



۱. دو عملگر NAND و NOR را به ترتیب به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$$

$$p \downarrow q = \neg(p \vee q)$$

هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از روابط هم‌ارزی بررسی نمایید.

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q) \quad (\text{الف})$$

$$p \oplus \neg q \equiv \neg(p \oplus q) \quad (\text{ب})$$

$$\neg(p \downarrow q) \equiv \neg p \uparrow \neg q \quad (\text{ج})$$

۲. در زمان زنگ تفریح، یکی از دانش‌آموزان کلاس تخته کلاس را کثیف کرد. بعد از اتمام زنگ تفریح معلم وارد کلاس شد و با صورتی برافروخته و عصبانی از دانش‌آموزان پرسید که چه کسی تخته را کثیف کرده است. پاسخ دانش‌آموزان به صورت زیر است:

- دانش‌آموز اول: این کار، کار دانش‌آموز دوم یا سوم بوده است.
- دانش‌آموز دوم: نه دانش‌آموز پنجم این کار را انجام داده است نه من.
- دانش‌آموز سوم: هم دانش‌آموز اول هم دانش‌آموز دوم دروغ می‌گویند.
- دانش‌آموز چهارم: هم دانش‌آموز اول و هم دانش‌آموز دوم راست می‌گویند.
- دانش‌آموز پنجم: دانش‌آموز چهارم دروغ می‌گوید.

معلم می‌داند که سه نفر آن‌ها راستگوی مطلق هستند. دو نفر دیگر آن‌ها می‌توانند راست نگویند. کدام یک مقصر است؟

۳. علی، احمد و هستی نفری یک دوچرخه خریده‌اند. این دوچرخه‌ها به سه رنگ سیاه، سفید و زرد هستند. می‌دانیم:

- (الف) اگر هستی دوچرخه‌ی سیاه را خریده باشد، احمد دوچرخه‌ی زرد را خریده است.
- (ب) اگر احمد دوچرخه‌ی سفید را خریده باشد، علی دوچرخه‌ی زرد را خریده است.
- (ج) اگر علی دوچرخه‌ی سفید را خریده باشد، هستی دوچرخه‌ی سیاه را خریده است.
- (د) اگر هستی دوچرخه‌ی سفید را خریده باشد، احمد دوچرخه‌ی سیاه را خریده است.

با توجه به این گزاره‌ها، تمام حالت‌های ممکن برای رنگ دوچرخه‌ی هر یک را مشخص کنید.

۴. استدلال زیر را به صورت گزاره‌های منطقی بنویسید و سپس با استفاده از قوانین استنتاج اعتبار آن را اثبات کرده یا با مثال نقض اعتبار آن را رد کنید.

اگر آرين به ميدان اسب دواني برود، آنگاه رؤيا عصباني خواهد شد. اگر آرمان تمام شب را بازی کند، آنگاه مژگان عصباني خواهد شد. اگر رؤيا يا مژگان عصباني شوند، آنگاه رضا (وکیل آنها) مطلع خواهد شد. رضا چیزی در اين باره از اين دو موکل نشنیده است. در نتیجه آرين به ميدان اسب سواری نرفته است و آرمان تمام شب را بازی نکرده است.

۵. جملات زیر را به صورت گزاره‌ی منطقی نوشته، سپس نقیض هر گزاره را یافته و به فارسی برگردانید.

(الف) حضور مسی در زمین برای جذاب شدن بازی امشب کافی است، مگر اینکه تیم حریف حرکات او را بیش از حد محدود کند.

(ب) در هر کتابخانه‌ای بالاخره یک کتاب پیدا می‌شود که تک تک کلماتش ریشه‌ی فارسی داشته باشند.

۶. افراد  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  درباره‌ی دروغگو یا راستگو بودن  $x$  و  $y$  و  $z$  اظهارنظر کرده‌اند:

•  $A: x$  : دروغگو است یا  $z$  راستگو است.

•  $B: z$  : دروغگو است یا  $w$  دروغگو است.

