ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری هشتم | رابطه‌ها و ترتیب جزئی | مبحث آزمون ۳

۱. کدام یک از روابط زیر هم‌ارزی است؟

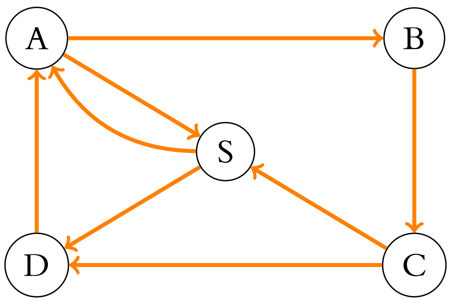
الف) فرض کنید ℓ مجموعه‌ی تمامی شناسه‌های مجاز در یک زبان برنامه‌نویسی باشد. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ℓ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall s,t \in \ell, \quad sRt \iff \text{۸ حرف اول رشته‌ی } s \text{ با ۸ حرف اول رشته‌ی } t \text{ یکسان باشد}$$

ب) فرض کنید رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی اعداد صحیح تعریف شود. آن‌گاه به ازای هر m و n در مجموعه‌ی اعداد صحیح، mRn اگر و تنها اگر حاصل $3m - 5n$ زوج باشد.

ج) به ازای هر دو عدد صحیح مثبت a و b می‌گوییم $a \sim b$ اگر و تنها اگر a و b، بدون درنظر گرفتن توان عوامل اولیه‌ی عدد، عوامل اولیه‌ی یکسانی داشته باشند. به عنوان مثال $6 \sim 432$ زیرا $6 = 2 \times 3$ و $432 = 2^4 \times 3^3$.

۲. گراف رابطه‌ی R را که روی مجموعه $A = \{A, B, C, D, S\}$ به صورت زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:



شکل ۱: گراف رابطه‌ی R

با توجه به گراف رابطه‌ی R، کم‌ترین مقدار n را پیدا کنید طوری که

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

۳. درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را در خصوص دو رابطه‌ی R و S بررسی کنید:

الف) اگر R و S هر دو بازتابی باشند آن‌گاه $R \circ S$ نیز بازتابی است.

ب) اگر R و S هر دو ضدبازتابی باشند آن‌گاه $R \circ S$ نیز ضدبازتابی است.

ج) اگر R و S هر دو رابطه‌ی هم‌ارزی باشند آن‌گاه $R \circ S$ نیز رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۴. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد و رابطه‌ی R را روی $\mathbb{R}^2$ این‌گونه تعریف می‌کنیم که به ازای هر $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ آن‌گاه $(a,b)R(c,d)$ اگر و تنها اگر یا $a < c$ باشد و یا $a = c$ و $b \leqslant d$ باشد. آیا R رابطه‌ی ترتیب جزئی است یا خیر؟ ادعای خود را اثبات کنید.

۵. فرض کنید R و S دو رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشند، آنگاه درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را نشان دهید:

الف) روابط هم‌ارزی تحت اشتراک متناهی بسته هستند، به عبارتی $R \cap S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) اگر $R \cup S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد، آنگاه R و S هر کدام روابط هم‌ارزی هستند.

۶. فرض کنید A یک مجموعه باشد و R نیز یک رابطه روی A باشد. رابطه‌ی S عبارت است از

$$xSy \iff (xRy \wedge yRx).$$

هم‌چنین رابطه‌ی T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$xTy \iff (xRy \wedge y\not{R}x).$$

نشان دهید:

$$xRy \iff (xSy \vee xTy).$$

۷. مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۸\}$ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تعداد روابط روی S که خاصیت بازتابی و ضدبازتابی نداشته باشند را به دست آورید.

ب) تعداد روابط روی S که خاصیت تقارنی و پادتقارنی نداشته باشند را به دست آورید.

۸. رابطه‌ی $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ را در نظر بگیرید که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ بیان‌گر مجموعه‌ی توانی اعداد طبیعی است. به ازای $X \subseteq \mathbb{N}$ و $Y \subseteq \mathbb{N}$ آنگاه $(X, Y) \in R$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشند u و v که $u, v \in X$ باشند و $Y = X \cup \{u + v\}$. برای مثال، $(\{۱, ۲\}, \{۱, ۲, ۳\}) \in R$ اما $(\{۱, ۲\}, \{۱, ۲, ۵\}) \notin R$. با فرض این‌که $R \neq \emptyset$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که R^* ترتیب جزئی است؟

۹. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A را اقلیدسی گویند، اگر

$$\forall x, y, z \in A,\ xRy \wedge xRz \implies yRz.$$

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را نشان دهید:

الف) اگر رابطه‌ی R اقلیدسی باشد آنگاه R تعدی نیز خواهد بود.

