دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری سوم — **استقرای ریاضی** — مبحث آزمون ۱

۱. گزاره‌نمای دل‌خواه $P(n)$ را در نظر بگیرید. مشخص کنید به ازای کدام اعداد صحیح مثبت n عبارت $P(n)$ درست است، اگر بدانیم:

الف) $P(1)$ درست است، و از درستی $P(n)$ درستی $P(n+2)$ نتیجه می‌شود.

ب) $P(1)$ و $P(2)$ درست‌اند، و از درستی $P(n)$ درستی $P(n+2)$ نتیجه می‌شود.

پ) $P(1)$ درست است، و از درستی $P(n)$ درستی $P(n+2)$ و $P(n+5)$ نتیجه می‌شود.

۲. می‌دانیم گزاره‌نمای $P(n)$ به ازای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی درست است و از درستی $P(n+1)$، درستی $P(n)$ نتیجه می‌شود. نشان دهید $P(n)$ به ازای تمام اعداد طبیعی n درست است.

۳. نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی مانند n می‌توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد، طوری که هر دو دایره به شعاع واحد، حداکثر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

۴. دنباله‌ی فیبوناچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$$

تساوی‌های زیر را برای این دنباله ثابت کنید:

الف) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$

ب) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$

پ) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

۵. به ازای هر دو عدد طبیعی m و n ثابت کنید:

$$F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$$

۶. به کمک نتیجه‌ی مسئله‌ی قبل، ثابت کنید F_{mn} بر F_n بخش‌پذیر است.

۷. $2n$ شکلات در n قوطی گذاشته شده است. سیاوش و محمد به نوبت هر بار یک شکلات بر می‌دارند (سیاوش شروع‌کننده‌ی بازی است). ثابت کنید محمد می‌تواند به گونه‌ای شکلات انتخاب کند که دو شکلات آخر، متعلق به یک قوطی باشند.

۸. یک سطر نامتناهی از خانه‌های 1×1 با شماره‌های $1, 2, \cdots$ داده شده است. در ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله، یکی از دو مهره را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانه‌ی شماره‌ی i باشد، آن را i خانه به جلو می‌بریم؛ به طور دقیق‌تر، در صورتی که مهره‌ی دیگری در هیچ‌یک از خانه‌های $i+1$ تا $2i$ نباشد، آن را به خانه‌ی $2i$ و در غیر این صورت به خانه‌ی $2i+1$ می‌بریم. نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n، می‌توان با انجام تعدادی حرکت، یکی از مهره‌ها را به خانه‌ی شماره‌ی n برد.

۹. ثابت کنید می‌توان تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را در یک ردیف نوشت، به طوری که تفاضل متقارن هر دو زیرمجموعه‌ی مجاور، تک عضوی باشد.

۱۰. اگر $n \geqslant ۲$، ثابت کنید می‌توان اعضای مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۳n\}$ را به ۳ زیرمجموعه‌ی n عضوی افراز کرد، به طوری که مجموع اعداد هر سه زیرمجموعه با یک‌دیگر یکسان باشند.

۱۱. $n + ۱$ دختر و n پسر دور یک میز نشسته‌اند. ثابت کنید دختری وجود دارد که با شروع شمارش از او در جهت ساعت‌گرد، در هر لحظه، تعداد دخترها از پسرها بیشتر باشد و سپس نشان دهید که این دختر، یکتا است.

۱۲. برای یک مجموعه‌ی ناتهی از اعداد مانند S، نمادهای $\pi(S)$ و $\sigma(S)$ را به ترتیب برابر با حاصل‌ضرب و مجموع اعضای S تعریف می‌کنیم. ثابت کنید:

$$\sum_{S \subseteq [n]} \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = (n^۲ + ۲n) - (n + ۱)(۱ + \frac{۱}{۲} + \dots + \frac{۱}{n})$$

که در آن، نماد $[n]$ معادل $\{۱, ۲, \dots, n\}$ است.

۱۳. $n(n + ۲)$ سرباز در n ستون برابر در کنار هم با فاصله‌ی یک قدم ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد، یا به یکی از ۴ جهت اصلی، یک قدم گام بر می‌دارد. پس از جابه‌جایی، سربازها در $n + ۲$ ستون برابر به شکل منظم قرار گرفته‌اند، به طوری که دو سطر اول و آخر حذف شده و دو ستون به چپ و راست آن‌ها اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۱۴. فرض کنید n عددی فرد بوده و n نقطه روی یک خط داده شده‌اند، به طوری که هر یک به رنگ سفید یا سیاه هستند. روی هر نقطه، مجموع تعداد نقاط سفید سمت راست و تعداد نقاط سیاه سمت چپ آن نقطه را می‌نویسیم. ثابت کنید عدد $\frac{n-۱}{۲}$ بر روی تعداد فردی از این نقاط، نوشته می‌شود.

