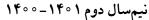
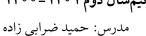
ساختمانهای گسسته







دانشکدهی مهندسی کامپیوتر

مبحث آزمون پایانی

نظريهي گرافها

تمرین سری نهم

- ۱. فرض کنید G گرافی ساده باشد که مجموعه رئوس آن تمام رشته های باینری به طول k است و دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر دقیقاً در دو بیت اختلاف داشته باشند. تعداد مولفه های همبندی این گراف را بیابید.
- ۲. فرض کنید P و Q دو مسیر ماکزیمم در یک گراف همبند باشند. ثابت کنید این دو مسیر رأس مشترک دارند.
- ۳. گراف ساده ی G با n رأس را در نظر بگیرید. به ازای هر یک از شرطهای زیر حداکثر تعداد یالهای G چقدر میتواند باشد؟
 - الت الدازه مجموعه مستقلی به اندازه و است. G
 - ب) G دارای دقیقاً k مولفه ی همبندی است.
 - ریا ناهمبند است. G
- ۴. یالهای یک گراف کامل n رأسی به تعدادی دور با طول m افراز شدهاند. ثابت کنید یا n-1 یا n-1 بر n-1 بر n-1 برخش پذیر است.
- 0. جایگشت π از رأس های گراف G یک «خودریختی» است، اگر به ازای هر دو رأس u و v از گراف G، این دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر $\pi(v)$ و $\pi(v)$ مجاور باشند. به طور مثال هر دور به طول $\pi(v)$ دارای خودریختی باشد. خودریختی باشد.
- $\pi(v)=v$. ثابت کنید به ازای هر درخت n رأسی و هر خودریختی π از آن، یا رأسی مانند v وجود دارد که $\pi(v)=v$ و $\pi(u)=v$ یا دو رأس مانند u و u وجود دارند که $\pi(u)=v$ و $\pi(u)=v$ و $\pi(u)=v$
- ۷. ثابت کنید گراف G دوبخشی است، اگر و تنها اگر هر زیرگراف H از G دارای یک مجموعهی مستقل به اندازهی حداقل $\frac{V(H)}{Y}$ باشد.
- ۸. گرافی که با مکمل خود یکریخت باشد، «خودمکمل» نامیده می شود. ثابت کنید در هر گراف خودمکمل، تعداد رأسها به پیمانه γ برابر γ برابر γ است.
 - ۹. یک گراف خودمکمل با ۲k+1 رأس داریم. ثابت کنید یک رأس هست که درجهاش دقیقاً 7k باشد.
- ۱۰. یک گراف m > r رأسی و m یالی ساده داریم که m > r. ثابت کنید این گراف دارای دو دور با طول یکسان است.
- ۱۱. k زیردرخت $T_1, T_2, ..., T_k$ از یک درخت T داریم که هر دوتای آنها دارای حداقل یک رأس مشترک هستند. ثابت کنید یک رأس وجود دارد که در همه ی زیردرخت ها وجود دارد.
- ۱۲. یک گراف G و دو زیردرخت فراگیر از آن مثل T_s و T_s داده شده است. در هر مرحله می توانیم یک یال . ۱۲ یک گراف G و یک یال $e' \notin T_s$ انتخاب کنیم و T_s را به $T_s + e e'$ تبدیل کنیم، به شرطی که بعد از این کار T_s همچنان درخت بماند. ثابت کنید با تعدادی از این حرکات می توانیم T_s را به T_s تبدیل کنیم.
- ۱۳. یالهای یک گراف کامل n رأسی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کردهایم. ثابت کنید این گراف زیردرخت فراگیری دارد که تمام یالهای آن همرنگ هستند.

- ۱۴. درخت فراگیر کمینه T از گراف وزن دار G داده شده است. ثابت کنید به ازای هر دور G یالی وجود دارد که در T نیست و بزرگترین وزن را درون آن دور دارد.
- ۱۵. فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس است که مجموع درجات هر k رأس آن کمتر از n-k است. ثابت کنید هر مجموعهی مستقل ماکزیمال در G بیشتر از k عضو دارد. مجموعهی مستقل ماکزیمال، مجموعهی مستقلی است که نتوان رأسی به آن اضافه کرد که همچنان مجموعهی مستقل باشد.
- 18. الگوریتم زیر را برای محاسبه ی یک مجموعه ی مستقل در گراف ساده ی G در نظر بگیرید: با شروع از یک مجموعه ی محاسبه ی یک مجموعه ی حداقل یک رأس دارد، رأس با درجه ی مینیمم را به مجموعه ی جواب اضافه کرده و سپس آن رأس و همسایه هایش را از G حذف میکنیم. ثابت کنید این الگوریتم مجموعه ی مستقلی با اندازه ی حداقل $\frac{1}{\log(v)+1}$ خروجی می دهد.
- ۱۷. به یک گراف «کاکتوس» میگوییم اگر هیچ دو دوری از آن اشتراک یالی نداشته باشند. ثابت کنید یک گراف کاکتوس n رأسی حداکثر $\lfloor \frac{r(n-1)}{2} \rfloor$ یال دارد.
- ۱۸. یک گراف جهتدار بدون دور داریم. ثابت کنید میتوان رئوس این گراف را روی یک خط چید طوری که جهت همهی یالها به سمت راست باشد.
 - ۱۹. ثابت کنید هر تورنمنت قویاً همبند n رأسی دوری به طول n دارد.
 - . مکمل \overline{G} مکمل \overline{G} مکمل G است. $\chi(G)+\chi(\overline{G})\leqslant n+1$ مکمل π است. ۲۰
- $\{(v_i,v_j):|i-j|\leqslant {\tt T}\}$ و مجموعه یالهای $\{v_1,...,v_n\}$ و مجموعه یالهای G با مجموعه رأسهای دراید.
 - بات کنید به ازای هر سه رأس v ، u و v ، v و v ، v و بازگراف مسطح v ، رابطه ی زیر برقرار است:

$$\deg(u) + \deg(v) + \deg(w) \leqslant \mathbf{Y} n + \mathbf{Y}$$