به فضای متغیرهای فیزیکی (u, v, p, σ) نگاشت می‌کند. با توجه به استفاده از 5 لایه پنهان و 50 نورون در هر لایه، این معماری ظرفیت کافی برای مدل‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر ناویر–استوکس در رژیم‌های عدد رینولدز پایین را فراهم می‌کند.

2.3 نمودار تابع تلفات

نمودار تاریخچه توابع تلفات[6] در طول فرآیند آموزش مدل PINN در زیر ترسیم شده است.



شکل 2.3.1 تغییرات تلفات شبکه عصبی برحسب تعداد تکرار

سه نمودار مربوط به تلفات شرایط مرزی(BC) ، شرایط خروجی (Outlet) و معادلات دیفرانسیل حاکم (PDE) هستند.

1. تلفات شرایط مرزی (BC Loss):

در ابتدای آموزش با نرخ کاهش یافته، تلفات به سرعت به مقادیر بسیار کوچک رسیده است. این موضوع نشان می‌دهد که شبکه به‌خوبی شرایط مرزی اعمال‌شده را یاد گرفته است. بخش میانی در نمودار ناشی از شروع فاز بهینه‌سازی با L-BFGS است.

---

[6] Loss Functions

2. تلفات مرز خروجی (Outlet Loss):

این تلفات نوسانات بیشتری نسبت به سایر بخش‌ها نشان می‌دهد که به دلیل سختی مدل‌سازی جریان در انتهای دامنه محاسباتی (پایان مسیر جریان) است. با این حال، روند کلی کاهش داشته و در انتها به مقادیر پایینی رسیده که بیانگر انطباق مناسب با شرط مرزی خروجی است.

3. تلفات معادلات حاکم (PDE Loss):

این معیار یکی از مهم‌ترین شاخص‌ها برای سنجش اعتبار مدل PINN است. در ابتدای آموزش نوساناتی وجود دارد، اما مقدار آن به‌تدریج کاهش یافته و در پایان به حدود 10^{-3} رسیده است. بخش میانی مرتبط با فاز L-BFGS بوده که در آن مقدار نهایی تلفات گزارش نمی‌شود و به‌صورت ظاهری ناپیوستگی در نمودار دیده می‌شود.

به‌طور کلی کاهش یکنواخت و پایدار هر سه تلفات و رسیدن آن‌ها به مقادیر بسیار پایین در انتهای آموزش، نشان‌دهنده همگرایی موفق شبکه و یادگیری صحیح قیود فیزیکی مسئله است.

2.4 بررسی استقلال حل از نورون و لایه

در این بخش، اثر تغییر پارامترهای کلیدی معماری شبکه عصبی شامل تعداد لایه‌ها (عمق) و تعداد نورون‌ها در هر لایه (عرض) بر عملکرد مدل بررسی شده است. هدف، سنجش حساسیت مدل PINN نسبت به تغییرات ساختاری و ارزیابی همگرایی آن در معماری‌های مختلف بوده است.

تنظیمات آزمایشی:

- عمق (Depth): 4، 6، 8، 10 لایه پنهان
- عرض (Width): 20، 50، 80، 100 نورون در هر لایه

در هر آزمایش، آموزش شبکه تحت شرایط یکسان انجام شد و مقدار Total Loss نهایی پس از همگرایی ثبت گردید.

نتایج و تحلیل:

- با وجود تغییر محسوس در تعداد لایه‌ها و نورون‌ها، مقدار Total Loss نهایی در اکثر اجراها در بازه 10^{-2} تا 10^{-3} باقی مانده است.

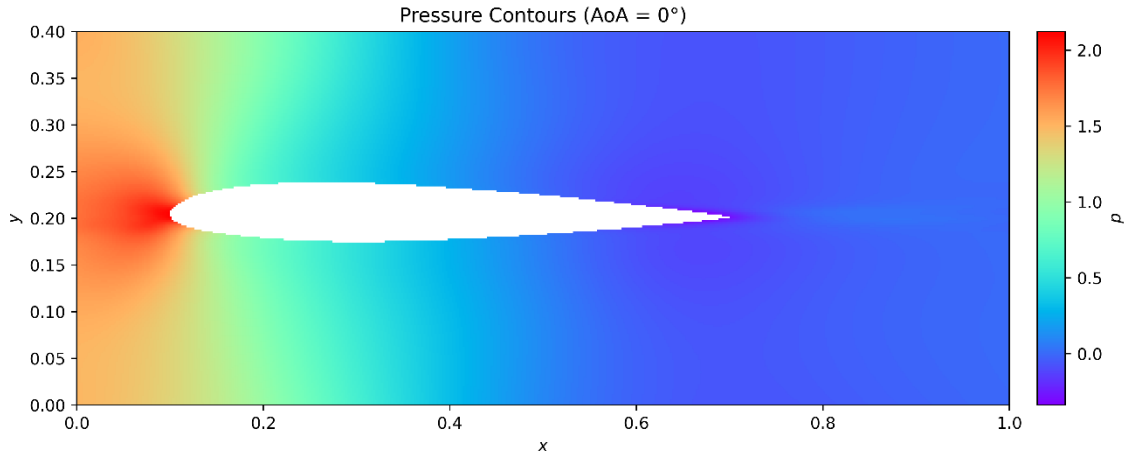
- روند مشخصی مبنی بر بهبود دقت با افزایش عمق یا عرض مشاهده نشد. این نشان می‌دهد مدل به ظرفیت مناسبی رسیده و افزایش پیچیدگی معماری الزاما منجر به بهبود عملکرد نمی‌شود.

- معماری با 5 لایه و 50 نورون نیز عملکرد رضایت‌بخشی داشته و از نظر پایداری آموزش و دقت نهایی، نتایج قابل قبولی ارائه کرده است.

در مجموع، نتایج نشان می‌دهد مدل PINN نسبت به تغییرات متعادل در عمق و عرض شبکه حساسیت بالایی ندارد. بنابراین می‌توان معماری بهینه را با حداقل پیچیدگی و هزینه محاسباتی انتخاب کرد، بدون آن‌که افت قابل توجهی در دقت رخ دهد

2.5 نتایج شبیه‌سازی

2.5.1 کانتور فشار



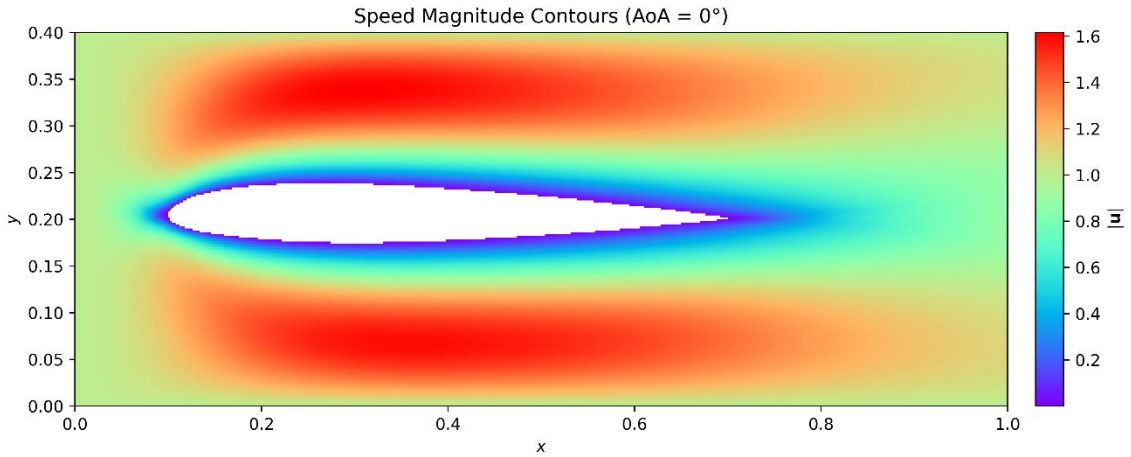
شکل 2.5.1 کانتور فشار حول ایرفویل در زاویه حمله 0

در شکل 2.5.1، کانتورهای فشار پیرامون ایرفویل NACA 23018 در زاویه حمله صفر درجه نمایش داده شده است. با وجود اینکه این ایرفویل از نظر هندسی کاملا متقارن نیست، در زاویه حمله صفر انتظار می‌رود به دلیل تقارن شرایط جریان، توزیع فشار در بالا و پایین ایرفویل تقریبا متقارن باشد. این الگو در کانتورهای به‌دست‌آمده مشاهده می‌شود و نشان‌دهنده اعمال صحیح شرایط مرزی و عملکرد مناسب مدل PINN در بازسازی میدان جریان است.

در ناحیه جلویی ایرفویل (leading edge)، افزایش فشار قابل توجهی دیده می‌شود که با رنگ قرمز مشخص شده است. این ناحیه ناشی از کاهش سرعت و برخورد جریان با پیشانی ایرفویل است. با حرکت جریان روی سطح ایرفویل، فشار کاهش می‌یابد که در تصویر با تغییر رنگ از قرمز به آبی نمایان است. این افت فشار، به‌ویژه روی سطح فوقانی، نقش مهمی در تولید نیروی برا دارد. در ناحیه انتهایی (trailing edge)، مقادیر فشار به‌تدریج به فشار محیط نزدیک می‌شوند که بیانگر بازگشت آرام جریان به شرایط آزاد است.

در مجموع، توزیع فشار حاصل از مدل شبکه عصبی فیزیک‌محور با رفتار فیزیکی مورد انتظار جریان سازگار بوده و همگرایی و دقت قابل قبول مدل را تأیید می‌کند.

2.5.2 کانتور سرعت



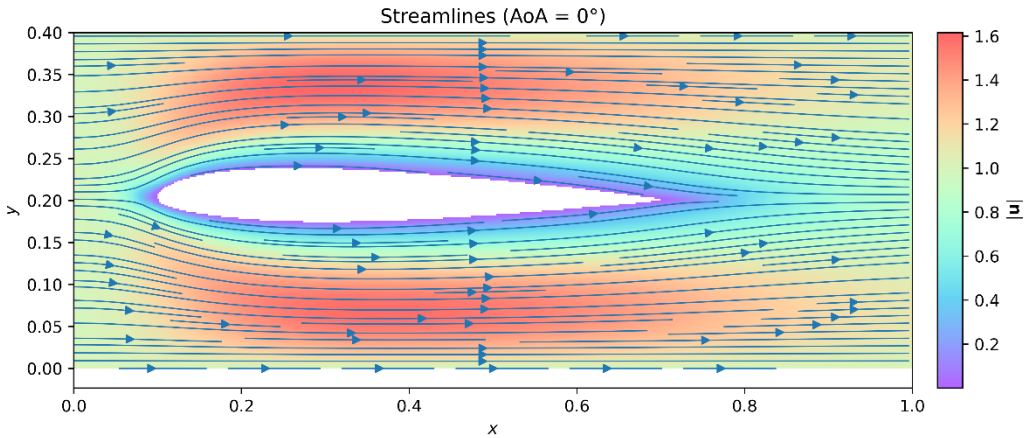
شکل 2.5.2 کانتور اندازه سرعت حول ایرفویل در زاویه حمله 0

در شکل 2.5.2، کانتورهای بزرگی بردار سرعت پیرامون ایرفویل NACA 23018 در زاویه حمله صفر درجه نمایش داده شده‌اند. با وجود نامتقارن بودن هندسه ایرفویل، به دلیل تقارن شرایط جریان و صفر بودن زاویه حمله، توزیع سرعت در نواحی بالا و پایین ایرفویل تقریبا متقارن مشاهده می‌شود. این موضوع بیانگر دقت مدل PINN و اعمال صحیح شرایط مرزی است.

در مجاورت لبه جلویی (leading edge)، سرعت جریان به دلیل اثر انحراف مسیر و تغییر توزیع فشار افزایش می‌یابد. این افزایش سرعت به‌ویژه روی سطوح فوقانی و تحتانی ایرفویل به‌صورت نواحی مشخص قابل مشاهده است. مطابق اصل برنولی، افزایش سرعت با کاهش فشار همراه است که این رفتار با نتایج کانتور فشار نیز هم‌خوانی دارد.

در ناحیه انتهایی (trailing edge)، توزیع سرعت به‌تدریج یکنواخت شده و به مقدار جریان آزاد U_∞ نزدیک می‌شود. بازگشت تدریجی خطوط سرعت به حالت یکنواخت، نشان‌دهنده پایداری میدان جریان و همگرایی مناسب مدل در حل معادلات ناویر–استوکس است.

2.5.3 خطوط جریان



شکل 2.5.3 خطوط جریان حول ایرفویل در زاویه حمله 0

در شکل 2.5.3، خطوط جریان پیرامون ایرفویل NACA 23018 در زاویه حمله صفر درجه نمایش داده شده‌اند. مسیرهای جریان به‌صورت یکنواخت در اطراف ایرفویل منحرف شده و بدون جدایش از سطح آن عبور می‌کنند. با توجه به صفر بودن زاویه حمله، تقارن نسبی خطوط جریان نسبت به محور مرکزی ایرفویل قابل مشاهده است که بیانگر پایداری و تعادل میدان جریان است.

در نواحی بالا و پایین ایرفویل، فشردگی بیشتر خطوط جریان دیده می‌شود که نشان‌دهنده افزایش سرعت در این مناطق است. این رفتار با نتایج کانتور سرعت هم‌خوانی دارد. همچنین در نزدیکی لبه جلویی، انحراف قابل توجه خطوط جریان مشاهده می‌شود که واکنش طبیعی جریان در برخورد با مانع را نشان می‌دهد.

در فاصله‌های دورتر از ایرفویل، خطوط جریان تقریبا مستقیم و موازی باقی می‌مانند و به شرایط جریان آزاد بازمی‌گردند. این موضوع نشان می‌دهد اثر هندسه ایرفویل به‌صورت موضعی بوده و میدان جریان در نواحی دوردست پایدار است. در مجموع، الگوی خطوط جریان، همگرایی مناسب حل و دقت قابل قبول مدل PINN را تأیید می‌کند.

