دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری اول | شمارش | زمان آزمون: ۲۲ اسفند

۱. چند مکعب متفاوت که شش وجه هر یک از آن‌ها با اعداد ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند، می‌توان ساخت طوری که مجموع اعداد روی هر جفت از وجوه مقابل برابر ۷ باشد؟ دو مکعب متفاوت‌اند اگر نتوان با چرخش آن‌ها را به یک‌دیگر تبدیل کرد.

۲. یک ربات پرنده ساخته‌ایم که در ابتدا در مختصات (۰، ۰، ۰) قرار دارد و می‌خواهد به مختصات (a,b,c) برود و در هر حرکت می‌تواند در جهت مثبت یکی از جهت‌های مختصات یک واحد حرکت کند. ربات به چند طریق مختلف می‌تواند به مقصد برود؟

۳. تعداد اعداد صحیح مثبت هفت‌رقمی را که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۱۹ است بیابید.

۴. تعداد توزیع‌های پنج شیء متمایز در سه جعبه‌ی متمایز به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند را پیدا کنید.

۵. ۱۲ کتاب در قفسه‌ای چیده شده‌اند. به چند طریق می‌توان پنج عدد از این کتاب‌ها را طوری انتخاب کرد که از کتاب‌های انتخاب شده هیچ دو تایی در قفسه کنار هم نبوده باشند؟

۶. مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, \ldots, k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی $(T_۱, \ldots, T_n)$ از زیرمجموعه‌های A را زنجیره‌ای به طول n می‌نامیم، اگر $T_۱ \subseteq T_۲ \subseteq \cdots \subseteq T_n$. تعداد زنجیره‌های به طول n از زیرمجموعه‌های A را بیابید.

۷. تعداد ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های ۱ و ۱− را پیدا کنید به طوری که حاصل‌ضرب درایه‌های هر سطر و حاصل‌ضرب درایه‌های هر ستون برابر با ۱− شود.

۸. در یک جدول $n \times n$ تعدادی بمب چیده شده است. در هر خانه‌ای که بمب در آن نیست، عددی نوشته شده که تعداد خانه‌های مجاور دارای بمب آن را نشان می‌دهد. حال جدولی را در نظر بگیرید که برعکس جدول اول پر شده، یعنی در یک خانه‌ی آن بمب است اگر و تنها اگر در جدول اول در آن خانه بمبی وجود نداشته باشد. اعداد خانه‌های بدون بمب این جدول نیز مشابه جدول اول بر حسب تعداد بمب‌های مجاور هرخانه نوشته شده‌اند. آیا ممکن است مجموع اعداد جدول دوم بیشتر از مجموع اعداد جدول اول شود؟

۹. اگر n، l و k اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشند طوری که $l, k < n$، ثابت کنید $\binom{n}{k}$ و $\binom{n}{l}$ مقسوم‌علیه مشترک دارند.

۱۰. خانه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی به طور متناوب سیاه و سفید شده‌اند. روی این صفحه یک چندضلعی رسم کرده‌ایم طوری که اضلاع آن روی خطوط صفحه‌ی شطرنجی قرار دارند. یک پاره‌خط واحد روی محیط چندضلعی را سیاه یا سفید می‌کنیم بسته به اینکه این پاره‌خط ضلع یک مربع سیاه یا سفیدی باشد که درون چندضلعی قرار دارد. فرض کنید A, B, a, b به ترتیب تعداد پاره‌خط‌های سیاه، پاره‌خط‌های سفید، مربع‌های سیاه درون چندضلعی و مربع‌های سفید درون چندضلعی باشند. ثابت کنید $A - B = ۴(a - b)$.

۱۱. در یک تورنمنت با ۱۰ تیم هر دو تیم یک بار با هم مسابقه داده‌اند. در این تورنمنت برد، باخت و مساوی به ترتیب ۱، ۰ و نیم امتیاز دارد. فرض کنید امتیاز تیم‌ها به ترتیب $x_۱, x_۲, \ldots x_{۱۰}$ باشد. ثابت کنید:

$$x_۱ + ۲x_۲ + \cdots + ۱۰x_{۱۰} \geqslant ۱۶۵$$

۱۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{\binom{2n}{i+j}}$$

۱۳. فرض کنید $A=\{1,2,3,\ldots,12\}$. تعداد جایگشت‌هایی از این مجموعه مثل $a_1,a_2,\ldots,a_{12}$ را بیابید که به ازای هر $1\leqslant i\leqslant 12$ عدد a_i-i بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.

