بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: الهام منیفی

تمرین سری اول

زمان تحویل: تا آخر روز ۱۱ اسفند. پس از این روز، تا ۳ روز هم تمرین را با تاخیر می‌توانید ارسال کنید.

لطفا پاسخ‌ها به همراه نام و شماره دانشجویی در سامانه درس‌افزار آپلود شوند.

سوال اول (۱۰ نمره)

فرض کنید ۱۵ نفر دور یک میز گرد نشسته‌اند. تعداد حالت‌هایی که دو شخص به خصوص، روبروی هم بنشینند، چه تعداد است؟ احتمال این پیشامد را هم محاسبه کنید.

پاسخ

همانطور که می‌دانید تعداد کل حالت‌هایی که ۱۵ نفر دور یک میز می‌نشینند، !۱۴ حالت است. تعداد حالت‌هایی که ۲ نفر به خصوص روبروی یکدیگر بنشینند برابر با $۲! \times ۱۳!$ حالت است. در نتیجه احتمال رخداد این پدیده برابر با $\frac{۱}{۷} = \frac{۱۳! \times ۲!}{۱۴!}$ است.

سوال دوم (۲۵ نمره)

الف) فرض کنید هواپیمایی دارای ۱۰۰ صندلی است و ۱۰۰ مسافر هم آماده ورود به هواپیما هستند. مسافر i ام که وارد می‌شود، روی صندلی شماره i باید بنشیند. حال فرض کنید مسافر شماره یک که دارای شیطنت است، وقتی می‌خواهد وارد هواپیما شود، روی صندلی‌ای غیر از صندلی خودش می‌نشیند. ادامه مسافرها، اگر صندلی خودشان خالی باشد، روی صندلی خود می‌نشینند و اگر پر باشد، به شکل رندوم روی یکی از صندلی‌های باقی مانده می‌نشینند. احتمال این را بیابید که نفر صدم، دقیقا در سر جای خودش بنشیند.

پاسخ

صندلی‌ها را با شماره ۱ تا n در نظر می‌گیریم. F را رویداد خالی بودن صندلی نفر آخر در هنگام نشستن آن فرد در نظر می‌گیریم. فرض کنیم **k>1** صندلی‌ای باشد که نفر اول به اشتباه آن را انتخاب کرده است و تعریف می‌کنیم:

$$a_k = P(F|K = k)$$

توجه می‌کنیم که $a_n = ۰$ است. به کمک قانون احتمال کل می‌توان نوشت:

$$P(F) = \Sigma_{k=۲}^{n} P(F|K = k)P(K = k) = \frac{۱}{n - ۱}\Sigma_{k=۲}^{n} a_k$$

واضح است که مسافران شماره ۲ تا **k-1** روی صندلی درست خود می‌نشینند.

مسافر شماره k یا بر روی صندلی ۱ می‌نشیند، که در این صورت همه مسافران بعدی روی صندلی درست خود می‌نشینند یا بر روی صندلی L می‌نشیند که L>K. در حالت دوم، مسافران **K+1, K+2, ..., L-1** بر روی صندلی درست خود می‌نشینند. در نتیجه:

$$a_k = P(F|K=k)$$
$$= P[F|K=k, Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ ۱]P[Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ ۱]$$
$$+P[F|K=k, Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ k+۱]P[Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ k+۱]$$
$$+P[F|K=k, Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ k+۲]P[Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ k+۲]$$
$$+...$$
$$+P[F|K=k, Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ n]P[Passenger\ k\ sits\ on\ seat\ n]$$
$$\frac{۱}{n-k+۱}(۱+a_{k+۱}+...+a_n) for ۱<k<n$$

حال باید معادله را حل کنیم:

$$(n-k+۱)a_k = ۱+a_{k+۱}+a_{k+۲}+...+a_n$$
$$(n-k)a_{k+۱} = ۱+a_{k+۲}+a_{k+۳}+...+a_n$$
$$=> (n-k+۱)a_k-(n-k)a_{k+۱} = a_{k+۱}$$
$$=> (n-k+۱)a_k = (n-k+۱)a_{k+۱}$$
$$=> a_k = a_{k+۱} = ... = a_{n-۱}$$
$$=> a_k = \frac{۱}{n-k+۱}(۱+(n-k+۱)a_k+۰)$$
$$a_k = a_{k+۱} = ... = a_{n-۱} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$P(F) = \frac{۱}{n-۱}\Sigma_{k=۲}^{n} a_k = \frac{۱}{n-۱}(n-۲)\times\frac{۱}{۲} = \frac{n-۲}{۲(n-۱)}$$

ب) همان بخش قبل را حل کنید با این تفاوت که نفر اول، با احتمال برابر روی هر یک از صندلی‌ها بنشیند.

