ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری ششم | نظریه‌ی اعداد | مبحث آزمون ۲

---

۱. ثابت کنید عدد $11\ldots122\ldots25$ که در آن تعداد یک‌ها و دوها به ترتیب ۱۹۹۷ و ۱۹۹۸ است، مربع کامل است.

۲. تمام سه‌تایی‌های طبیعی x، y و z را پیدا کنید طوری که $x^3 = 3^y \times 7^z + 8$.

۳. تمام x و y های طبیعی را بیابید که $x^{2008} + 2008! = 21^y$.

۴. ثابت کنید هیچ a و b ای وجود ندارند طوری که $b \overset{4}{\equiv} 3$ و $b \mid a^2 + 1$.

۵. اگر $n \geqslant 2$ ثابت کنید $n \mid \phi(2^n - 1)$.

۶. اگر $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$، ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول p وجود دارد، طوری که به ازای عددی طبیعی مانند n $p \mid P(n)$.

۷. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، ثابت کنید x و y ای هست که $ax + by = \gcd(a, b)$.

۸. برای هر دو عدد طبیعی m و $a > 1$، ثابت کنید:

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (a - 1, m)$$

۹. اگر a و b دو عدد صحیح متمایز باشند، ثابت کنید بی‌شمار عدد طبیعی مانند n می‌توان یافت که $a + n$ و $b + n$ نسبت به هم اول باشند.

۱۰. نشان دهید بی‌شمار عدد مرکب به شکل $10^n + 3$ وجود دارد، طوری که n یک عدد طبیعی است.

۱۱. نشان دهید چهار رقم سمت راست اعضای دنباله‌ی عددی $\{5^n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ از جمله‌ای به بعد دنباله‌ای متناوب می‌سازند. برای این منظور هم طول تناوب و هم نخستین جمله از دنباله‌ی اصلی را که تناوب مذکور از آن‌جا آغاز می‌شود، به دست آورید.

۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.

۱۳. در صورت نادرستی عبارت زیر مثال نقضی برای آن آورده و در صورت درست بودن، آن را اثبات کنید:

$$(2^n - 1)^2 \mid 2^{n \times (2^n - 1)} - 1$$

۱۴. ثابت کنید به ازای هر عدد اول p داریم: $(p - 1)! \overset{p}{\equiv} -1$.

۱۵. الف) ثابت کنید دو عدد طبیعی a و b موجود است که روابط زیر برقرار باشند:

$$a \mid b \quad a + 1 \mid b + 1 \quad \cdots \quad a + 100 \mid b + 100$$

ب) ثابت کنید هیچ دو عدد طبیعی a و b وجود ندارند طوری که:

$$\forall i \in \mathbb{N} : a + i \mid b + i$$

۱۶. دنباله‌ی $a_۱, a_۲, \cdots a_n$ از اعداد طبیعی را به گونه‌ای بیابید که:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}\, (i \neq j) : \gcd(a_i, a_j) = \gcd(i, j)$$

۱۷. چهار عدد طبیعی a, b, c, d را درنظر بگیرید. می‌دانیم که $ab = cd$. ثابت کنید عدد $a + b + c + d$ مرکب است.

۱۸. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ جایگشتی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ باشند. همه‌ی جایگشت‌های ممکن را به گونه‌ای بیابید که برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم: $i \mid ۲(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)$

۱۹. دو نفر به نام‌های پارسا و امیرمهدی بازی‌ای انجام می‌دهند، به این صورت که پارسا عددی کوچک‌تر یا مساوی با ۱۰۰ درنظر می‌گیرد و امیرمهدی سعی دارد تا این عدد را پیدا کند. امیرمهدی می‌تواند ۷ بار از پارسا سوال بپرسد. سوالات به این صورت هستند که امیرمهدی دو عدد طبیعی $m, n \leqslant ۹۹$ را به پارسا می‌دهد و پارسا در جواب مقدار $\gcd(x + m, n)$ را به امیرمهدی می‌گوید. (x همان عددی است که پارسا انتخاب کرده است.) ثابت کنید که امیرمهدی می‌تواند عدد پارسا را پیدا کند.

۲۰. برای هر دو عدد طبیعی a و m که نسبت به هم اول‌اند، ثابت کنید دنباله‌ی $a^۱, a^۲, \ldots$ به پیمانه‌ی m متناوب است.