۱۴. فرض کنید $n\geqslant 4$. به چند طریق می‌توان یک n ضلعی محدب را توسط $n-3$ قطر غیر متقاطع مثلث‌بندی کرد به طوری که هر مثلث حدقل یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟

۱۵. حداکثر چند زیرمجموعه‌ی ناتهی از یک مجموعه‌ی ۲۰ عضوی می‌توان انتخاب کرد به طوری که هر دو تا زیرمجموعه حداکثر ۲ عضو مشترک داشته باشند؟

۱۶. به چند طریق می‌توان خانه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی 2008×2008 را با چهار رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که در هر مربع 2×2 هیچ دو خانه‌ای همرنگ نباشند؟

۱۷. ثابت کنید تعداد توابع $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{0,1,\ldots,2k\}$ به طوری که برای هر i و j رابطه‌ی $|f(i)-f(j)|\leqslant k$ برقرار باشد، برابر است با $(k+1)^{n+1}-k^{n+1}$.

۱. فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و $y_۱, y_۲, \ldots, y_n$ ترتیبی از قرار گرفتن دو دنباله‌ی n عضوی x و y از اعداد حقیقی مثبت هستند و $S = x_۱y_۱ + x_۲y_۲ + \cdots + x_ny_n$.

الف) نشان دهید مقدار S زمانی بیشینه می‌شود که دو دنباله مرتب باشند (به ترتیب صعودی قرار بگیرند).

ب) نشان دهید مقدار S زمانی کمینه می‌شود که اعضای یکی از دنباله‌ها به ترتیب صعودی و دیگری به ترتیب نزولی قرار بگیرند.

۲. ثابت کنید اگر n مربع کامل باشد، $n + ۲$ مربع کامل نیست.

۳. کدام گزینه از لیست زیر پاسخ صحیح این سوال است، چرا؟

الف) همه‌ی گزینه‌های زیر

ب) هیچ‌یک از گزینه‌های زیر

پ) همه‌ی گزینه‌های بالا

ت) یکی از گزینه‌های بالا

ث) هیچ‌یک از گزینه‌های بالا

ج) هیچ‌یک از گزینه‌های بالا

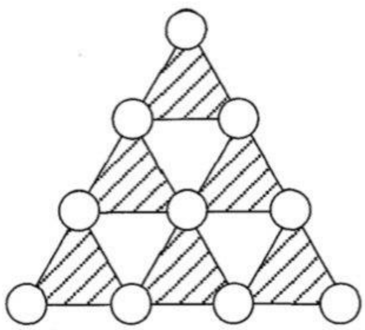
۴. ساکنان یک جزیره دو دسته‌اند، یا «نجیب‌زاده»اند، کسانی که همیشه راست می‌گویند، یا «متقلب»اند، کسانی که همیشه دروغ می‌گویند.

الف) شخص A گفت: «من دروغگو هستم.». آیا او یکی از ساکنان جزیره‌ی مورد نظر است؟

ب) فقط با پرسیدن یک سوال از جزیره‌نشینی می‌توانیم بفهمیم که جاده‌ای به شهر نجیب‌زادگان منتهی می‌شود یا به شهر متقلب‌ها. با چه سوالی؟

ج) جزیره‌نشین A در حضور جزیره‌نشین B گفت: «در میان ما دست‌کم یکی متقلب است.». A نجیب‌زاده است یا متقلب؟ B چطور؟

۵. آیا می‌توان عددهای ۰ تا ۹ را در دایره‌های شکل زیر بدون تکرار به گونه‌ای قرار داد که همه‌ی مجموع‌های اعداد در راس‌های مثلث‌های سایه‌دار با هم برابر باشند؟



۶. طبق قوانین کشور، فروش اسلحه به اشرار توسط یک شهروند ممنوع است. اصغر یک شرور است و تعدادی اسلحه در اختیار دارد. همه‌ی اسلحه‌های اصغر از اکبر که یک شهروند است، خریداری شده است. تمام فرض‌های موجود را با عبارات منطقی بیان کنید و با استفاده از قواعد استنتاج نشان دهید اکبر مجرم است.

۷. فرض کنید p، q، r و s به ترتیب معرف گزاره‌های زیر باشند:

الف) امروز تمرین جدید گسسته آپلود می‌شود.

ب) امروز تمرین جدید مدارهای منطقی آپلود می‌شود.

پ) امروز تمرین جدید برنامه‌سازی پیشرفته آپلود می‌شود.

ت) پارسا خوشحال است.

با استفاده از موارد بالا گزاره‌های زیر را به صورت نمادین بنویسید.

الف) اگر امروز تمرین جدید مدارهای منطقی آپلود شود، تمرین جدید گسسته نیز آپلود می‌شود.

ب) برای این که امروز تمرین جدید گسسته آپلود نشود، یا باید تمرین جدید مدارمنطقی آپلود شود و یا تمرین جدید برنامه‌سازی پیشرفته آپلود شود.

پ) پارسا در صورتی که امروز تمرین جدیدی آپلود شود خوشحال می‌شود.

۸. صد نفر داریم که به هر کدام قرار است در جشن فارغ التحصیلی کلاهی رنگی داده شود. هر فرد تنها رنگ کلاه سایر افراد را می‌بیند و باید رنگ کلاه خودش را تنها از روی مشاهداتش و قراری که پیش از گرفتن کلاها با بقیه گذاشته است حدس بزند و همچنین از حدس سایرین مطلع نخواهد شد.

