Содержание

1 Постановка задачи **2**

1.1 Построение равномерной сетки 2

1.2 Разностная аппроксимация задачи Дирихле 2

1.3 Расчетные формулы для методов 3

1.3.1 Метод Якоби 3

1.3.2 Метод Зейделя 4

1.3.3 Модифицированный метод Зейделя 4

1.3.4 Метод верхней релаксации (SOR) 4

1.4 Выбор точности 5

2 Результаты расчетов **6**

Список литературы **13**

1 Постановка задачи

В квадрате $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ с границей Γ требуется найти решение уравнения Пуассона

$$Lu = -f(x,y),\ (x,y) \in G, \tag{1}$$

Где L – оператор Лапласа:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

1.1 Построение равномерной сетки

Разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных частей. Обозначим $h = 1/n,\ x_i = ih, y_j = jh$, $0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n$. Построим сетку узлов

$$\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j). \quad 0 \le i \le n, \quad 0 \le j \le n\}$$

Узлы $(x_i, y_j), \quad 1 \le i \le n-1, \quad 1 \le j \le n-1$ - внутренние, остальные, лежащие на границе квадрата, – граничные.

1.2 Разностная аппроксимация задачи Дирихле

Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$. Заменяем оператор L во всех внутренних узлах разностным оператором L_h

$$L_h u_{ij} = \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2},$$

$1 \le i \le n-1; \quad 1 \le j \le n-1$.

Если $u(x,y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области производных по x и по y, то разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т.е.

$$Lu - L_h u = O(|h|^2).$$

Задаче (1), (2) ставим в соответствие разностную задачу: найти сеточную функцию, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнениям

$$L_h u_{ij} = -f_{ij}, f_{ij} = f(x_i, y_j),\ 1 \le i \le n-1; \quad 1 \le j \le n-1$$

и принимающую в граничных узлах заданные значения

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), \quad 0 \le i \le n \\ u_{in} = \mu(x_i, 1), \quad 0 \le i \le n \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), \quad 1 \le j \le n-1 \\ u_{nj} = \mu(1, y_j), \quad 1 \le j \le n-1 \end{cases}$$

Для решения системы воспользуемся следующими методами:

1) Метод Якоби.

2) Метод Зейделя.

3) Метод верхней релаксации(SOR).

1.3 Расчетные формулы для методов

1.3.1 Метод Якоби

Сведем систему $AU = F$ к системе вида $U = HU + g$ так, чтобы $\rho(H) < 1$, где $\rho(H)$ - спектральный радиус матрицы H. Пусть $H = E - D^{-1}A, g = D^{-1}F$, где D – диагональная часть матрицы A. Расчетная формула имеет следующий вид:

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i+1j}^{(k)} + u_{i-1j}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + h^2 f_{ij})$$

$i, j = 1, ..., n-1, k = 0, 1, ...$

Для оценки точности будем использовать С-норму.

$$|x^{k+1} - x^k| = ||x^{k+1} - x^k||_\infty = \max_{1<i_{ij}<n-1} |x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k| \tag{4}$$

Необходимое и достаточное условие сходимости метода $\rho(H) < 1$ выполнено, так как в рассматриваемом случае:

$$\lambda_{max}(H) = 1 - \frac{h^2}{4}\lambda_{min}(A) = 1 - \frac{h^2}{4}\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi h}{2} = \cos\pi h$$
$$\lambda_{min}(H) = 1 - \frac{h^2}{4}\lambda_{max}(A) = 1 - \frac{h^2}{4}\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2} = 1 - 2\cos^2\frac{\pi h}{2} = -\cos\pi h$$

Спектральный радиус $\rho(H)$ определяет скорость сходимости метода.

В качестве апостериорной оценки погрешности здесь часто допустимо использовать следующую:

$$||U^k - u^*|| \le \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)}||U^k - U^{k-1}||$$

1.3.2 Метод Зейделя

Известно, что если A – положительно определенная матрица, то метод Зейделя для системы $AU = F$ сходится, причем вдвое быстрее, чем метод Якоби.

