



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲
مدرس: الهام منیفی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین ششم

زمان تحویل: تا آخر روز ۲۶ خرداد

لطفا پاسخ‌ها به همراه نام و شماره دانشجویی در کوئرا آپلود شوند.

سوال اول (۱۵ نمره)

X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌های تصادفی از توزیع $Uniform(\theta_1, \theta_2)$ با پارامترهای نامعلوم θ_1 و θ_2 هستند.

(الف) تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه را برای θ_1 و θ_2 بدست آورید.

(ب) نشان دهید تخمین‌گرهای بدست آمده در قسمت الف سازگار هستند.

(ج) عدد c_1 و c_2 را به گونه‌ای بیابید که $c_1 \hat{\theta}_1$ و $c_2 \hat{\theta}_2$ تخمین‌گر unbiased برای θ_1 و θ_2 باشند.

سوال دوم (۱۵ نمره)

در هر یک از بخش‌های زیر، تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه را برای پارامترهای خواسته شده بیابید. در تمامی بخش‌ها، نمونه‌های مشاهده شده مستقل از یکدیگر هستند.

(الف)

داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n از توزیع نمایی با پارامتر θ مشاهده شده‌اند. تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای θ را بیابید.

(ب)

داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n از توزیع نرمال با پارامتر μ, σ مشاهده شده‌اند. تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای μ, σ را بیابید.

(ج)

نقاط $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ از صفحه داده شده‌اند. می‌دانیم که $y_i = ax_i + b + \alpha_i$ که α_i ها، نمونه‌هایی مستقل از توزیع نرمال با پارامترهای $(0, \sigma)$ هستند. تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای پارامترهای a و b را بیابید.

سوال سوم (۲۰ نمره)

یک مسابقه‌ی بسکتبال بین دانشکده برق و کامپیوتر در جریان است. احتمال موفقیت هر بازیکن دانشکده کامپیوتر در پرتاب موفق پناالته، به تشویق هواداران بستگی دارد. فرض کنید توزیع کیفیت تشویق هواداران از توزیع هندسی با پارامتر p

$(A \sim Geometric(p))$ پیروی کند و p عددی ثابت بین ۰ و ۱ باشد. همچنین تعداد پرتاب‌های موفق بازیکنان کامپیوتر از توزیع

پواسون با پارامتر A ($X \sim Poisson(\lambda = A)$) پیروی می‌کند.

(الف)

$MLE[A|X]$ را بدست آورید.

(ب)

$MAP[A|X]$ را بدست آورید.

سوال چهارم (۱۵ نمره)

فرض کنید که X یک متغیر تصادفی گسسته با دامنه‌ی $1, 2, \dots, k$ باشد و $p_i = P(X = i)$. داده‌های مستقل X_1, X_2, \dots, X_n از این متغیر تصادفی موجود است. اگر بردار احتمالات p به شکل زیر تعریف کنیم:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای p را بیابید.

سوال پنجم (۱۵ نمره)

یک آمادان برای به دست آوردن امید به زندگی دانشجویان دانشگاه شریف، بیست بازه اطمینان ۹۵ درصد مستقل از هم به دست آورده است. او می خواهد این موارد را بدست آورد:

(الف)

احتمال این که مقدار امید به زندگی در دقیقا یکی از بازه ها نباشد؟

(ب)

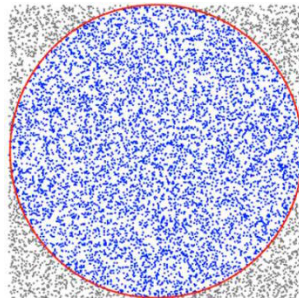
احتمال این که مقدار امید به زندگی در هیچ یک از بازه ها نباشد؟

(ج)

احتمال این که مقدار امید به زندگی در حداقل یکی از بازه ها نباشد؟

سوال ششم (۲۰ نمره)

فرض کنید می خواهیم با استفاده از روش مونت کارلو عدد پی را گزارش کنیم. این روش بدین شکل است که بایستی به صورت یک نواخت از مربعی به اندازه دو در دو (مانند شکل)، یک نقطه انتخاب کرد. سپس تعداد نقاطی که داخل دایره افتاده اند تقسیم بر کل نقاط عدد تقریبی را به ما خواهد داد. در هنگام تکمیل گزارش بایستی نتیجه ی خود را به صورت یک جمله احتمالی در گزارش بنویسیم. تعداد نقاط لازم را به دست آورید که مطمئن شویم خطای تخمین ما از عدد پی با احتمال ۹۵ درصد کمتر از ۰/۰۱ است.



موفق باشید.