



مسئله‌ی ۱. دوگانه‌شماری [۱۲ نمره]

$$\text{ثابت کنید } \sum_{k=d}^n C_k^m C_d^k = 2^{n-d} C_d^m$$

مسئله‌ی ۲. رابطه‌ی بازگشتی [۱۳ نمره]

فرض کنید a_n تعداد کلمات n حرفی از ۰, ۱, ۲ باشد که تفاضل هر دو عدد متوالی در هر کلمه حداکثر ۱ است. رابطه‌ی بازگشتی a_n را بدست آورده و با استفاده از تابع مولد فرمول صریح آن را بدست آورید.

مسئله‌ی ۳. اصل لانه کبوتری [۲۵ نمره]

فرض کنید m نقطه دلخواه داخل یک مستطیل 3×4 داده شده است. به ازای مقادیر مشخص شده زیر نشان دهید حداقل یک زوج نقطه پیدا می‌شود که فاصله‌شان حداکثر $\sqrt{5}$ است.

$$m = 7 \bullet$$

$$m = 6 \bullet$$

مسئله‌ی ۴. توپ و ظرف [۲۵ نمره]

فرض کنید n توپ و m ظرف داریم و می‌دانیم $n \leq 2m$ است. می‌خواهیم تعداد حالات قرار گرفتن توپ‌ها در ظرف‌ها را بیابیم که در هر ظرف حداکثر ۲ توپ قرار گیرد. این مسئله را برای چهار حالت زیر با ذکر دلیل حل کنید.

۱. توپ‌ها یکسان و ظرف‌ها یکسان

۲. توپ‌ها یکسان و ظرف‌ها متمایز

۳. توپ‌ها متمایز و ظرف‌ها یکسان

۴. توپ‌ها متمایز و ظرف‌ها متمایز

مسئله‌ی ۵. احتمال [۲۵ نمره]

متغیر تصادفی $X = X_1 + \dots + X_{2m}$ را در نظر بگیرید که در آن X_i ‌ها متغیرهای تصادفی مستقل هستند که به احتمال $1/2$ مقدار آن‌ها صفر و به احتمال $1/2$ مقدار آن‌ها یک است.

• $E(X)$ و $Var(X)$ را محاسبه کنید.

• با مقدار دهی مناسب برای مقدار t در نامساوی چیشف $(P(|X - E(X)| < t\sqrt{Var(X)}) \geq 1 - \frac{1}{t^2})$ نشان دهید

$$C_m^{2m} \geq C_k^{2m} \text{ فرض کنید به ازای هر } k \text{ داریم } C_k^{2m} \geq \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m+2}}$$