Расчетная формула метода Зейделя имеет вид

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1j}^{(k+1)} + u_{ij-1}^{(k+1)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)} + h^2 f_{ij})$$

$1 \le i \le n-1, \quad 1 \le j \le n-1$

1.3.3 Модифицированный метод Зейделя

Выше был изложен метод Зейделя с так называемым естественным упорядочением. Существует еще одна реализация данного метода с шахматным (или черно-белым) упорядочением. При шахматном упорядочении белые узлы нумеруются прежде, чем черные. При этом смежны с каждым белым узлом лишь черные узлы. Поэтому, если вначале перевычисляются компоненты из белых узлов, используются только старые значения из черных узлов. Затем, когда перевычисляются компоненты из черных узлов, которые смежны лишь с белыми узлами, будут использоваться лишь новые значения из этих белых узлов. При этом в этом методе для одной и той же заданной точности и одной и той же сетки относительная невязка k-ого приближения $||F - AU^k||/||F - AU^0||$, норма абсолютной погрешности k-ого приближения $||U^k - aU||$, относительная погрешность k-ого приближения $||U^k - aU||/||U^0 - aU||$, норма разности двух соседних приближений $||U^k - U^{k-1}||$, оценка погрешности k-ого приближения $\rho(H)||U^k - U^{k-1}||/(1 - \rho(H))$ едва меньше чем соответствующие величины на той же итерации в методе с естественным упорядочением.

1.3.4 Метод верхней релаксации (SOR)

Рассмотрим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{U^k - U^{k-1}}{\tau_k} + AU^{k-1} = F,$$

откуда

$$U^k = U^{k-1} - \tau_k B_k^{-1}(AU^{k-1} - F)$$

или

$$U^k = U^{k-1} - \tau_k B_k^{-1} r^{k-1}, \tag{5}$$

где $r^{k-1} = AU^{k-1} - F$ – невязка U^{k-1}. Полагаем в (5) $B = \omega L + D$, где L и D нижняя треугольная и диагональная части матрицы A, $\tau_k = \omega$. Тогда расчетная формула для этого метода имеет вид

$$u_{i_j}^k = u_{i_j}^{k-1} + \omega \frac{h^2 f_{ij} + u_{i-1j}^k + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^k + u_{ij+1}^{k-1} - 4u_{ij}^{k-1}}{4}$$

$1 \le i \le n-1;\ 1 \le j \le n-1.$

Метод будет сходиться, если матрица A симметрическая, положительно определенная и кроме того $0 < \omega < 2$.

Скорость сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы $S_\omega = (D + \omega L)^{-1}(D - \omega D - \omega R)$, где D, L и R диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы A. Оптимальным значением ω является

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}$$

Для нашей задачи

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sin(\pi h)}, \quad \rho(S_{\omega_{opt}}) = \frac{1 - \sin(\pi h)}{1 + \sin(\pi h)} \approx 1 - 2\pi h.$$

1.4 Выбор точности

Разностная схема аппроксимирует исходную задачу (1), (2) со вторым порядком относительно шага сетки. Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации. Обычно судят о точности решения по его относительной погрешности $||U^k - u^*||/||U^0 - u^*||$ или, так как точное решение u^* неизвестно, по величине относительной невязки $\frac{||AU^k - F||}{||AU^0 - F||}$. Пусть $\varepsilon > 0$ - заданная относительная погрешность, с которой надо найти приближенное решение задачи Вычисления прекращают, если выполнено условие $\frac{||U^m - u^*||}{||U^0 - u^*||} < \varepsilon$ или $\frac{||AU^m - F||}{||AU^0 - F||} < \varepsilon$.

Можно получить, что число итераций необходимых для достижения заданной точности:

для метода Якоби $m \geq 2\frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$;

для метода Зейделя $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$;

для метода верхней релаксации $m \geq 2\frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)}$.

В качестве критерия конца вычислений может быть выбрано $||U^k - u^*|| < \varepsilon$.

2 Результаты расчетов

Метод Якоби.

Функция: $u(x, y) = e^{2x} sin(2y)$

Lu: 0

Число узлов: 32

Точность: 10^{-4}.

