بسمه تعالی

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: الهام منیفی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین سری دوم

زمان تحویل: تا آخر روز ۱۲ فروردین. پس از این روز، تا ۳ روز هم تمرین را با تاخیر می‌توانید ارسال کنید.

لطفا پاسخ‌ها به همراه نام و شماره دانشجویی در سامانه درس‌افزار آپلود شوند.

سوال اول (۱۰ نمره)

برای محاسبه احتمال رد کردن کیفیت محصولات آن روز تولید، می‌توانیم از فرمول احتمال دوجمله‌ای استفاده کنیم.
فرمول احتمال دوجمله‌ای به صورت زیر است:

$$P(X = k) = C(n, k) * p^k * (1 - p)^{(n-k)}$$

که در آن $P(X = k)$ احتمال داشتن دقیقاً k محصول معیوب در نمونه است، n اندازه نمونه، k تعداد محصولات معیوب، p احتمال معیوب بودن یک محصول است.
در این مورد، $n = 20$ (اندازه نمونه)، $p = 0.05$ (احتمال معیوب بودن یک محصولا) است؛ و ما می‌خواهیم احتمال داشتن بیش از یک محصول معیوب در نمونه را پیدا کنیم. می‌توانیم این احتمال را با یافتن احتمال داشتن ۰ یا ۱ محصول معیوب و سپس کم کردن آن از ۱ حساب کنیم.
احتمال داشتن ۰ محصول معیوب:

$$P(X = 0) = C(20, 0) * 0.05^0 * (1 - 0.05)^{(20-0)}$$

احتمال داشتن ۱ محصول معیوب:

$$P(X = 1) = C(20, 1) * 0.05^1 * (1 - 0.05)^{(20-1)}$$

حالا، ما باید احتمال داشتن ۰ یا ۱ محصول معیوب را پیدا کنیم:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

در نهایت، می‌توانیم احتمال رد کردن کیفیت محصولات (داشتن بیش از یک محصول معیوب در نمونه) را پیدا کنیم:

$$P(\text{reject}) = 1 - P(X \leq 1)$$

برای یافتن احتمال رد کردن کیفیت محصولات روز تولید، $P(X = 0)$، $P(X = 1)$، $P(X \leq 1)$ و $P(\text{reject})$ را محاسبه می‌کنیم.
ابتدا احتمال داشتن ۰ محصول معیوب را محاسبه می‌کنیم:

$$P(X = 0) = C(20, 0) \times 0.05^0 \times (1 - 0.05)^{(20-0)}$$

$$P(X=0) = 1 \times 1 \times (0.95)^{20} \approx 0.3585$$

سپس احتمال داشتن ۱ محصول معیوب را محاسبه می‌کنیم:

$$P(X=1) = C(20,1) \times 0.05^1 \times (1-0.05)^{(20-1)}$$

$$P(X=1) = 20 \times 0.05 \times (0.95)^{19} \approx 0.3774$$

حالا می‌توانیم احتمال داشتن ۰ یا ۱ محصول معیوب را محاسبه کنیم:

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$P(X \leq 1) \approx 0.3585 + 0.3774 \approx 0.7359$$

و در نهایت، می‌توانیم احتمال رد کردن کیفیت محصولات روز تولید را محاسبه کنیم:

$$P(\text{reject}) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$P(\text{reject}) \approx 1 - 0.7359 \approx 0.2641$$

بنابراین، احتمال رد کردن کیفیت محصولات روز تولید حدود 0.26 یا 26% است.

سوال دوم (۱۰ نمره)

برای حل این سوال، می‌توانیم از مفهوم جایگشت‌ها و ترکیب‌ها استفاده کنیم. ابتدا مواردی که تیم A می‌تواند قهرمان شود را بیابیم. تیم A می‌تواند در ۳، ۴ یا ۵ بازی قهرمان شود.