الف) اگر رنگ کلاه‌ها قرمز یا آبی باشد، آیا این افراد می‌توانند قبل از گرفتن کلاه‌ها طوری با هم هماهنگ کنند که حداقل ۵۰ نفر رنگ کلاهشان را درست حدس بزنند؟

ب) اگر رنگ کلاه‌ها ۱۰۰ حالت ممکن داشته باشد، آیا این افراد می‌توانند قبل از گرفتن کلاه‌ها طوری با هم هماهنگ کنند که حتما یک نفر رنگ کلاهش را درست حدس بزند؟

۹. گزاره‌ی زیر را با نمادگذاری مناسب برای عبارت‌های منطقی آن به صورت نمادین بنویسید، نقیض آن را بیابید و سپس نقیض را به شکل زبانی بیان کنید.
«هر خیابان شهر حداقل یک خانه دارد که می‌توان در آن یک شخص پیدا کرد که پولدار و زیباست یا مهربان و باسواد است»

۱۰. دو نفر در یک جزیره روبه‌روی هم ایستاده‌اند و رنگ چشم یکی از آن‌ها آبی و رنگ چشم دیگری سبز است. هر شب یک فرشته به جزیره می‌آید و هرکسی که رنگ چشم خودش را بداند را از جزیره می‌برد. شما می‌توانید در صبح روز اول یک جمله را به هردوی این افراد بگویید.

الف) جمله را طوری انتخاب کنید که فرشته هردوی آن‌ها را در شب دوم از جزیره ببرد.

ب) به ازای هر n طبیعی، جمله را طوری انتخاب کنید که فرشته آدم‌ها را دقیقا در شب nام از جزیره ببرد.

۱۱. نشان دهید عبارت‌های $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$ و $\forall x \forall y : (P(x) \vee Q(y))$ از نظر منطقی هم‌ارز هستند.

۱۲. فرض کنید ۵ عدد یک و ۴ عدد صفر دور یک دایره قرار گرفته‌اند. در هر مرحله بین هر دو عدد کنار هم اگر یکسان باشند صفر و اگر متفاوت باشند یک می‌گذاریم و سپس عددهای قبلی را پاک می‌کنیم. ثابت کنید هیچ‌گاه به وضعیتی نمی‌رسیم که همه‌ی اعداد دور دایره صفر شوند.

۱۳. آلیس مدت n روز را در سرزمین عجایب گذرانده بود. پس از بازگشت برای دوستانش بدین صورت تعریف می‌کرد:

«در مدت هفت روز، هر روز نصف روز باران می‌آمد. هرگاه صبح می‌بارید عصر هوا آفتابی بود. ۵ روز صبح‌ها و ۶ روز عصرها آفتابی بود.»

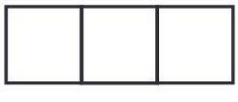
n را بیابید.

۱۴. چوپان گله‌ای روزی متوجه می‌شود که گرگ‌هایی در لباس گوسفند وارد گله‌ی او شده‌اند. می‌دانیم گرگ‌ها همیشه دروغ گفته و گوسفندها همیشه راستگو هستند. چوپان مکالمه‌ی ۳ نفر(!) از اعضای گله را می‌شنود: A در گوش B یکی از دو عبارت «من یک گوسفندم» و یا «من یک گرگم» را زمزمه می‌کند. B به C می‌گوید که A ادعا می‌کند که گوسفند است. در انتها C می‌گوید که A گوسفند نیست و یک گرگ است. چند نفر از این سه نفر گوسفند هستند؟

۱۵. در یک خیابان ۵ خانه وجود دارد که با پنج رنگ متفاوت رنگ شده‌اند. در هر خانه یک نفر با ملیت متفاوت با خانه‌های دیگر زندگی می کند. هر کدام از صاحب‌خانه‌ها یک نوشیدنی متفاوت می‌نوشد، یک مارک سیگار متفاوت دوست دارند و یک حیوان خانگی متفاوت را نگهداری می‌کنند. اگر بدانیم گزاره‌های زیر برقرارند، مشخص کنید صاحب کدام خانه از ماهی نگهداری می‌کند.

- مرد انگلیسی در خانه‌ی قرمز زندگی می‌کند.
- مرد سوئدی سگ دارد.
- نوشیدنی مورد علاقه‌ی مرد دانمارکی چای است.
- خانه‌ی سبز رنگ سمت چپ خانه‌ی سفید رنگ است.
- صاحب خانه‌ی سبز رنگ، قهوه می‌نوشد.
- مردی که سیگار پالمال می‌کشد، از پرنده نگهداری می‌کند.
- صاحب خانه‌ی زرد رنگ، سیگار دانهیل می‌کشد.
- مردی که در خانه‌ی وسطی زندگی می‌کند، نوشیدنی مورد علاقه‌اش شیر است.
- مرد نروژی در اولین خانه زندگی می‌کند.
- مردی که سیگار بلندز می‌کشد، همسایه‌ی مردی است که گربه دارد.
- مردی که اسب دارد، همسایه‌ی مردی است که سیگار دانهیل می‌کشد.
- مردی که سیگار بلومستر می‌کشد، آبجو می‌نوشد.
- مرد آلمانی سیگار پرنس می‌کشد.
- مرد نروژی در همسایگی کسی است که خانه‌اش آبی رنگ است.
- مردی که سیگار بلندز می‌کشد، همسایه‌ای دارد که نوشیدنی مورد علاقه‌اش آب است.