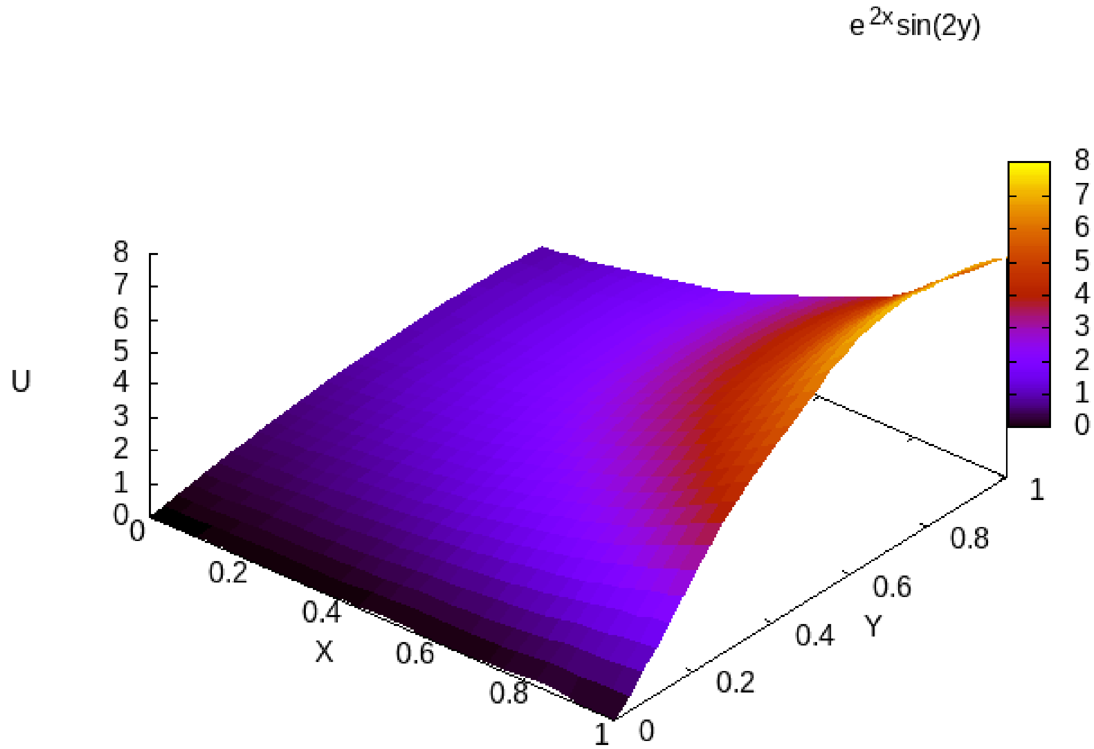
Число итераций: 1912

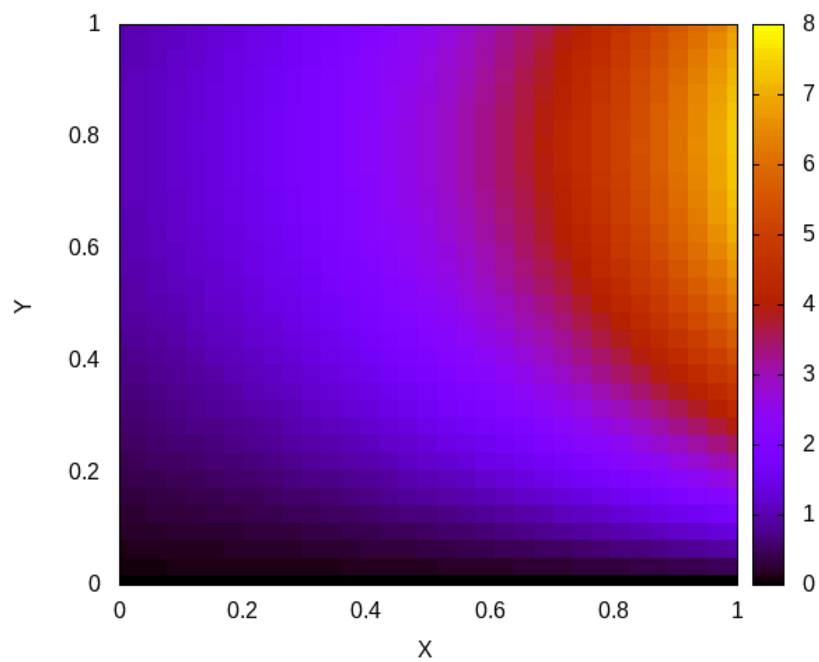
Спектральный радиус: 0.995185

Время выполнения: 0.333762 секунд.

