ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول | شمارش | مبحث آزمون ۱

---

۱. n جایگاه بر روی یک خط قرار دارند. میلاد قصد دارد که از جایگاه ۱ به جایگاه n برود. وی در هر مرحله می‌تواند از هر خانه، به هر خانه‌ای با شماره‌ی بیش‌تر، در یک گام حرکت کند. او به چند حالت می‌تواند با شروع از خانه‌ی ۱ به خانه‌ی n برسد؟

۲. به چند روش مختلف می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را بر روی وجه‌های یک مکعب نوشت؟

۳. ثابت کنید $\frac{(3n)!}{6^n}$ به ازای هر n صحیح مثبت، عددی صحیح و مثبت است. (راهنمایی: نیازی به استفاده از نظریه‌ی اعداد ندارید.)

۴. فرض کنید یک صفحه‌ی شطرنج 8×8 در اختیار داریم.

الف) به چند روش می‌توان دو شاه را روی این صفحه قرار داد، به گونه‌ای که یک‌دیگر را تهدید کنند؟

ب) به چند روش می‌توان دو وزیر را روی این صفحه قرار داد، به گونه‌ای که یک‌دیگر را تهدید کنند؟

۵. مورچه‌ای در سمت چپ یک صفحه‌ی شطرنجی $m \times n$ قرار دارد. مورچه، ابتدا وارد یکی از خانه‌های اولین ستون از سمت چپ صفحه‌ی شطرنجی شده و سپس در هر گام، به یکی از سه جهت بالا، پایین یا راست حرکت کرده و به خانه‌ی دیگری می‌رسد. در نهایت، مورچه باید وارد یکی از خانه‌های اولین ستون از سمت راست صفحه‌ی شطرنجی شده و سپس با یک گام، از صفحه خارج شود. این کار به چند روش قابل انجام است؟

۶. ثابت کنید:

الف) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

ب) $\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}$ (که در آن، $r \leqslant m \leqslant n$)

ج) $\sum_{i=1}^{n} i^3 \binom{n}{i}^2 = n^2(n+3)2^{n-3}$

۷. در چند کلمه‌ی ۲۰ حرفی تشکیل شده از حروف a و b، عبارت ab دقیقا ۳ بار و عبارت ba دقیقا ۲ بار تکرار شده است؟

۸. یک ربات کاوشگر در نقطه‌ای به مختصات $(0, 0)$ قرار دارد و در هر گام، می‌تواند ۱ واحد به بالا یا راست حرکت کند. اگر این ربات، تنها ۵ بار امکان تغییر جهت داشته باشد، به چند روش می‌تواند به نقطه‌ی $(10, 10)$ برسد؟

۹. تعداد دنباله‌های $A_1, A_2, \dots, A_x$ که در آن‌ها $A_i \subseteq \{1, 2, \dots, Y\}$ و $\forall i, j : i < j \Rightarrow A_i \subseteq A_j$، چند تا است؟

۱۰. به چند روش می‌توان خانه‌های یک جدول $m \times n$ را به گونه‌ای پر کرد که جمع هر ۴ عدد متوالی در هر سطر و هر ستون، زوج شود؟

۱۱. دنباله‌ای از اعداد ۱ تا ۹ به پرهام داده شده است. پرهام در ابتدا ۳ عنصر اول دنباله را مرتب کرده، پس از آن، عناصر سوم و چهارم و پنجم دنباله را مرتب کرده، سپس، عناصر پنجم و ششم و هفتم دنباله را مرتب کرده و در نهایت، عناصر هفتم و هشتم و نهم دنباله را مرتب می‌کند. در چه تعداد از جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۹ دنباله‌ای که پرهام با این روش به دست می‌آورد، صعودی است؟

۱۲. در یک آرایه، «قله» به اعضایی گفته می‌شود که از دو درایه‌ی چپ و راست خود، بزرگ‌تر باشند. فرض کنید آرایه‌ای ۱۱ عضوی داریم که عدد خانه‌ی اول آن صفر است. به چند روش می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را در سایر خانه‌ها چید، به گونه‌ای که آرایه‌ی حاصل، تنها یک قله داشته باشد؟

۱۳. چند جفت زیر مجموعه A و B از مجموعه‌ی $M = \{۱, ۲, \cdots, ۸\}$ وجود دارد که هم A و هم B ناتهی بوده، اما $A \cap B$ تهی باشد؟ (دو جفت (A, B) و (B, A) در شمارش یک جفت محسوب می‌شوند.)

۱۴. کودکی که در یک ساختمان ۵ طبقه زندگی می‌کند، در حال «آسانسور بازی» است. روند بازی وی به این صورت است که از طبقه‌ی سوم وارد آسانسور شده و هر مرحله، می‌تواند به یکی از طبقات بالاتر یا پایین‌تر از طبقه‌ی کنونی‌اش برود. او به چند طریق متمایز می‌تواند این بازی را در ۱۰۰ مرحله انجام دهد؟ (شماره‌ی طبقه‌ای که کودک در انتهای بازی به آن می‌رسد، اهمیتی ندارد.)

۱۵. فرض کنید X مجموعه‌ای n عضوی و S مجموعه‌ی همه‌ی زوج مرتب‌هایی مانند (A, B) باشد که A و B زیرمجموعه‌های X هستند. به ازای هر $(A, B) \in S$، عدد $|A \cap B|$ را روی تخته می‌نویسیم. مجموع اعدادی که روی تخته نوشته می‌شوند را بیابید.

۱۶. ۱۰ لامپ در یک ردیف قرار داشته و در ابتدا خاموش هستند. در هر مرحله، یکی از لامپ‌ها را به گونه‌ای انتخاب و روشن می‌کنیم که بین هیچ دو لامپ روشنی، لامپ خاموشی قرار نداشته باشد. به چند طریق می‌توان همه‌ی لامپ‌ها را روشن کرد؟

۱۷. در دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر، a استاد و b دانشجو داریم. هر استاد، n دانشجو داشته و هر دو دانشجویی، m استاد مشترک دارند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{m} = \frac{b(b-۱)}{n(n-۱)}$$

۱۸. پارسا می‌خواهد از نقطه‌ی $(۰, ۰)$ یک صفحه به نقطه‌ی $(۲۰, ۱۰)$ برود، به طوری که در هر مرحله تنها یک واحد به سمت بالا یا راست حرکت کند و هر گاه در خانه‌ی (x, y) است، حاصل xy زوج باشد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱۹. چند تابع $f : \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \to \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ وجود دارد که به ازای هر $x \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ داشته باشیم $f(f(x)) = f(x)$؟

۲۰. یک جدول ۶×۴ داریم که در گوشه‌ی بالاچپ آن عدد ۱ و در گوشه‌ی پایین‌راست آن عدد ۶ نوشته شده است. به چند طریق می‌توان این جدول را با اعدادی پر کرد، به گونه‌ای که عدد هر خانه، به عدد خانه‌ی بالای خود و نیز عدد خانه‌ی سمت چپ خود، بخش‌پذیر باشد؟