



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: الهام منیفی

تمرین چهارم

زمان تحویل: ۲۹ اردیبهشت

لطفا پاسخ ها به همراه نام و شماره دانشجویی در سامانه درس افزار آپلود شوند.

سوال ۱. (۲۵ نمره)

تابع توزیع توام X, Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 < y < 1, 0 < x < 1-y \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف. مقدار c را بیابید.ب. تابع $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به دست آورید. (تابع چگالی حاشیه ای را برای X و Y پیدا کنید.)ج. آیا X و Y مستقل هستند؟د. $P(X < Y)$ را بیابید.

سوال ۲. (۲۰ نمره)

تابع توزیع توام X, Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} & x \geq 0, |y| < x \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف. تابع $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را حساب کنید.ب. مقادیر $E(Y|X=x)$ و $Var(Y|X=x)$ را بیابید.

سوال ۳. (۲۰ نمره)

یک بازیکن بسکتبال روزی $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ بار اقدام به پرتاب ۳ امتیازی می کند که هر پرتاب به طور مستقل به احتمال p تبدیل به امتیاز می شود. تعداد پرتاب های منجر به امتیاز را با $X|N \sim \text{Bin}(N, p)$ مدل سازی می کنیم.

الف. تابع جرم احتمال X را به دست آورید.

ب. اگر Y متغیر تصادفی نشان دهنده تعداد پرتاب های ناموفق باشد، تابع توزیع توام X و Y را بیابید. آیا X و Y از یکدیگر مستقل هستند؟

ج. (۵ نمره امتیازی) همبستگی بین X و N را بیابید.

سوال ۴. (۲۰ نمره)

دو آشپز به طور مستقل مشغول پخت یک غذا هستند. آشپز اول در $Y_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ و آشپز دوم در $Y_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ این غذا را می پزند.

الف. تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_1}{Y_2}$ را بیابید.

ب. به چه احتمالی آشپز اول زودتر از آشپز دوم غذا را آماده می کند؟

سوال ۵. (۱۵ نمره)

اگر بدانیم $V, W, Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ که مستقل باشند و داشته باشیم:

$$\begin{aligned} X &= V + W \\ Y &= V + Z \end{aligned}$$

الف. $\text{Cov}(X, Y)$ را به دست آورید. آیا این دو متغیر مستقل هستند؟

ب. آیا X و Y به شرط V مستقل اند؟

ج. (۱۰ نمره امتیازی) توزیع توام X و Y را محاسبه کنید.

سوال ۶. (اختیاری)

یک گروه کوهنوردی شش نفره می خواهند به کوه بروند. در نتیجه به دو گروه سه نفره تقسیم شدند که هر گروه با یک خودرو تا کوهپایه برود. با یکدیگر قرار گذاشتند که در یک مکان جمع شوند و حرکت را از آنجا شروع کنند. زمان رسیدن هر فرد از توزیع یکنواخت (۵، ۶) پیروی می کند. هنگامی که همه اعضای یک گروه رسیده باشند، خودرو آن گروه حرکت می کند. توزیع چگالی احتمال زمان حرکت اولین خودرو را به دست آورید.

موفق باشید.