



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری چهارم

اصل لافه گیوئری

مبحث آزمون ۲

۱. بیش از ۴۰۰ دانش‌جوی دانشگاه در امتحانات پایان‌ترم معدلی بالاتر از ۱۵ آورده‌اند. ثابت کنید ۹ نفر وجود دارند که اختلاف معدل هر دوتای آن‌ها حداکثر ۱/۰ است.
۲. یک کیسه حاوی تعداد زیادی مهره به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز در اختیار داریم. فرض کنید هر روز صبح، سه مهره از کیسه بیرون می‌آوریم، رنگ آن‌ها را یکی یکی در دفتری یادداشت می‌کنیم و سپس مهره‌ها را به کیسه بازمی‌گردانیم. نشان دهید اگر این کار را به مدت یک ماه انجام دهیم، دست‌کم دو بار دنباله‌های یکسانی را یادداشت نموده‌ایم.
۳. خانه‌های یک جدول 7×3 را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید چهار خانه‌ی هم‌رنگ از این جدول وجود دارند که چهار گوشه‌ی یک مستطیل را تشکیل می‌دهند.
۴. فرض کنید $O, A_1, A_2, \dots, A_{13}$ نقاطی در صفحه باشند. ثابت کنید زاویه‌ی بین دو تا از پاره‌خط‌های $OA_1, OA_2, \dots, OA_{13}$ حداکثر 30° درجه است.
۵. ثابت کنید اگر ۹ نقطه با مختصات صحیح در فضای سه‌بعدی انتخاب کنیم، حداقل دو نقطه وجود خواهند داشت که نقطه‌ی میانی خط واصل آن‌ها مختصات صحیح دارد.
۶. آیدین به دلیل اضطراب بیش از حد، در طول سال، هر روز حداقل یک قهوه اسپرسو می‌خورد. هم‌چنین مجموع تعداد قهوه‌های اسپرسو که در طول سال خورده است 500 می‌باشد. نشان دهید، در طول سال یک بازه‌ی متوالی وجود دارد که آیدین دقیقاً 100 قهوه اسپرسو خورده است.
۷. دو 16 ضلعی منتظم قابل انطباق را در نظر بگیرید. فرض کنید از هر یک از این دو 16 ضلعی، 7 رأس به رنگ قرمز در آمده است. ثابت کنید، این دو 16 ضلعی را می‌توان طوری برهم منطبق کرد که حداقل در 4 نقطه رأس‌های قرمز رنگ روی یکدیگر قرار گیرند.
۸. 43 خانه از صفحه‌ی شطرنجی 8×8 به رنگ قرمز درآمده‌اند. ثابت کنید مربعی 3×3 وجود دارد که حداقل 6 خانه‌ی آن قرمز شده‌اند.
۹. فرض کنید هر جمله از دنباله‌ی $\langle a_1, a_2, \dots, a_{100} \rangle$ برابر با یکی از اعداد $1, 2, \dots, 100$ باشد. نشان دهید اندیس‌های متمایز i و j وجود دارند که $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$.
۱۰. اعداد 1 تا 81 در یک جدول 8×8 نوشته شده است. ثابت کنید دو مربع مجاور (دارای یک ضلع مشترک) در جدول وجود دارند، طوری که اختلاف اعداد داخل آن‌ها حداقل 6 باشد.
۱۱. یک اتاق مستطیلی به مساحت 5 داریم که در آن 9 قالیچه به مساحت 1 متر مربع پهن کرده‌ایم. ثابت کنید دو قالیچه وجود دارند که سطح اشتراک آن دو بیش از $\frac{1}{4}$ متر مربع است.
۱۲. 10 دوست برای یکدیگر کارت تبریک فرستاده‌اند و هر نفر 5 کارت تبریک فرستاده است. ثابت کنید حداقل دو نفر از آن‌ها برای همدیگر کارت تبریک فرستاده‌اند.
۱۳. ثابت کنید در بین هر 10 عدد صحیح دورقمی، دو زیرمجموعه‌ی متمایز A و B وجود دارند که مجموع اعضای آن‌ها برابر است.

۱۴. یک جدول 4×4 داده شده است.

الف) ثابت کنید می‌توان ۷ خانه از جدول را علامت زد، طوری که اگر دو سطر دلخواه و دو ستون دلخواه از جدول را حذف کنیم، در خانه‌های باقی‌مانده همواره یک خانه‌ی علامت‌دار باقی بماند.

ب) ثابت کنید اگر کم‌تر از ۷ خانه را علامت بزنیم، همواره می‌توان دو سطر و دو ستون را حذف کرد طوری که در خانه‌های باقی‌مانده هیچ خانه‌ی علامت‌داری باقی نماند.

۱۵. در یک کشور ۱۷ فرودگاه وجود دارد. از هر فرودگاه این کشور حداقل به ۸ فرودگاه دیگر پرواز مستقیم وجود دارد (پروازها دوطرفه‌اند). ثابت کنید از هر فرودگاه با حداکثر یک‌بار تعویض هواپیما می‌توان به فرودگاه دیگر رفت.

۱۶. ۸ مربع 2×2 از یک صفحه‌ی شطرنجی 8×8 جدا شده است. ثابت کنید می‌توان یک مربع 2×2 دیگر از صفحه‌ی شطرنجی جدا کرد.

۱۷. ۲۶ خانه از یک صفحه‌ی شطرنجی 7×7 به رنگ قرمز درآمده‌اند. ثابت کنید مستطیلی 2×3 وجود دارد که حداقل ۴ خانه از آن قرمز شده‌اند.

۱۸. اعداد متمایز a_1, a_2, \dots, a_{70} داده شده‌اند، طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq 70$ می‌دانیم $1 \leq a_i \leq 200$. ثابت کنید در بین اعداد داده شده دو عدد وجود دارند که تفاضلشان ۴، ۵ یا ۹ باشد.

۱۹. ۵۰ پاره‌خط روی یک خط داده شده است. ثابت کنید همواره یکی از دو گزاره‌ی زیر برقرار است.

الف) ۸ پاره‌خط از ۵۰ پاره‌خط داده شده وجود دارند که دو به دو با یکدیگر اشتراک دارند.

ب) ۸ پاره‌خط از ۵۰ پاره‌خط داده شده وجود دارند که هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی ندارد.

۲۰. کلاسی ۳۳ دانش‌آموز دارد. از هر دانش‌آموز تعداد هم‌کلاسی‌هایی که نام و تعداد هم‌کلاسی‌هایی که نام خانوادگی مشترکی با او دارند می‌پرسیم. در پاسخ‌های داده شده اعداد ۰ تا ۱۰ مشاهده می‌شوند. ثابت کنید دو دانش‌آموز وجود دارند که نام و نام خانوادگی مشابهی دارند.