k	|F-AUk|	|F-AUk|/|F-AU0|	|Uk-aU|	|Uk-aU|/|U0-aU|	|Uk-U(k-1)|	err_est	rs_exp
100	76.5517	0.0056593	2.48094	0.35743	0.0188580	3.897435	0.98617
200	32.2473	0.0023840	1.43899	0.20731	0.0079184	1.636526	0.99249
300	17.8705	0.0013211	0.87332	0.12582	0.0043905	0.907387	0.99571
400	10.7020	0.0007912	0.53533	0.07712	0.0026211	0.541712	0.99328
500	6.5384	0.0004834	0.33016	0.04757	0.0016050	0.331705	0.99563
600	4.0321	0.0002981	0.20359	0.02933	0.0009874	0.204071	0.99343
700	2.4883	0.0001840	0.12547	0.01808	0.0006084	0.125741	0.99186
800	1.5356	0.0001135	0.07726	0.01113	0.0003752	0.077544	0.99118
900	0.9477	0.0000701	0.04751	0.00685	0.0002315	0.047854	0.99118
1000	0.5848	0.0000432	0.02915	0.00420	0.0001429	0.029532	0.99118
1100	0.3609	0.0000267	0.01782	0.00257	0.0000882	0.018225	0.99118
1200	0.2227	0.0000165	0.01083	0.00156	0.0000544	0.011247	0.99118
1300	0.1374	0.0000102	0.00652	0.00094	0.0000336	0.006941	0.99118
1400	0.0848	0.0000063	0.00385	0.00056	0.0000207	0.004283	0.99118
...	...	...	...	...	...	...	...
1912	0.0072	0.0000005	0.00023	0.00003	0.0000018	0.000362	0.99118

Графики функции:





Метод Зейделя.

Функция: $u(x, y) = x^2 + y^2$

Lu: 4

Число узлов: 32

Точность: 10^{-4}.

