ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم — مجموعه‌ها و توابع — مبحث آزمون ۲

۱. می‌دانیم در یک مهمانی ترکیب پوشش افراد به صورت زیر بوده است:

- ۱۰ نفر پیراهن سفید و ۸ نفر پیراهن قرمز پوشیده‌اند.
- ۴ نفر کفش سیاه و پیراهن سفید پوشیده‌اند.
- ۳ نفر کفش سیاه و پیراهن قرمز پوشیده‌اند.
- ۲۱ نفر پیراهن سفید یا قرمز یا کفش سیاه پوشیده‌اند.

چند نفر در این مهمانی کفش سیاه پوشیده‌اند؟

۲. برای چهار مجموعه‌ی دل‌خواه A، B، C و D عبارات زیر را ثابت کنید:

الف) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ب) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

ج) $(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times B \cup A \times (B - D)$

۳. فرض کنید $\mathcal{P}(A)$ مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ی A باشد. نشان دهید $\mathcal{P}$ تابعی یک‌به‌یک است، یعنی اگر $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ آن‌گاه $A = B$.

۴. الف) آیا برای هر مجموعه‌ی A و هر مجموعه‌ی B، رابطه‌ی $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ برقرار است؟

ب) آیا برای هر مجموعه‌ی A و هر مجموعه‌ی B، رابطه‌ی $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ برقرار است؟

۵. نشان دهید $f : X \to Y$ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B، $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

۶. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع بوده و A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. مثالی بیاورید که نشان دهد $f(A - B)$ با $f(A) - f(B)$ برابر نیست.

۷. تابع $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این تابع یک‌به‌یک است.

ب) وارون این تابع را بیابید.

۸. بین مجموعه‌های زیر، تناظر یک‌به‌یک تعریف کنید:

الف) $A = \mathbb{R}$ و $B = (۰, \infty)$

ب) $A = (۱, ۷)$ و $B = (-۲, ۲)$

ج) $A = (۰, ۱)$ و $B = [۰, ۱]$

۹. ثابت کنید اگر مجموعه‌های A و B به‌گونه‌ای باشند که تفاضل متقارن آن‌ها (یعنی $A \oplus B$) ناشمارا باشد، آن‌گاه A یا B ناشمارا است. آیا عکس این گزاره درست است؟

۱۰. درستی و یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت یا رد کنید:

الف) اگر اندازه‌ی مجموعه‌های A و B برابر باشند و هم‌چنین اندازه‌ی مجموعه‌های C و D برابر باشند، آن‌گاه اندازه‌ی $A \cup B$ و $C \cup D$ برابر هستند.

ب) اگر اندازه‌ی مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ برابر باشند، آن‌گاه اندازه‌ی A و B برابرند.

ج) اگر اندازه‌ی مجموعه‌های $A \times B$ و $A \times C$ برابر باشند، آن‌گاه اندازه‌ی B و C برابرند. (هر سه مجموعه ناتهی هستند)

۱۱. درستی و یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

الف) هر مجموعه‌ای از دایره‌ها در صفحه که با هم هیچ تقاطعی ندارند، شمارا است.

ب) هر مجموعه‌ای از دایره‌های توپر در صفحه که سطح آن‌ها با هم هیچ اشتراکی ندارند، شمارا است.

۱۲. نشان دهید دو اصل خوش‌ترتیبی و استقرای ریاضی معادل هستند، به این معنی که با فرض درستی هر یک، می‌توان دیگری را اثبات کرد.

۱۳. ثابت کنید نمی‌توان هیچ تناظر یک‌به‌یک پیوسته‌ای از مجموعه‌ی $[۰, ۱]$ به $(۰, ۱)$ تعریف کرد.

۱۴. الف) فرض کنید X^Y مجموعه‌ی همه‌ی توابع $f : Y \to X$ باشد. ثابت کنید اگر $|X| \geqslant ۲$ آن‌گاه $|X^Y| > |Y|$.

ب) ثابت کنید $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

۱۵. فرض کنید A مجموعه‌ای ناشمارا و B زیرمجموعه‌ای شمارا از A باشد.

الف) ثابت کنید $A - B$ ناشمارا است.

ب) ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین A و $A - B$ وجود دارد.

۱۶. الف) ثابت کنید $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|$.

ب) ثابت کنید مجموعه‌ی توابع حقیقی پیوسته با مجموعه‌ی اعداد حقیقی تناظر یک‌به‌یک دارد.

۱۷. الف) نشان دهید اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ب) عدد طبیعی n مفروض است. نشان دهید مجموعه‌ی تمام ریشه‌های تمام چند جمله‌ای‌های درجه‌ی n با ضرایب گویا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ج) به اعدادی که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای دل‌خواه با ضرایب گویا باشند، اعداد جبری می‌گویند. با استفاده از نتیجه‌های دو قسمت بالا نشان دهید مجموعه‌ی اعداد جبری شمارا است.

د) به اعدادی که جبری نباشند، اعداد متعالی می‌گویند. با توجه به این حقیقت که ناشمارا عدد حقیقی و تنها شمارا عدد جبری داریم، یک عدد حقیقی دلخواه در بازه‌ی ۰ تا ۱ با چه احتمالی متعالی است؟ آیا می‌توانید یک عدد متعالی در این بازه مثال بزنید و متعالی بودن آن را اثبات کنید؟

۱۸. تمام توابع پیوسته $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید به طوری که به ازای هر x مثبت، $f(f(x)) = \frac{۱}{x^۲}$ باشد.

۱۹. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

۲۰. برای تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ می‌دانیم به ازای هر m و n طبیعی،

$$f(f(m) + f(n)) = m + n$$

الف) نشان دهید تابع f یک‌به‌یک است.

ب) ثابت کنید $f(۱) = ۱$.

ج) مقدار $f(۱۴۰۱)$ را به دست آورید.