•  $C: x$  : راستگو است یا  $y$  راستگو است.

•  $D: y$  : دروغگو است یا  $w$  راستگو است.

آیا ممکن است تمام این اظهارات درست باشند؟

۷. اگر  $p$  را مغازه رفتن امیر،  $q$  را خسته بودن علی و  $s$  را ناراحت بودن دنیا تعریف کنیم، ثابت کنید گزاره‌ی «امیر به مغازه خواهد رفت مگر آن که علی خسته و دنیا ناراحت باشد» با گزاره‌ی زیر معادل است:

$$(p \wedge (p \vee q)) \vee ((p \vee q) \wedge s)$$

۸. استنتاج‌های منطقی زیر را اثبات یا رد کنید. همچنین برای دو طرف هر تساوی یک جمله‌ی فارسی مثال بزنید.

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \quad (\text{الف})$$

$$\neg(\forall x [P(x) \wedge Q(x)]) \equiv \exists x [P(x) \rightarrow \neg Q(x)] \quad (\text{ب})$$

۹. فرض کنید گزاره‌های زیر همگی درست هستند.

• اگر کار نداشته باشم یا پولدار باشم، تفریح می‌کنم.

• اگر تفریح بکنم، فیلم می‌بینم یا بستنی می‌خورم.

• بستنی نمی‌خورم و می‌خوابم.

• اگر بخوابم، فیلم نمی‌بینم.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) من کار دارم.

(ب) من پولدار هستم.

۱۰. در یک جزیره دو نفر زندگی می‌کنند. در این جزیره هر آدم یا همیشه راست می‌گوید یا همیشه دروغ می‌گوید.

•  $A$  می‌گوید:  $B$  راست می‌گوید.

•  $B$  می‌گوید: یکی از ما راست می‌گوید و دیگری دروغ می‌گوید.

مشخص کنید  $A$  و  $B$  دروغگو هستند یا راستگو.

۱۱. یک نفر گل‌های جلوی خانه‌ی درنا را در روز جمعه له کرده است. یکی از افراد زیر دارد دروغ می‌گوید. (آن شخص لزوماً شخص له‌کننده گل‌ها نیست!). چه کسی گل‌ها را له کرده است؟

- پارسا: نیوشا روز جمعه یک گلبرگ در دستش بود. کار اوست.
- نیوشا: پارسا از دست درنا عصبانی بود. کار اوست.
- یاسمین: پارسا و نیوشا با هم مشکل دارند.
- کیانا: پارسا روز جمعه با عصبانیت به سمت خانه‌ی درنا بیرون دوید. کار اوست.
- آرش: یاسمین به گل‌ها حساسیت دارد و نمی‌تواند به آن‌ها نزدیک شود. کار او نیست.

۱۲. استدلال زیر را در قالب نمادهای منطق گزاره‌ای بنویسید. آنگاه یا درستی آن را اثبات کنید و یا مثال نقضی بیاورید که نشان دهد استدلال معتبر نیست.

- اگر پدرام در خانه باشد، بخاری را روشن خواهد کرد.
- اگر طنین در خانه باشد، بخاری را روشن خواهد کرد.
- اگر بخاری روشن باشد، خانه گرم خواهد شد.
- خانه سرد است.

در نتیجه پدرام و طنین در خانه نیستند.

۱۳. ثابت کنید عبارتهای زیر همواره درست هستند.

$$\begin{aligned} & \text{الف) } ((p \rightarrow q) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow s) \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow s) \\ & \text{ب) } p \oplus q \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \end{aligned}$$

۱۴. در صورت درست بودن استدلال‌های زیر، اعتبار آن‌ها را نشان دهید، در غیر این صورت مثال نقضی برای آن‌ها پیدا کنید.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \vee s \\ t \rightarrow q \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{\neg s}{\therefore \neg r \rightarrow \neg t}$$

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) \\ p \rightarrow r \end{array} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{\neg q \vee \neg s}{\therefore s}$$