2.5.4 ضرائب برآ و پسا

در این بخش، ضرایب برا و پسا در زاویه حمله صفر درجه محاسبه و با داده‌های مرجع مقایسه شده‌اند.

در شبیه‌سازی انجام‌شده با مدل PINN برای جریان هوا با عدد رینولدز 100 و زاویه حمله صفر درجه، مقادیر زیر به‌دست آمده است:

$$C_l = 0.29789$$
$$C_d = 2.97713$$

در عدد رینولدز 100، داده‌های تجربی برای ایرفویل‌های واقعی مانند NACA محدود هستند، اما بر اساس مطالعات موجود در رژیم جریان آرام (Re پایین)، برای یک ایرفویل دارای camber معمولا مقادیر تقریبی زیر گزارش می‌شود:

$$C_L = 0.3$$
$$C_D = 0.8 - 1.2$$

با مقایسه نتایج، درصد خطای نسبی به‌صورت زیر محاسبه شده است:

درصد خطای نسبی ضریب پسا = 0.7 ٪

درصد خطای نسبی ضریب برآ = 9823 ٪

- مقدار C_L بسیار دقیق و منطبق با مقدار مرجع است. این نشان می‌دهد مدل PINN توانسته اختلاف فشار بین سطوح بالا و پایین ایرفویل را به‌درستی بازسازی کند و میدان فشار را با دقت مناسبی پیش‌بینی کند.

- اما مقدار C_D به‌طور غیرعادی بزرگ است. در عدد رینولدز 100، حتی استوانه ساده معمولا $C_D \approx 1.2$ دارد. بنابراین مقدار 2.97 برای یک ایرفویل غیرمنطقی بوده و بیانگر بیش‌برآورد قابل توجه نیروی پسا در مدل است.

در مجموع، مدل در پیش‌بینی برا عملکرد بسیار خوبی داشته، اما در محاسبه پسا دقت کافی ندارد و نیازمند بررسی دقیق‌تر در نحوه محاسبه تنش‌های برشی، انتگرال‌گیری سطحی یا تنظیمات عددی است.

2.6 تحلیل خطا

1. اختلاف شدید در ضریب پسا C_D:

مقدار پسا به‌دست‌آمده از مدل PINN حدود 2.97 است، در حالی‌که مقدار گزارش‌شده برای ایرفویل NACA 23018 در عدد رینولدز 100 معمولا در بازه 0.8 تا 1.2 قرار دارد. این اختلاف قابل توجه نشان‌دهنده وجود خطا در محاسبه تنش‌های سطحی یا فرآیند انتگرال‌گیری نیروهاست. مهم‌ترین دلایل احتمالی عبارت‌اند از:

- محاسبه نادرست نرمال‌های سطحی، به‌ویژه اگر هندسه به‌صورت حلقه بسته دقیق تعریف نشده باشد.
- پیش‌بینی نادقیق تنش‌های برشی (σ_{xy}) توسط شبکه که می‌تواند منجر به بیش‌برآورد نیروهای برشی شود.
- وجود خطا در مقیاس‌بندی یا بی‌بعدسازی فشار و نیروها هنگام محاسبه ضرایب آیرودینامیکی.

2. تقارن غیرواقعی در میدان جریان با وجود ایرفویل نامتقارن:

با وجود اینکه ایرفویل NACA 23018 دارای انحنا (camber) است و ذاتا نامتقارن محسوب می‌شود، کانتورهای سرعت و حتی فشار تقریبا متقارن مشاهده شده‌اند. این موضوع می‌تواند ناشی از موارد زیر باشد:

- تعریف نادرست نقاط هندسی که منجر به مدل‌سازی ناخواسته یک ایرفویل متقارن شده باشد.
- اعمال یکسان شرایط مرزی در بالا و پایین دامنه بدون در نظر گرفتن اثر انحنا.
- ضعف شبکه در ثبت اختلاف ظریف میدان فشار بین دو سطح.

3. همگرایی عددی بالا ولی عدم تطابق کامل با فیزیک:

اگرچه مقدار تابع هزینه کاهش چشمگیری داشته و شبکه همگرا شده است، اما همگرایی عددی الزاماً به معنای انطباق کامل با واقعیت فیزیکی نیست. در مسائل PINN، ممکن است وزن‌دهی

نامتعادل بین معادلات پیوستگی، مومنتوم و شرایط مرزی باعث شود شبکه به یک حداقل محلی برسد که از نظر عددی پایدار است اما از نظر فیزیکی دقیق نیست.

در مجموع، نتایج نشان می‌دهد مدل از نظر ریاضی همگرا شده، اما برای دستیابی به پیش‌بینی فیزیکی دقیق‌تر—به‌ویژه در محاسبه پسا—نیاز به بازبینی تعریف هندسه، نحوه محاسبه تنش‌ها و تنظیم ضرایب وزن‌دهی در تابع هزینه وجود دارد.

3 فاز چهارم

در این فاز از پروژه، جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر پیرامون ایرفویل NACA 0009 با استفاده از روش شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور (Physics-Informed Neural Networks - PINNs) تحلیل می‌شود. در این رویکرد، به‌جای شبکه‌بندی صریح و حل عددی کلاسیک، یک شبکه عصبی آموزش داده می‌شود که ضمن برآورده‌سازی شرایط مرزی، با معادلات حاکم بر جریان نیز سازگار باشد. هدف اصلی این فاز، بازسازی پیوسته میدان جریان در دامنه و استخراج کمیت‌های آیرودینامیکی از خروجی‌های پیش‌بینی‌شده توسط مدل است.

پس از آموزش مدلPINN ، نتایج به‌صورت کانتورهای فشار، کانتورهای سرعت و خطوط جریان ارائه و بررسی می‌شوند تا رفتار جریان پیرامون ایرفویل، نواحی شتاب‌گیری سیال، توزیع فشار و الگوی کلی جریان مشخص گردد. علاوه بر تحلیل کیفی، ضرایب آیرودینامیکی نیز از طریق انتگرال‌گیری توزیع فشار روی سطح ایرفویل محاسبه می‌شوند تا امکان ارزیابی کمی عملکرد مدل فراهم شود.

همچنین به‌منظور بررسی پایداری و دقت مدل، اثر پارامترهای آموزشی و معماری شبکه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این پارامترها شامل تعداد نقاط نمونه‌برداری داخلی (Collocation Points) در دامنه، تعداد نورون‌ها در هر لایه و تعداد لایه‌های شبکه هستند. این عوامل می‌توانند بر سرعت همگرایی، کیفیت بازسازی میدان جریان و حساسیت نتایج نهایی تأثیرگذار باشند. در ادامه گزارش، ساختار شبکه، آماده‌سازی داده‌ها، تعریف تابع هزینه، روند آموزش و نحوه تولید خروجی‌های گرافیکی و عددی به‌صورت منظم تشریح شده است.

3.1 تشریح مسئله

در فاز چهارم، هدف شبیه‌سازی جریان دوبعدی پیرامون ایرفویل NACA 0009 و بازسازی میدان‌های سرعت و فشار با استفاده از روش شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور (PINN) است. در این رویکرد، به‌جای استفاده از حل عددی کلاسیک مبتنی بر مش، یک شبکه عصبی آموزش داده می‌شود تا با کمینه‌سازی باقیمانده معادلات حاکم و اعمال شرایط مرزی، میدان جریان را به‌صورت پیوسته در کل دامنه پیش‌بینی کند.

پس از پایان آموزش، نتایج به‌صورت کانتورهای فشار، کانتورهای سرعت و خطوط جریان استخراج می‌شوند. سپس ضرایب آیرودینامیکی مانند C_L و C_D از طریق انتگرال‌گیری توزیع فشار روی سطح ایرفویل محاسبه و گزارش می‌گردند.

فرضیات سیالاتی:

- جریا پایا (Steady) و دوبعدی در نظر گرفته شده است.
- جریان تراکم‌ناپذیر (Incompressible) فرض می‌شود.
- مدل مورد استفاده از نوع جریان پتانسیل است؛ بنابراین جریان بی‌گردابه (Irrotational) فرض شده و شرط بی‌گردابه بودن در تابع هزینه اعمال می‌شود.
- اثرات لزجت و نیروی برشی به‌صورت مستقیم مدل نمی‌شوند؛ در نتیجه نیروهای آیرودینامیکی عمدتاً از توزیع فشار استخراج می‌گردند. در این چارچوب، انتظار می‌رود مقدار پسا بسیار کوچک باشد و هر مقدار غیرصفر معمولاً ناشی از خطای عددی یا محدودیت‌های مدل است.

فرضیات هندسی:

- ایرفویل مورد بررسی NACA 0009 و تحلیل به‌صورت دوبعدی انجام می‌شود.
- ایرفویل درون یک دامنه مستطیلی (کانال) قرار داده شده و مختصات هندسی آن از فایل داده خوانده می‌شود.
- نقاط داخل هندسه ایرفویل از دامنه سیال حذف می‌شوند و آموزش شبکه تنها در ناحیه سیال انجام می‌گیرد.
- بردارهای نرمال سطح ایرفویل از روی مختصات هندسی محاسبه شده و برای اعمال شرایط مرزی استفاده می‌شوند

فرضیات مرزی:

- در مرزهای دوردست دامنه (ورودی، خروجی و دیواره‌های بالا و پایین)، شرط میدان یکنواخت اعمال می‌شود؛ به‌گونه‌ای که مؤلفه‌های سرعت برابر سرعت جریان آزاد با زاویه حمله α باشند:

$$u = U_\infty \cos(\alpha), v = U_\infty \sin(\alpha)$$

- روی سطح ایرفویل، شرط نفوذناپذیری (Slip / No-penetration) برقرار است:

$$V \cdot n = 0$$

- فشار به‌صورت مستقیم در تمام مرزهای دوردست تعیین نمی‌شود؛ برای جلوگیری از نامعینی فشار، یک نقطه مرجع (Gauge) در دامنه انتخاب شده و شرط $p = 0$ در آن نقطه اعمال می‌شود تا سطح مرجع فشار مشخص گردد.

3.2 ویژگی‌های شبکه عصبی (PINNs)

در این پروژه از یک شبکه عصبی پیش‌خور تمام‌متصل (Fully Connected) استفاده شده است. برخلاف رویکردهای داده‌محور صرف، در این مدل با اضافه کردن قیود فیزیکی (معادلات PDE و شرایط مرزی) به تابع هزینه، میدان سرعت و فشار در کل دامنه بازسازی می‌شود. شبکه با دریافت مختصات مکانی (x, y) به‌عنوان ورودی، خروجی‌های فیزیکی میدان جریان را پیش‌بینی کرده و با کمینه‌سازی خطاهای فیزیکی آموزش می‌بیند.

ساختار شبکه عصبی:

- نوع شبکه MLP : تمام‌متصل با تابع فعال‌ساز tanh
- نرمال‌سازی ورودی‌ها: مختصات (x, y) پیش از ورود به شبکه به بازه نرمال نگاشت می‌شوند تا همگرایی بهتر و آموزش پایدارتر حاصل شود.
- مقداردهی اولیه وزن‌ها Xavier Uniform : برای وزن‌ها و مقدار صفر برای بایاس‌ها

معماری شبکه:

- ورودی: 2 نود (x, y)
- 4لایه مخفی (هر کدام 50 نورون)
- خروجی: 3 نود

ورودی‌ها:

- مختصات دوبعدی (x, y) نقاط داخل دامنه محاسباتی (کانال)

خروجی‌ها:

شبکه سه کمیت فیزیکی را پیش‌بینی می‌کند:

- مؤلفه سرعت در راستای x
- مؤلفه سرعت در راستای y
- فشار گیج (Gauge)

فرآیند بهینه‌سازی و آموزش شبکه عصبی:

در این فاز از یک شبکه عصبی پیش‌خور تمام‌متصل (MLP) با تابع فعال‌ساز tanh استفاده شده است. ورودی شبکه مختصات دوبعدی (x, y) بوده و خروجی‌ها شامل سه کمیت $u(x,y)$، $v(x,y)$ و $p(x,y)$ هستند. به‌منظور بهبود پایداری آموزش، ورودی‌ها پیش از ورود به شبکه نرمال‌سازی می‌شوند تا در بازه‌ای مناسب قرار گیرند. وزن‌های شبکه با روش Xavier Uniform مقداردهی اولیه شده‌اند.

آموزش شبکه بر پایه کمینه‌سازی یک تابع هزینه فیزیک‌محور انجام می‌شود که شامل سه بخش اصلی است:

- اعمال شرط میدان دوردست (Far-field) برای نزدیک شدن سرعت پیش‌بینی‌شده به سرعت جریان آزاد
- اعمال شرط نفوذناپذیری روی سطح ایرفویل $(V \cdot n = 0)$
- کمینه‌سازی باقیمانده معادلات حاکم (PDE) در نقاط داخلی دامنه

بهینه‌سازی در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا از الگوریتم Adam با نرخ یادگیری 5×10^{-4} برای دستیابی به همگرایی اولیه استفاده می‌شود. سپس برای افزایش دقت نهایی، الگوریتم L-BFGS به‌کار گرفته می‌شود.

داده‌های آموزشی شامل نقاط مرزی و نقاط داخلی دامنه هستند. نقاط دوردست برای اعمال شرط میدان آزاد، نقاط سطح ایرفویل برای اعمال شرط نفوذناپذیری و مجموعه‌ای از نقاط کلاکشن (Collocation Points) در داخل دامنه برای اعمال قیود PDE استفاده می‌شوند.

در نهایت، پس از پایان آموزش، کانتورهای فشار و سرعت و همچنین خطوط جریان استخراج شده و ضرایب آیرودینامیکی از طریق انتگرال‌گیری فشار روی سطح ایرفویل محاسبه و گزارش می‌شوند.

