Содержание

1 Постановка задачи

В квадрате $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ с границей Γ требуется найти решение уравнения Пуассона

$$Lu = -f(x, y),\ (x, y) \in G, \tag{1}$$

Где L – оператор Лапласа:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

1.1 Построение равномерной сетки

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей. Обозначим $h = 1/n,\ x_i = ih, y_j = jh$, $0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n$. Построим сетку узлов

$$\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j).\quad 0 \le i \le n,\quad 0 \le j \le n\}$$

Узлы $(x_i, y_j),\quad 1 \le i \le n-1,\quad 1 \le j \le n-1$ - внутренние, остальные, лежащие на границе квадрата, – граничные.

1.2 Разностная аппроксимация задачи Дирихле

Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$. Заменяем оператор L во всех внутренних узлах разностным оператором L_h

$$L_h u_{ij} = \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2}, \tag{4}$$

$1 \le i \le n-1;\quad 1 \le j \le n-1$.

Если $u(x, y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области производных по x и по y, то разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т.е.

$$Lu - L_h u = O(|h|^2).$$

Учитывая соотношение (4), задаче (1), (2) ставим в соответствие разностную задачу: найти сеточную функцию, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнениям

$$4u_{ij} - u_{i-1j} - u_{i+1j} - u_{ij-1} - u_{ij+1} = h^2 f_{ij}, \tag{5}$$

$$f_{ij} = f(x_i, y_j),\ 1 \leq i \leq n-1; \quad 1 \leq j \leq n-1$$

и принимающую в граничных узлах заданные значения

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq n \\ u_{in} = \mu(x_i, 1), & 0 \leq i \leq n \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq n-1 \\ u_{nj} = \mu(1, y_j), & 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Запишем n уравнений, представленных формулой (5),одним матричным уравнением, объединяя неизвестные u_{ij} в длинном векторе размерности $(n-1)^2$. В частности, при $n = 4$ получаем вектор-столбец $u = [u_1, u_2, ..., u_9]$. При аналогичной нумерации правых частей f_{ij} уравнения (5) преобразуются к виду

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ \hline -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ \hline & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_9 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_9 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Минус единицы рядом с главной диагональю соответствуют вычитанию верхнего и нижнего соседей $-u_{ij-1} - u_{ij+1}$. Минус единицы, удаленные от главной диагонали, соответствуют вычитанию левого и правого соседей $-u_{i-1j} - u_{i+1j}$.

При этом компоненты вектора правой части вычисляются по формулам

$$f_i = \left(f_{i1} + \frac{\mu_{i0}}{h^2}, f_{i2}, f_{i3}, ..., f_{in-2}, f_{in-1} + \frac{\mu_{in}}{h^2}\right)^T, \ 1 \leq i \leq n-1 \tag{7}$$

Для решения системы воспользуемся следующими методами:

1) Метод матричной прогонки.

2) Метод сопряженных градиентов.

1.3 Расчетные формулы для методов

1.3.1 Метод матричной прогонки

Матричная прогонка относится к прямым методам решения разностныхуравнений. Она применяется к уравнениям, которые можно записать в виде системы векторных уравнений

$$-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0,$$

$$A_i y_{i-1} - C y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \ 1 \leq i \leq n-1,$$

$$A_n y_{n-1} - C_n y_n = -F_n,$$

в нашей задаче y_i – искомые векторы размерности $n-1$, f_i – заданные векторы, A_i, B_i, C_i – заданные квадратные матрицы порядка $n-1$. Решение системы ищут в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \ i = n-1, n-2, ..., 0,$$

при этом $y_n = \beta_{n+1}$. В нашей задаче матрицы A_i и B_i совпадают и представляют собой блоки на сопутствующих диагоналях блочной матрицы (6), а C_i – диагональный блок той же матрицы. В этом случае расчетные формулы для прогоночных коэффициентов имеют вид

$$\alpha_{i+1} = (C_i - \alpha_i)^{-1}, \ i = 1, 2, ...n-1, \ \alpha_1 = C_0^{-1},$$

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}(\beta_i + f_{i+1}), \ i = 1, 2, ...n, \ \beta_1 = \alpha_1 f_1.$$

