



۱. چند دنباله به طول ۱۲ از اعداد طبیعی متمایز وجود دارند که عضو اول آن‌ها ۱ و عضو آخرشان $۵^۴ \times ۳^۴ \times ۲^۳$ بوده و هر عدد بر عدد قبلی خود بخش‌پذیر باشد؟

۲. به چند روش مختلف می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را بر روی وجه‌های یک مکعب نوشت به طوری که جمع هر دو عدد غیرمجاور برابر ۷ شود؟

۳. چند زوج مرتب (A, B) از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ وجود دارند که $A \subseteq B$ ؟

۴. تعداد جایگشت‌های دوری حروف رشته‌های زیر را حساب کنید:

الف) abc

ب) $aabb$

ج) $aabbbb$

د) $aaabbb$

۵. به چند روش می‌توانیم در صفحه‌ی مختصات با حرکات بالا و راست از نقطه‌ی $(0, 0)$ به نقطه‌ی $(4, 6)$ برویم طوری که از نقطه‌ی $(2, 3)$ عبور نکنیم؟

۶. در چندتا از جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۶، دقیقاً یک عضو در جای درست قرار گرفته است؟

۷. فرض کنید یک صفحه‌ی شطرنج 8×8 در اختیار داریم. حداکثر چند مهره‌ی فیل شطرنج می‌توانیم روی آن قرار دهیم به طوری که هیچ دوتایی از آن‌ها یکدیگر را تهدید نکنند؟ تعداد روش‌های قرار دادن این حداکثر تعداد فیل روی صفحه‌ی شطرنج را پیدا کنید.

۸. فرض کنید یک صفحه‌ی شطرنج 9×9 در اختیار داریم. به چند روش می‌توانیم ۹ مهره‌ی رخ شطرنج را در خانه‌های هم‌رنگ صفحه قرار دهیم طوری که هیچ دوتایی یکدیگر را تهدید نکنند؟

۹. ثابت کنید:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r} \quad \text{الف)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{ب)}$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{ج)}$$

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \quad \text{د)}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{ه)}$$

۱۰. حاصل مجموع زیر را بیابید.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{n}{i+j}}$$

۱۱. به چند روش می‌توان خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با اعداد صفر و یک به گونه‌ای پر کرد که جمع اعداد روی هر مربع 2×2 عددی زوج شود؟

۱۲. دو نفر از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کنند. هر کدام در هر مرحله یک واحد به سمت راست یا چپ حرکت می‌کند. به چند طریق ممکن است آن‌ها پس از ۵ مرحله در نقطه‌ی یکسانی قرار داشته باشند؟

۱۳. دو نفر از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کنند. هر کدام در هر مرحله یک واحد به سمت راست، چپ، بالا یا پایین حرکت می‌کند. به چند طریق ممکن است آن‌ها پس از ۵ مرحله در نقطه‌ی یکسانی قرار داشته باشند؟

۱۴. کودکی که در یک ساختمان ۵ طبقه زندگی می‌کند، در حال «آسانسور بازی» است. روند بازی وی به این صورت است که از طبقه‌ی سوم وارد آسانسور شده و هر مرحله، می‌تواند به یکی از طبقات بالاتر یا پایین‌تر از طبقه‌ی کنونی‌اش برود. او به چند طریق متمایز می‌تواند این بازی را در ۱۰۰ مرحله انجام دهد؟ (شماره‌ی طبقه‌ای که کودک در انتهای بازی به آن می‌رسد، اهمیتی ندارد.)

۱۵. تعداد دنباله‌های به طول ۱۰ از حروف a, b, c, d را بشمارید که تعداد حروف a با تعداد حروف b برابر باشد.

۱۶. در دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر، a استاد و b دانشجو داریم. هر استاد، n دانشجو داشته و هر دو دانشجویی، m استاد مشترک دارند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{m} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)}$$

۱۷. پارسا می‌خواهد از نقطه‌ی $(0, 0)$ یک صفحه به نقطه‌ی $(20, 10)$ برود، به طوری که در هر مرحله تنها یک واحد به سمت بالا یا راست حرکت کند و هر گاه در خانه‌ی (x, y) است، حاصل xy زوج باشد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱۸. علی می‌خواهد یک دنباله به طول ۱۰ از اعداد $+1$ و -1 بسازد که جمع اعضای آن صفر شود و سپس بیش‌ترین مقدار مجموع اعضا در بین پیشوندهای آن را حساب کند. جمع این بیش‌ترین مقادیر به ازای تمام دنباله‌های ممکن را حساب کنید.

۱۹. یک جدول 6×4 داریم که در گوشه‌ی بالاچپ آن عدد ۱ و در گوشه‌ی پایین‌راست آن عدد ۶ نوشته شده است. به چند طریق می‌توان این جدول را با اعداد طبیعی پر کرد، به گونه‌ای که عدد هر خانه، به عدد خانه‌ی بالای خود و نیز عدد خانه‌ی سمت چپ خود، بخش‌پذیر باشد؟

۲۰. یک پارکینگ با n جایگاه متوالی و یک دنباله از اعداد ۱ تا n به نام a داریم. n ماشین به ترتیب وارد پارکینگ می‌شوند. ماشین i ام به سمت جایگاه a_i رفته و در صورتی که آن جایگاه خالی بود در آنجا پارک می‌کند. در غیر این صورت، به سمت اولین جایگاه خالی بعد از آن رفته و در آنجا پارک می‌کند. اگر هم هیچ جایگاه خالی‌ای جلوتر از a_i وجود نداشت، در هیچ جایگاهی پارک نمی‌کند. تعداد دنباله‌های a که به ازای هر یک تمام ماشین‌ها در پارکینگ قرار می‌گیرند را بشمارید.