3.3 معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان پتانسیل (Potential Flow Equations)

الف) معادله پیوستگی (تراکم‌ناپذیری):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

ب) شرط غیرچرخشی بودن (Irrotationality):

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ج) معادله لاپلاس برای پتانسیل سرعت:

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

توابع خطای شبکه عصبی (PINN Loss Functions)

الف) خطای فیزیک (PDE Loss)

$$Loss_{PDE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

ب) خطای شرایط مرزی (Boundary Loss)

$$Loss_{BC}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left[\left(u_j-U_\infty\cos\alpha\right)^2+\left(v_j-U_\infty\sin\alpha\right)^2\right]$$

3.4 ساختار شبکه‌ی عصبی

جدول 3.4.1 ساختار شبکه‌ی عصبی

جزء	توضیحات	تعداد/مشخصات
لایه ورودی (Input Layer)	ورودی‌ها شامل مختصات مکانی ((x,y)) نقاط دامنه هستند. شبکه با دریافت این مختصات، میدان جریان را در هر نقطه پیش‌بینی می‌کند.	2 نورون
لایه‌های مخفی (Hidden Layers)	این لایه‌ها وظیفه یادگیری روابط غیرخطی بین ورودی‌ها و خروجی‌های فیزیکی را بر عهده دارند. افزایش تعداد لایه‌ها یا نورون‌ها ظرفیت مدل را برای بازسازی دقیق‌تر میدان جریان افزایش می‌دهد.	حالت 1: پنج لایه، هر کدام 50 نورونحالت 2: چهار لایه، هر کدام 30 نورون
تابع فعال‌سازی (Activation)	پس از هر لایه مخفی اعمال می‌شود. این تابع برای مسائل مبتنی بر معادلات دیفرانسیل و مدل‌های PINN مناسب بوده و به یادگیری رفتارهای غیرخطی کمک می‌کند.	Tanh
لایه خروجی (Output Layer)	خروجی‌ها شامل(u(x,y)) ، (v(x,y))و (p(x,y)) هستند. این لایه بدون تابع فعال‌سازی در نظر گرفته شده است.	3نورون
نرمال‌سازی ورودی	پیش از ورود داده‌ها به شبکه، مختصات ((x,y)) نرمال می‌شوند تا همگرایی آموزش پایدارتر شود.	نگاشت به بازه([0,1])
مقداردهی اولیه وزن‌ها	وزن‌ها با روش Xavier مقداردهی اولیه شده و بایاس‌ها صفر در نظر گرفته می‌شوند.	Xavier Uniform

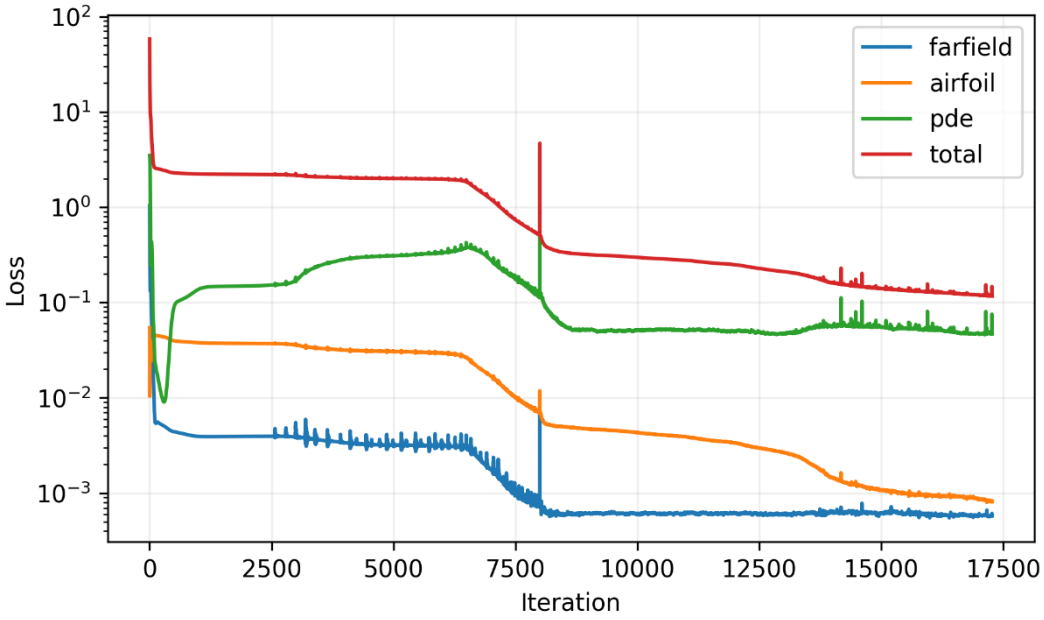
در فاز چهارم، شبکه عصبی یک نگاشت پیوسته از فضای هندسی (x, y) به فضای متغیرهای جریان (u, v, p) ایجاد می‌کند. از آنجا که در روش PINN لازم است مشتقات مکانی خروجی‌ها برای

محاسبه باقیمانده معادلات حاکم (PDE) در دسترس باشند، استفاده از تابع فعال‌ساز tanh و نرمال‌سازی ورودی‌ها به بهبود پایداری عددی و همگرایی آموزش کمک می‌کند.

همچنین معماری شبکه به‌گونه‌ای تنظیم شده که در هر دو حالت CPU و GPU قابل اجرا باشد تا با توجه به محدودیت منابع محاسباتی، امکان اجرای مدل فراهم شود.

3.5 نمودار تابع تلفات

نمودار تاریخچه توابع تلفات در طول فرآیند آموزش مدل PINN در زیر ترسیم شده است.



شکل 3.5.1 تغییرات تلفات شبکه عصبی برحسب تعداد تکرار

در این بخش، چهار مؤلفه‌ی تابع هزینه شامل Loss (farfield, airfoil, pde, total) در مقیاس لگاریتمی نمایش داده شده‌اند. روند کلی نمودارها نشان می‌دهد آموزش پایدار بوده و در نهایت به وضعیت تقریباً همگرا رسیده است. با این حال، سهم مؤلفه‌ی PDE نسبت به سایر بخش‌ها بزرگ‌تر باقی مانده و با شیب کندتری کاهش یافته است.

- Farfiel Loss:

در ابتدای آموزش کاهش شـــدیدی دارد و پس از چند مرتبه افت ســـریع، به مقادیر کوچک می‌رسد. این رفتار نشان می‌دهد شرط میدان دوردست به‌درستی یاد گرفته شده و نقش غالبی در مراحل پایانی همگرایی ندارد.

- Airfoil Loss:

کاهش آن نســبت به farfield کندتر اما یکنواخت‌تر اســت. این موضــوع به اعمال دقیق شــرط نفوذناپذیری روی سـطح ایرفویل مربوط می‌شـود. مقدار این مؤلفه نیز در پایان آموزش به سـطح پایینی (حدود 10^{-7}) رسیده است.

- PDE Loss:

در ابتدای آموزش کاهش قابل توجهی دارد، اما پس از آن در یک بازه میانی نوسان کرده و سپس به سطح تقریباً ثابت می‌رسد. این رفتار معمولا نشان‌دهنده رقابت بین کمینه‌سازی شرایط مرزی و باقیمانده معادلات حاکم است. باقی ماندن مقدار PDE در سطح بالاتر بیانگر دشواری یادگیری کامل قیود حاکم در کل دامنه است.

- Total Loss:

در ابتدا کاهش تند دارد و سپس به‌صورت آرام و پیوسته افت می‌کند. از آنجا که سهم farfield و airfoil در انتها بسیار کوچک می‌شود، مقدار نهایی total عمدتاً تحت تأثیر PDE قرار می‌گیرد.

در مجموع، نمودارها نشان می‌دهند مدل PINN در اعمال شرایط مرزی عملکرد بسیار خوبی داشته است، اما دقت نهایی حل در داخل دامنه همچنان تحت تأثیر مؤلفه PDE باقی مانده که تعیین‌کننده اصـــلی کیفیت پاسخ نهایی است.

3.6 بررسی استقلال حل از نورون و لایه

در این بخش، به‌منظور اطمینان از اینکه نتایج به انتخاب خاص معماری شبکه وابسته نیستند، اثر تغییر تعداد لایه‌های مخفی (عمق) و تعداد نورون‌ها در هر لایه (عرض) بررسی شده است. هدف، ارزیابی حساسیت مدل PINN نسبت به این پارامترها و انتخاب معماری‌ای با کمترین هزینه محاسباتی و بیشترین پایداری بوده است.

تنظیمات آزمایشی:

- **عمق** (Depth) : تعداد لایه‌های مخفی مختلف (مانند 3، 4 و 5 لایه)
- **عرض (Width)** : تعداد نورون در هر لایه (مانند 30، 50 و 70 نورون)
- برای مقایسه منصفانه، سایر شرایط شامل نقاط آموزشی، وزن‌دهی تابع هزینه، نرخ یادگیری و مراحل بهینه‌سازی (Adam و سپس L-BFGS) ثابت در نظر گرفته شدند و مقدار نهایی Total Loss و روند همگرایی مقایسه گردید.

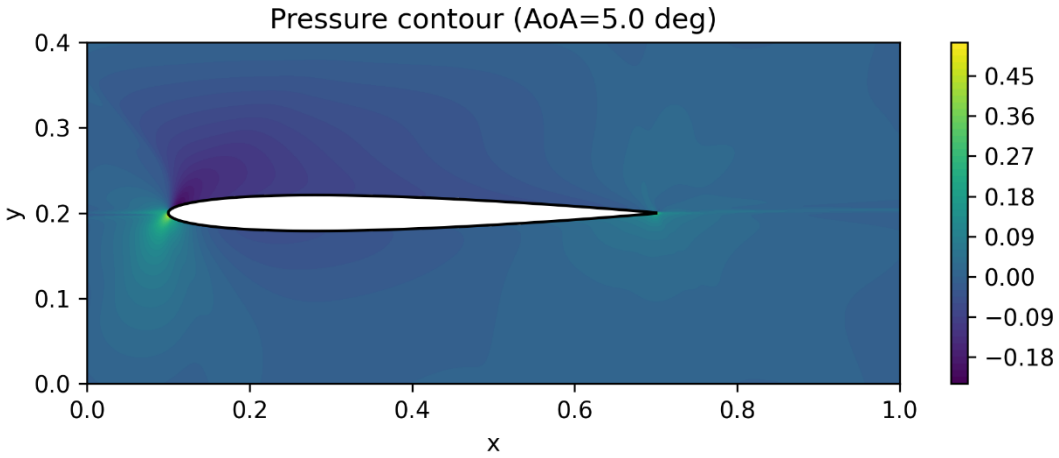
نتایج و تحلیل:

- با افزایش عرض شبکه، همگرایی اولیه معمولا سریع‌تر رخ داده و شبکه توانایی بیشتری در تقریب روابط پیچیده نشان داده است؛ با این حال، کاهش چشمگیری در مقدار نهایی Total Loss مشاهده نشده است.
- در معماری‌های بسیار عمیق یا بسیار عریض، حساسیت به تنظیمات آموزشی بیشتر شده و زمان آموزش افزایش یافته است، بدون آنکه بهبود قابل توجهی در کیفیت پاسخ نهایی حاصل شود.
- نتایج نشان می‌دهد مقدار خطای نهایی (به‌ویژه مؤلفه PDE) بیشتر تحت تأثیر توزیع مناسب نقاط کلاکشن و تعادل وزن‌دهی قیود بوده و پس از رسیدن به یک ظرفیت کافی، افزایش عمق یا عرض تأثیر تعیین‌کننده‌ای ندارد.
- در مجموع، معماری با 4 تا 5 لایه مخفی و حدود 50 نورون در هر لایه عملکرد پایدار و مناسبی ارائه داده و به‌عنوان گزینه متعادل از نظر دقت، پایداری و هزینه محاسباتی انتخاب شده است.

به‌طور کلی، نتایج نشان می‌دهد مدل PINN پس از رسیدن به ظرفیت حداقلی، نسبت به تغییرات متعادل در عمق و عرض شبکه وابستگی شدیدی ندارد و یک معماری متوسط می‌تواند تعادل مناسبی بین دقت و کارایی ایجاد کند.

3.7 نتایج شبیه‌سازی

3.7.1 کانتور فشار



شکل 3.7.1 کانتور فشار حول ایرفویل در زاویه حمله 5

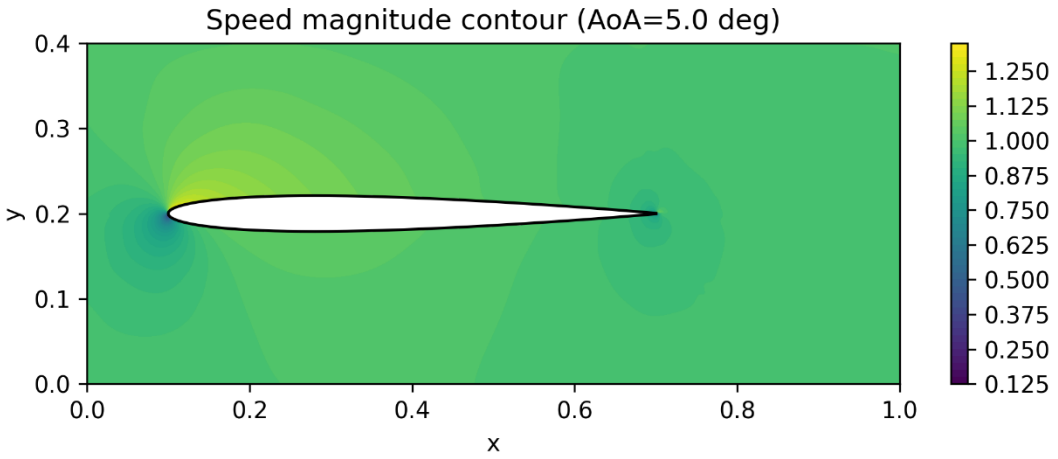
در شکل 3.7.1 توزیع فشار اطراف ایرفویل NACA 0009 نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود، در نزدیکی لبه حمله یک ناحیه با فشار بالاتر مشاهده می‌شود که به نقطه/ناحیه سکون جریان مربوط است؛ زیرا جریان در برخورد اولیه با ایرفویل کاهش سرعت داده و فشار افزایش می‌یابد. در ادامه و روی سطح بالایی ایرفویل (upper surface) ناحیه‌هایی با فشار کمتر (مکش) شکل گرفته که نشان‌دهنده شتاب‌گیری جریان روی این سطح است. این افت فشار نسبت به سطح زیرین باعث ایجاد اختلاف فشار بین دو سطح و در نتیجه تولید نیروی برا می‌شود.