۱۶. آیا می‌توان جدول شطرنجی که یک گوشه‌ی آن حذف شده است را با قطعات به شکل زیر پوشاند؟



۱۷. دستگاه منطقی‌ای را در نظر بگیرید که در آن برای هر سه گزاره‌ی مثل A، B و C داریم:

$$A \to (B \to A) \qquad (۱)$$

(۲) $$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

تنها روش استنتاج در این دستگاه قاعده‌ی $p, p \to q \Rightarrow q$ است (برای مثال نمی‌توانید در روش اثبات خود از جدول درستی یا عبارات بدیهی مثل $a \to a$ استفاده کنید.)

الف) ثابت کنید در این دستگاه عبارت زیر به ازای هر a, b, c دلخواه یک راستگو است.

$$a \to b, b \to c \Rightarrow a \to c$$

ب) ثابت کنید در این دستگاه عبارت زیر به ازای هر a دلخواه یک راستگو است.

$$a \to a$$

۱۸. نقیض عبارت منطقی زیر را بیابید:

$$\exists x\Big(P(x) \to \forall y\big(Q(y) \to R(y) \vee S(y)\big)\Big)$$

۱۹. با ساده کردن عبارات منطقی زیر (بدون رسم جدول درستی) مشخص کنید هریک از این عبارت‌ها به ازای چه مقادیری از متغیرها صحیح هستند.

الف)

$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$$

ب)

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \to (\neg r \wedge \neg p)) \wedge (p \vee r)$$

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹–۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم | **استقرای ریاضی** | مبحث آزمون ۱

۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n می‌توان ۷^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع ۳^n جا داد، به طوری که هر دو دایره به شعاع واحد حداکثر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

۲. n خط بر روی صفحه رسم می‌کنیم به طوری که هیچ دوتایی با یک‌دیگر موازی و بر یک‌دیگر منطبق نباشند و همچنین هیچ سه خطی در یک نقطه همدیگر را قطع نکنند. در این صورت صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟ ثابت کنید.

۳. ورقه‌های شکلات معمولا به شکل مستطیل‌هایی هستند که روی آن‌ها مربع‌های کوچکی حک شده است. به سادگی می‌توان یک مستطیل شکلاتی را با استفاده از خطوط افقی یا عمودی بین مربع‌ها، به مستطیل‌های کوچک‌تری تقسیم کرد. فرض کنید یک ورقه‌ی شکلاتی با k مربع داریم و می‌خواهیم آن را به مربع‌های تکی تقسیم کنیم. ثابت کنید برای این کار، مستقل از این که به چه ترتیبی ورقه را برش دهیم، باید دقیقاً $k - ۱$ برش انجام دهیم.

۴. به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید که معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = z^n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب دارد.

۵. یک دسته شامل n سنگریزه در اختیار داریم، $(n \geqslant ۲)$. در هر گام یکی از دسته‌ها را که بیش از یک سنگریزه دارد انتخاب و آن را به دو دسته‌ی غیر تهی تقسیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب تعداد سنگریزه‌ها در این دو دسته را روی تخته می‌نویسیم. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا سنگریزه‌ها به n دسته، هر دسته شامل یک سنگریزه تقسیم شوند. ثابت کنید این عمل به هر نحو که انجام شود، مجموع اعداد نوشته شده روی تخته برابر $\binom{n}{۲}$ است.

۶. $۲n$ شکلات در n قوطی گذاشته شده است. علی و رضا به نوبت و هربار یک شکلات برمی‌دارند (علی شروع‌کننده‌ی بازی است). ثابت کنید رضا می‌تواند طوری شکلات انتخاب کند که دو شکلات آخر متعلق به یک قوطی باشند.

۷. همه‌ی عددهای طبیعی مانند n را بیابید که به ازای آن‌ها بتوان مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به سه زیرمجموعه مانند A و B و C طوری افراز کرد که مجموع اعضای هر یک از A و B و C با دیگری برابر باشد.

۸. یک زبان با n حرف الفبا داده شده است. ثابت کنید دنباله‌ای متناهی از حروف این زبان وجود دارد به طوری که هیچ دو بلوک مجاور از آن یکسان نباشند ولی هر حرفی به ابتدا یا انتهای آن اضافه کنیم دیگر این ویژگی برقرار نباشد (یک بلوک از یک یا چند حرف پشت سر هم تشکیل شده است).