1.3.2 Метод сопряженных градиентов

Рассмотрим следующую задачу оптимизации: $F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (f, x) \longrightarrow inf$, $x \in R^n$. Здесь A – симметричная положительно определённая матрица размера $n \times n$. Такая задача оптимизации называется квадратичной. Заметим, что $F'(x) = Ax - f$. Условие экстремума функции $F'(x) = 0$ эквивалентно системе $Ax - f = 0$. Функция F достигает своей нижней грани в единственной точке x_*, определяемой уравнением $Ax_* = f$. Таким образом, данная задача оптимизации сводится к решению системы линейных уравнений $Ax = f$.

Идея метода сопряжённых градиентов состоит в следующем: Пусть $\{p_k\}_{k=1}^n$ – базис в R^n. Тогда для любой точки $x_0 \in R^n$ вектор $x_* - x_0$ раскладывается по базису $x_* - x_0 = \nu_1 p_1 + \ldots \nu_n p_n$. Таким образом, x_* представимо в виде $x_* = x_0 + \nu_1 p_1 + \ldots \nu_n p_n$. Каждое следующее приближение вычисляется по формуле: $x_k = x_0 + \nu_1 p_1 + \ldots \nu_k p_k$. Опишем способ построения базиса $\{p_k\}_{k=1}^n$ в методе сопряжённых градиентов. В качестве начального приближения x_0 выбираем произвольный вектор. На каждой итерации ν_k выбирается по правилу:

$$\nu_k = \underset{\nu_k}{argmin} F(x_{k-1} + \nu_k p_k).$$

Базисные вектора p_k вычисляются по формулам:

$$p_1 = -F'(x_0),$$

$$p_{k+1} = -F'(x_k) + \mu_k p_k.$$

Коэффициент μ_k выбирается так, чтобы векторы p_k и p_{k+1} были сопряжёнными относительно A (собственно, отсюда вытекает название самого метода):

$$\mu_k = \frac{(F'(x_k), Ap_k)}{(Ap_k, p_k)}.$$

Если обозначить за $r_k = f - Ax_k = -F'(x_k)$, то после нескольких упрощений получим окончательные формулы, используемые при применении метода сопряжённых градиентов на практике:

$$r_1 = f - Ax_0,$$

$$p_1 = r_1,$$

$$z = Ap_k,$$

$$\nu_k = \frac{(r_k, r_k)}{(z, p_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k + \nu_k p_k,$$

$$r_{k+1} = r_k - \nu_k z,$$

$$\mu_k = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)},$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \mu_k p_k.$$

Вычисления прекращаются, как только число $|||r_k||_2/||r_1||_2$ становится достаточно малым, либо, не достигнув нужной точности, проводим вычисления по изначально заданному числу итераций. В данном алгоритме z, p_k, r_k, x_k – векторы, но в нашей задаче мы "сворачиваем" их в матрицы. A – та же матрица, имеющая вид (6), а f – набор тех же векторов, подчиненных формулам (7).

2 Результаты расчетов

Метод матричной прогонки.

