۱. به ازای دو افراز P_1 و P_2 از مجموعه‌ی دل‌خواه S، می‌گوییم P_1 یک زیرافراز از P_2 است، اگر هر مجموعه در P_1 زیرمجموعه‌ی یکی از مجموعه‌های P_2 باشد. فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی S باشند و افراز حاصل از R_1 و R_2 روی مجموعه‌ی S را به ترتیب P_1 و P_2 بنامید. ثابت کنید $R_1 \subseteq R_2$ اگر و تنها اگر P_1 یک زیرافراز از P_2 باشد.

۲. فرض کنید S عددی k رقمی و با ارقام ۶ و ۸ باشد. برای $n \geqslant k$، $F(n,k)$ را تعداد اعداد n رقمی می‌گیریم که با حذف $n-k$ رقم از آن‌ها S حاصل می‌شود. (این اعداد می‌توانند تعدادی صفر در سمت چپ خود داشته باشند.) ثابت کنید:

$$F(n,k) = F(n-1,k-1) + 10F(n-1,k).$$

۳. فرض کنید a_n برابر با تعداد راه‌های مختلف پوشاندن کامل یک مستطیل $n \times 2$ با موزاییک‌هایی به اندازه‌های 1×2 و 1×1 باشد. هر ترکیبی از موزاییک‌ها قابل استفاده است به شرط آن که موزاییک‌ها هم‌پوشانی نداشته و کل سطح مستطیل را بپوشانند. یک رابطه‌ی بازگشتی با درجه‌ی ثابت برای a_n بیابید. [نکته: می‌توانید از متغیر کمکی استفاده کنید، ولی رابطه‌ی بازگشتی نهایی باید تنها متشکل از جملات دنباله‌ی a_n باشد.]

۴. اگر f_n تعداد روابط هم‌ارزی روی یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، نشان دهید:

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_{n-i-1}$$

۵. رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از روش توابع مولد حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2^n \\ a_0 = 0,\ a_1 = 4 \end{cases}$$

سوال ۱

تعریف زیرافراز که در سوال آمده تقریباً به معنی یک حالت در افراز خرد شده می‌باشد. جهت اول اثبات: فرض می‌کنیم $R_1 \subseteq R_2$ و می‌خواهیم ثابت کنیم P_1 زیرافراز P_2 است. $[x]_{R_1}$ را یک کلاس هم‌ارزی رابطه R_1 در نظر می‌گیریم که شامل عضو y هم باشد (علاوه بر عضو x که در اصل گرفته نوشتیم) پس چون x و y در یک کلاس هم‌ارزی هستند، $x R_1 y$ و چون $R_1 \subseteq R_2$ از تعریف زیررابطه نتیجه می‌شود $x R_2 y$ پس x و y متعلق به یک کلاس هم‌ارزی از R_2 هستند (آن را با $[x]_{R_2}$ نشان می‌دهیم) پس به ازای هر y دلخواه که در $[x]_{R_1}$ گرفتیم، y عضو $[x]_{R_2}$ هم شد. پس $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ و در نتیجه تمام مجموعه‌های موجود در P_1 که متناظر با R_1 بوده، زیرمجموعه‌های مجموعه‌های موجود در P_2 اند و بر اساس تعریف صورت سوال، P_1 زیرافرازی از P_2 می‌شود.

جهت دوم اثبات: فرض کنیم هر مجموعه در P_1 زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ای در P_2 باشد. دو عضو x و y را دلخواه در نظر می‌گیریم به طوری که $x R_1 y$ و در نتیجه هر دو متعلق به یک کلاس هم‌ارزی از R_1 هستند که آن را با $[x]_{R_1}$ نشان می‌دهیم. چون هر مجموعه در P_1 زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ای از P_2 است، پس $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ (به عنوان مثال) و در نتیجه x و y متعلق به $[x]_{R_2}$ هم هستند (بنا به تعریف زیرمجموعگی) و در نتیجه $x R_2 y$، پس نتیجه گرفتیم که اگر $x R_1 y$ آنگاه $x R_2 y$ و بنا بر تعریف زیررابطه بودن $R_1 \subseteq R_2$. پس به سمت دیگر هم می‌رسیم. □

★ در هر دو اثبات $x R_1 y$ به معنی $(x,y) \in R_1$ و $x R_2 y$ به معنی $(x,y) \in R_2$ می‌باشد.