۹. $n + ۱$ دختر و n پسر دور یک میز نشسته‌اند. ثابت کنید دختری وجود دارد که با شروع شمارش از او در جهت ساعتگرد تا هر نقطه از میز تعداد دخترها از پسرها بیش‌تر است. در ضمن ثابت کنید فقط یک دختر با این ویژگی وجود دارد.

۱۰. n مگس در فضای یک اتاق در حال تردد هستند. هر مگس در هر لحظه نزدیک‌ترین مگس را تماشا می‌کند. ثابت کنید در هر لحظه مگسی هست که هیچ مگسی او را تماشا نمی‌کند. فرض کنید فاصله‌ی مگس‌ها دو به دو متمایز است.

۱۱. در یک مدرسه n دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره ۱ تا n شماره گذاری می‌کنیم. می‌دانیم که دبیرِ iام $i+۱$ نفر از دانش‌آموزان را می‌شناسد. هر دانش‌آموز می‌تواند توسط بیش از یک دبیر شناخته شود. هر یک از این دبیرها می‌خواهد یکی از دانش‌آموزانی را که می‌شناسد به عنوان نماینده خود انتخاب کند، به شرط آن که هیچ دانش‌آموزی به عنوان نماینده‌ی بیش از یک دبیر انتخاب نشود. ثابت کنید انتخاب نماینده‌ها حداقل به ۲^n حالت مختلف امکان‌پذیر است.

۱۲. n ماشین یکسان روی یک جاده‌ی دایره‌ای شکل قرار دارند. مقدار بنزین ماشین‌ها روی هم به اندازه‌ای است که یک خودرو یک دور کامل را طی کند. با استقرا ثابت کنید ماشینی وجود دارد که می‌تواند یک دور را با جمع‌آوری بنزین بقیه‌ی ماشین‌ها در طول مسیر کامل کند.

۱۳. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، جایگشتی از اعداد ۱ تا n وجود دارد که میانگین هر دو عددی از آن در میان آن دو عدد نباشد. در این‌جا منظور از میانگین، میانگین دقیق دو عدد است و نه میانگین صحیح آن‌ها. برای مثال میانگین اعداد ۲ و ۴ برابر با ۳ است و میانگین اعداد ۱ و ۲ برابر با ۱/۵ است.

۱۴. n نفر در یک صف ایستاده‌اند و در ابتدا هر کدام یا به سمت چپ نگاه می‌کنند یا به سمت راست. در هر ثانیه اگر دو نفر به یک‌دیگر نگاه کنند، هر دو روی خود را برمی‌گردانند و به طرف دیگر نگاه می‌کنند. ثابت کنید پس از مدتی دیگر کسی جهت نگاه خود را عوض نمی‌کند (n متناهی است).

۱۵. ثابت کنید هر عدد طبیعی n با شرط $n > ۳۲$ را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت به طوری که مجموع معکوس‌های این اعداد برابر واحد باشد. با این فرض که می‌دانیم این حکم برای اعداد $n = ۳۳, ۳۴, \dots, ۷۳$ برقرار است.

۱۶. به ازای $n > ۳$ ثابت کنید زیرمجموعه‌ای n عضوی از مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۲^{n-۱} - ۱\}$ وجود دارد به طوری که مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از آن با هم برابر نباشند.

۱۷. ثابت کنید می‌توان $۲^{n+۱}$ عدد ۲^n بیتی ساخت که هر دوتایی حداقل در $۲^{n-۱}$ رقم متفاوت باشند.

۱۸. $۲n$ جعبه در یک ردیف به ترتیب با شماره‌های ۱ تا $۲n$ قرار داده شده‌اند. در هر یک از جعبه‌های $۲n - ۱$ و $۲n$ یک مهره قرار دارد. دو نفر به نوبت به این صورت بازی می‌کنند که هر فرد در نوبت خود یکی از مهره‌ها را از داخل یک جعبه برمی‌دارد و آن را داخل جعبه‌ای خالی با شماره‌ی کوچک‌تر قرار می‌دهد. فردی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده‌ی بازی است. ثابت کنید نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برنده‌ی بازی شود.

۱۹. علی در یک پیتزافروشی کار می‌کند. او همیشه ستونی از خمیر پیتزاهای پخته‌نشده را که آماده پخت هستند، نگهداری می‌کند. برای زیبایی محیط کار، علی همیشه دوست دارد که خمیرها در این ستون، به ترتیب ابعادشان مرتب شده باشند، به طوری که بزرگ‌ترین پیتزا کف ستون قرار بگیرد. هم‌چنین، او می‌تواند کف‌گیر مخصوصش را زیر یکی از پیتزاهای موجود در ستون قرار دهد و با یک حرکت نمایشی، تمامی پیتزاهای بالای کف‌گیر را برگرداند، که با این کار در واقع ترتیب آن‌ها برعکس می‌شود. این تنها حرکتی است که علی برای عوض کردن ترتیب پیتزاها بلد است، اما حاضر است این کار را تا جایی که نیاز است انجام دهد تا به ترتیب مورد علاقه خود برسد. آیا علی می‌تواند همیشه به ترتیب مورد علاقه‌اش برسد؟ ثابت کنید.