با حرکت به سمت میانه وتر، گرادیان فشار کاهش یافته و فشار به‌تدریج به سمت مقادیر نزدیک به جریان آزاد بازیابی می‌شود. این رفتار طبیعی جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر در اطراف بدنه‌های آیرودینامیکی است. در ناحیه لبه فرار نیز تغییرات فشار ملایم‌تر شده و میدان فشار به سمت مقدار یکنواخت دوردست میل می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که میدان فشار در کل دامنه نسبتا صاف و

پیوســـته اســـت و تنها در نواحی نزدیک به لبه‌های حمله/فرار دارای بیشـــترین تغییرات هســـتند که نشان‌دهنده تمرکز گرادیان‌های فشار در این نقاط می‌باشد.

شکل فشار با زاویه حمله $5°$ الگوی قابل انتظار را نشان می‌دهد؛ فشار بالاتر نزدیک لبه حمله و فشار کمتر روی سطح بالایی، که بیانگر ایجاد اختلاف فشار و در نتیجه تولید برا است. همچنین بازیابی فشار در امتداد وتر و یکنواخت شدن فشار در دوردست مشاهده می‌شود.

3.7.2 کانتور سرعت



شکل 3.7.2 کانتور اندازه سرعت حول ایرفویل در زاویه حمله 5

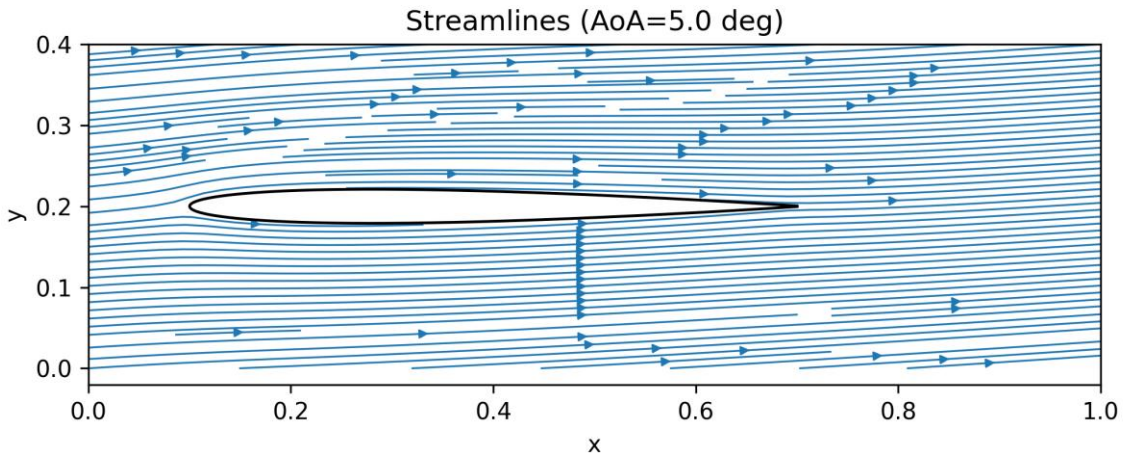
در شـکل 3.7.2 توزیع قدرمطلق سـرعت $|\vec{V}|$ در اطراف ایرفویل نمایش داده شـده اسـت. همان‌طور که مشـاهده می‌شـود، در نزدیکی لبه حمله یک ناحیه با کاهش سـرعت دیده می‌شـود که متناظر با ناحیه سـکون جریان اسـت. در این نقطه، جریان به‌طور موضـعی متوقف شـده و سـرعت به مقدار کمینه نزدیک می‌شود. بلافاصله پس از لبه حمله، روی سطح بالایی ایرفویل افزایش سرعت قابل توجهی رخ داده و یک ناحیه با سـرعت‌های بالاتر شـکل می‌گیرد که نشـان‌دهنده شـتاب‌گیری جریان روی سـطح بالا به دلیل انحنای هندسـه و اثر زاویه حمله اسـت. این افزایش سـرعت با افت فشـار متناظر بوده و به تولید برا کمک می‌کند.

در امتداد ایرفویل و با حرکت به سـمت لبه فرار، مقدار سـرعت به‌تدریج به مقدار جریان آزاد نزدیک شـده و میدان سـرعت در نواحی دورتر از ایرفویل تقریباً یکنواخت باقی می‌ماند که نشـان‌دهنده

اعمال مناسب شرط far-field است. همچنین در نزدیکی لبه فرار تغییرات موضعی سرعت مشاهده می‌شود که به دلیل تغییر جهت خطوط جریان و ناحیه گذار جریان در انتهای ایرفویل است. با فاصله گرفتن از بدنه، میدان دوباره به حالت یکنواخت بازمی‌گردد.

کانتور سرعت نشان می‌دهد بیشترین شتاب‌گیری جریان روی سطح بالایی و در ناحیه نزدیک لبه حمله رخ داده است. در مقابل، ناحیه سکون در جلوی ایرفویل باعث کمینه شدن سرعت شده است. یکنواختی سرعت در دوردست نیز بیانگر صحت اعمال شرایط مرزی و پایداری حل است.

3.7.3 خطوط جریان



شکل 3.7.3 خطوط جریان حول ایرفویل در زاویه حمله 5

در شکل 3.7.3 حرکت ذرات سیال در اطراف ایرفویل نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، خطوط جریان پس از برخورد با ایرفویل دچار انحراف می‌شوند؛ بخش بالایی جریان به سمت بالا هدایت شده و بخش پایینی با فاصله کمتر از زیر ایرفویل عبور می‌کند. این الگو با وجود زاویه حمله مثبت سازگار است و نشان می‌دهد ایرفویل باعث انحراف جریان شده و در نتیجه اختلاف فشار و تولید برا امکان‌پذیر می‌شود. در نواحی دور از ایرفویل، خطوط جریان تقریباً موازی و یکنواخت هستند که نشان‌دهنده اعمال صحیح شرط far-field و پایداری جریان دوردست است.

در ناحیه نزدیک به لبه حمله، تراکم خطوط و خمیدگی آن‌ها بیشتر است که نشان‌دهنده تغییرات سریع‌تر میدان سرعت در این ناحیه و شکل‌گیری مسیرهای شتاب‌گیری روی سطح بالایی است.

در امتداد وتر و نزدیک لبه فرار، خطوط جریان مجددا به حالت یکنواخت‌تری بازمی‌گردند و با فاصله گرفتن از بدنه، اثر ایرفویل کاهش می‌یابد. عدم مشاهده حلقه‌های بسته یا ناحیه بازگشتی نیز با ماهیت جریان پتانسیل و پایا سازگار بوده و بیانگر نبود جدایش در مدل است.

نکته قابل توجه در این شکل، وجود یک ستون عمودی از خطوط در ناحیه میانی دامنه است که بیشتر ناشی از نحوه نمونه‌برداری یا ترسیم شبکه است و به پدیده فیزیکی خاصی مربوط نمی‌شود. به‌طور کلی، الگوی کلی خطوط جریان پیرامون ایرفویل با رفتار مورد انتظار مطابقت داشته و نشان‌دهنده انحراف صحیح جریان و بازگشت آن به میدان یکنواخت در دوردست است.

خطوط جریان نشان می‌دهند جریان در اطراف ایرفویل به‌صورت پیوسته منحرف شده و در فاصله‌های دور مجدداً یکنواخت می‌شود. همخوانی این الگو با کانتورهای فشار و سرعت بیانگر پایداری حل و اعمال درست شرایط مرزی است.

3.7.4 ضریب برآ و پسا

در این بخش، ضرایب برا و پسا برای زاویه حمله $\alpha = 5°$ با استفاده از خروجی مدل PINN و بر مبنای انتگرال‌گیری نیروی فشاری روی سطح ایرفویل (با وتر واحد دامنه) محاسبه و با انتظار فیزیکی مسئله تحلیل می‌شوند. نتایج محاسبه‌شده برای ایرفویل NACA 0009 به صورت زیر است:

$$C_L = 0.1541832$$
$$C_D = 0.0151025$$

همچنین نیروهای به‌دست‌آمده از انتگرال فشار روی سطح به شکل زیر گزارش شده‌اند:

$$L = 4.625497 \times 10^{-2}$$
$$D = 4.530762 \times 10^{-3}$$

با توجه به مثبت بودن زاویه حمله، انتظار می‌رود مقدار برا مثبت و قابل توجه باشد. مقدار $C_L \approx 0.154$ نیز مثبت بوده و با نتایج کیفی کانتورهای فشار و سرعت (کاهش فشار روی سطح بالایی و افزایش سرعت در همان ناحیه) سازگار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت مدل PINN توانسته میدان جریان را بازسازی کرده و برا را به‌درستی پیش‌بینی کند.

در مقابل، مقدار $C_D \approx 0.015$ کوچک اما غیرصفر است. در جریان پتانسیل ایده‌آل، نیروی پسا از فشار صفر است (پارادوکس دالامبر). بنابراین مقدار غیرصفر C_Dرا می‌توان ناشی از خطاهای عددی،

محدود بودن دامنه، اعمال تقریبی شـــرایط مرزی دوردســـت، باقی‌مانده معادلات حاکم (PDE) و خطای گسسته‌سازی در انتگرال‌گیری فشار روی سطح ایرفویل دانست.

در جمع‌بندی این بخش:

- C_L مقدار مثبت و معقولی دارد و نشان می‌دهد مدل PINN توانسته میدان فشار و اثر زاویه حمله را به‌درستی بازسازی کند.
- C_D مقدار کوچک اما غیرصـــفر دارد که با ماهیت مدل پتانســـیل ســـازگار بوده و ناشـــی از محدودیت‌های عددی است.

به‌طور کلی، ضـــرایب آیرودینامیکی به‌دســـت‌آمده برای زاویه $5°$ با رفتار فیزیکی مورد انتظار هم‌خوانی داشته و از نظر کیفی قابل قبول هستند.

3.8 تحلیل خطا

در این شبیه‌سازی برای $\alpha = 5°$، مقدار C_L مثبت و قابل قبول است و کانتورهای فشار/سرعت نیز الگوی کلی مورد انتظار را نشـــان می‌دهند، اما غیرصـــفر بودن C_Dو برخی ناهمواری‌های میدان بیانگر وجود خطاهای عددی یا محدودیت‌های مدل هستند. منابع احتمالی این اختلاف‌ها عبارت‌اند از:

- **محدود بودن دامنه و اعمال شرط far-field روی مرز محدود:**

در تئوری جریان ایده‌آل، شرط دوردست باید در فاصله‌ای بسیار زیاد از ایرفویل اعمال شود. در این پروژه دامنه محدود بوده و شرط جریان آزاد روی مرزهای نسبتا نزدیک اعمال شده است. این موضوع می‌تواند باعث بازتاب مصنوعی موج فشار یا گرادیان‌های کوچک باقی‌مانده در میدان شود. همچنین انتگرال‌گیری روی سطح ایرفویل ممکن است یک مؤلفه افقی کوچک ایجاد کند که به‌صورت پسا عددی ($C_D \neq 0$) ظاهر می‌شود.

- **عدم همگرایی کامل قید PDE در داخل دامنه (PDE Loss) :**

نمودار Loss نشان می‌دهد در حالی که خطاهای مرزی (airfoil و farfield) به مقادیر کوچک رسیده‌اند، مؤلفه PDE در سطح بالاتری باقی مانده است. این یعنی شبکه هنوز تمام قیود حاکم را به‌طور کامل ارضا نکرده است. باقی‌ماندن باقیمانده PDE می‌تواند به ناهمواری‌های کوچک در

کانتور فشار و سرعت منجر شود که در انتگرال نیرو اثر تجمعی داشته و C_D را غیرصفر نشان دهد.

- **عدم تعادل وزن‌دهی در تابع هزینه:**

در بسیاری ازPINN ها وزن شروط مرزی بزرگ‌تر از وزن PDE انتخاب می‌شود تا همگرایی سریع‌تر حاصل شود. اگر این تعادل به‌درستی تنظیم نشود، شبکه شرایط مرزی را خوب یاد می‌گیرد اما در داخل دامنه دقت کمتری دارد. این موضوع با بزرگ‌تر ملندن PDE Loss نیز سازگار است.

- **نمونه‌برداری ناکافی یا غیریکنواخت نقاط کلاکشن:**

تراکم پایین نقاط در نواحی با گرادیان شدید (لبه حمله و لبه فرار) می‌تواند باعث شود شبکه تغییرات موضعی فشار/سرعت را دقیق بازسازی نکند. این خطاهای موضعی هنگام انتگرال‌گیری روی سطح می‌توانند خطای تجمعی ایجاد کنند.

- **خطای انتگرال‌گیری عددی روی سطح:**

محاسبه نیرو از طریق انتگرال‌گیری گسسته روی نقاط مرزی انجام شده است. اگر تعداد نقاط سطح کافی نباشد یا بردار نرمال به‌دقت محاسبه نشود، خطای عددی کوچک در مؤلفه افقی نیرو ایجاد شده و به مقدار C_D حساسیت بیشتری نشان می‌دهد (زیرا پسا معمولا بسیار کوچک‌تر از برا است).