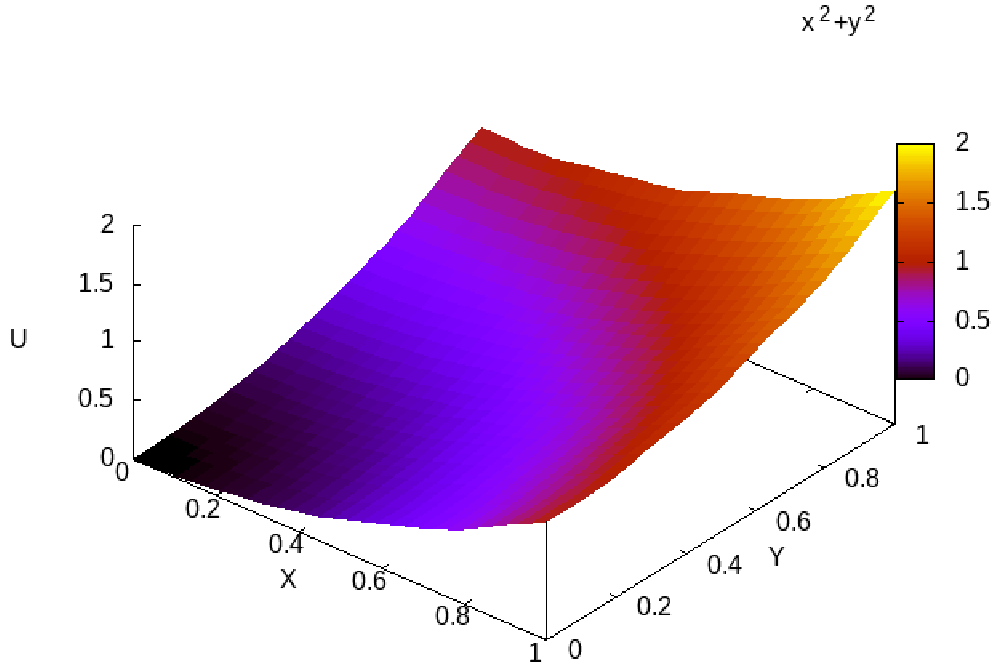
Число итераций: 956

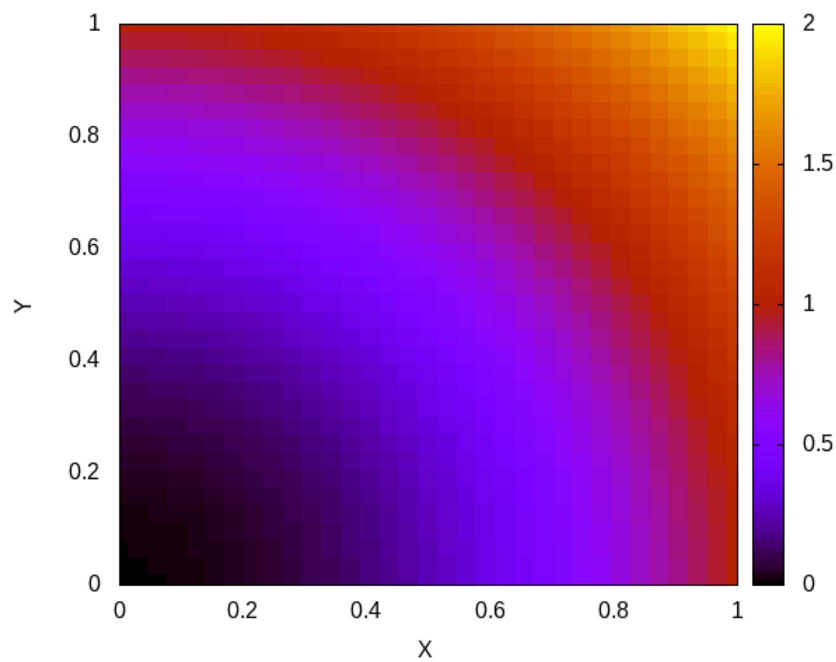
Спектральный радиус: 0.990362

Время выполнения: 0.164669 секунд.

k	|F-AUk|	|F-AUk|/|F-AU0|	|Uk-aU|	|Uk-aU|/|U0-aU|	|Uk-U(k-1)|	err_est	rs_exp
100	8.9938	0.0022677	0.40013	0.21318	0.0044083	0.452963	0.98721
200	2.9981	0.0007559	0.15060	0.08024	0.0014694	0.150985	0.99010
300	1.1362	0.0002865	0.05738	0.03057	0.0005566	0.057193	0.99039
400	0.4338	0.0001094	0.02185	0.01164	0.0002120	0.021782	0.99039
500	0.1653	0.0000417	0.00832	0.00443	0.0000807	0.008296	0.99039
600	0.0630	0.0000159	0.00317	0.00169	0.0000307	0.003159	0.99039
700	0.0240	0.0000060	0.00121	0.00064	0.0000117	0.001203	0.99039
800	0.0091	0.0000023	0.00046	0.00024	0.0000045	0.000458	0.99039
900	0.0035	0.0000009	0.00018	0.00009	0.0000017	0.000175	0.99039
956	0.0020	0.0000005	0.00010	0.00005	0.0000010	0.000102	0.99039

Графики функции:





Метод верхней релаксации(SOR).

Функция: $u(x, y) = sin(\pi x)cos(\pi y)$

Lu: $-2\pi^2 sin(\pi x)cos(\pi y)$

Число узлов: 16

Точность: 10^{-3}.

