بسمه تعالی

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲
مدرس: الهام منیفی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سوم

زمان تحویل: تا آخر روز دوشنبه ۴ اردیبهشت ماه .
لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در کوئرا آپلود شوند.

سوال ۱.(۳۰ نمره)

الف. اگر متغیر تصادفی X از توزیع پواسون با پارامتر λ پیروی کند، اثبات کنید که داریم
$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$

ب. اگر متغیر تصادفی X از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند، اثبات کنید که برای $n \geq 2$ داریم
$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$

ج. اگر متغیر تصادفی X از توزیع هندسی با پارامتر p پیروی کند، اثبات کنید که داریم
$E[\frac{1}{X}] = \frac{-p\ln p}{1-p}$

پاسخ:

الف.

ابتدا یک طرف قضیه را اثبات میکنیم:

$$E(X^n) = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} j^n\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} j^{n-1}\frac{\lambda^j}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} j^{n-1}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda}(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{n-1}\frac{\lambda^i}{(i)!} = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$$

برای اثبات سمت دیگر قضیه نیز داریم:

$$\lambda E[(X+1)^{n-1}] = \lambda\sum_{k=0}\infty (k+1)^{n-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}\infty (k+1)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=1}\infty k^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}\infty k^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = E(X^n)$$

.بنابراین دو طرف عبارت داده شده اثبات میشود و این قضیه برقرار است

ب. به کمک استقرا اثبات میکنیم. حکم برای $k=1$ برقرار است. برای $k \geq 2$ داریم:

$$E[X^k] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} * x^k dx$$

با انتگرال گیری جز به جز، اگر $u = x^k$ و $dv = \lambda e^{-\lambda x}$، در اینصورت داریم:

$$E[X^k] = [-e^{\lambda x}x^k]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x}kx^{k-1}dx$$

$$= [-e^{-\lambda x}x^k]_0^\infty + \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty \lambda e^-\lambda x x^{k-1}dx$$

توجه کنید که برای k ثابت داریم:

$$\lim_{x\to\infty} -e^{-\lambda x}x^k$$

همینطور داریم:

$$\int_۰^\infty \lambda e^{-\lambda x}x^k dx = X[X^{k-۱}]$$

بنا براین می توان عبارت زیر را نتیجه گرفت که در واقع همان حکم استقرا می‌باشد:

$$E[X^k] = \frac{k}{\lambda}E[X^{k-۱}] = \frac{k}{\lambda}\frac{(k-۱)!}{\lambda^{k-۱}} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

ج.

$$E[\frac{۱}{X}] = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k}p(X=k)$$

$$= \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k}p(۱-p)^(k-۱)p$$

$$= \frac{p}{۱-p}\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(۱-p)^k}{k}$$

در عبارت $\sum_{i=۱}^{\infty} \frac{a^i}{i}$ می توان از عبارت $\int_۰^a x^i - ۱dx$ به عنوان جایگزین استفاده کرد و بدین ترتیب داریم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(۱-p)^k}{k} = \sum_{k=۱}^{\infty} \int_۰^{۱-p} x^k - ۱dx = \int_۰^{۱-p} (\sum_{k=۱} x^k - ۱)dx = \int_۰^{۱-p} (\sum_{k=۰} x^k)dx = \int_۰^{۱-p} \frac{۱}{۱-x}dx$$

سپس بااستفاده از تغییر متغیر $y = ۱ - x$ داریم:

$$\int_۰^{۱-p} \frac{۱}{۱-x}dx = \int_۱^p \frac{۱}{y}(-dy) = ln\,۱ - ln\,p = -ln\,p$$