پاسخ

در این حالت، نفر اول با احتمال برابر حتی روی صندلی خودش هم می‌نشیند. فرض کنیم در یک مسئله با w مسافر احتمال اینکه نفر آخر، صندلی خود را خالی بیابد، برابر با **P(w)** باشد. می‌توان نوشت

$$P(n) = \frac{۱}{n}\times ۱+\frac{۱}{n}\times ۰+\frac{۱}{n}\Sigma_{i=۲}^{n-۱}P(i)$$

زیرا سه حالت ممکن است رخ دهد:

- حالت اول: فرد اول، در جای درست خودش بنشیند. در نتیجه شخص آخر هم قطعا سر جای درست خودش می‌نشیند.
- حالت دوم: فرد اول در جای فرد آخر بنشیند. در این حالت انکان ندارد که فرد آخر در سر جای درست خودش بنشیند.
- حالت سوم: فرد اول در صندلی **1<i<n** از آخر بنشیند. در این حالت، مثل این است که مسئله با i نفر شروع شده است. زیرا همه ی افراد، به جز i نفر آخر به درستی در جای خود قرار گرفته اند. یعنی نفر اول از i نفر آخر که صندلی‌اش توسط نفر اول پر شده، یا جای نفر اول می‌نشیند یا اینکه از بین **i-1** صندلی باقی مانده، روی یکی می‌نشیند. این دقیقا مشابه با مسئله اولیه است ولی با i صندلی.

در نتیجه:

$$nP(n) = ۱ + \Sigma_{i=۲}^{n-۱} P(i)(n-۱)P(n-۱) = ۱ + \Sigma_{i=۲}^{n-۲} P(i)$$

$$=> nP(n) - (n-۱)P(n-۱) = P(n-۱) => P(n) = P(n-۱) = ... = P(۲) = \frac{۱}{۲}$$

سوال سوم (۳۰ نمره)

در دانشگاه هیولاها درس آمار و احتمال توسط دو استاد ارائه می‌شود. در این دانشگاه هر دو استاد می‌توانند نمره‌های دانشجویان این درس را با محدودیت‌های یکسان عوض کنند. می‌دانیم استاد اول علاقه شدیدی به اعداد زوج دارد و همیشه نمره‌ها را از بین اعداد زوج می‌دهد. این ترم استاد دوم یک استاد مدعو است و درباره نمره‌دهی او اطلاعی نداریم. می‌دانیم تنها ۱۰ درصد از استادها در این درس تنها نمره زوج به دانشجو می‌دهند. مایک در این درس نمره ۱۶ گرفته است. (نمره‌ها در این درس اعداد طبیعی هستند)

الف) به مایک کمک کنید تا احتمال اینکه استاد اول به او نمره داده باشد را بدست آورد.

ب) حال احتمال آنکه استاد دوم نیز تنها نمره زوج به دانشجو بدهد را حساب کنید.

پاسخ

الف:

X را پیشامد دادن نمره توسط استاد اول و Y را پیشامد زوج بودن نمره در نظر می گیریم.

چون محدودیت ها برای هر دو استاد یکسان هستند پس در نتیجه

$$P(X) = P(X^c) = ۰/۵$$

از طرفی می دانسم استاد اول همیشه نمره زوج می دهد درنتیجه

$$P(Y|X) = ۱$$

و البته می دانیم تنها ۱۰ درصد استاد ها نمره زوج می دهند پس داریم:

$$P(Y|X^c) = ۰/۱$$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y|X)P(X) + P(Y|X^c)P(X^c)} = \frac{۱ \times \frac{۱}{۲}}{۱ \times \frac{۱}{۲} + ۰/۱ \times \frac{۱}{۲}} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

ب:

استاد اول را A و استاد دوم را B درنظر بگیرید. آنگاه داریم:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|B)P(B) = ۰/۵ \times ۰/۱ + ۰/۵ \times ۱ = ۰/۵۵$$