۱. در یک کلاس ۴۰ نفره، هر کس حداقل یکی از بازی‌های فوتبال، بسکتبال و والیبال را بازی می‌کند. ۱۸ نفر فوتبال، ۲۰ نفر بسکتبال و ۲۷ نفر والیبال بازی می‌کنند. ۷ نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم بسکتبال. ۱۲ نفر هم بسکتبال بازی می‌کنند و هم والیبال. ۴ نفر هم هر ۳ را بازی می‌کنند. بیابید:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند.

۲. عبارات جبری زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

الف) $((C \cap B) \cup (B - C)) \cap ((\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} - \overline{C}))$

ب) $\overline{(A \cup B)} \cup (\overline{A} \cap B)$

ج) $(A \cup B \cup C) \cap \overline{(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})} \cap \overline{C}$

۳. نشان دهید اصل خوش‌ترتیبی هم‌ارز اصل استقرا است؛ یعنی با فرض یکی می‌توان دیگری را اثبات کرد.

۴. در این سؤال می‌توانید بدون حل یک قسمت از نتیجه‌ی آن در قسمت‌های بعدی استفاده کنید. منظور از تناظر در عبارات زیر تناظر یک به یک است.

الف) ثابت کنید تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی یک جدول یک‌بعدی از یک طرف نامتناهی با دو رنگ سیاه و سفید ناشمارا است.

ب) ثابت کنید تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی یک جدول یک‌بعدی از دو طرف نامتناهی با دو رنگ سیاه و سفید ناشمارا است.

ج) تناظری بین بازه‌ی $(۰, ۱)$ و بازه‌ی $[۰, ۱]$ ارائه کنید.

د) تناظری بین بازه‌ی $(۰, ۱)$ و نقاط نیم‌دایره‌ی باز با قطر واحد (نیم‌دایره‌ای که نقاط ابتدا و انتهای کمان عضو آن نباشند) ارائه کنید.

ه) تناظری بین نیم‌دایره‌ی باز واحد و اعداد حقیقی ارائه کنید.

و) تناظری بین $[۰, ۱]$ و اعداد حقیقی ارائه کنید.

۵. نشان دهید در مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین هر دو عدد گویا ناشمارا عدد گنگ وجود دارد.

۶. اگر f تابعی صعودی با دامنه و برد اعداد حقیقی باشد، ثابت کنید تعداد نقاط ناپیوسته‌ی آن شمارا است.

۷. الف) نشان دهید اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ب) عدد طبیعی n مفروض است. نشان دهید مجموعه‌ی تمام ریشه‌های تمام چند جمله‌ای‌های درجه n با ضرایب گویا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ج) به اعدادی که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای دل‌خواه با ضرایب گویا باشند، اعداد جبری می‌گویند. با استفاده از نتیجه‌های دو قسمت بالا نشان دهید مجموعه‌ی اعداد جبری شمارا هستند.

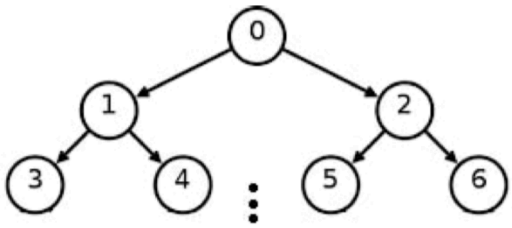
۸. ثابت کنید: $\{۱۲a + ۴b : a, b \in Z\} = \{۴c : c \in Z\}$.

۹. نشان دهید مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی از هر مجموعه‌ی نامتناهی شمارا، شمارا است.

۱۰. چهار مجموعه‌ی نامتناهی X, Y, Z, T داده شده‌اند، طوری که $|X| = |Y| = |Z| = |N|$ و $|T| = |R|$. همچنین مجموعه‌ی متناهی Q مفروض است. برای هر یک از حالات زیر، چهار مجموعه‌ی فوق را (در صورت امکان) طوری تعریف کنید که در شرط‌های آمده صدق کنند. در غیر این صورت ثابت کنید ممکن نیست.