سوال ۲

A را عددی تعریف می‌کنیم که می‌خواهیم با حذف چند رقم از آن به S برسیم. روی حذف شدن یا نشدن رقم n ام A حالت‌بندی می‌کنیم:

<u>حالت اول</u> اگر حذف نشود، به عنوان <u>آخرین</u> رقم عددی که بدست می‌آید باقی می‌ماند زیرا در آینده سمت S رقمی اضافه نمی‌کنیم. پس رقم انتهایی S چون رقم انتهایی A خواهد بود، پس لذا از اول این رقم وجود نداشته و عددی $n-1$ رقمی را به عددی $k-1$ رقمی که رقم‌های S به جز رقم انتهایی ذکر شده هستند تبدیل کرده‌ایم که می‌دانیم تعداد روش‌های این کار برابر $F(n-1, k-1)$ است.

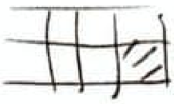
<u>حالت دوم</u> اگر حذف شود، $n-1$ رقم باقی می‌مانند که باید آن را به عددی k رقمی (عدد S) تبدیل کنیم از دلیل k رقمی بودن S آن است که با حذف $n-k$ رقم از n رقم A حاصل می‌شود و $n-(n-k)=k$) که این کار به $F(n-1,k)$ روش ممکن است. از طرفی به ازای هر حالت، رقم حذف شده می‌تواند از <u>صفر تا ۹</u> باشد که خود ۱۰ حالت دارد و طبق اصل ضرب می‌شود $10F(n-1,k)$

در نتیجه طبق اصل جمع برای دو حالت ذکر شده که هم‌پوشانی ندارند داریم

$$F(n,k)=F(n-1,k-1)+10F(n-1,k)$$

سؤال ۳

دنباله کمکی b_n را تعداد روش‌های موزاییک‌کاری سطح $2\times n$ که یک گوشه‌ی آن حذف شده است در نظر می‌گیریم.



حال مستطیل را در نظر آورده و روی یک مربع گوشه آن حالت‌بندی می‌کنیم:

۱) یا موزاییکی به شکل (1×1) در آن مربع قرار دارد که در این صورت باقی شکل تبدیل به مستطیل بدون یک گوشه می‌شود که طبق تعریف برابر $\boxed{b_n}$ است.

۲) یا موزاییکی به شکل آن مربع را می‌پوشاند و در این صورت کافیست باقی شکل که یک مستطیل $2\times(n-1)$ شده است را موزاییک‌کاری کنیم که بنا به تعریف a_n به $\boxed{a_{n-1}}$ روش قابل انجام است.

۳) یا موزاییکی به شکل آن مربع را می‌پوشاند و در این صورت خود دو حالت دارد: یا بالای آن با یک پوشیده شده (به شکل) که مستطیل $2\times(n-1)$ بی یک گوشه می‌شود ($\boxed{b_{n-1}}$) یا بالای آن دوباره یک قرار می‌گیرد (به شکل) که باقی شکل مستطیل $2\times(n-2)$ می‌شود ($\boxed{a_{n-2}}$).