Функция: $u(x, y) = sin(\pi x)cos(\pi y)$

Lu: $-2\pi^2 sin(\pi x)cos(\pi y)$

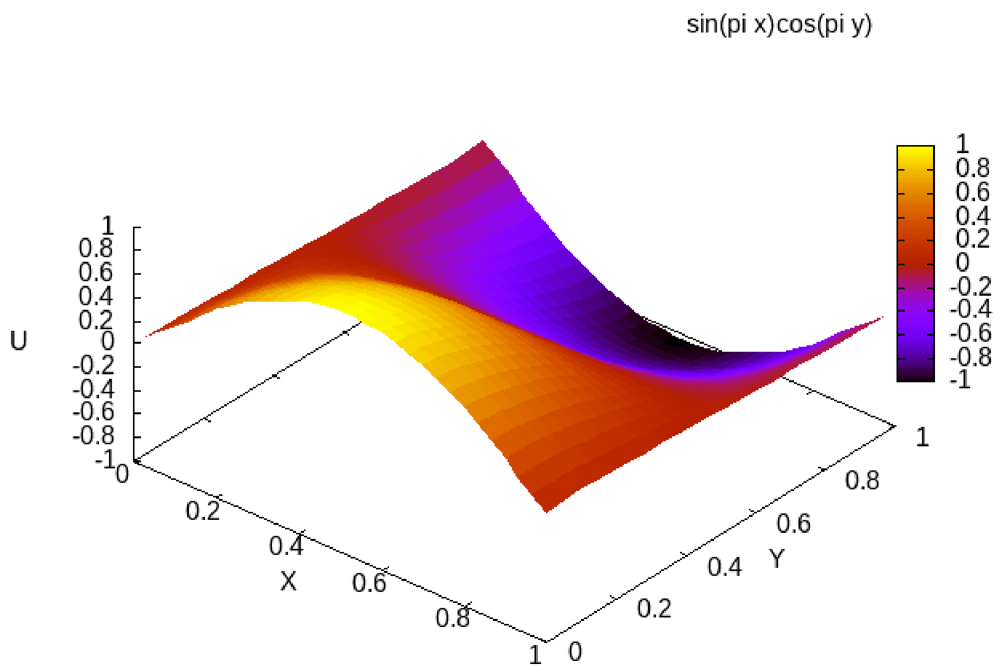
Число узлов: 64

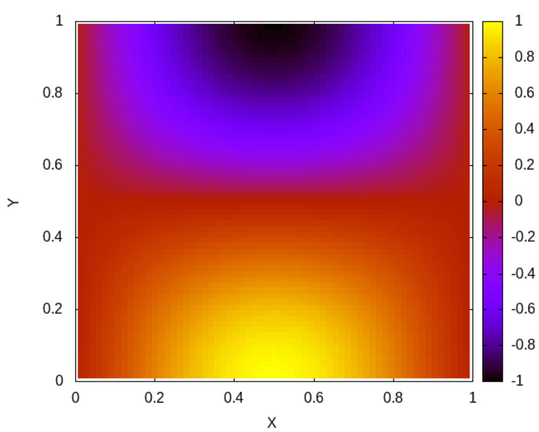
Максимальная погрешность и в какой точке она достигается:

dlt = 6.7693e-05, x[i]= 0.484375, y[j]= 0.203125

Время выполнения: 0.251187 секунд

Графики функции:


sin(pi x)cos(pi y)
U
X
Y


X
Y

Метод сопряженных градиентов.

Точность: 10^{-5}

Функция: $u(x,y) = sin(\pi x)cos(\pi y)$

Lu: $-2\pi^2 sin(\pi x)cos(\pi y)$

Число узлов: 64

Признак достижения точности, точность и пройденное число итераций:

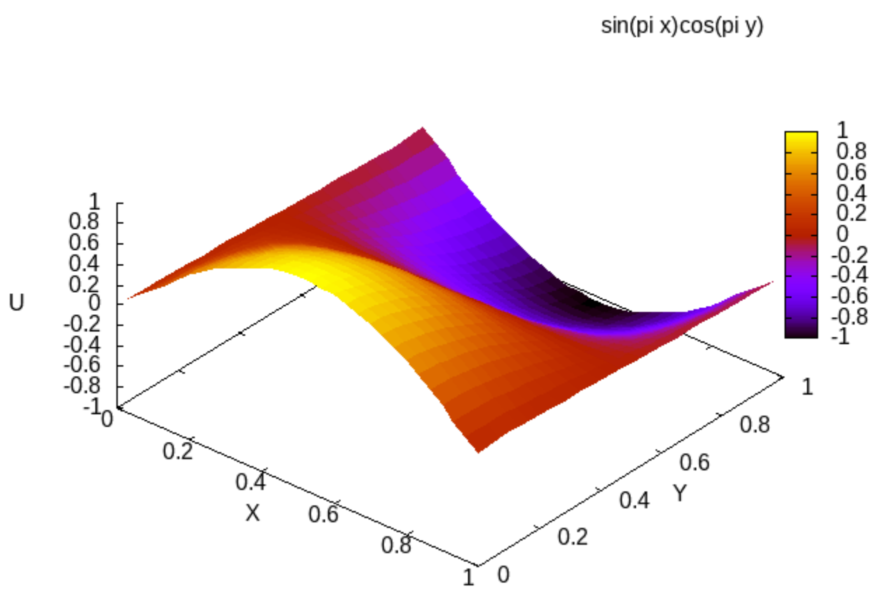
flag = 0, eps = 5.87775e-06, число итераций = 38

