تمرین سری دوم | **منطق و روش‌های اثبات** | مبحث آزمون ۱

۱. گزاره‌های مقدم و تالی را در جملات شرطی زیر تعیین کنید.

الف) تلاش مجدانه در طول ترم، موفقیت در امتحانات نهایی را نتیجه می‌دهد.

ب) یک تابع مشتق دارد فقط اگر پیوسته باشد.

ج) دترمینال ناصفر، شرط لازم برای وجود ماتریس وارون است.

د) دترمینان ناصفر، شرط کافی برای وجود ماتریس وارون است.

۲. ثابت کنید عبارت‌های زیر همواره درست‌اند.

الف) $((p \to q) \wedge (r \to s)) \to (p \vee r \to q \vee s)$

ب) $((p \to q) \wedge (r \to s)) \to (p \wedge r \to q \wedge s)$

۳. همه‌ی جواب‌های حقیقی معادله زیر را بیابید.

$$x + ۱ = \sqrt{x^{۲} - ۵}$$

۴. در یک مهمانی، دو نفر راست‌گو و یک دورو (که گاهی راست و گاهی دروغ می‌گوید) حضور دارند. فرض کنید که این سه نفر همه چیز را درباره یکدیگر می‌دانند. نشان دهید که چطور می‌توان شخص دورو را فقط با استفاده از دو سوال بله یا خیر مشخص کرد.

۵. ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند a و b داریم:

$$\frac{a+b}{۲} \geqslant \sqrt{ab}$$

و حالت تساوی فقط وقتی برقرار است که $a = b$.

۶. نشان دهید هر گزاره‌ی مرکب منطقی را می‌توان فقط با عملگرهای $\neg$ و $\to$ بازنویسی کرد.

۷. در صورت درست بودن استدلال‌های زیر، اعتبار آن‌ها را نشان دهید، در غیر این صورت مثال نقضی برای آن‌ها پیدا کنید.

الف)
$$\begin{array}{l} (p \vee q) \to (p \wedge r) \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{l} q \vee (r \to t) \\ q \to s \\ \neg s \to (t \to p) \\ \neg s \\ \hline \therefore r \to p \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \to r \\ r \vee \neg s \\ \neg s \to q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

۸. با حالت‌بندی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

۹. استدلال زیر را به صورت گزاره‌های منطقی بنویسید و سپس با استفاده از قوانین استنتاج اعتبار آن را اثبات کرده و یا با مثال نقض اعتبار آن را رد کنید.

رئیس مرا تمجید می‌کند فقط اگر بتوانم اعتمادبه‌نفس داشته باشم. من یا در کلاس خوب کار می‌کنم یا نمی‌توانم اعتمادبه‌نفس داشته باشم. اگر در ورزش کوشا باشم، نمی‌توانم در کلاس خوب کار کنم. بنابراین، اگر رئیس مرا تجمید کند نمی‌توانم در ورزش کوشا باشم.

۱۰. در جزیره‌ای ناشناخته، عده‌ای راست‌گو و عده‌ای دروغ‌گو زندگی می‌کنند. راست‌گوها همیشه راست و دروغ‌گوها همیشه دروغ می‌گویند. هر یک از ساکنان جزیره نیز یا راست‌گو است یا دروغ‌گو. به سراغ چند تن از ساکنان این جزیره می‌رویم و اظهارات زیر را می‌شنویم.

الف) A می‌گوید: «اگر من راست‌گو باشم، ۴ = ۲ + ۲ است». او راست‌گو است یا دروغ‌گو؟

ب) B می‌گوید: «اگر C راستگو باشد، من دروغ‌گو هستم». B و C چه نوع آدم‌هایی هستند؟

ج) X می‌گوید: «Y راست‌گو است».
Y می‌گوید: «اگر X راست‌گو باشد Z دروغ‌گو است».
مشخص کنید که هر یک از این سه نفر راست‌گو است یا دروغ‌گو.

۱۱. گزاره‌های زیر را تأیید یا رد کنید.

الف) عدد گویای x و عدد گنگ y وجود دارند که x^y گویا باشد.

ب) عدد گویای x و عدد گنگ y وجود دارند که x^y گنگ باشد.

۱۲. نشان دهید $(p \wedge \neg q) \vee (\neg(q \wedge r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \neg q) \equiv \neg q$.

۱۳. نشان دهید دو گزاره‌ی زیر از نظر منطقی هم‌ارزند:

$$\forall x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$$

$$\forall x\ \exists y\ P(x) \vee Q(y)$$

۱۴. با سه روش اثبات مستقیم، اثبات با برهان خلف و اثبات از طریق حالت‌بندی ثابت کنید اگر حاصل جمع دو عدد زوج باشد حاصل تفریق آنها نیز زوج است.

۱۵. ثابت کنید اگر

$$(t \to (r \vee p)) \to ((\neg r \vee k) \wedge \neg k)$$

درست باشد، آنگاه $\neg r$ نیز درست است.

۱۶. اگر $S(x)$ به معنای «x فوتبال بازی می‌کند» و $B(x)$ به معنای «x بسکتبال بازی می‌کند» و $E(x)$ به معنای «x می‌تواند خوب شوت بزند» باشد، گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حداکثر دو نفر هم فوتبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند.

ب) تمام کسانی که خوب شوت می‌زنند، فوتبال بازی نمی‌کنند.

۱۷. یک لامپ وجود دارد که توسط n کلید کنترل می‌شود. لامپ زمانی روشن می‌شوند که همه‌ی کلیدها وصل باشند. اگر حالت کلیدها (قطع یا وصل بودن آن‌ها) را ندانیم، راهکاری برای روشن کردن لامپ ارائه دهید که از حداقل تعداد تغییر وضعیت لامپ استفاده کند. (دقت کنید که پس از تغییر وضعیت کلید هم وضعیت وصل بودن یا قطع بودن آن مشخص نمی‌شود و تنها زمانی که لامپ روشن شود می‌توانیم نتیجه بگیریم که همه‌ی کلیدها وصل‌اند.)

۱۸. ۵ سکه‌ی هم‌شکل با وزن‌های متفاوت و یک ترازوی دوکفه‌ای داریم. روشی ارائه دهید که با حداکثر ۷ بار استفاده از ترازو، بتوانیم سکه‌ها را بر اساس وزن مرتب کنیم.

۱۹. یک ماشین و سطری از جعبه‌ها که از یک شماره‌گذاری شده‌اند داریم. در جعبه‌ی اول n مهره وجود دارد در هر مرحله ماشین یکی از جعبه‌ها که بیشتر از یک مهره دارد را انتخاب کرده و دو تا از مهره‌ها را برمی‌دارد. سپس یکی را دور می‌ریزد و دیگری را در جعبه‌ی بعدی قرار می‌دهد. این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که دیگر جعبه‌ای با بیشتر از یک مهره نداشته باشیم. آیا ترتیب انجام عملیات در موقعیت نهایی مهره‌ها تاثیر دارد؟

۲۰. یک ماشین با رمزی که رشته‌ای n بیتی از صفر و یک است، داریم. در هر مرحله می‌توان یک رشته‌ی n بیتی گزارش کرد و ماشین، تعداد بیت‌های درست در رشته‌ای که گزارش شده است را نشان می‌دهد. چگونه می‌توان با کمترین تعداد عملیات رمز ماشین را پیدا کرد؟