سوال چهارم (۲۵ نمره)

حال که مایک حدس زده که کدام استاد نمره او را ثبت کرده است می‌خواهد به نمره خود اعتراض کند. از این جهت به آن استاد ایمیل می‌زند تا وقت ملاقات بگیرد. از آنجایی که استادهای دانشگاه هیولاها می‌خواهند با سایر استادها تفاوت داشته باشند در جواب ایمیل به مایک می‌گوید که بین ساعت ۸ تا ۹ صبح بیاید. در دانشگاه هیولاها رسم ملاقات با استاد به این شکل است که خود استاد یک زمان در بازه اعلام شده را درنظر می‌گیرد و آن زمان به مدت ۱۰ دقیقه در دفتر خود را به روی دانشجو باز می‌کند. مایک که خیلی از نمره خود ناراحت است و حوصله انتظار را ندارد برای همین هر زمان که برسد تنها به مدت ۵ دقیقه صبر می‌کند که اگر استاد در دفتر خود را در آن مدت باز کند با استاد ملاقات کند. به مایک کمک کنید احتمال اینکه با استاد ملاقات کند را بدست آورد. (زمان را یک عدد حقیقی برحسب ثانیه درنظر بگیرید)

پاسخ

یک مربع ۶۰ در ۶۰ درنظر بگیرید که یک ضلع آن x زمان آمدن مایک و ضلع دیگر آن y زمان آمدن استاد باشد.
می دانیم تنها زمانی مایک با استاد ملاقات دارد که بازه $[x, x+۵]$ و $[y, y+۱۰]$ تداخل داشته باشند.
پس نقاطی از مربع قابل قبول هستند که

$$y - ۵ < x < y + ۱۰$$

این نقاط تشکیل دو ذوزنقه متساوی الساقین می دهند. پس احتمال اینکه یک نقطه انتخاب شده از صفحه در شرایط صدق کند برابر می شود با نسبت مساحت مطلوب به کل مساحت مربع در نتیجه داریم:

$$\frac{good - area}{area} = ۱ - \frac{\frac{۵۰\times۵۰}{۲} + \frac{۵۵\times۵۵}{۲}}{۶۰ \times ۶۰} = ۱ - \frac{۵۰ \times ۵۰ + ۵۵ \times ۵۵}{۲ \times ۶۰ \times ۶۰} = ۱ - \frac{۱۰۰ + ۱۲۱}{۲ \times ۱۲ \times ۱۲} = ۱ - \frac{۲۲۱}{۲۸۸} = \frac{۶۷}{۲۸۸}$$

سوال پنجم (۱۰ نمره)

مایک که به خاطر نمره آمار و احتمالش از خودش ناراحت است تصمیم گرفته در طول هفته ۱۲ ساعت مسائل احتمال تمرین کند. اگر واحد زمانی را ساعت و زمان را یک عدد طبیعی برحسب ساعت درنظر بگیریم. احتمال اینکه مایک در هفته جاری هر روز حداقل یک ساعت مسئله حل کند را بیابید.

پاسخ

احتمال اینکه هر روز حداقل یک ساعت درس بخواند برابر می شود با نسبت تعداد حالت هایی که هر روز حداقل یک ساعت درس خوانده به کل حالت ها پس:

$$all - states = ۷^{۱۲} - \binom{۷}{۱} \times ۶^{۱۲} + \binom{۷}{۲} \times ۵^{۱۲} - \binom{۷}{۳} \times ۴^{۱۲} + \binom{۷}{۴} \times ۳^{۱۲} - \binom{۷}{۵} \times ۲^{۱۲} + \binom{۷}{۶} \times ۱^{۱۲}$$

$$p = \frac{all - states}{total} = \frac{\sum_{i=۱}^{۶} (-۱)^i \binom{۷}{i} (۷ - i)^{۱۲}}{۷^{۱۲}}$$

سوال امتیازی (۱۰ نمره)

فرض کنید شما برای اینکه درس را خیلی خوب متوجه شوید، در حضور هد تی‌ای آزمایشی را می‌خواهید انجام دهید. در این آزمایش یک سکه سالم را به شکل مستقل و پشت سر هم پرتاب می‌کنید. اگر خط آمد، هد تی‌ای ۰.۱ نمره به شما اضافه می‌کند و در غیر این صورت، ۰.۱ نمره از دست می‌دهید.