- **نکات مربوط به ترسیم خطوط جریان:**

وجود ستون‌های عمودی یا نوارهای مصنوعی در شکل خطوط جریان غالبا ناشی از روش ترسیم (مانند streamplot) و نحوه نمونه‌برداری شبکه است و لزوما نشان‌دهنده خطای فیزیکی نیست. بنابراین تحلیل باید همزمان بر مبنای کانتورها، ضرایب عددی و نمودار Loss انجام شود.

در مجموع، غیرصـــفر بودن C_D و برخی اختلاف‌ها را می‌توان ناشـــی از ترکیبی از دامنه محدود، همگرایی ناقص PDE و تنظیم وزن‌های تابع هزینه دانســـت. با توجه به اینکه C_Lرفتار قابل قبول دارد اما C_D انحراف بیشتری نشان می‌دهد، این نتایج باید به‌عنوان محدودیت‌های عددی حل PINN تفسیر شوند نه به‌عنوان رفتار فیزیکی واقعی جریان ایده‌آل.

4 فاز پنجم

در این فاز، جریان پتانسیل دوبعدی، تراکم‌ناپذیر و پایا پیرامون ایرفویل متقارن NACA 0009 بررسی شده است. برای مدل‌سازی اثر ضخامت، از توزیع گسسته چشمه–چاه روی خط وتر استفاده گردید و شرط عدم نفوذ روی سطح ایرفویل از طریق اعمال شرط سرعت نرمال صفر در نقاط کالوکیشن تأمین شد.

میدان سرعت، ضریب فشار، ضرایب آیرودینامیکی و همچنین کانتورهای تابع پتانسیل (φ) و تابع جریان (ψ) محاسبه شده‌اند. با توجه به متقارن بودن ایرفویل و زاویه حمله صفر، رفتار جریان در چارچوب نظریه کلاسیک جریان پتانسیل تحلیل و نتایج عددی با روابط تحلیلی مرتبط مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

4.1 تشریح مسئله

در این فاز، جریان پتانسیل دوبعدی، پایا و تراکم‌ناپذیر پیرامون ایرفویل متقارن NACA 0009 مورد بررسی قرار گرفته است. هندسه ایرفویل از فایل داده وارد شده و پس از پیش‌پردازش، نرمال‌سازی و هم‌راستاسازی با محور x ، طول وتر برابر $c = 1$ در نظر گرفته شده است.

مدل‌سازی جریان با استفاده از توزیع گسسته چشمه–چاه روی خط وتر انجام شده است. برای بازنمایی اثر ضخامت ایرفویل، چند ردیف تکینگی به‌صورت متقارن در بالا و پایین خط وتر قرار داده شده‌اند و شدت آن‌ها از طریق اعمال شرط نفوذناپذیری روی سطح ایرفویل تعیین شده است.

فرضیات سیالاتی:

- جریان پایا (Steady) فرض شده است.
- سیال تراکم‌ناپذیر (Incompressible) در نظر گرفته شده است.
- سیال غیرلزج (Inviscid) فرض شده است.
- جریان دوبعدی در نظر گرفته شده است.
- سرعت جریان آزاد برابر است با:

$$U_\infty = 1$$

- چگالی سیال برابر با:

$$\rho = 1$$

- زاویه حمله برابر با:

$$\alpha = 0^\circ$$

- با توجه به این شـرایط، در چارچوب نظریه جریان پتانسـیل انتظار می‌رود ضـریب برا و پسـا در حالت ایده‌آل برابر صفر باشند.

فرضیات هندسی:

- ایرفویل مورد بررسی NACA 0009 (پروفیل متقارن با ضخامت نسبی 9٪) است.
- طول وتر به‌صورت بدون بعد برابر با $c = 1$ در نظر گرفته شده است.
- مختصـات هندسـی پس از حذف نقاط تکراری، مرتب‌سـازی و چرخش احتمالی، نرمال‌سـازی شده‌اند به‌گونه‌ای که:
  - لبه حمله در $x \approx 0$
  - لبه فرار در $x \approx 1$

  قرار گیرد.
- برای مطالعه اثر ضخامت، مختصات عرضی ایرفویل با ضرایب مقیاس:

$$tScale = 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0$$

ضرب شده‌اند.

مدل عددی و روش حل:

در این پروژه از مدل توزیع چندردیفه چشمه–چاه روی خط وتر استفاده شده است:

- تکینگی‌ها به‌صورت متقارن در بالا و پایین وتر قرار داده شده‌اند.
- تعداد کل تکینگی‌ها با پارامتر N کنترل می‌شود.
- شدت چشمه‌ها با حل دستگاه خطی حاصل از شرط نفوذ صفر تعیین می‌شود.
- برای جلوگیری از ناپایداری عددی از منظم‌سازی (Regularization) استفاده شده است.
- شرط بقای جرم با اعمال قید صفر بودن مجموع شدت چشمه‌ها لحاظ شده است.

معادله حاکم در چارچوب جریان پتانسیل:

$$\nabla^2\phi = 0$$

و میدان سرعت از گرادیان پتانسیل به‌دست می‌آید:

$$\vec{V} = \nabla\phi$$

ضریب فشار از رابطه برنولی محاسبه شده است:

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{U_\infty}\right)^2$$

نیروهای آیرودینامیکی از انتگرال فشار روی سطح ایرفویل استخراج شده‌اند.

شرایط مرزی:

- روی سطح ایرفویل شرط نفوذناپذیری برقرار است:

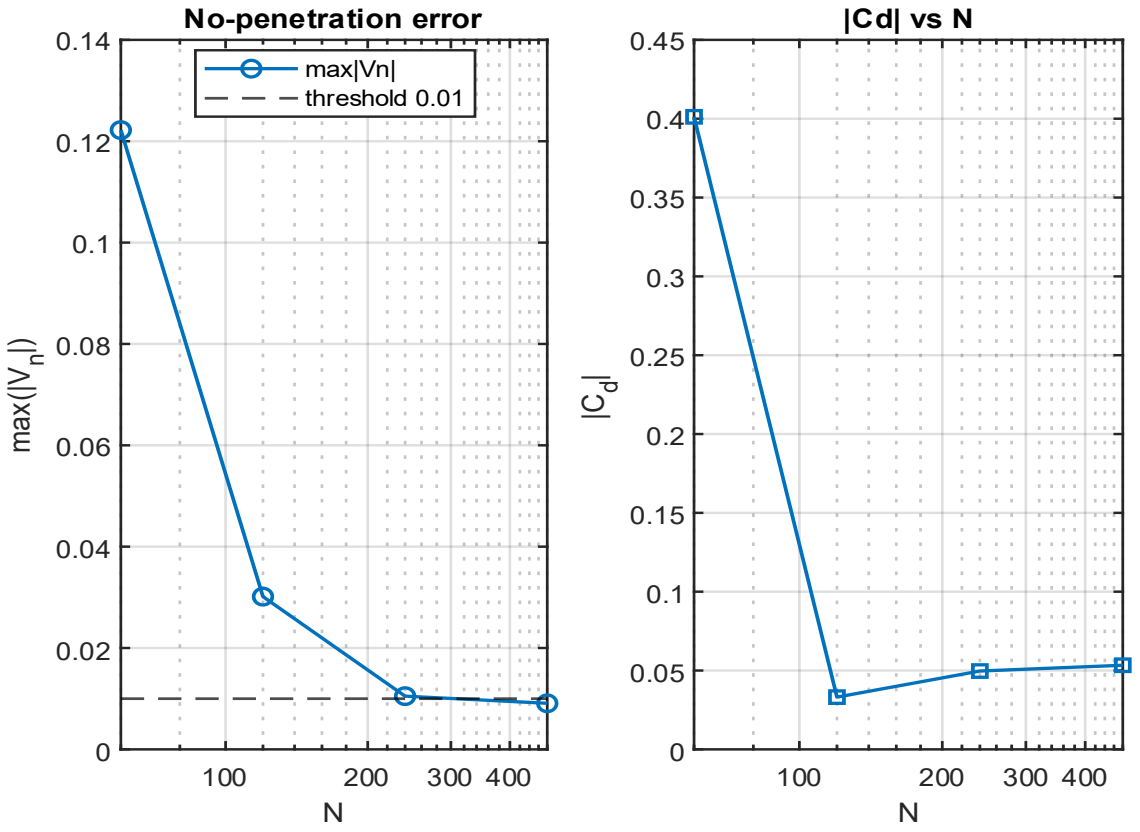
$$V_n = 0$$

- در میدان دوردست جریان آزاد یکنواخت با سرعت U_∞
- زاویه حمله صفر و میدان جریان متقارن نسبت به محور وتر

مطالعات انجام‌شده در این فاز:

- بررسی استقلال عددی از تعداد تکینگی‌ها N
- بررسی اثر تغییر ضخامت هندسه بر ضریب پسا
- استخراج کانتورهای تابع جریان ψ
- استخراج کانتورهای تابع پتانسیل ϕ
- محاسبه ضرایب آیرودینامیکی با انتگرال فشار

4.2 بررسی استقلال از ند



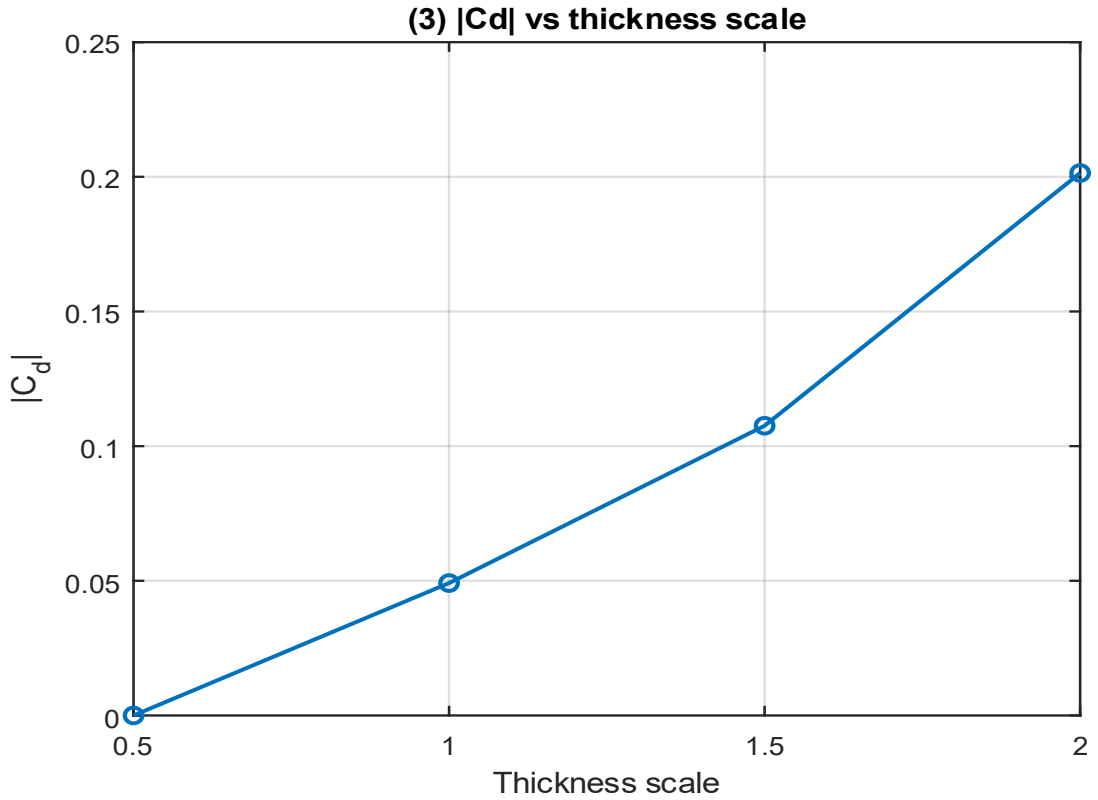
شکل 4.1.1 نتایج بررسی استقلال عددی از تعداد تکینگی‌ها (N) در مدل توزیع چشمه–چاه روی وتر برای ایرفویل NACA0009 در زاویه حمله صفر

به‌منظور ارزیابی همگرایی حل، تغییرات بیشینه مؤلفه سرعت نرمال روی سطح ایرفویل، $\max(|V_n|)$، بر حسب تعداد تکینگی‌های گسسته N بررسی شد. با افزایش N از 60 به 480، مقدار $\max(|V_n|)$ از 1.22×10^{-1} به 9.09×10^{-3} کاهش یافت که نشان‌دهنده بهبود اعمال شرط نفوذناپذیری و همگرایی عددی مدل است. رسیدن این مقدار به مرتبه 10^{-2} بیانگر ورود حل به ناحیه قابل اعتماد برای محاسبه فشار و نیروهای آیرودینامیکی است.

ضریب برا در تمامی حالات تقریبا صفر باقی ماند که با تقارن ایرفویل NACA0009 در زاویه حمله صفر سازگار است. ضریب پسا نیز با افزایش N به مقادیر کوچک مرتبه 10^{-2} نزدیک شد. از آنجا که در چارچوب نظریه جریان پتانسیل مطابق پارادوکس دالامبر انتظار می‌رود $C_d = 0$، مقادیر به‌دست‌آمده را می‌توان به‌عنوان باقی‌مانده عددی ناشی از گسسته‌سازی و تقریب توزیع تکینگی روی وتر تفسیر کرد.

بر این اساس، مقدار $N = 480$ به‌عنوان حالت همگرا برای ادامه تحلیل‌ها انتخاب شد.