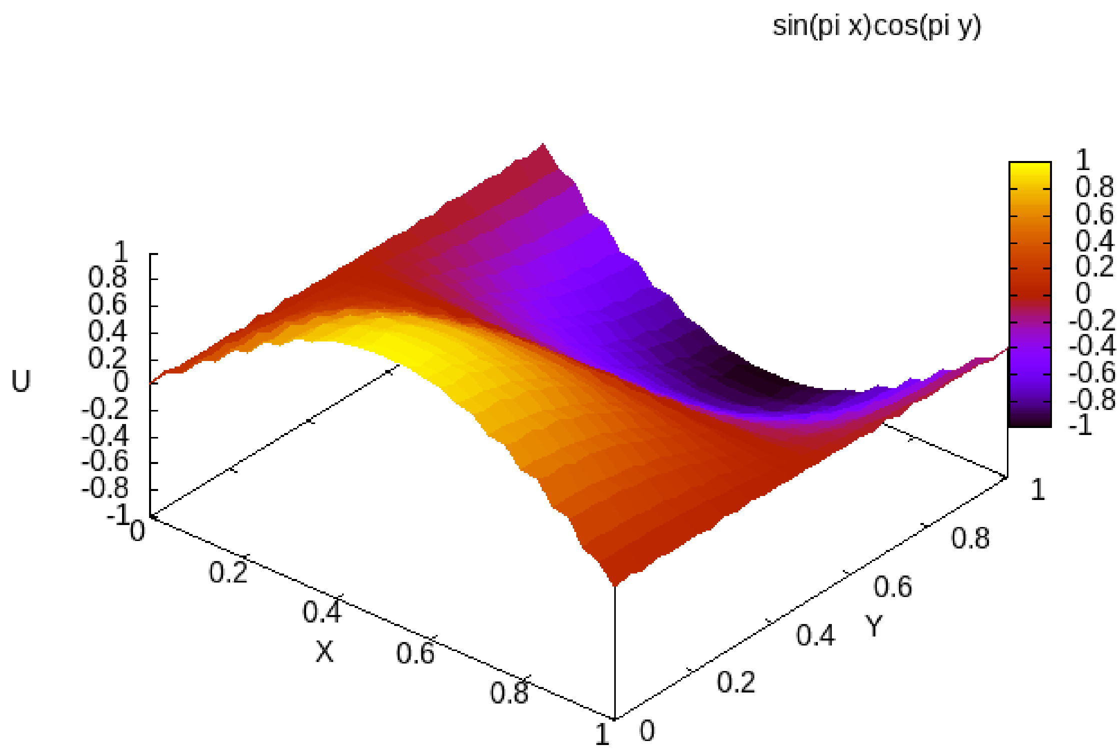
Число итераций: 71

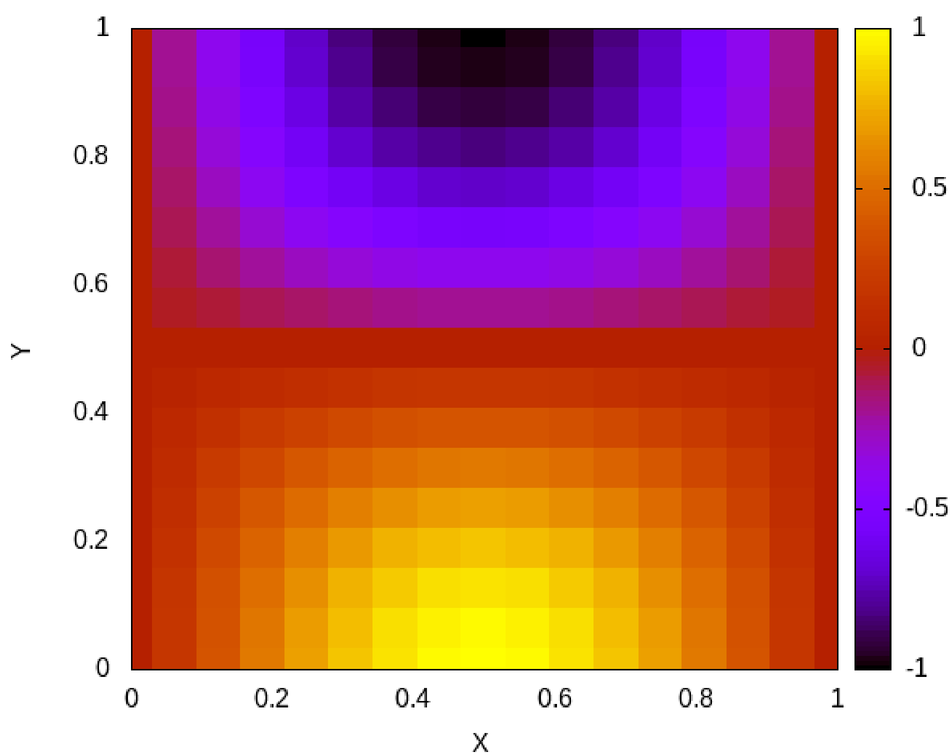
Спектральный радиус: 0.673514.

Время выполнения: 0.004155 секунд.

k	|F-AUk|	|F-AUk|/|F-AU0|	|Uk-aU|	|Uk-aU|/|U0-aU|	|Uk-U(k-1)|	err_est	rs_ex
10	23.075	0.0838	0.1636322	0.1668379	0.04616	0.095	0.81220
20	2.725	0.0098	0.0126829	0.0129313	0.00614	0.012	0.76507
30	0.315	0.001	0.0013485	0.0013749	0.00050	0.001051	0.75397
40	0.00064	0.000002	0.0010762	0.0010973	4.2e-6	0.0088	0.76370
50	0.00002	0.007	0.0010698	0.0010908	1.2e-7	0.0025	0.67705
60	1.4e-6	0.005	0.0010697	0.0010906	3.4e-9	0.072	0.62190
70	e-8	0.003	0.0010697	0.0010906	6.6e-11	0.01	0.68036
71	8e-9	0.002	0.0010697	0.0010906	4.4e-11	0.01	0.66238

Графики функции:





Список литературы

[1] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2000. – 316 с.

[2] Пакулина А.С. Практикум по методам вычислений, часть 2 – М.: СПБГУ, 2019. – 77 с.