



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۳۹۹

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری اول

شمارشی و احتمال

مبحث آزمون ۱

۱. چند سه‌تایی مرتب با اعداد ۱ تا ۹ وجود دارد به گونه‌ای که:
 - (الف) ضرب آن‌ها بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد.
 - (ب) جمع آن‌ها بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد.
۲. از بین اعداد ۱۰۰۰ تا ۱۹۹۹ چند عدد وجود دارد که دقیقاً دو رقم برابر داشته باشد؟
۳. از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۰۰ چند زیرمجموعه وجود دارد به گونه‌ای که:
 - (الف) تعداد اعضای آن زوج باشد.
 - (ب) جمع اعضای آن زوج باشد.
۴. تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ را در مجموعه‌ی $\{1, 3, 5, \dots\}$ بیابید.
۵. به چند طریق می‌توان اعداد $10 -$ تا 10 را در یک دنباله قرار داد به گونه‌ای که قدر مطلق اعداد درون دنباله از چپ به راست غیرنزولی باشد؟
۶. در یک اتاق n لامپ خاموش در یک خط قرار دارند. در هر مرحله می‌توانیم یک لامپ را روشن کنیم. چند دنباله برای روشن کردن تمام لامپ‌ها وجود دارد با این شرط که هیچ‌گاه بین دو لامپ روشن، لامپ خاموشی قرار نگیرد؟
۷. یک پارکینگ n جایگاه پارک دارد که با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. به هر ماشین یک شماره جایگاه اختصاص داده می‌شود. اگر جایگاه مربوطه خالی باشد ماشین در همان جا پارک می‌کند در غیر این صورت به سراغ جایگاه بعدی می‌رود و این رویه تا زمانی که ماشین پارک کند یا به جایگاه آخر برسد ادامه می‌یابد. اگر n ماشین داشته باشیم، به ازای چند حالت از تخصیص شماره‌ی جایگاه‌ها به ماشین‌ها همگی موفق می‌شوند پارک کنند؟ دقت کنید که شماره‌ی جایگاه‌های اختصاصی می‌توانند تکراری باشند.
۸. گروه ۱ درس ساختمان‌های گسسته در این نیم‌سال ۱۰۸ دانش‌جو دارد. نشان دهید با احتمال حداقل 25% روز تولد شما با روز تولد یکی دیگر از دانش‌جویان کلاس یکسان است. فرض کنید سال ۳۶۵ روز دارد.
۹. چند دنباله‌ی دودویی به طول $2n$ وجود دارد که تعداد صفرهایش در n رقم اول برابر با تعداد یک‌هایش در n رقم آخر باشد؟
۱۰. یک مستطیل $m \times n$ را با رسم خط‌هایی موازی عرض و طول آن به مربع‌های واحد تقسیم کرده‌ایم. در شکل حاصل چند مستطیل و چند مربع دیده می‌شود؟
۱۱. تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1399$ را در مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت حساب کنید به گونه‌ای که $x_1 = x_2$.
۱۲. چند رشته‌ی دودویی n رقمی وجود دارد که تمام صفرها یا تمام یک‌ها در آن مجاور باشند؟
۱۳. در چند زیرمجموعه از $\{1, 2, \dots, 12\}$ مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۱۳ است؟

۱۴. نه جلد کتاب مختلف در قفسه‌ای قرار دارند. چهار جلد آن‌ها قرمز و پنج جلد آن‌ها سبز هستند. به چند ترتیب مختلف می‌توان کتاب‌ها را در قفسه مرتب کرد،

(الف) اگر هیچ شرطی وجود نداشته باشد.

(ب) اگر کتاب‌های قرمز کنار هم و کتاب‌های سبز کنار هم باشند.

(ج) اگر کتاب‌های قرمز کنار هم باشند.

(د) اگر رنگ‌ها یک در میان باشند، یعنی هیچ دو کتاب هم‌رنگی مجاور یکدیگر نباشند.

۱۵. چند کلمه‌ی ۸ حرفی از حروف a, b, c, d, e, f وجود دارد که در هر یک از آن‌ها دقیقاً دو نوع حرف متفاوت به کار رفته باشد؟

۱۶. ۵ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه داریم. به چند طریق می‌توانیم این مهره‌ها را در یک ردیف از چپ به راست بچینیم به طوری که بلافاصله بعد از هر مهره‌ی سفید حداقل یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد؟

۱۷. ۲۰۰ نفر در ۱۰ کلاس ۲۰ نفره تقسیم شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۷ نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به طوری که:

(الف) از ۷ کلاس مختلف باشند.

(ب) از ۶ کلاس مختلف باشند.

۱۸. یک سکه را بی‌نهایت بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که اولین شیر در مرحله‌ی زوج ظاهر شود چقدر است؟

۱۹. در یک سبد ۵ توپ آبی و ۳ توپ سبز قرار دارد. هر بار یک توپ را چشم‌پسته از سبد خارج می‌کنیم.

(الف) چقدر احتمال دارد در برداشت چهارم اولین توپ سبز خارج شود؟

(ب) چقدر احتمال دارد در برداشت چهارم توپ سبز خارج شود؟

۲۰. در جعبه‌ی سمت راست ۱۰ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی سمت چپ ۱۰ مهره‌ی قرمز وجود دارد. در هر بار جابه‌جایی، یک مهره از جعبه‌ی سمت راست را با یک مهره از جعبه‌ی سمت چپ عوض می‌کنیم.

(الف) امید ریاضی تعداد مهره‌های آبی در جعبه‌ی سمت راست پس از ۲ بار جابه‌جایی چقدر است؟

(ب) امید ریاضی تعداد مهره‌های آبی در جعبه‌ی سمت راست پس از ۳ بار جابه‌جایی چقدر است؟

۲۱. یک ربات روی خطی حرکت می‌کند و در زمان شروع روی نقطه‌ی ۰ قرار دارد. در هر مرحله به احتمال $\frac{2}{3}$ به سمت مثبت محور و به احتمال $\frac{1}{3}$ به سمت منفی محور به اندازه‌ی واحد حرکت می‌کند. این ربات تا زمانی که به ۱ برسد به حرکت ادامه می‌دهد. امید ریاضی تعداد حرکات را محاسبه کنید.