4.3 اثر ضخامت ایرفویل روی ضریب پسا



شکل 4.2.1 بررسی اثر تغییر ضخامت هندسی بر مقدار باقی‌مانده عددی ضریب پسا در مدل توزیع چشمه–چاه روی وتر برای ایرفویل NACA0009 در $\alpha=0°$

در این بخش، اثر تغییر ضخامت ایرفویل بر ضریب پسا در چارچوب مدل جریان پتانسیل بررسی شده است. برای این منظور، هندسه مبنای ایرفویل NACA0009 با ثابت نگه داشتن طول وتر، تنها از طریق مقیاس‌کردن مختصات عرضی به صورت $y \to tScale \cdot y$ تغییر داده شد. سپس برای هر مقدار $tScale$، شدت تکینگی‌ها حل شده و ضریب پسا از انتگرال فشار روی بدنه محاسبه گردید. نمودار مربوطه در شکل (Cd vs thickness scale) ارائه شده است.

نتایج عددی نشان می‌دهد که با افزایش $tScale$ از 0.5 تا 2.0 مقدار $|C_d|$ به‌طور کلی روند افزایشی دارد؛ به‌گونه‌ای که برای $tScale = 0.5$ مقدار $|C_d|$ تقریباً صفر گزارش شده، در حالی که برای

ضخامت‌های بالاتر مقادیر $|C_d|$ به ترتیب در حدود $O(10^{-2})$ تا $O(10^{-1})$ قرار می‌گیرند. این رفتار در نگاه اول می‌تواند القاکننده افزایش پسا با ضخامت باشد، اما باید توجه داشت که در جریان پتانسیل ایده‌آل و غیرلزج، مطابق پارادوکس دالامبر انتظار می‌رود:

$$C_d = 0$$

بنابراین $|C_d|$ محاسبه‌شده در این فاز نباید به‌عنوان «پسای فیزیکی» تفسیر شود؛ بلکه یک باقی‌مانده عددی/مدلی است که از سه عامل اصلی ناشی می‌شود:

- گسسته‌سازی شرط نفوذناپذیری و باقی‌ماندن مقدار غیرصفر برای $\max(|V_n|)$
- تقریب هندسه ضخیم با توزیع تکینگی‌ها روی وتر (و نه روی خود سطح)
- منظم‌سازی عددی که برای پایداری حل به کار رفته است.

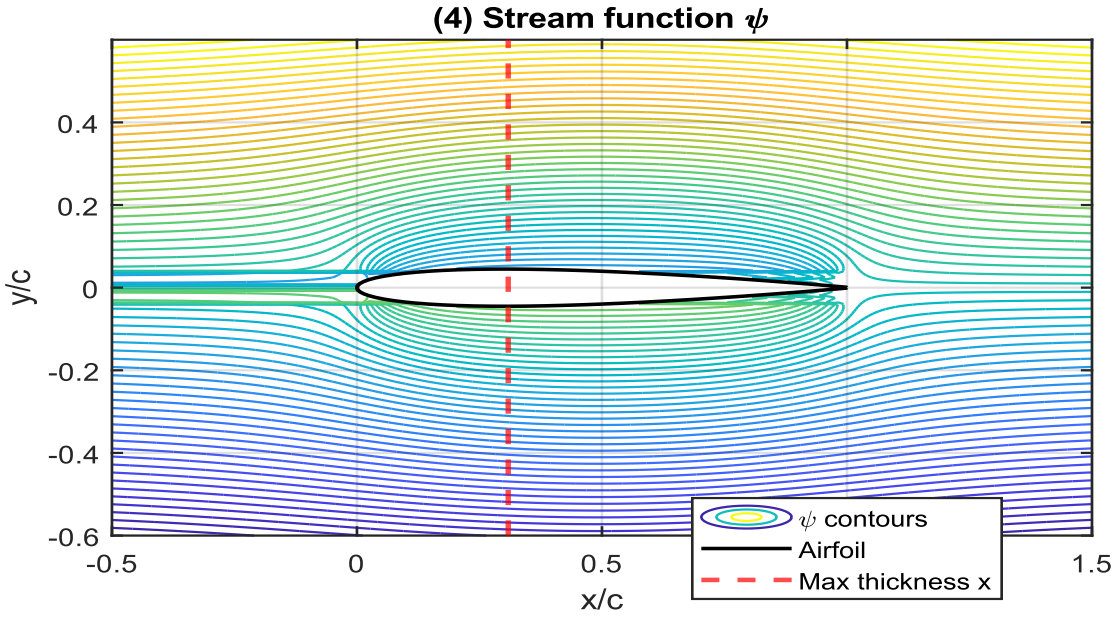
به‌عبارت دیگر، ضخیم‌تر شدن ایرفویل حساسیت حل را نسبت به این خطاها افزایش می‌دهد و در نتیجه مقدار باقی‌مانده $|C_d|$ نیز بزرگ‌تر ظاهر می‌شود.

از منظر کیفیت حل، بررسی $\max(|V_n|)$ در هر حالت نشان می‌دهد که شرط نفوذ در همه ضخامت‌ها با یک دقت یکسان برقرار نشده است؛ برای نمونه در $tScale = 1$ مقدار $\max(|V_n|)$ در حدود 10^{-2} است و حل در محدوده قابل اعتماد قرار می‌گیرد، اما برای $tScale = 0.5$ و به‌ویژه $tScale = 2$ خطای نفوذ افزایش یافته است. بنابراین مقایسه $|C_d|$ بین ضخامت‌ها باید همراه با توجه به کیفیت اعمال شرط مرزی انجام شود؛ به‌خصوص کوچک بودن بسیار زیاد $|C_d|$ در $tScale = 0.5$ می‌تواند تا حدی ناشی از ویژگی عددی حل و نه صرفا اثر ضخامت باشد.

در مجموع، نمودار $|C_d|$ بر حسب $tScale$ نشان می‌دهد که در مدل حاضر با افزایش ضخامت، مقدار باقی‌مانده‌ی عددی پسا افزایش می‌یابد؛ با این حال، از آنجا که پسا در جریان پتانسیل ایده‌آل باید صفر باشد، این نتایج در چارچوب تحلیل عددی و بررسی حساسیت مدل تفسیر می‌شوند و نه به‌عنوان پیش‌بینی پسای واقعی.

4.4 تحلیل کانتورها

4.4.1 کانتور(Stream function) ψ



شکل 4.4.1 توزیع خطوط جریان ψ پیرامون ایرفویل NACA0009 در جریان پتانسیل دوبعدی

در این بخش، میدان جریان پیرامون ایرفویل NACA0009 در حالت همگرا ($N = 480$) از طریق رسم کانتورهای تابع جریان ψ مورد بررسی قرار گرفته است. شکل مربوطه (Stream function contours) توزیع خطوط جریان در اطراف ایرفویل را نشان می‌دهد.

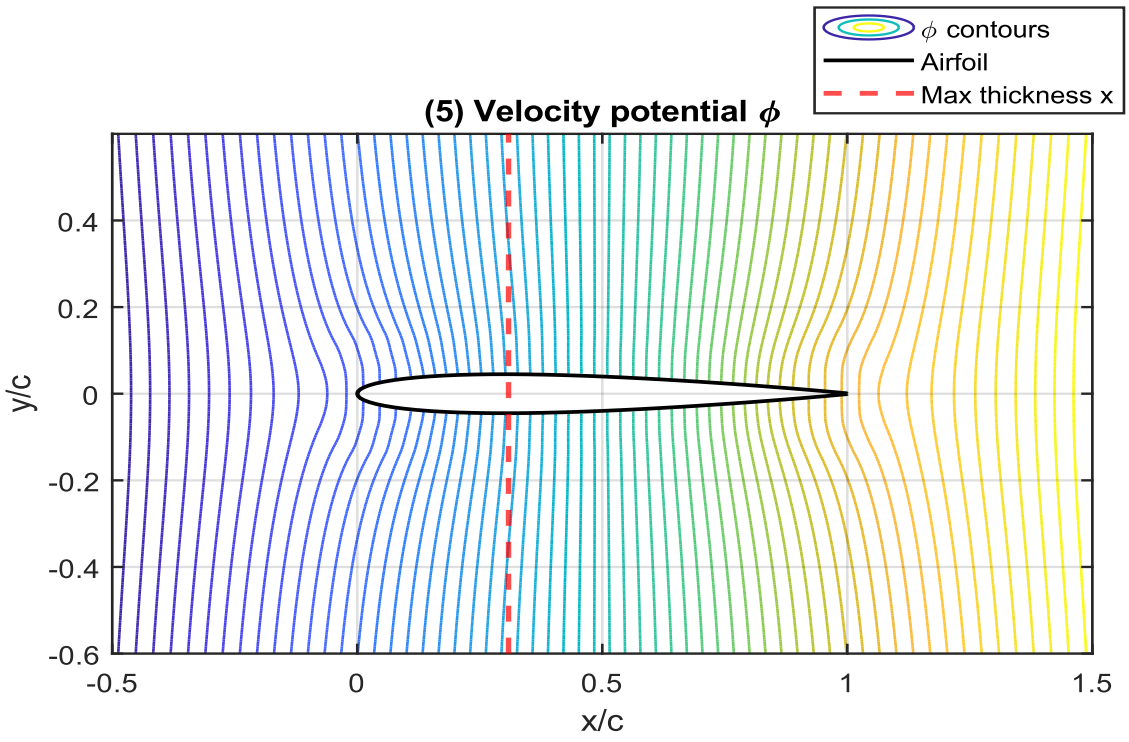
همان‌گونه که از شکل مشاهده می‌شود، خطوط جریان در بالا و پایین ایرفویل کاملا متقارن هستند که این موضوع با متقارن بودن هندسه و صفر بودن زاویه حمله سازگار است. تراکم خطوط جریان در نزدیکی سطح ایرفویل، به‌ویژه در ناحیه لبه حمله، نشان‌دهنده افزایش سرعت موضعی در این ناحیه است. این رفتار با پیش‌بینی نظریه جریان پتانسیل مطابقت دارد، زیرا در اطراف لبه حمله گرادیان پتانسیل افزایش یافته و در نتیجه سرعت بزرگ‌تر می‌شود.

در ناحیه لبه فرار نیز خطوط جریان به‌صورت هموار از سطح جدا شده و به میدان دوردست بازمی‌گردند که بیانگر نبود جدایش در چارچوب مدل غیرلزج است. از آنجا که در این مدل اثر ویسکوزیته در نظر گرفته نشده، هیچ‌گونه ناحیه چرخشی یا دنباله لزج (wake) در پشت ایرفویل مشاهده نمی‌شود و میدان جریان کاملا

پتانسیلی باقی می‌ماند. همچنین خط عمودی مشخص‌شده در شکل، محل بیشینه ضخامت هندسه را نشان می‌دهد. در این ناحیه انحراف خطوط جریان بیشینه است که به‌طور طبیعی ناشی از بیشترین تغییر شکل هندسی نسبت به خط وتر می‌باشد.

در مجموع، تقارن خطوط جریان و رفتار هموار آن‌ها در اطراف ایرفویل، صحت کلی میدان پتانسیل محاسبه‌شده را تأیید می‌کند و با انتظار تئوریک برای ایرفویل متقارن در $\alpha = 0°$ کاملا سازگار است.

4.4.2 کانتور φ (Equipotential Lines)



شکل 4.4.2 توزیع خطوط هم‌پتانسیل ϕ پیرامون ایرفویل NACA0009 در جریان پتانسیل

در این بخش، میدان پتانسیل سرعت پیرامون ایرفویل NACA0009 در حالت همگرا ($N = 480$) با رسم کانتورهای تابع پتانسیل ϕ بررسی شده است. شکل مربوطه (Potential contours) خطوط هم‌پتانسیل را در اطراف ایرفویل نشان می‌دهد.

مطابق انتظار در جریان پتانسیل، کانتورهای ϕ در نواحی دور از ایرفویل تقریبا به‌صورت خطوط یکنواخت و با فاصله‌های منظم مشاهده می‌شوند که بیانگر غالب بودن جریان آزاد یکنواخت در میدان دوردست است. با نزدیک شدن به بدنه، خطوط هم‌پتانسیل دچار انحنا و فشردگی می‌شوند؛ این تغییر شکل ناشی از اثر حضور ایرفویل و شرط نفوذناپذیری روی سطح است که میدان پتانسیل را از حالت یکنواخت دوردست منحرف می‌کند.

از ویژگی‌های مهم شکل حاضر، تقارن کامل کانتورها نسبت به محور وتر است. این تقارن نتیجه مستقیم متقارن بودن هندسه NACA0009 و اعمال زاویه حمله صفر می‌باشد و با نتایج عددی به‌دست‌آمده برای $C_l \approx 0$ سازگار است. همچنین مشاهده می‌شود که در نزدیکی لبه حمله، تراکم و تغییرات خطوط هم‌پتانسیل بیشتر است؛ این موضوع با افزایش گرادیان پتانسیل و در نتیجه افزایش سرعت موضعی در اطراف لبه حمله همخوانی دارد.

در شکل، خط عمودی مشخص‌شده محل بیشینه ضخامت ایرفویل را نشان می‌دهد. در این ناحیه، انحراف میدان پتانسیل نسبت به جریان آزاد بیشتر شده و این امر ناشی از بیشترین اثر هندسی بدنه بر میدان جریان است. با این وجود، کانتورها در تمام نواحی پیرامون ایرفویل هموار و بدون هرگونه شکست یا ناپیوستگی هستند که نشان می‌دهد حل عددی به یک میدان پتانسیلی پایدار و فیزیکی (در چارچوب فرضیات) رسیده است.

در مجموع، کانتورهای ϕ رفتار مورد انتظار جریان پتانسیل در اطراف ایرفویل متقارن در زاویه حمله صفر را بازتولید کرده و به‌عنوان یک بررسی کیفی، نتایج حل عددی را تأیید می‌کنند.