- $X - T = Y, X \cap T = Z$
- $P(Q) - X = Y$
- $|T| = |Q|^{|X|}$

۱۱. در زمان تولد زمین، یک باکتری به نام کدینگ پلاسم در زمین وجود داشت. این باکتری در هر ثانیه، به دو قسمت تقسیم می‌شد و قسمت‌های ایجادشده هم به همین ترتیب تقسیم سلولی می‌شدند. منظور از یک شجره‌نامه شروع از کدینگ پلاسم تا رسیدن به یکی از نوادگان او و نوشتن همه‌ی فرزندان این بین است. مثلا شکل زیر را در نظر بگیرید:



در این شکل ۴ ,۱ ,۰ یک شجره‌نامه با طول متناهی است. فرض کنید کره‌ی زمین هیچگاه نابود نمی‌شود! تعداد شجره‌نامه‌های با طول نامتناهی شمارا است یا ناشمارا؟

۱۲. فرض کنید C مجموعه‌ای از بازه‌ی (۱ ,۰) باشد که در آن برای هر $x \in C$ می‌دانیم که نمایش x در مبنای ۱۰ شامل حداقل یک رقم ۷ است.

الف) نشان دهید $|C| = |(۰, ۱)|$.

ب) نشان دهید اگر $۰ \leqslant a \leqslant b \leqslant ۱$ آنگاه (a, b) شامل زیربازه‌ای نظیر $(c, d) \subseteq (a, b)$ است که $(c, d) \subseteq C$.

ج) ثابت کنید $(۰, ۱) - C$ شمارا است.

۱۳. فرض کنید مجموعه‌ی S برابر مجموعه‌ی تمام مجموعه‌هایی باشد که عضو خودشان نیستند. آیا S عضو خودش است؟

۱۴. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که داشته باشیم:

$$f(f(x) + y) = ۲x + f(f(y) - x)$$

۱۵. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که برای هر x, y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x) + f(y) + f(xy) = (f(x) - f(y))^۲$$

۱۶. توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x,A)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\notin A\end{cases} \tag{۱}$$

$$g(x)=\begin{cases}x(۱-x) & x\geqslant ۱\\ x(۱+x) & x<۱\end{cases} \tag{۲}$$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x^{۲}} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases} \tag{۳}$$

الف) با فرض این که دامنه‌ی x اعداد حقیقی است، برد توابع $g(x)$، $g(f(x,A))$ و $g(h(f(x,A)))$ را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید $f(x,A)\times f(x,\overline{B})+f(x,\overline{A})=f(x,\overline{A\cap B})$.

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹–۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم | اصل لانه‌کبوتری | مبحث آزمون ۲

---

۱. ثابت کنید در هر مجموعه از ۱۶ عدد طبیعی متفاوت کوچک‌تر از ۱۰۰ همواره می‌توان چهار عدد متمایز مانند a, b, c, d پیدا کرد طوری که $a + b = c + d$.

۲. ۲۸ تیم در یک دوره مسابقات فوتبال شرکت کرده‌اند.(هر دو تیم یک بار باهم بازی کردند.) در هر مسابقه به برنده ۲، به بازنده صفر و در صورت تساوی یک امتیاز به طرفین تعلق گرفت. بیش از ٪۷۵ بازی‌ها مساوی شده‌اند. ثابت کنید دو تیم وجود دارند که امتیازشان برابر است.

۳. یک چندضلعی محدب با ۲۰۰۰ رأس داده شده است. هیچ سه قطری از این چندضلعی نقطه‌ی مشترکی (درون چندضلعی) ندارند. هر یک از قطرها با یکی از ۹۹۹ رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که اضلاع آن روی سه قطر همرنگ قرار دارند. (لزومی ندارد که راس‌های مثلث از راس‌های چندضلعی باشند.)

۴. عددهای طبیعی $a_1, a_2, \ldots$ چنان‌اند که برای هر n، $a_n < 2n$ و در ضمن $a_1 < a_2 < \cdots$. ثابت کنید هر عدد طبیعی برابر یکی از جملات این دنباله یا برابر تفاضل دو جمله از آن است.

۵. برای مجموعه‌های R، S و T از اعداد، مجموعه‌های $\{r + s \mid r \in R, s \in S\}$ و $\{2t \mid t \in T\}$ را به ترتیب با $R + S$ و $2T$ نشان می‌دهیم. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشند. ثابت کنید مجموعه‌ی D وجود دارد طوری که $D + D \subset 2(A + B)$ و $|D| \geqslant \frac{|A||B|}{2n-1}$.

۶. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دنباله‌ای دلخواه از عددهای صحیح مثبت باشد ($n \geqslant 5$). ثابت کنید همواره می‌توان زیردنباله‌ای انتخاب کرده و عضوهایش را با هم جمع یا تفریق کرد به گونه‌ای که حاصل مضربی از n^2 باشد.

۷. اعضای یک انجمن بین‌المللی از ۶ کشور گوناگون هستند. لیست اعضا شامل ۱۹۷۸ نفر است که با ۱۹۷۸ ,... ,۲ ,۱ شماره‌گذاری شده‌اند. ثابت کنید حداقل یک عضو وجود دارد به گونه‌ای که شماره‌ی او برابر مجموع شماره‌های دو عضو از کشور خودش یا دو برابر عضوی از کشور خودش باشد.