ب) اگر رابطه‌ی R اقلیدسی و بازتابی باشد آنگاه متقارن نیز خواهد بود.

۱۰. رابطه‌ی R روی $\mathbb{Z}^+$ را در نظر بگیرید. $(a, b)R(c, d)$ اگر و تنها اگر $a - ۲d = c - ۲b$. اعضای کلاس هم‌ارزی $[(۳, ۳)]$ را پیدا کنید.

۱۱. نشان دهید هر مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preceq)$ را می‌توان به مجموعه‌ی مرتب جزئی $(B, \subseteq)$ نگاشت کرد، طوری که $B \subseteq \mathcal{P}(A)$. بعبارت دیگر نشان دهید نگاشت یک‌به‌یک $f : A \to B$ وجود دارد طوری که:

$$\forall a, b \in A : a \preceq b \iff f(a) \preceq f(b)$$

۱۲. نشان دهید هر مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preceq)$ که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و متناهی از A دارای کوچک‌ترین عضو باشد، یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب است.

۱۳. دو مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preceq_۱)$ و $(B, \preceq_۲)$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی ترتیب قاموسی $(A \times B, \preceq)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (منظور از $=_i$ تساوی با توجه به $\preceq_i$ است):

$$\forall (a, b), (a', b') \in A \times B : (a, b) \preceq (a', b') \iff a \prec_۱ a' \ \ or \ \ a =_۱ a' \ ,\ b \preceq_۲ b'$$

نشان دهید $(A \times B, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

۱۴. دو مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preceq_1)$ و $(B, \preceq_2)$ را در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\preceq$ بر روی $A \times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall (a,b), (a',b') \in A \times B : (a,b) \preceq (a',b') \iff a \preceq a' \ , \ b \preceq b'$$

الف) نشان دهید $(A \times B, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

ب) نشان دهید اگر $(A, \preceq_1)$ و $(B, \preceq_2)$ مشبکه باشند، آنگاه $(A \times B, \preceq)$ نیز یک مشبکه است.

ج) اگر $(A, \preceq_1)$ و $(B, \preceq_2)$ مجموعه‌های کاملاً مرتب باشند، آیا $(A \times B, \preceq)$ هم یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب است؟

۱۵. اگر $(A, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و $\emptyset \neq B \subset A$ باشد، آیا $(B, \preceq \cap\ B \times B)$ یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب است؟

۱۶. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preceq)$ را در نظر بگیرید، نشان دهید $(A, \preceq^{-1})$ نیز یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. $\preceq^{-1}$ که دوگان رابطه‌ی $\preceq$ نامیده می‌شود به شکل زیر تعریف میگردد.

$$\forall a, b \in A : a \preceq^{-1} b \iff b \preceq a$$

۱۷. یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ارائه دهید که:

الف) عضو مینیمال و ماکزیمال نداشته باشد.

ب) عضو مینیمال داشته باشد اما عضو ماکزیمال نداشته باشد.

ج) عضو ماکزیمال داشته باشد اما عضو مینیمال نداشته باشد.

د) عضوی داشته باشد که همزمان ماکزیمال و مینیمال است.

۱۸. درستی هر کدام از گزاره‌های زیر را بررسی کنید. در صورت درستی اثبات ارائه دهید و در غیر این صورت یک مثال نقض آورید.

الف) هر مجموعه‌ی مرتب جزئی کران‌دار دارای دقیقا یک عضو مینیمال است.

ب) کوچک‌ترین کران بالای زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه‌ی مرتب جزئی در صورت وجود یکتا است.

ج) یکتایی عضو مینیمال در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی به معنای کوچک‌ترین بودن آن عضو مینیمال است.

د) هر مشبکه‌ی متمم‌دار یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر است.

ه) هر مشبکه‌ی توزیع‌پذیر یک مشبکه‌ی متمم‌دار است.

و) هر مجموعه‌ی کاملاً مرتب یک مشبکه است.

۱۹. درستی هر کدام از گزاره‌های زیر را بررسی کنید. در صورت درستی اثبات ارائه دهید و در غیر این صورت یک مثال نقض آورید.

الف) اگر (A, R) مشبکه و A متناهی باشد، آنگاه (A, R) دارای کوچک‌ترین عضو است.

ب) اگر (A, R) مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، آنگاه (A, R) دارای عضو مینیمال است.

ج) اگر (A, R) مشبکه باشد، آنگاه مجموعه‌ای کاملاً مرتب است.

۲۰. برای عدد صحیح و مثبت n، D_n عبارت است از مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های n. ترتیب جزئی $(D_n, |)$ را در نظر بگیرید.

الف) ترتیب جزئی مذکور به ازای چه مقادیری از n ترتیب کامل است؟

ب) ترتیب جزئی مذکور به ازای چه مقادیری از n جبر بول است؟