ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری نهم | نظریه‌ی گراف‌ها | مبحث آزمون پایانی

۱. فرض کنید G گرافی ساده باشد که مجموعه رئوس آن تمام رشته‌های باینری به طول k است و دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر دقیقاً در دو بیت اختلاف داشته باشند. تعداد مولفه‌های همبندی این گراف را بیابید.

۲. فرض کنید P و Q دو مسیر ماکزیمم در یک گراف همبند باشند. ثابت کنید این دو مسیر رأس مشترک دارند.

۳. گراف ساده‌ی G با n رأس را در نظر بگیرید. به ازای هر یک از شرط‌های زیر حداکثر تعداد یال‌های G چقدر می‌تواند باشد؟

الف) G دارای مجموعه‌ی مستقلی به اندازه‌ی k است.

ب) G دارای دقیقاً k مولفه‌ی همبندی است.

ج) G ناهمبند است.

۴. یال‌های یک گراف کامل n رأسی به تعدادی دور با طول ۳ افراز شده‌اند. ثابت کنید یا $n - ۱$ یا $n - ۳$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۵. جایگشت π از رأس‌های گراف G یک «خودریختی» است، اگر به ازای هر دو رأس u و v از گراف G، این دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر $\pi(u)$ و $\pi(v)$ مجاور باشند. به طور مثال هر دور به طول ۳ دارای ۶ خودریختی است. یک گراف ساده رسم کنید که دارای دقیقاً ۳ خودریختی باشد.

۶. ثابت کنید به ازای هر درخت n رأسی و هر خودریختی π از آن، یا رأسی مانند v وجود دارد که $\pi(v) = v$، یا دو رأس مانند u و v وجود دارند که $\pi(u) = v$ و $\pi(v) = u$.

۷. ثابت کنید گراف G دوبخشی است، اگر و تنها اگر هر زیرگراف H از G دارای یک مجموعه‌ی مستقل به اندازه‌ی حداقل $\frac{V(H)}{۲}$ باشد.

۸. گرافی که با مکمل خود یک‌ریخت باشد، «خودمکمل» نامیده می‌شود. ثابت کنید در هر گراف خودمکمل، تعداد رأس‌ها به پیمانه‌ی ۴ برابر ۰ یا ۱ است.

۹. یک گراف خودمکمل با $۴k + ۱$ رأس داریم. ثابت کنید یک رأس هست که درجه‌اش دقیقاً $۲k$ باشد.

۱۰. یک گراف $n > ۳$ رأسی و m یالی ساده داریم که $m \geqslant ۲n - ۳$. ثابت کنید این گراف دارای دو دور با طول یکسان است.

۱۱. k زیردرخت $T_۱, T_۲, \ldots, T_k$ از یک درخت T داریم که هر دوتای آن‌ها دارای حداقل یک رأس مشترک هستند. ثابت کنید یک رأس وجود دارد که در همه‌ی زیردرخت‌ها وجود دارد.

۱۲. یک گراف G و دو زیردرخت فراگیر از آن مثل T_s و T_e داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک یال $e \in T_s$ و یک یال $e' \notin T_s$ انتخاب کنیم و T_s را به $T_s + e - e'$ تبدیل کنیم، به شرطی که بعد از این کار T_s همچنان درخت بماند. ثابت کنید با تعدادی از این حرکات می‌توانیم T_s را به T_e تبدیل کنیم.

۱۳. یال‌های یک گراف کامل n رأسی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید این گراف زیردرخت فراگیری دارد که تمام یال‌های آن همرنگ هستند.

۱۴. درخت فراگیر کمینه‌ی T از گراف وزن‌دار G داده شده است. ثابت کنید به ازای هر دور G یالی وجود دارد که در T نیست و بزرگ‌ترین وزن را درون آن دور دارد.

۱۵. فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس است که مجموع درجات هر k رأس آن کم‌تر از $n-k$ است. ثابت کنید هر مجموعه‌ی مستقل ماکزیمال در G بیش‌تر از k عضو دارد. مجموعه‌ی مستقل ماکزیمال، مجموعه‌ی مستقلی است که نتوان رأسی به آن اضافه کرد که همچنان مجموعه‌ی مستقل باشد.

۱۶. الگوریتم زیر را برای محاسبه‌ی یک مجموعه‌ی مستقل در گراف ساده‌ی G در نظر بگیرید: با شروع از یک مجموعه‌ی جواب تهی، مادامی که G حداقل یک رأس دارد، رأس با درجه‌ی مینیمم را به مجموعه‌ی جواب اضافه کرده و سپس آن رأس و همسایه‌هایش را از G حذف می‌کنیم. ثابت کنید این الگوریتم مجموعه‌ی مستقلی با اندازه‌ی حداقل $\sum_{v \in V(G)} \frac{۱}{\deg(v)+۱}$ خروجی می‌دهد.

۱۷. به یک گراف «کاکتوس» می‌گوییم اگر هیچ دو دوری از آن اشتراک یالی نداشته باشند. ثابت کنید یک گراف کاکتوس n رأسی حداکثر $\lfloor \frac{۳(n-۱)}{۲} \rfloor$ یال دارد.

۱۸. یک گراف جهت‌دار بدون دور داریم. ثابت کنید می‌توان رئوس این گراف را روی یک خط چید طوری که جهت همه‌ی یال‌ها به سمت راست باشد.

۱۹. ثابت کنید هر تورنمنت قویاً همبند n رأسی دوری به طول n دارد.

۲۰. ثابت کنید $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + ۱$ که n تعداد رئوس G و $\overline{G}$ مکمل G است.

۲۱. ثابت کنید گراف G با مجموعه رأس‌های $\{v_۱, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $\{(v_i, v_j) : |i-j| \leqslant ۳\}$ مسطح است.

۲۲. ثابت کنید به ازای هر سه رأس u، v و w از گراف مسطح G، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\deg(u) + \deg(v) + \deg(w) \leqslant ۲n + ۲$$