۸. $n + 2$ عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ داده شده‌اند ($n > 1$). ثابت کنید در بین این اعداد دو عدد یافت می‌شود که تفاضل آن‌ها از n بزرگتر و از $2n$ کوچکتر است.

۹. فرض کنید $k^3 < n$ و رئوس یک $3n$ـ‌ضلعی منتظم با k رنگ، رنگ شده باشند. ثابت کنید دو مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان یافت که رئوس آن‌ها طبق الگویی یکسان رنگ شده باشند.

۱۰. هر عدد طبیعی با یکی از k رنگ، رنگ‌آمیزی شده است. ثابت کنید اعداد متمایز و همرنگ a, b, c, d وجود دارند طوری که $ad = bc$، $\frac{b}{a}$ توانی از ۲ و $\frac{c}{a}$ توانی از ۳ باشد.

۱۱. تعدادی دایره با شعاع‌های نامعلوم درون مربعی به ضلع واحد قرار گرفته‌اند. می‌دانیم مجموع محیط‌های تمام دایره‌ها برابر ۱۰ واحد است. ثابت کنید می‌توان خطی عمود بر یکی از اضلاع مربع رسم کرد که حداقل ۴ دایره را قطع کند.

۱۲. ۱۷ نقطه در صفحه قرار دارند که هیچ سه تا از آن‌ها هم‌خط نیستند. خطوط وصل‌کننده بین هر دو تا از این نقاط را با یکی از رنگ‌های آبی، سبز و قرمز رنگ کرده‌ایم. نشان دهید در بین مثلث‌های به‌وجودآمده، مثلثی هست که همه‌ی اضلاع آن همرنگ هستند.

۱۳. در یک مهمانی حداقل ۱۰ نفر حضور دارند. نشان دهید یا ۳ نفر دوبه‌دو آشنا و یا ۴ نفر دوبه‌دو غریبه وجود دارد.

۱۴. در یک بازی هر شرکت‌کننده با پر کردن تعدادی کارت در بازی شرکت می‌کند. پر کردن یک کارت به این معنا است که فرد ۴ عدد در بین اعداد ۱ تا ۱۶ انتخاب کرده و روی کارت بنویسد. بعد از تحویل کارت‌ها توسط شرکت‌کنندگان، ۴ عدد تصادفی بین ۱ تا ۱۶ انتخاب می‌شود. کارتی برنده است که شامل هیچ‌کدام از این اعداد نباشد. ثابت کنید اگر فردی ۶ کارت را پر کرده باشد، همیشه این احتمال وجود دارد که هیچ‌کدام از آن کارت‌ها برنده نشود.

۱۵. فردی هر روز حداقل یک فنجان قهوه می‌نوشد. هم‌چنین در بازه‌ای یک ساله حداکثر ۵۰۰ فنجان قهوه می‌نوشد. ثابت کنید تعدادی روز متوالی وجود دارد که این فرد در طی آنها دقیقا ۱۰۰ فنجان قهوه خورده است.

۱۶. یک جدول ۱۰ در ۱۰ با اعداد صحیح مثبت در نظر بگیرید به طوری‌که هر دو عدد مجاور حداکثر ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند. نشان دهید دو عدد برابر در جدول وجود دارد.

۱۷. در دو طرف خیابانی ۱۸ چراغ برق در دو ردیف ۹ تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصله بین دو چراغ متوالی ۵۰ متر و عرض خیابان ۱۰ متر است. بعضی چراغ‌ها خاموش شده‌اند، اما در فاصله‌ی کمتر از ۶۰ متر از هر چراغ خاموش حداکثر ۳ چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتا است؟

۱۸. فرض کنید X مجموعه‌ی تمام عددهای طبیعی نابیش‌تر از ۱۹۹۷ باشد که توانی از ۲ نیستند و A زیرمجموعه‌ای ۹۹۷ عضوی از X باشد. ثابت کنید دو عضو x و y در A وجود دارند طوری که $x + y$ توانی از ۲ است.

۱۹. هر دو نفر در یک تورنمنت شطرنج دو بار با هم بازی می‌کنند، یک بار یکی با مهره‌ی سفید و دیگری سیاه و بار دیگر برعکس. در پایان امتیاز همه افراد برابر شده است. در شطرنج برد، مساوی و باخت به ترتیب یک، نیم و صفر امتیاز دارد. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد برد آنها در بازی‌هایی که با مهره‌ی سفید انجام داده‌اند برابر است.

۲۰. سه مدرسه هر یک ۲۰۰ دانش‌آموز دارند. هر دانش‌آموز در هر مدرسه حداقل یک دوست دارد. مجموعه‌ی E شامل ۳۰۰ دانش‌آموز وجود دارد که برای هر مدرسه‌ی S و هر دو دانش‌آموز $x, y \in E$ که در S قرار ندارند، تعداد دوستان x و y در S برابر نیست. ثابت کنید ۳ دانش‌آموز، از هر مدرسه یک نفر، وجود دارند که دوبه‌دو با هم دوست باشند.