



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

مبحث آزمون ۳

رابطه‌های بازگشتی و توابع مولد

تمرین سری هفتم

۱. برای دنباله‌های زیر تابع مولد به فرم بسته بنویسید.

(الف) $1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots$ (ب) $1, 1, 1, 4, 3, 5, 6, 2, 1, 1, 1, 1, \dots$ (ج) $3, 0, 3, 0, 3, 0, \dots$

(در دو دنباله‌ی اول منظور از سه نقطه دنباله‌ای از اعداد ۱ است.)

۲. سینا می‌خواهد تعدادی تپله از بین رنگ‌های آبی، زرشکی، سبز و بنفش انتخاب کند به طوری که تعداد تپله‌های آبی حتما زوج باشد، تعداد تپله‌های زرشکی مضرب ۱۳ باشد، تعداد تپله‌های سبز بیش‌تر از ۷ نباشد و تعداد تپله‌های بنفش از ۳ بیش‌تر نباشد. اگر تابع $S(n)$ را تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب n تپله تعریف کنیم، تابع مولد S را بیابید.

۳. به چند طریق می‌توان از بین شیرینی‌های دانمارکی، خامه‌ای، ناپلئونی، پای سیب و رولت، n شیرینی انتخاب کرد به طوری که از شیرینی رولت به تعداد دلخواه، حداکثر ۴ شیرینی ناپلئونی و به تعداد ۰ یا ۱ یا ۲ شیرینی خامه‌ای داشته باشیم، هم‌چنین تعداد شیرینی‌های دانمارکی مضربی از ۵ بوده و تعداد پای سیب مضربی از ۳ باشد؟

۴. فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن $n \times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ باشد که هر سطر و هر ستون آن شامل دقیقا یک درایه‌ی ۱ است. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n به دست آورید.

۵. جمله‌ی عمومی رابطه‌ی بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n^2 + 2^n \end{cases}$$

۶. با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش‌های انتخاب ۴ عضو دوبه‌دو نامتوالی از مجموعه اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ برابر با $\binom{n-3}{4}$ است.

۷. اگر به تعداد کافی سکه‌ی ۱ و ۲ و ۵ دلاری داشته باشیم، به چند طریق می‌توان یک کالای ۷ دلاری را از دستگاه فروش خرید به طوری که ترتیب انداختن سکه‌ها در دستگاه مهم باشد؟

۸. فرمول صریح رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از توابع مولد بیابید.

$$a_0 = 0, \quad \forall k \geq 0 : a_{k+1} = a_k + 2^k$$

۹. فرض کنید g_n تعداد کلمات n حرفی با حروف a و b باشد که در آن‌ها هر حرف a با حداقل یک حرف a مجاور است. رابطه‌ای بازگشتی برای g_n بیابید.

۱۰. در یک مسابقه‌ی دو، n نفر شرکت کرده‌اند. ترتیب رسیدن این افراد به خط پایان، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (توجه کنید که ممکن است چند نفر از شرکت‌کنندگان در یک زمان به خط پایان برسند.)

۱۱. برای تابع فیبوناچی با تعریف زیر یک رابطه‌ی بازگشتی بنویسید:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_0 = 0, f_1 = 1 \end{cases}$$

۱۲. رابطه‌ی بازگشتی ناهمگن زیر را حل کنید:

$$F_n = 3F_{n-1} + 10F_{n-2} + 7 \times 5^n$$

۱۳. با استقرا نشان دهید $a_n = 2^n + 1$ یک جواب برای رابطه‌ی بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} - 1$ با شرط اولیه‌ی $a_1 = 3$ است.

۱۴. رابطه‌ی بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_0 = 4 \end{cases}$$

۱۵. رابطه‌ی بازگشتی زیر را به کمک معادله‌ی مشخصه حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 4 \end{cases}$$

۱۶. نشان دهید $a_n = 4^n$ پاسخ رابطه‌ی بازگشتی زیر است:

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

۱۷. سری مولد زیر، نمایانگر چه دنباله‌ای است؟

$$3 + 8x^2 + x^3 + \frac{x^5}{7} + 100x^6 + \dots$$

۱۸. یک تابع مولد برای دنباله‌ی زیر بیابید:

$$1, 3, 5, 7, 9$$

۱۹. تابع مولد دنباله‌ی زیر با جمله‌ی اول $a_0 = 1$ را بیابید.

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

۲۰. دنباله‌ی $1, 3, 7, 15, 31, \dots$ با رابطه‌ی بازگشتی زیر متناظر است:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

تابع مولد آن را بیابید.