۱۵. اتاقی، تعداد زیادی چراغ و کلید دارد. هر کلید به برخی از چراغ‌ها متصل بوده و با زدن آن کلید، وضعیت همه‌ی چراغ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم هر چراغ حداقل به یک کلید متصل است. نشان دهید اگر در ابتدا همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند، می‌توان با تغییر وضعیت برخی از کلیدها، به حالتی رسید که در آن، بیش از نیمی از چراغ‌ها روشن باشند.

۱۶. تعدادی چراغ و کلید داده شده است. هر کلید به تعدادی چراغ متصل است و تغییر وضعیت هر کلید باعث می‌شود که وضعیت چراغ‌های متصل به آن، تغییر کند. می‌دانیم برای هر مجموعه‌ی ناتهی از چراغ‌ها، کلیدی وجود دارد که به تعداد فردی از چراغ‌های این مجموعه متصل است. به ازای هر وضعیت اولیه از چراغ‌ها، ثابت کنید با تغییر وضعیت تعدادی کلید، می‌توان تمامی چراغ‌ها را خاموش کرد.

۱۷. فرض کنید $n \geqslant ۲$ و $۲n - ۳ \leqslant k \leqslant \frac{n(n-۱)}{۲}$. ثابت کنید اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ وجود دارند، به طوری که مجموعه‌ی $\{a_i + a_j \mid ۱ \leqslant i < j \leqslant n\}$ دقیقا k عضو متفاوت داشته باشد.

۱۸. دنباله‌ی کلمات $W_۰$، $W_۱$، $W_۲$ و ... به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$W_۰ = a, \quad W_۱ = b, \quad W_n = W_{n-۲}W_{n-۱} \quad (n \geqslant ۲)$$

(اگر A و B دو کلمه باشند، AB کلمه‌ای است که از نوشتن B در انتهای A به دست می‌آید.)

برای هر $n \geqslant ۱$ ثابت کنید $L_n = W_۱W_۲ \dots W_n$ یک کلمه‌ی آینه‌ای است.

۱۹. هر یک از n فرد با نام‌های $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ خبری را در اختیار دارند. خبر فرد iام را b_i می‌نامیم (توجه کنید که b_iها در حالت کلی با هم متفاوت هستند). در هر زمان، دو نفر می‌توانند با هم تماس بگیرند. اگر a_i با a_j تماس بگیرد و a_i قبل از تماس، مجموعه خبرهای β_i و a_j قبل از تماس، مجموعه خبرهای β_j را داشته باشد، پس از تماس، هر دو خبرهای خود را به هم‌دیگر رسانده و دارای مجموعه خبرهای $\beta_i \cup \beta_j$ خواهند شد (β_i و β_j زیرمجموعه‌هایی از خبرهای اولیه یعنی b_iها هستند.) یک «مرحله» از خبرپراکنی به صورت

تماس هم‌زمان و دوبه‌دوی این n نفر با هم تعریف می‌شود. توجه کنید که در یک مرحله از خبرپراکنی، یک فرد نمی‌تواند با بیش از یک فرد دیگر، تماس بگیرد. هدف آن است که بدانیم در چند مرحله و چگونه می‌توان خبرهای اولیه (b_iها) را در اختیار همه‌ی a_iها قرار داد.

الف) حداقل تعداد مراحل را برای $n = ۲^k$ به دست آورده و درستی ادعای خود را نشان دهید.

ب) حداقل تعداد مراحل را برای nهای فرد به دست آورده و درستی ادعای خود را نشان دهید.

پ) حداقل تعداد مراحل را برای nهای زوج به دست آورده و درستی ادعای خود را نشان دهید.

۲۰. فرض کنید $a_۱$ تا a_n اعدادی صحیح باشند، به طوری که به ازای هر $۱ \leqslant k \leqslant n$ داشته باشیم $۰ < a_k \leqslant k$. هم‌چنین، می‌دانیم $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ عددی زوج است. ثابت کنید انتخابی از علامت‌های مثبت و منفی وجود دارد، به طوری که $\pm a_۱ \pm a_۲ \pm \cdots \pm a_n = ۰$.