سؤال 7.

$$F(x_i|\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2-\theta_1} & \text{For } \theta_1\le x_i\le\theta_2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \Rightarrow L(x_1,\dots,x_n|\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n$$

و x_iها هم باید بین θ_1, θ_2 باشند.

چون مستقل از هم اند

$$\hat{\theta}_1=\min x_i\ ,\ \hat{\theta}_2=\max x_i \Longleftarrow$$

اثبات سازگاری برای θ_2 $P(\max x_i\le t)=\begin{cases}0\\ \left(\frac{t-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n\\ 1\end{cases}$ پس

$$P(|\max x_i-\theta|>\varepsilon)$$

$$=\underbrace{P(\max x_i>\theta+\varepsilon)}_{0}+P(\max x_i\le\theta_2-\varepsilon)=\left\{\left(\frac{\theta_2-\varepsilon-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n\right.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_2-\theta_1-\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\right)^n=0$$ چون کسر کوچکتر از یک میشه ε

حالا برای unbiased بودن

$$P(X_{max}<x)=\underset{\forall i}{P}(X_i<x)=\begin{cases}1\\ \left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n\\ 0\end{cases}\Rightarrow f_{max}(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\frac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n}x^{n-1}\\ 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X_{max}]=\int_{\theta_1}^{\theta_2}x\frac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n}x^{n-1}dx=\frac{n}{n+1}\frac{(\theta_2^{n+1}-\theta_1^{n+1})}{(\theta_2-\theta_1)^n}\ ,\ \text{if } \theta_1=0\Rightarrow\frac{n}{n+1}\theta_2$$

باید در $\frac{n+1}{n}$ ضرب می کردیم.

۱) الف)

$$L(\theta; x_1,\dots,x_n) = \theta e^{-\theta x_1} \times \theta e^{-\theta x_2} \times \dots \times \theta e^{-\theta x_n}$$

$$= \theta^n \, e^{-\theta(x_1+\dots+x_n)}$$

حال برای اینکه این تابع را ماکزیمم کنیم، برای محاسبات ساده‌تر ln آن را ماکزیمم می‌کنیم.

$$l(\theta; x_1,\dots,x_n) = \ln\left(\theta^n e^{-\theta(x_1+\dots+x_n)}\right) = n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i$$

حال مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم.

$$\frac{d}{d\theta} l'(\theta; x_1,\dots,x_n) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

ب)

$$L(\mu,\sigma^2; x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

حال برای محاسبات ساده‌تر ln این تابع را بدست می‌آوریم.

$$\ln\left(L(\mu,\sigma^2; x_1,\dots,x_n)\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

حال برای بدست آوردن هر کدام از پارامترها مشتق این تابع را نسبت به آن پارامتر حساب می‌کنیم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$\mu: \frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\sigma^2} \times n\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

$$\sigma^2: \frac{\partial}{\partial \sigma^2} l(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - n \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}}}$$

نکته: جواب دیگر مسئله $\sigma^2 = 0$ نیز هست که برای این حالت باید تمام x_iها برابر و مساوی μ باشند که در این صورت

دو جواب بدست آمده مانند این حالت پوشش داده می‌شود.

ج) $y_i - ax_i - b = \alpha_i$, $\alpha_i \sim N(0, \sigma)$

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n; a, b) = f_{y_1 y_2 \dots y_n}(y_1, \dots, y_n; a, b) = f_{y_1} f_{y_2} f_{y_3} \dots f_{y_n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (y_i - ax_i - b)^2}$$

بنابراین برای یافتن پارامترهای a, b باید ماکزیمم این تابع را پیدا کنیم.

حال با توجه به مورد ۶ برای ماکزیمم شدن این تابع لازم است عبارت $\sum (y_i - a x_i - b)^2$ مینیمم شود:

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum (y_i - a x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} (-2)(y_i - a x_i - b) = 0 \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$$

که $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ و $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$.

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum (y_i - a x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} (-2x_i)(y_i - a x_i - b) = 0$$

$$\Rightarrow \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - (\bar{y} - a\bar{x}) \sum x_i = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i}$$

در نتیجه:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i} \quad , \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

5) MLE[A|X] فرض کنید $X=x$ پرتاب کاپیتان باشد

$$= \arg\max_{x} \ln\left(P(X=x \mid A=\lambda)\right) \quad 1$$

$$= \ln\left(\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!}\right) = -\ln(x!) + x\ln\lambda - \lambda \quad 2$$

$$l'(\lambda) = \frac{x}{\lambda} - 1 \Rightarrow l'(\lambda)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = X} \quad 2$$

b) MAP: $l(\lambda) = \ln P(X=x \mid A=\lambda)\, P(A=\lambda)$

$$= \ln\left(\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!}\, p(1-p)^{\lambda-1}\right) = -\ln(x!) + x\ln\lambda + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) - \lambda\ln\left(\frac{e}{1-p}\right)$$

4

$$\Rightarrow l'(\lambda) = \frac{x}{\lambda} - \ln\left(\frac{e}{1-p}\right) \Rightarrow MAP[A|X] = X\left(1+\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right)^{-1}$$

4 2

فرض می‌کنیم که M_i برابر با تعداد t های است که $X_t = i$.