و بدین ترتیب عبارت موردنظر در صوال اثبات می‌شود:

$$E[\frac{۱}{X}] = \frac{-p\ln p}{۱-p}$$

سوال ۲.(۱۰ نمره)
فرض کنید داریم $X \sim Uniform(-\frac{\pi}{۲}, -\pi)$ و $Y = \sin(X)$، $f_Y(y)$ را بدست آورید.
پاسخ:
برای $y \in (-۱, ۰)$ داریم :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_۱)}{|g'(x_۱)|} = \frac{f_X(arcsin(y))}{|cos(arcsin(y))|} = \frac{\frac{۲}{۳\pi}}{\sqrt{۱-y^۲}}$$

برای $y \in (۰, ۱)$ داریم :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_۱)}{|g'(x_۱)|} + \frac{f_X(x_۲)}{|g'(x_۲)|}$$
$$= \frac{f_X(arcsin(y))}{|cos(arcsin(y))|} + \frac{f_X(\pi - arcsin(y))}{|cos(\pi - arcsin(y))|}$$
$$= \frac{\frac{۲}{۳\pi}}{\sqrt{۱-y^۲}} + \frac{\frac{۲}{۳\pi}}{\sqrt{۱-y^۲}}$$
$$= \frac{۴}{۳\pi\sqrt{۱-y^۲}}$$

سوال ۳.(۱۵ نمره)

الف. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $N(۰, ۴)$ باشند و J کمترین مقدار j را نشان دهد به طوری که $X_j > ۴$ (به عبارت دیگر، اندیس اولین X_j که بیشتر از ۴ است). با استفاده از Φ، $E(J)$ را پیدا کنید.

ب. فرض کنید f و g دو تابع چگالی احتمال باشند به طوری که $f(x) > ۰$ و $g(x) > ۰$ برای همه‌ی x ها برقرار باشد . فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال f باشد. امید ریاضی نسبت زیر را بیابید:

$$R = \frac{g(X)}{f(X)}$$

ج. $F(x) = e^{-e^{-x}}$ یک تابع توزیع تجمعی پیوسته و اکیدا صعودی است. فرض کنید X تابع توزیع تجمعی F را داشته باشد و متغیر تصادفی $W = F(X)$ را تعریف میکنیم. میانگین و واریانس W چیست؟

الف. داریم: $J - ۱ \sim Geom(p)$ که: $p = P(X_۱ > ۴) = P(X_۱/۲ > ۲) = ۱ - \Phi(۲)$.
بنابراین: $E(J) = ۱/(۱ - \Phi(۲))$
ب. با استفاده از LOTUS داریم:

$$E\frac{g(X)}{f(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = ۱$$

ج. ابتدا CDF متغیر تصادفی W را حساب می‌کنیم:

$$P(W \leq w) = P(F(X) \leq w) = P(X \leq F^{-۱}(w)) = F(F^{-۱}(w)) = w$$

بنابراین برای $۰ < w < ۱$ واضح است که $W \sim Uniform(۰, ۱)$. بنابراین $E(W) = ۱/۲$ و $Var(W) = ۱/۱۲$ می‌باشد.

سوال ۴.(۱۵ نمره)

فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f = \begin{cases} x^۲(۲x + \frac{۳}{۲}) & ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

اگر $Y = \frac{۲}{X} + ۱$ باشد، $Var(Y)$ را بدست آورید.
پاسخ:
دقت کنید که داریم :

$$Var(Y) = var(\frac{۲}{X} + ۱) = ۴var(\frac{۱}{X})$$

پس کافیست که $var(\frac{۱}{X}) = E[\frac{۱}{X^۲}] - (E[\frac{۱}{X}])^۲$ را با کمک $LOTUS$ به صورت زیر محاسبه نماییم:

$$E[\frac{۱}{X}] = \int_۰^۱ x(۲x + \frac{۳}{۲})dx = \frac{۱۷}{۲}$$

$$E[\frac{۱}{X^۲}] = \int_۰^۱ x(۲x + \frac{۳}{۲})dx = \frac{۵}{۲}$$

پس $var(\frac{۱}{X}) = E[\frac{۱}{X^۲}] - (E[\frac{۱}{X}])^۲ = \frac{۷۱}{۱۴۴}$ و در نهایت خواهیم داشت:

$$Var(Y) = ۴Var(\frac{۱}{X}) = \frac{۷۱}{۳۶}$$

سوال ۵.(۲۰ نمره)
فرض کنید n توپ و n ظرف وجود دارد. توپ‌ها را به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت داخل ظرف‌ها قرار میدهیم. فرض کنید X_i تعداد توپ‌های قرار گرفته در ظرف i ام باشد و $X = max\{X_۱, X_۲, X_۳, \ldots, X_n\}$ باشد.
الف. نشان دهید $Pr(X_i \geq t) \leq \frac{۱}{t}$
ب. نشان دهید $Pr(X_i \geq t + ۱) \leq \frac{۱}{t^۲}$
ج. (۵ نمره امتیازی) نشان دهید $Pr(X \geq ۱ + ۲\sqrt{n}) \leq \frac{۱}{۴}$
پاسخ :
دقت کنید که متغیر ها از توزیع برنولی پیروی میکنند

$$E(x_i) = \sum_w^{sumofballs} p(w)X_i(w) = \sum_{i=۱}^n \frac{۱}{n} * ۱ = ۱$$

$$Var(X_i) = \frac{۱}{n}(۱ - ۱)^۲ + (۱ - \frac{۱}{n})(۰ - ۱)^۲ = ۱ - \frac{۱}{n}$$

الف. طبق نامساوی مارکف خواهیم داشت: $Pr(X_i \geq t) \leq \frac{E(x_i)}{t}$ $E(x_i) = ۱$ است و به همین ترتیب عبارت موردنظر اثبات میشود.
ب. طبق نامساوی چیشف داریم:

$$p(|X_i - E(X_i)| \geq t\sqrt{VarX_i}) \leq \frac{E(X_i)}{t^۲}$$

$$p(|X_i - ۱)| \geq t\sqrt{۱ - \frac{۱}{n}}) \leq \frac{۱}{t^۲}$$

$$\frac{۱}{t^۲} \geq p(|X_i - ۱)| \geq t\sqrt{۱ - \frac{۱}{n}}) > p(|X_i - ۱)| \geq t)$$

بنابراین داریم: $Pr\left(X_i \geq t+1\right) \leq \frac{1}{t^2}$
ج. احتمال اینکه بیشترین X_i از $1+2\sqrt{n}$ بیشتر شود، کوچکتر از اجتماع احتمال بزرگتر بودن هر کدام از X_i ها است:

$$P(X \geq 1+2\sqrt{n}) \geq P(X_1 \geq 1+2\sqrt{n}) \bigsqcup P(X_2 \geq 1+2\sqrt{n}) \bigsqcup P(X_3 \geq 1+2\sqrt{n}) ... P(X_n \geq 1+2\sqrt{n}) < P(X_1 \geq 1+2\sqrt{n}) + P(X_2 \geq 1+2\sqrt{n}) + P(X_3 \geq 1+2\sqrt{n}) ... P(X_n \geq 1+2\sqrt{n})$$

با توجه به عبارتی که در بخش ب اثبات کردیم می‌دانیم، $P(Xi \geq 1+2\sqrt{n}) \leq \frac{1}{4n}$ بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n} P(Xi \geq 1+2\sqrt{n}) \leq \frac{1}{4}$$

پس داریم:

$$P(X \geq 1+2\sqrt{n}) \leq \sum_{i=1}^{n} P(Xi \geq 1+2\sqrt{n}) \leq \frac{1}{4}$$