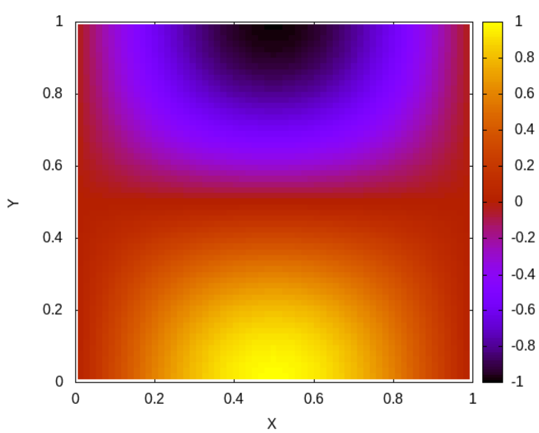
Максимальная погрешность и в какой точке она достигается:

dlt = 6.785e-05, x[i]= 0.484375, y[j]= 0.203125

Время выполнения: 0.038864 секунд

Графики функции:





Метод матричной прогонки.

Функция: $u(x, y) = yx^3 + xy^2$

Lu: $2x(3y + 1)$

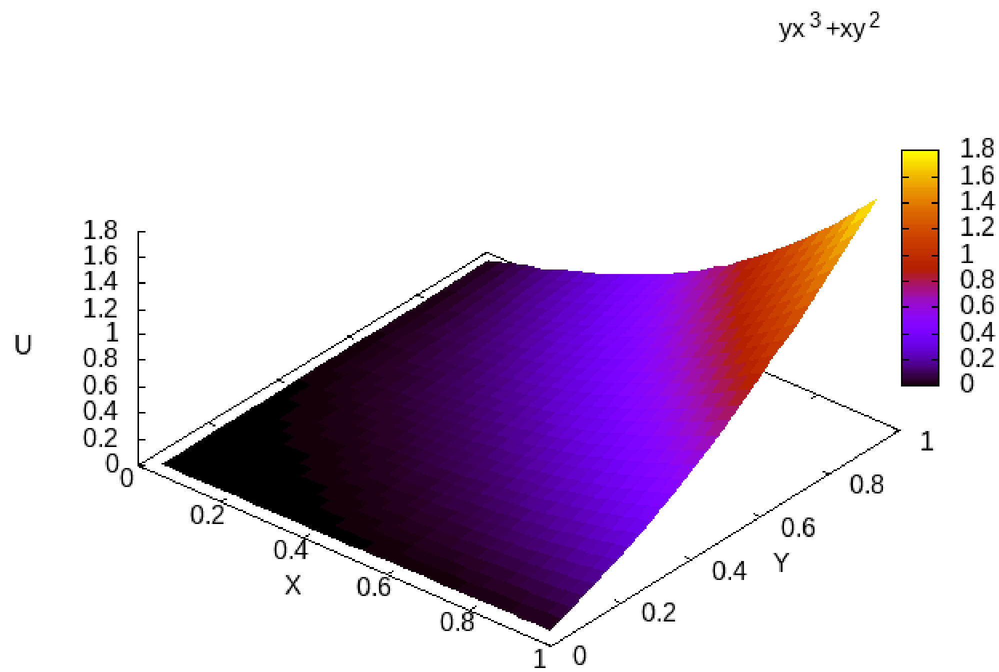
Число узлов: 32

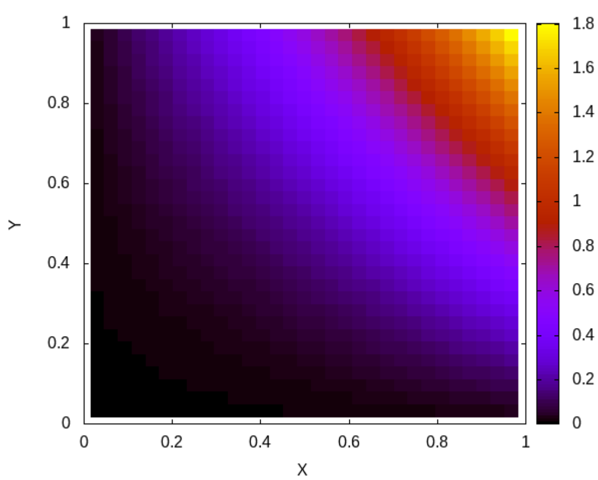
Максимальная погрешность и в какой точке она достигается:

dlt = 3.10862e-15, x[i]= 0.65625, y[j]= 0.71875

Время выполнения: 0.02613 секунд

Графики функции:





Метод сопряженных градиентов.

Точность: 10^{-5}

Функция: $u(x,y) = yx^3 + xy^2$

Lu: $2x(3y+1)$

Число узлов: 32

Признак достижения точности, точность и пройденное число итераций:

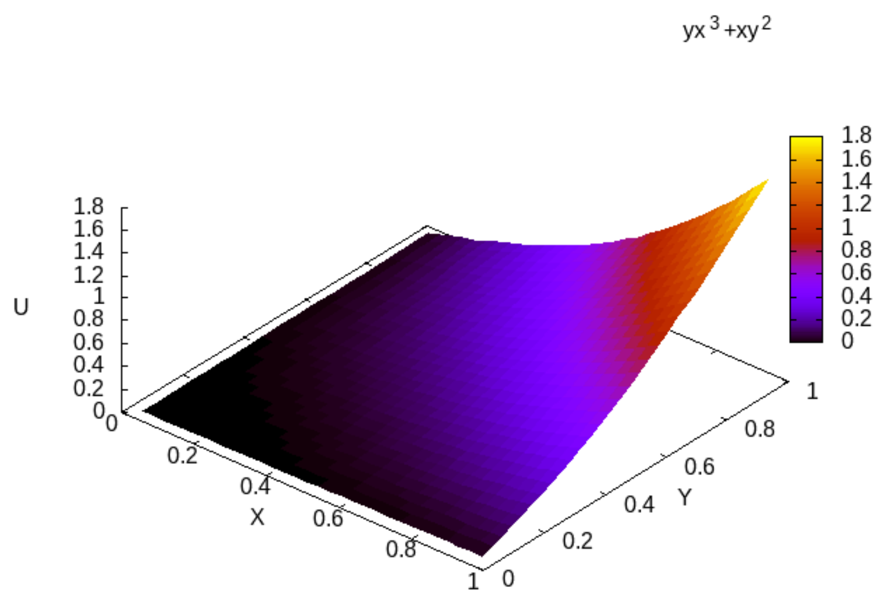
flag = 0, eps = 8.46515e-06, число итераций = 76

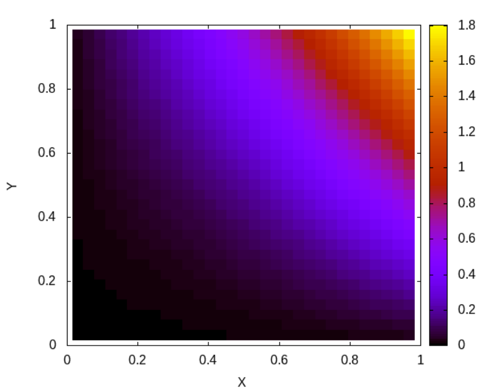
Максимальная погрешность и в какой точке она достигается:

dlt = 9.47254e-06, x[i]= 0.84375, y[j]= 0.25

Время выполнения: 0.018891 секунд

Графики функции:





Для функции $sin(\pi x)cos(\pi y)$ наблюдаемая максимальная погрешность почти одна и та же на одной и той же сетке и в методе матричной прогонки, и в методе сопряженных градиентов, однако последний дает результат почти в 10 раз быстрее.

Для функции $yx^3 + xy^2$ время выполнения едва ли отличается в двух методах, но наблюдаемая максимальная погрешность в методе матричной прогонки почти в 10^{10} раз меньше, чем в методе сопряженных градиентов.

Список литературы

[1] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2000. – 316 с.

[2] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Пер. с англ. — М.: Мир, 2001. — 430 с, ил.