برای یافتن ضابطه b_n هم دو حالت داریم: یا مربع باقی‌مانده با 1×1 پر شده (که شکل باقی‌مانده مستطیل $2\times(n-1)$ است (a_{n-1})) یا با 2×1 پر شده (که شکل باقی‌مانده مستطیل $2\times(n-1)$ بدون یک گوشه است ($\boxed{b_{n-1}}$)). پس طبق اصل جمع

$$\begin{cases} b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n = b_n + a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_{n-1} + b_{n-1} = a_n - b_n - a_{n-2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از بالایی}} b_n = a_n - b_n - a_{n-2} \Rightarrow b_n = \frac{a_n - a_{n-2}}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{a_n - a_{n-2}}{2} + a_{n-1} + \frac{a_{n-1} - a_{n-3}}{2} + a_{n-2}$$

$$\Rightarrow -2a_n + a_n - a_{n-2} + 2a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-3} + 2a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}}$$

سوال ۴

عضو دلخواه a را یکی از اعضای مجموعه‌ی n عضوی داده شده در نظر می‌گیریم. حال مجموعه‌ی B را زیرمجموعه‌ای دلخواه و با اعضایی از $A-\{a\}$ در نظر می‌گیریم که A همان مجموعه‌ی n عضوی داده شده در صورت سوال است. با توجه به اینکه B به دلخواه انتخاب شده و می‌تواند هیچ عضو یا همه تعداد اعضای ممکن را داشته باشد، اگر در هر حالت انتخاب B، تمام اعضای مجموعه‌ی B به همراه a را در یک کلاس هم‌ارزی در نظر بگیریم و تعداد روابط هم‌ارزی ممکن را شمرده و سپس روی آنها سیگما بزنیم، تعداد کل روابط هم‌ارزی به دست می‌آید چون a دلخواه است.

اگر اعضای B به همراه a در یک کلاس باشند یعنی تکلیف $i+1$ عضو مشخص بوده و تنها نحوه دسته‌بندی $n-i-1$ عضو دیگر باقی مانده است که می‌تواند حالات مختلف هم‌ارزی متعددی ایجاد نماید که به بخش بازگشتی به f_{n-i-1} روش انجام می‌گیرد. از طرفی در حالتی که بخواهیم i عضو به جز a i عضو را برای B انتخاب کنیم که از بین $\binom{n-1}{i}$ روش انجام می‌گیرد. بنابراین به ازای هر i، تعداد روابط هم‌ارزی که در آن کلاس حاوی a دارای $i+1$ عضو است به شکل $\binom{n-1}{i} f_{n-i-1}$ به دست می‌آید. پس کافی است این رابطه را روی همه‌ی iها سیگما بزنیم (از صفر تا $n-1$ که پایین رابطه حالت بیشتر از آن پیش نمی‌آید) سیگما بزنیم. در نتیجه جواب برابر است با

$$\boxed{f_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_{n-i-1}}$$

سؤال ۵ اگر $A(x)$ را تابع مولد a_n بگیریم

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x A(x) = -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 + \cdots \\ -3x^2 A(x) = -3a_0 x^2 - 3a_1 x^3 - 3a_2 x^4 + \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2}) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$$

(از روی رابطه سؤال و بردن 2^n در طرف دیگر ...)

$$\Rightarrow A(x)(1 - 2x - 3x^2) = \overset{\text{صفر}}{\cancel{a_0}} + (\overset{4}{\cancel{a_1}} - \overset{\text{صفر}}{\cancel{2a_0}})x + \sum_{i=2}^{\infty} 2^n x^n$$

$$\frac{a_1 = 4}{a_0 = 0} \quad 4x + \frac{4x^2}{1-2x} = \frac{-4x^2 + 4x}{1-2x}$$

$$\Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{2x-1}$$ (تجزیه به کسرهای جزئی)

$$= \frac{-4x^2 + 4x}{(1-2x)(x+1)(1-3x)} \Rightarrow \begin{cases} 6A + 2B + 3C = -4 \\ -5A + B + 2C = 4 \\ A - B - C = 0 \end{cases}$$

از حل معادله فوق بدست می آید

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = -2, \quad C = \frac{4}{3}$$

درنتیجه

$$A(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+x}\right) + 2\left(\frac{1}{1-3x}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + 2 \times 3^n - \frac{4}{3}(2)^n}$$