سوال ۶.(۱۰ نمره)
استاد حواس پرتی را درنظر بگیرید که برای دو دانشجو به صورت همزمان قرار ملاقات میگذارد. اما متاسفانه در هر زمان فقط می تواند با یک دانشجو ملاقات کند. مدت زمان ملاقات دو دانشجو مستقل از هم و دارای توزیع نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه می‌باشد. امید ریاضی فاصله زمانی بین ورود دانشجوی اول و خروج دانشجوی دوم را در دو حالت زیر بیابید.
الف. دانشجوی اول سر وقت حاضر می‌شود ولی دانشجوی دوم ۵ دقیقه دیرتر می‌رسد.
ب. (۱۰ نمره امتیازی) دانشجوی اول سر وقت حاضر می‌شود ولی دانشجوی دوم X دقیقه دیر میرسد. به طوریکه X دارای توزیع نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.
پاسخ:
الف.
T_1 و T_2 را به ترتیب زمان ملاقات دانشجوی اول و دوم در نظر میگیریم و زمان بین ورود دانشجوی اول و خروج دانشجوی دوم از رابطه $T = max(T_1, 5) + T_2$ بدست خواهد آمد. مسئله را به دو حالت $T_1 < 5$ و $T_1 \geq 5$ تقسیم میکنیم و امید ریاضی T به صورت :
$E[T] = p(T_1 < x)E[T|T_1 < x] + p(T_1 \geq x)E[T|T_1 \geq x]$ محاسبه می‌شود.

$$p(T_1 < x) = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{30}}$$

$$p(T_1 \geq x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{x}{30}}$$

$$E[T|T_1 < 5] = E[T_2 + 5] = E[T_2] + 5 = 35$$

$$E[T|T_1 \geq 5] = E[T_1 + T_2|T_1 \geq 5] = E[T_2] + E[T_1|T_1 \geq 5]$$

از آنجا که توزیع نمایی یک توزیع بی حافظه است این دانش اولیه که $T_1 \geq 5$ می‌باشد، تاثیری بر مدت زمان با قی مانده از ملاقات ندارد و مدت زمان باقیمانده از همان توزیع نمایی امید ریاضی ۳۰ پیروی میکند. بنابر این $E[T_1|T_1 \geq 5] = 30 + 5 = 35$ و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[T|T_۱ \geq ۵] = ۳۰ + ۳۵ = ۶۵$$

و با استفاده از رابطه $E[T]$ داریم:

$$E[T] = (۱ - e^{-\frac{۵}{۳۰}}) * ۳۵ + (e^{-\frac{۵}{۳۰}}) * ۶۵ = ۶۰/۴$$

ب. متغیر تصادفی X را زمان تاخیر دانشجوی دوم در نظر میگیریم. مانند قسمت قبل به ازای یک X مشخص داریم :

$$E[T] = p(T_۱ < x)E[T|T_۱ < x] + E[T] = p(T_۱ \geq x)E[T|T_۱ \geq x]$$

$$p(T_۱ < x) = F(x) = ۱ - e^{-\frac{x}{۳۰}}$$

$$p(T_۱ \geq x) = ۱ - F(x) = e^{-\frac{x}{۳۰}}$$

$$E[T|T_۱ < ۵] = E[T_۲ + x] = E[T_۲] + x = ۳۰ + x$$

$$E[T|T_۱ \geq ۵] = E[T_۲ + T_۱|T_۱ \geq ۵] = E[T_۲] + E[T_۱] + x = ۶۰ + x$$

$$E[T] = (۱ - e^{-\frac{x}{۳۰}}) * (۳۰ + x) + (e^{-\frac{x}{۳۰}}) * (۶۰ + x) = ۳۰e^{-\frac{x}{۳۰}} + ۳۰ + x$$

با محاسبه این مقدار برای تمامی x ها به ازای احتمال آن ها امید ریاضی خواسته شده بدست می‌آید:

$$\int_۰ +\infty\ (۳۰e^{-\frac{x}{۳۰}} + ۳۰ + x)\frac{۱}{۵}e^{-\frac{x}{۵}}dx = ۶۰/۷$$

موفق باشید.