۱۵. کیان در یک دوراهی گرفتار شده است. یکی از درها به خانه می‌رود و یکی دیگر به یک خرابه می‌رسد. هر در یک نگهبان دارد. یکی از نگهبان‌ها همیشه راست می‌گوید و یکی دیگر همیشه دروغ می‌گوید. ولی نمی‌دانیم کدام یک راستگو است و کدام یک دروغگو. کیان می‌تواند فقط یک سوال از یکی از نگهبان‌ها بپرسد. آیا می‌توانید به کیان کمک کنید که به خانه برسد؟

۱۶. البرز هر روز تا ساعت ۲۳:۵۹ فرصت دارد تا تکلیف مربوط به آن روز را در سایت بارگذاری کند. اما امروز فراموش کرده که چند شنبه است و کدام تکلیف را باید انجام دهد. بنابراین به دو هم‌کلاسی خود یعنی شقایق و آرمان پیام می‌دهد. شقایق روزهای دوشنبه و سه‌شنبه و چهارشنبه دروغ می‌گوید و باقی روزهای هفته راست می‌گوید. آرمان روزهای پنجشنبه و جمعه و شنبه دروغ می‌گوید و باقی روزهای هفته راست می‌گوید. شقایق به البرز می‌گوید: «من دیروز دروغ گفتم.» و آرمان هم بعد از این حرف اضافه می‌کند: «من هم همین‌طور.» به البرز کمک کنید تا بفهمد امروز چند شنبه است!

۱۷. سهراب عملگر  $\otimes$  را به این صورت تعریف می‌کند:

$$x \otimes y = (\neg x) \vee y$$

و ادعا می‌کند که هر گزاره منطقی را می‌توان با استفاده از عملگرهای  $\otimes$  و  $\neg$  نوشت. او حدس خود را با گزاره زیر می‌خواهد امتحان کند:

$$(\neg p \rightarrow q) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

ابتدا به او کمک کنید این عبارت را با تنها دو عملگر مذکور بازنویسی کند. سپس در صورت درست بودن ادعای او، آن را ثابت کنید. در غیر این صورت برای آن مثال نقضی بیاورید.

۱۸. برای هریک از عبارات زیر در صورت همواره درست یا همواره غلط بودن اثبات ارائه کنید و در غیر این صورت مثال نقض بزنید.

$$((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)) \quad (\text{الف})$$

$$((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r) \quad (\text{ب})$$

۱۹. گزاره‌های زیر را به صورت منطقی بنویسید (واحد زمانی را گسسته در نظر بگیرید؛ یعنی بین هر دو لحظه را می‌توان به تعدادی متناهی لحظه تقسیم کرد).

الف) در هر واحد از زمان چراغ راهنمایی به یکی از رنگ‌های سبز، زرد و قرمز است.

ب) رنگ چراغ راهنمایی از سبز به زرد یا از زرد به قرمز یا از قرمز به سبز تغییر می‌کند.

ج) چراغ راهنمایی یک رنگ را حداکثر برای ۳ واحد زمانی متوالی حفظ می‌کند.

۲۰. گروهی ۶ نفره از دوستان قرار است برای فردا لباس‌های رنگی بپوشند و آن‌ها را با کت بپوشانند. دقت کنید که هیچ دو نفری رنگ لباس مشابه ندارند. آن‌ها با هم توافق می‌کنند که تنها کسی که لباس آبی بر تن دارد اجازه راستگویی دارد و بقیه باید دروغ بگویند. فردا می‌شود و این دوستان همدیگر را ملاقات می‌کنند. آیا می‌توانید براساس جمله‌های گفته شده توسط آن‌ها بفهمید که چه کسی لباس آبی بر تن دارد؟

الف) علی: رنگ لباس مسعود قرمز است.

ب) مسعود: رنگ لباس کریم آبی است.

ج) کریم: رنگ لباس سینا زرد نیست.

د) سینا: یا امیر راستگو است و یا کریم.

ه) داریوش: کریم لباس آبی بر تن دارد.

و) امیر: مسعود لباس قرمز نپوشیده است.