الف) فرض کنید که نمره شما پیش فرض ۱۰ است. احتمال اینکه به نمره ۲۰ برسید، قبل از اینکه صفر شوید، چقدر است؟

پاسخ
احتمال گرفتن یا از دستن **0.1** نمره برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. انداختن سکه را آنقدر تکرار می‌کنیم تا اینکه یا نمره شما صفر شود و یا ۲۰ شود. اگر نمره فعلی شما n باشد و قصد داشته باشید آن را به N برسانید، در واقع می‌خواهیم $P(N|n)$ را حل کنیم. واضح است که $P(N|۰) = ۰$ و $P(N|N) = ۱$ و حال n را برای مقدارهای میان n و N می‌خواهیم حل کنیم.
حال می‌خواهیم $P(۲۰|۱۰)$ را پیدا کنیم. در کل هم داریم $y(n) = P(۲۰|n)$ و فرض می‌کنیم که شما n نمره در حال حاضر دارید، در مرحله بعد شما یا **n+0.1** نمره دارید و یا **n-0.1** نمره و احتمال هر دو هم **0.5** است. پس داریم:

$$y(n) = \frac{۱}{۲}y(n + ۰/۱) + \frac{۱}{۲}y(n - ۰/۱)$$

$$=> y(n + ۰/۱) - y(n) = y(n) - y(n - ۰/۱)$$

در نتیجه شیب نمودار $\mathbf{y(n)}$ در فاصله های مجاور ثابت است و فاصله ها هم که همان **0.1** ها است. پس $\mathbf{y(n)}$ یک خط است که در نقطه صفر برابر با صفر است و در نقطه ۲۰ برابر با یک است. در نتیجه در نقطه ده که وسط این خط قرار دارد، مقدار این احتمال برابر با **0.5** است. یا اینکه می‌توانید از خاصیت جمع تلسکوپی استفاده کنید:

$$y(n) = y(n)-y(۰) = (y(n)-y(n-۰/۱))+...+(y(۰/۱)-y(۰)) = n(y(۰/۱)-y(۰)) = n(y(۰/۱))$$

تمام این تفاوت ها به خاطر خاصیت خطی، یکسان است و $y(۰) = ۰$ در نتیجه $y(n) = \frac{n}{۲۰}$.
ب) فرض کنید که هد تی‌ای با آموزش صحبت می‌کند که نمره منفی هم برای شما بتوان ثبت کرد. فرض کنید f(n) احتمال این باشد که شما به ۲۰ برسید، اگر با نمره n شروع کنید. فرمولی برای f(n) بیابید.
پاسخ
باز هم رابطه بازگشتی را می‌نویسیم

$$f(n) = \frac{۱}{۲}f(n + ۰/۱) + \frac{۱}{۲}f(n - ۰/۱)$$

در حال حاضر، چالش اصلی پیدا کردن نقاط مرزی است و چون نمره شما تا مقدارهای منفی هم می‌تواند برود، این مرزها به سادگی پیدا نمی‌شوند. در نتیجه داریم:

$$z(n) - z(۰) = (z(n) - z(n - ۰/۱)) + ... + (z(۰/۱) - z(۰)) = n(z(۰/۱) - z(۰))$$

$$=> z(n) = n(z(۰/۱) - z(۰)) + z(۰)$$

اگر فرض کنیم $a = z(۰/۱) - z(۰)$ و $b = z(۰)$ خواهیم داشت

$$z(n) = an + b$$

حال می‌خواهیم a و b را پیدا کنیم. در ضمن توجه داشته باشید که $\mathbf{z(n)}$ تابع احتمال است و مقداری بین صفر و یک دارد. و این حالت فقط زمانی ممکن است که a صفر باشد وگرنه ممکن است

مقدار تابع احتمال از یک بیشتر شود. در نتیجه

$$z(۱) = z(۰)$$

و در ادامه

$$z(n) = z(۰)$$

در نتیجه به ازای هر n داریم

$$z(n) = z(۲۰) = ۱$$

در نتیجه در این حالت شما می‌توانید مطمئن باشید که به نمره ۲۰ در هر حالتی می‌رسید.

موفق باشید.