4.5 صحت‌سنجی و اعتبارسنجی

در این بخش، نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی جریان پتانسیل پیرامون ایرفویل NACA0009 در زاویه حمله صفر ($\alpha = 0°$) از دو منظر بررسی می‌شود:

- صحت‌سنجی :بررسی صحت پیاده‌سازی عددی و میزان برآورده شدن شرایط مرزی و ویژگی‌های بنیادی جریان پتانسیل

- **اعتبارسنجی** :مقایسه نتایج با انتظارات تئوری/کلاسیک در جریان پتانسیل (پارادوکس دالامبر، تقارن جریان و قضیه کوتا–ژوکوفسکی)

4.5.1 صحت‌سنجی عددی

- **ارضای شرط نفوذناپذیری**

در جریان پتانسیل، شرط مرزی اصلی روی بدنه، صفر بودن مولفه نرمال سرعت است:

$$V_n = 0$$

خروجی مطالعه استقلال نشان می‌دهد با افزایش N، مقدار $\max(|V_n|)$ کاهش یافته و در حالت انتخاب‌شده برای تحلیل‌های نهایی، یعنی $N = 480$، مقدار:

$$\max(|V_n|) = 9.089 \times 10^{-3}$$

به‌دست آمده است. رسیدن این معیار به مرتبه 10^{-2} نشان می‌دهد شرط نفوذ با دقت مناسب برقرار شده و میدان فشار و نیروهای استخراج‌شده از آن دارای اعتبار عددی قابل قبول هستند.

- **رفتار کیفی میدان جریان (ψوφ)**

در کانتورهای تابع جریان ψ، خطوط جریان پیوسته و بدون ساختار گردابه‌ای یا دنباله لزج مشاهده می‌شوند که با فرض غیرلزج بودن سیال سازگار است. همچنین در کانتورهای تابع پتانسیل ϕ، خطوط هم‌پتانسیل در میدان دوردست رفتار یکنواخت داشته و در نزدیکی بدنه دچار انحراف طبیعی می‌شوند. این رفتار، تطابق کیفی با تعریف میدان پتانسیل و اصل پیوستگی میدان دوردست دارد.

- **تقارن میدان برای ایرفویل متقارن در α=0**

از آنجا که ایرفویل NACA0009 متقارن است و $\alpha = 0^\circ$ اعمال شده، انتظار می‌رود میدان جریان نسبت به محور وتر متقارن باشد. تقارن مناسب در خطوط ψ و ϕ و همچنین نزدیک صفر بودن ضریب برا در نتایج عددی (در حد 10^{-16}) نشان می‌دهد پیاده‌سازی از منظر تقارن فیزیکی صحیح عمل کرده است.

4.5.2 اعتبارسنجی با روابط تحلیلی/کلاسیک

- مقایسه C_l با انتظار تئوری و قضیه کوتا–ژوکوفسکی طبق نظریه کلاسیک و قضیه کوتا–ژوکوفسکی:

$$L' = \rho U_\infty \Gamma$$

در یک ایرفویل متقارن در $\alpha = 0°$ انتظار می‌رود گردش خالص $\Gamma \approx 0$ و در نتیجه:

$$C_l \approx 0$$

نتیجه عددی نیز برای حالت همگرا $N = 480$ مقدار C_l بسیار نزدیک به صفر (مرتبه 10^{-16}) را نشان می‌دهد. این تطابق، یک اعتبارسنجی مستقیم و قوی برای سازگاری حل عددی با نظریه کلاسیک است.

- مقایسه C_d با پارادوکس دالامبر

در جریان پتانسیل غیرلزج، پارادوکس دالامبر بیان می‌کند پسا باید صفر باشد:

$$C_d = 0$$

در حل عددی حاضر، مقدار پسا از انتگرال فشار روی بدنه استخراج شده و برای حالت همگرا در $N = 480$:

$$| C_d | \approx 5.335 \times 10^{-2}$$

به‌دست آمده است. این مقدار کوچک اما غیرصفر، با توجه به ماهیت عددی حل قابل تفسیر است و عمدتا ناشی از:

- گسسته‌سازی شرط نفوذناپذیری و باقی ماندن خطای $\max(|V_n|)$،
- تقریب مدل ضخامت با تکینگی‌های واقع بر وتر (نه دقیقاً روی سطح)،
- و منظم‌سازی عددی برای پایداری دستگاه خطی می‌باشد. بنابراین این مقدار، پسا فیزیکی واقعی نیست و به عنوان باقی‌مانده عددی/مدلی تفسیر می‌شود.

4.5.3 مقایسه کیفی با ایرفویل ژوکوفسکی

برای ایرفویل ژوکوفسکی متقارن در زاویه حمله صفر، میدان جریان و توزیع فشار در بالا و پایین بدنه متقارن بوده و $C_l = 0$ حاصل می‌شود. در پروژه حاضر نیز:

- رفتار متقارن میدان ψ و ϕ مشاهده می‌شود،
- و مقدار C_l بسیار نزدیک به صفر به‌دست آمده است.

از نظر کیفی، این تطابق نشان می‌دهد حل عددی حاضر توانسته ویژگی‌های بنیادی جریان پتانسیل پیرامون ایرفویل متقارن را بازتولید کند، هرچند به دلیل روش مدل‌سازی تکینگی روی وتر، انتظار همگرایی کامل C_d به صفر به‌صورت مطلق (بدون افزایش بسیار زیاد N یا تغییر مدل به پنل سطحی) محدود خواهد بود.

5 نتیجه‌گیری

در این پروژه، جریان دوبعدی پیرامون ایرفویل‌های سری NACA با دو رویکرد متفاوت عددی مورد بررسی قرار گرفت: روش شبکه‌های عصبی فیزیک‌محور (PINNs) و روش کلاسیک پتانسیل مبتنی بر توزیع چشمه در MATLAB. هدف، تحلیل رفتار میدان جریان، ارزیابی ضرایب آیرودینامیکی و مقایسه توانمندی این دو رویکرد در بازسازی خواص فیزیکی جریان بود.

در فازهای مبتنی برPINN ، نشان داده شد که شبکه عصبی قادر است بدون استفاده از مش‌بندی صریح، میدان سرعت و فشار را به‌صورت پیوسته در کل دامنه بازسازی کند. کاهش پایدار توابع خطا و همگرایی مناسب شبکه بیانگر یادگیری موفق قیود فیزیکی بود. با این حال، مشاهده شد که دقت پیش‌بینی ضریب پسا به شدت به نحوه اعمال شرایط مرزی، وزن‌دهی در تابع هزینه و محاسبه انتگرالی نیروها وابسته است. در برخی حالت‌ها، با وجود همگرایی عددی، اختلاف با مقادیر مرجع مشاهده شد که نشان می‌دهد همگرایی شبکه لزوماً تضمین‌کننده تطابق کامل فیزیکی نیست.

در فاز پنج، با استفاده از مدل جریان پتانسیل و توزیع چندردیفی چشمه‌ها روی وتر ایرفویل NACA0009، تحلیل کلاسیک انجام شد. نتایج بررسی استقلال از N نشان داد که با افزایش تعداد تکینگی‌ها، خطای شرط نفوذناپذیری کاهش یافته و پاسخ به سمت همگرایی عددی حرکت می‌کند. همچنین مشاهده شد که مقدار ضریب پسا در حالت ایده‌آل باید به صفر میل کند (قضیهd'Alembert) و مقادیر غیرصفر به‌دست‌آمده صرفا ناشی از خطای گسسته‌سازی و محدودیت عددی هستند. تحلیل اثر ضخامت نیز نشان داد که در چارچوب جریان پتانسیل، تغییر ضخامت موجب تغییر الگوی توزیع فشار می‌شود، اما پسا همچنان ذاتا صفر باقی می‌ماند و مقادیر محاسبه‌شده نقش شاخص خطای عددی را دارند.

مقایسه دو رویکرد نشان می‌دهد:

- PINN توانایی بالایی در بازسازی میدان پیوسته و حل مسائل بدون مش دارد، اما نیازمند تنظیم دقیق پارامترهای آموزشی و تابع هزینه است.
- روش پتانسیل کلاسیک از نظر پایداری عددی و انطباق با تئوری‌های تحلیلی (d'Alembertو مدل‌های پتانسیل) رفتار قابل پیش‌بینی‌تری دارد، ولی اثرات لزجت و جدایش را مدل نمی‌کند.
- در هر دو روش، اعتبارسنجی با قوانین پایه فیزیکی (تقارن جریان در$\alpha=0$ ، صفر بودن پسا در جریان ایده‌آل، بازگشت میدان در دوردست) نقش کلیدی در ارزیابی صحت نتایج داشته است.

در مجموع، این پروژه نشـــان داد که روش‌های یادگیری ماشـــین فیزیک‌محور می‌توانند به‌عنوان مکمل روش‌های کلاسیک در تحلیل آیرودینامیکی عمل کنند. با این حال، برای پیش‌بینی دقیق نیروهای آیرودینامیکی در رژیم‌های واقعی (ویسکوز و عدد رینولدز بالا)، ترکیب مدل‌های فیزیکی کامل‌تر یا اصلاح ساختار تابع هزینه در PINN ضروری است. روش پنل نیز همچنان ابزاری کارآمد، سریع و قابل اتکا برای تحلیل جریان‌های ایده‌آل باقی می‌ماند.

6 پیوست

6.1 ساختار کلاس PINN (پروژه 2)

```
class PINN:
    Re = 100  # project requirement

    def __init__(self):
        # outputs: u, v, p, sig_xx, sig_xy, sig_yy (6)
        self.net = DNN(
            dim_in=2,
            dim_out=6,
            n_layer=4,
            n_node=50,
            ub=ub,
            lb=lb
        ).to(device)

        self.lbfgs = torch.optim.LBFGS(
            self.net.parameters(),
            lr=1.0,
            max_iter=20000,
            max_eval=20000,
            tolerance_grad=1e-5,
            tolerance_change=1.0 * np.finfo(float).eps,
            history_size=50,
            line_search_fn="strong_wolfe",
        )

        self.adam =
torch.optim.Adam(self.net.parameters(), lr=5e-4)

        self.losses = {"bc": [], "outlet": [], "pde": []}
        self.iter = 0
        self.pde_chunk = 8192
```

```python
# ---------------------------------------------------
# Prediction
# ---------------------------------------------------
def predict(self, xy):
    out = self.net(xy)

    u = out[:, 0:1]
    v = out[:, 1:2]
    p = out[:, 2:3]
    sig_xx = out[:, 3:4]
    sig_xy = out[:, 4:5]
    sig_yy = out[:, 5:6]

    return u, v, p, sig_xx, sig_xy, sig_yy

# ---------------------------------------------------
# Boundary Condition Loss
# ---------------------------------------------------
def bc_loss(self, xy, uv_bnd):
    u, v = self.predict(xy)[0:2]

    mse_bc = (
        torch.mean((u - uv_bnd[:, 0:1]) ** 2)
        + torch.mean((v - uv_bnd[:, 1:2]) ** 2)
    )

    return mse_bc

# ---------------------------------------------------
# Outlet Loss
# ---------------------------------------------------
def outlet_loss(self, xy):
    p = self.net(xy)[:, 2:3]
    return torch.mean(p ** 2)  # gauge pressure ≈ 0
```

```
    # ---------------------------------------------------
    # PDE Loss (chunked)
    # ---------------------------------------------------
    def _pde_mse_chunk(self, xy):
        xy = xy.clone().requires_grad_(True)

        u, v, p, sig_xx, sig_xy, sig_yy = self.predict(xy)

        u_out = grad(u.sum(), xy, create_graph=True,
retain_graph=True)[0]
        v_out = grad(v.sum(), xy, create_graph=True,
retain_graph=True)[0]
        sig_xx_out = grad(sig_xx.sum(), xy,
create_graph=True, retain_graph=True)[0]
        sig_xy_out = grad(sig_xy.sum(), xy,
create_graph=True, retain_graph=True)[0]
        sig_yy_out = grad(sig_yy.sum(), xy,
create_graph=True, retain_graph=True)[0]

        u_x, u_y = u_out[:, 0:1], u_out[:, 1:2]
        v_x, v_y = v_out[:, 0:1], v_out[:, 1:2]

        sig_xx_x = sig_xx_out[:, 0:1]
        sig_xy_x = sig_xy_out[:, 0:1]
        sig_xy_y = sig_xy_out[:, 1:2]
        sig_yy_y = sig_yy_out[:, 1:2]

        # Continuity
        f0 = u_x + v_y

        # Momentum
        f1 = (u * u_x + v * u_y) - sig_xx_x - sig_xy_y
        f2 = (u * v_x + v * v_y) - sig_xy_x - sig_yy_y

        # Stress definitions
        f3 = -p + (2 / self.Re) * u_x - sig_xx
```

```
        f4 = -p + (2 / self.Re) * v_y - sig_yy
        f5 = (1 / self.Re) * (u_y + v_x) - sig_xy

        mse = sum(torch.mean(fi ** 2) for fi in [f0, f1,
f2, f3, f4, f5])

        return mse

    def pde_loss(self, xy):
        m = xy.shape[0]

        if m <= self.pde_chunk:
            return self._pde_mse_chunk(xy)

        total = 0.0
        count = 0

        for i in range(0, m, self.pde_chunk):
            sub = xy[i:i + self.pde_chunk]
            mse_sub = self._pde_mse_chunk(sub)

            bs = sub.shape[0]
            total += mse_sub * bs
            count += bs

        return total / count

    # ------------------------------------------------
    # Training Closure
    # ------------------------------------------------
    def closure(self, xy_bnd, uv_bnd, xy_outlet, xy_col):
        self.lbfgs.zero_grad()
        self.adam.zero_grad()

        mse_bc = self.bc_loss(xy_bnd, uv_bnd)
        mse_outlet = self.outlet_loss(xy_outlet)
```

```
        mse_pde = self.pde_loss(xy_col)

        loss = 100 * mse_bc + mse_outlet + mse_pde
        loss.backward()

        self.losses["bc"].append(mse_bc.item())
        self.losses["outlet"].append(mse_outlet.item())
        self.losses["pde"].append(mse_pde.item())

        self.iter += 1

        print(
            f"\rIt: {self.iter} "
            f"Loss: {loss.item():.5e} "
            f"BC: {mse_bc.item():.3e} "
            f"Outlet: {mse_outlet.item():.3e} "
            f"PDE: {mse_pde.item():.3e}",
            end=""
        )

        if self.iter % 100 == 0:
            print("")

        return loss
```