آن‌گاه داریم که:

$$L(P_1,\dots,P_n) = \prod P_i^{M_i}$$

$$\Rightarrow \ln(L(P_1,\dots,P_n)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} P_i^{M_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\ln(P_i))$$

حال باید مقدار زیر را به دست آوریم:

$$\underset{P_1,\dots,P_n}{\operatorname{argmax}} \left(L(P_1,\dots,P_n) \;\middle|\; P_1+\dots+P_k = 1\right)$$

حال با استفاده از ضرایب لاگرانژ داریم:

$$L(P_1,\dots,P_n,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\ln(P_i)) + \lambda\left(1-\sum_{i=1}^{k} P_i\right)$$

و داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow \frac{M_i}{P_i} - \lambda = 0 \Rightarrow \hat{P}_i = \frac{M_i}{n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 1-\sum_{i=1}^{k} P_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} P_i = 1 \quad \underline{\text{valid}}$$

و مسئله حل است.

③ فرض می‌کنیم n بار این آزمایش را انجام داده، تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{نقطه i ام داخل دایره} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین تعریف می‌کنیم که:

$$P(X_i = 1) = P$$

یا معادلاً:

$$X_i \sim Bernoulli(P)$$

حال متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

حال داریم که اگر تخمین مان از عدد π را برابر با P_n بگیریم. داریم که:

زیرا این نسبت $\frac{\pi}{4}$ است دنبال π

$$P_n = \frac{4\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{4X}{n}$$

حال داریم که:

$$E[P_n] = \frac{4\sum_{i=1}^{n} E[X_i]}{n} = \frac{4.P.n}{n} = 4P \rightarrow \mu_{P_n} = 4P$$

$$Var[P_n] = \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{16}{n^2} \cdot n \cdot P \cdot (1-P)$$

$$= \frac{16 \cdot P \cdot (1-P)}{n} \Longrightarrow \sigma_{P_n} = \sqrt{\frac{16 . P . (1-P)}{n}}$$

پس داریم که طبق قانون حد مرکزی:

$$P_n \sim Normal\left(4P, \sqrt{\frac{16 . P . (1-P)}{n}}\right)$$

با استفاده از Z-test داریم:

$$Z = \frac{P_n - \mu_{P_n}}{\sigma_{P_n}} \sim Normal(0,1)$$

و باید داشته باشیم:

$$P(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = 0.95$$

$$\Rightarrow \quad P(Z \leq \alpha) - P(Z \leq -\alpha) = P(Z \leq \alpha) - \left(1 - P(Z \leq \alpha)\right)$$

$$= 2.P(Z \leq \alpha) - 1 = 0.95$$

$$\Rightarrow P(Z \leq \alpha) = 0.975 \Rightarrow \alpha = \Phi^{-1}(0.975) \simeq 1.96$$

پس داریم که:

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(-1.96 \leq \frac{P_n - \mu_{P_n}}{\sigma_{P_n}} \leq 1.96\right)$$

$$= P\left(-1.96\sqrt{\frac{16.P.(1-P)}{n}} + 4P \leq P_n \leq 1.96\sqrt{\frac{16.P.(1-P)}{n}} + 4P\right) = 0.95$$

همچنین باید داشته باشیم که:

$$1.96\sqrt{\frac{16.P.(1-P)}{n}} \leq 0.01$$

worst-case:

$$\Rightarrow \quad 1.96\sqrt{\frac{16.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{n}} \leq 0.01 \Rightarrow n \geq 153664$$

و مسئله حل است.

۱. به وضوح می‌دانیم که امید به زندگی هر دانشجو به احتمال 95% درون بازه $\{l_i, h_i\}$ قرار دارد.
که دانشجو $\{l_1, h_1\}, \dots, \{l_{20}, h_{20}\}$ همان 20 بازه اطمینان 95% ما هستند که مستقل
از هم هستند. پس به وضوح برای اینکه میزان امید زندگی در دقیقاً یکی از 20 بازه نباشد برابر است با:

$$20 \times \frac{5}{100} \times \left(\frac{95}{100}\right)^{19}$$

و مسئله حل است.

۲. طبق توضیحات بخش قبل داریم که احتمال اینکه امید به زندگی یک دانشجو در هیچ یک از 20 بازه نباشد
برابر است با:

$$\left(\frac{5}{100}\right)^{20}$$

و مسئله حل است.

۳. طبق توضیحات بخش الف داریم که احتمال اینکه امید به زندگی یک دانشجو در دست کم یکی از بازه‌ها باشد
برابر است با:

$$1 - \underbrace{\left(\frac{95}{100}\right)^{20}}_{\text{احتمال اینکه در تمام بازه‌ها باشد}}$$

و مسئله حل است.