6.2 تابع محاسبه‌گر ضریب برآ و پسا

```
def compute_lift_drag_closed(
    pinn_model,
    cyl_xy,
    Re=100,
    U_inf=1.0,
    rho=1.0,
```

```
    chord=0.6
):
    import numpy as np
    import torch

    cyl_xy_tensor = torch.tensor(
        cyl_xy,
        dtype=torch.float32
    ).to(device)

    with torch.no_grad():
        _, _, _, sig_xx, sig_xy, sig_yy = \
            pinn_model.predict(cyl_xy_tensor)

    sig_xx = sig_xx.detach().cpu().numpy().flatten()
    sig_xy = sig_xy.detach().cpu().numpy().flatten()
    sig_yy = sig_yy.detach().cpu().numpy().flatten()

    cyl_xy = np.array(cyl_xy)

    f_x_total, f_y_total = 0.0, 0.0
    n_points = len(cyl_xy)

    for i in range(n_points):
        x0, y0 = cyl_xy[i]
        x1, y1 = cyl_xy[(i + 1) % n_points]  # wrap-around

        dx, dy = x1 - x0, y1 - y0
        ds = np.sqrt(dx**2 + dy**2)

        normal = np.array([dy, -dx])
        normal = normal / np.linalg.norm(normal)
        nx, ny = normal

        sigma = np.array([
            [sig_xx[i], sig_xy[i]],
```

```
            [sig_xy[i], sig_yy[i]]
        ])

        f_vec = sigma @ normal

        f_x_total += f_vec[0] * ds
        f_y_total += f_vec[1] * ds

    q_inf = 0.5 * rho * U_inf**2

    Cl = f_y_total / (q_inf * chord)
    Cd = f_x_total / (q_inf * chord)

    return Cl, Cd
```

6.3 ساختار کلاس PINN (پروژه 4)

```
# ===================== PINN: Potential Flow (Phase 4)
=====================

class PINN_Potential:

    Re = 100  # per sheet (not used directly)

    def __init__(self):
        # outputs: u, v, p (3)
        self.net = DNN(
            dim_in=2,
            dim_out=3,
            n_layer=4,
            n_node=50,
            ub=ub,
            lb=lb
```

```
        ).to(device)

        self.adam = torch.optim.Adam(
            self.net.parameters(),
            lr=5e-4
        )

        self.lbfgs = torch.optim.LBFGS(
            self.net.parameters(),
            lr=1.0,
            max_iter=20000,
            max_eval=20000,
            tolerance_grad=1e-5,
            tolerance_change=1.0 * np.finfo(float).eps,
            history_size=50,
            line_search_fn="strong_wolfe",
        )

        self.losses = {
            "farfield": [],
            "airfoil": [],
            "pde": [],
            "total": []
        }

        self.iter = 0
        self.pde_chunk = 8192

        # Bernoulli constant (p_inf = 0 gauge)
        self.B = 0.5 * (U_inf ** 2)

    # ----------------------------------------------------
---------------
    # Prediction
    # ----------------------------------------------------
---------------
```

```
    def predict(self, xy):
        out = self.net(xy)

        u = out[:, 0:1]
        v = out[:, 1:2]
        p = out[:, 2:3]

        return u, v, p

    # ----------------------------------------------------
--------------
    # Far-field Loss
    # ----------------------------------------------------
--------------
    def farfield_loss(self, xy_far, uv_far, p_far):
        u, v, p = self.predict(xy_far)

        mse_uv = (
            torch.mean((u - uv_far[:, 0:1]) ** 2) +
            torch.mean((v - uv_far[:, 1:2]) ** 2)
        )

        mse_p = torch.mean((p - p_far) ** 2)

        return mse_uv + mse_p

    # ----------------------------------------------------
--------------
    # Airfoil Boundary (No-penetration)
    # ----------------------------------------------------
--------------
    def airfoil_loss(self, xy_af, n_af):
        u, v, _ = self.predict(xy_af)

        # Slip / no-penetration condition: V · n = 0
        vn = u * n_af[:, 0:1] + v * n_af[:, 1:2]
```

```
        return torch.mean(vn ** 2)

    # ---------------------------------------------------
--------------
    # PDE Loss (chunked)
    # ---------------------------------------------------
--------------
    def _pde_mse_chunk(self, xy):
        xy = xy.clone().requires_grad_(True)

        u, v, p = self.predict(xy)

        u_out = grad(u.sum(), xy, create_graph=True,
retain_graph=True)[0]
        v_out = grad(v.sum(), xy, create_graph=True,
retain_graph=True)[0]

        u_x, u_y = u_out[:, 0:1], u_out[:, 1:2]
        v_x, v_y = v_out[:, 0:1], v_out[:, 1:2]

        # Potential flow PDEs
        f_cont = u_x + v_y                      #
continuity
        f_irr  = v_x - u_y                      #
irrotationality
        f_bern = p + 0.5 * (u * u + v * v) - self.B  #
Bernoulli

        return (
            torch.mean(f_cont ** 2) +
            torch.mean(f_irr ** 2) +
            torch.mean(f_bern ** 2)
        )

    def pde_loss(self, xy_col):
```

```
        m = xy_col.shape[0]

        if m <= self.pde_chunk:
            return self._pde_mse_chunk(xy_col)

        total = 0.0
        count = 0

        for i in range(0, m, self.pde_chunk):
            sub = xy_col[i:i + self.pde_chunk]
            mse_sub = self._pde_mse_chunk(sub)

            bs = sub.shape[0]
            total += mse_sub * bs
            count += bs

        return total / count

    # ----------------------------------------------------
--------------
    # Training Closure
    # ----------------------------------------------------
--------------
    def closure(
        self,
        xy_col,
        xy_far,
        uv_far,
        p_far,
        xy_af,
        n_af,
        w_far=50.0,
        w_af=50.0,
        w_pde=1.0
    ):
        self.lbfgs.zero_grad()
```

```
        self.adam.zero_grad()

        l_far = self.farfield_loss(xy_far, uv_far, p_far)
        l_af  = self.airfoil_loss(xy_af, n_af)
        l_pde = self.pde_loss(xy_col)

        loss = w_far * l_far + w_af * l_af + w_pde * l_pde
        loss.backward()

        self.losses["farfield"].append(l_far.item())
        self.losses["airfoil"].append(l_af.item())
        self.losses["pde"].append(l_pde.item())
        self.losses["total"].append(loss.item())

        self.iter += 1

        if self.iter % 50 == 0:
            print(
                f"It {self.iter:5d} | "
                f"total={loss.item():.3e} | "
                f"far={l_far.item():.3e} | "
                f"af={l_af.item():.3e} | "
                f"pde={l_pde.item():.3e}"
            )

        return loss
```

6.4 ساختار کلی کد متلب (فاز 5)

```
%% ========================
%  Phase 5 - Code Structure
%  NACA0009 | Potential Flow | Chord Source/Sink
%% ========================

%% (0) Init
clearvars -except data; clc; close all;

%% (1) Parameters / Settings
Uinf    = 1.0;
AoA_deg = 0.0;

Ntarget = [60 120 240 480];
tScaleList = [0.5 1.0 1.5 2.0];
Nref_forThickness_target = 360;

xlimField = [-0.5 1.5];
ylimField = [-0.6 0.6];
NxField = 260; NyField = 220;

K = 3;                  % rows (+y), total rows = 2*K
sourceXPad = 0.02;
epsYOffsetMin = 1e-4;

core2_base  = 1e-6;
regRel_base = 1e-7;
useWeights  = true;

VnTrust = 1e-2;

%% (2) Input Geometry
xy_raw = data(:,1:2);

%% (3) Geometry Preprocess + Panel Build
```

```
[xy, info] = preprocessAirfoilGeometry(xy_raw);
pan = buildPanelsFromPolyline(xy);

%% (4) Freestream
alpha = deg2rad(AoA_deg);
Vinf  = [Uinf*cos(alpha), Uinf*sin(alpha)];

%% (5) Multi-row source y-positions (based on thickness)
tHalf = max(abs(pan.yc));
tHalf = max(tHalf, epsYOffsetMin);
yPos  = linspace(0.15*tHalf, 0.85*tHalf, K).';
yPos  = max(yPos, epsYOffsetMin);

%% (6) Compatible N list
Nlist = zeros(size(Ntarget));
for i = 1:numel(Ntarget)
    Nlist(i) = makeCompatibleTotalN(Ntarget(i), 2*K);
end

%% (7) Figure 1: Geometry + Chord + Sources (largest N)
[xSrc_plot, ySrc_plot, ~] =
makeChordSourcesMultiRowSym(Nlist(end), K, sourceXPad,
yPos);
% (plot geometry, chord, sources)

%% (8) Independence Study Loop (vary N)
results =
struct('N',[],'maxAbsVn',[],'rmsVn',[],'Cd',[],'CdAbs',[],
'Cl',[]);
for kN = 1:numel(Nlist)

    N = Nlist(kN);

    [xSrc, ySrc, NxPerRow] =
makeChordSourcesMultiRowSym(N, K, sourceXPad, yPos);
```

```
    opts.core2  = core2_base;
    opts.regRel = regRel_base;

    [sol, diag] =
solveChordSources_MultiRowSym_LS_adaptive( ...
        pan, xSrc, ySrc, K, NxPerRow, Vinf, opts,
useWeights);

    results(kN).N        = numel(xSrc);
    results(kN).maxAbsVn = max(abs(sol.Vn));
    results(kN).rmsVn    = sqrt(mean(sol.Vn.^2));
    results(kN).Cd       = sol.Cd;
    results(kN).CdAbs    = abs(sol.Cd);
    results(kN).Cl       = sol.Cl;

end

%% (9) Figure 2: Independence Plots
% subplot(1): max|Vn| vs N + threshold
% subplot(2): |Cd| vs N

%% (10) Thickness Study Loop (vary tScale)
Nref = makeCompatibleTotalN(Nref_forThickness_target,
2*K);

CdAbs_vs_t = zeros(size(tScaleList));
Cl_vs_t    = zeros(size(tScaleList));
maxVn_vs_t = zeros(size(tScaleList));

for i = 1:numel(tScaleList)

    tScale = tScaleList(i);

    xy_t = xy;
    xy_t(:,2) = tScale * xy_t(:,2);
```

```
    pan_t = buildPanelsFromPolyline(xy_t);

    tHalf_t = max(abs(pan_t.yc));
    tHalf_t = max(tHalf_t, epsYOffsetMin);
    yPos_t  = linspace(0.15*tHalf_t, 0.85*tHalf_t, K).';
    yPos_t  = max(yPos_t, epsYOffsetMin);

    [xSrc, ySrc, NxPerRow] =
makeChordSourcesMultiRowSym(Nref, K, sourceXPad, yPos_t);

    opts.core2  = core2_base;
    opts.regRel = regRel_base;

    [sol_t, ~] =
solveChordSources_MultiRowSym_LS_adaptive( ...
        pan_t, xSrc, ySrc, K, NxPerRow, Vinf, opts,
useWeights);

    maxVn_vs_t(i) = max(abs(sol_t.Vn));
    CdAbs_vs_t(i) = abs(sol_t.Cd);
    Cl_vs_t(i)    = sol_t.Cl;

end

%% (11) Figure 3: |Cd| vs Thickness
% plot(tScaleList, CdAbs_vs_t)

%% (12) Field Evaluation on Grid (best N)
[~, idxBest] = max([results.N]);
Nfield = results(idxBest).N;

[xSrc, ySrc, NxPerRow] =
makeChordSourcesMultiRowSym(Nfield, K, sourceXPad, yPos);

opts.core2  = core2_base;
opts.regRel = regRel_base;
```

```
[solField, ~] = solveChordSources_MultiRowSym_LS_adaptive(
...
    pan, xSrc, ySrc, K, NxPerRow, Vinf, opts, useWeights);

xv = linspace(xlimField(1), xlimField(2), NxField);
yv = linspace(ylimField(1), ylimField(2), NyField);
[X,Y] = meshgrid(xv,yv);

[phi, psi] =
evalFieldPhiPsi(X,Y,xSrc,ySrc,solField.q,Vinf,solField.cor
e2Used);

in = inpolygon(X, Y, xy(:,1), xy(:,2));
phi(in) = NaN; psi(in) = NaN;

[~, imax] = max(abs(xy(:,2)));
x_thick = xy(imax,1);

%% (13) Figure 4: Streamfunction Contours
% contour(X,Y,psi,...), plot airfoil, xline(x_thick)

%% (14) Figure 5: Potential Contours
% contour(X,Y,phi,...), plot airfoil, xline(x_thick)

%% ========================
% Helper Functions (list only)
%% ========================
% makeCompatibleTotalN
% preprocessAirfoilGeometry
% buildPanelsFromPolyline
% makeChordSourcesMultiRowSym
% solveChordSources_MultiRowSym_LS_adaptive
% solveChordSources_MultiRowSym_LS
% velFromPointSource
% evalFieldPhiPsi
```

7 مراجع

- Abbott, I. H., & von Doenhoff, A. E. (1959). *Theory of wing sections: Including a summary of airfoil data.* Dover Publications.
- Airfoil Tools. (2024). *Airfoil database and analysis tools.* Retrieved from airfoiltools.com
- ANSYS Inc. (2023). *ANSYS Fluent user's guide (Release 2023 R2).* ANSYS Inc.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method* (2nd ed.). Pearson Education.
- Anderson, J. D. (2010). *Fundamentals of aerodynamics* (5th ed.). McGraw-Hill Education.
- White, F. M. (2011). *Fluid mechanics* (7th ed.). McGraw-Hill Education.