تیم A در بازی سوم قهرمان شود:

این حالت زمانی رخ می‌دهد که تیم A همه‌ی ۳ بازی اول را ببرد. احتمال این رویداد برابر است با:

$$P(A\,\text{wins in game}\,3) = p^3$$

تیم A در بازی چهارم قهرمان شود:

این حالت زمانی رخ می‌دهد که تیم A دو بازی از سه بازی اول را ببرد و سپس بازی چهارم را ببرد. به این منظور، باید تعداد حالات مختلفی که تیم A می‌تواند دو بازی از سه بازی اول را ببرد را حساب کنیم. این تعداد حالات برابر است با $C(3,2) = 3$. پس احتمال این حالت برابر است با:

$$P(A\,\text{wins in game}\,4) = C(3,2) \cdot p^3 \cdot (1-p)$$

تیم A در بازی پنجم قهرمان شود:

در این حالت، تیم A باید دو بازی از چهار بازی اول را ببرد و سپس حتما بازی پنجم را ببرد. به این منظور، باید تعداد حالات مختلفی که تیم A می‌تواند دو بازی از چهار بازی اول را ببرد را حساب کنیم. این تعداد حالات برابر است با $C(4,2) = 6$. پس احتمال این حالت برابر است با:

$$P(A\,\text{wins in games}\,5) = C(4,2) \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$$

احتمال قهرمانی تیم A برابر است با جمع احتمال‌های بدست آمده در هر یک از این سه حالت:

$$P(A\,\text{wins 3 games}) = P(A\,\text{wins in game}\,3) + P(A\,\text{wins in game}\,4) + P(A\,\text{wins in games}\,5)$$

برای $p = 0.4$ داریم:

$$P(A \text{ wins in game } 3) = (0.4)^3 = 0.064$$
$$P(A \text{ wins in game } 4) = C(3,2) \times (0.4)^3 \times (1-0.4) = 3 \times 0.064 \times 0.6 = 0.1152$$
$$P(A \text{ wins in games } 5) = C(4,2) \times (0.4)^3 \times (1-0.4)^2 = 6 \times 0.064 \times 0.36 = 0.13824$$

حال جمع این احتمال‌ها را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{champion becomes A}) = 0.064 + 0.1152 + 0.13824 = 0.31744$$

بنابراین، احتمال قهرمانی تیم A برای $p = 0.4$ برابر است با 0.32 یا حدودا 32%.

سوال سوم (۱۰ نمره)

الف) متغییر X_1 را مکان متحرک اول و متغییر X_2 را مکان متحرک دوم پس از n حرکت در نظر میگیریم:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | -n \leq x_1, x_2 \leq n, 2|n - x_1, 2|n - x_2\}$$

ب) دو متحرک از یکدیگر مستقل اند برای همین داریم:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \\ &= \binom{n}{\frac{n+x_1}{2}} p^{\frac{n+x_1}{2}} (1-p)^{\frac{n-x_1}{2}} \binom{n}{\frac{n+x_2}{2}} p^{\frac{n+x_2}{2}} (1-p)^{\frac{n-x_2}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n+x_1}{2}} \binom{n}{\frac{n+x_2}{2}} p^{n+\frac{x_1+x_2}{2}} (1-p)^{n-\frac{x_1+x_2}{2}} \end{aligned}$$

ج) برای حل این قسمت داریم:

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{x_1 - x_2 = y} P(X_1 = x_1)P(X-2 = x_2) \\ &= \sum_{-n \leq x_2 + y \leq n \wedge -n \leq x_2 \leq n} \binom{n}{\frac{n+y+x_2}{2}} \binom{n}{\frac{n+x_2}{2}} p^{n+\frac{y}{2}+x_2} (1-p)^{n-\frac{y}{2}-x_2} \\ &= p^{n+\frac{y}{2}} (1-p)^{n-\frac{y}{2}} \sum_{-n \leq x_2 + y \leq n \wedge -n \leq x_2 \leq n} \binom{n}{\frac{n+y+x_2}{2}} \binom{n}{\frac{n+x_2}{2}} (\frac{p}{1-p})^{x_2} \end{aligned}$$

این عبارت همینطور ساده نمیشود، برای ساده شدن آن فرض میکنیم که $p = 0.5$ باشد:

$$P(Y=y) = \sum_{x_1 - x_2 = y} P(X_1 = x_1)P(X-2 = x_2)$$
$$= (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{x_1 - x_2 = y} \binom{n}{\frac{n+x_1}{2}}\binom{n}{\frac{n+x_2}{2}}$$
$$= (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{x_1 - x_2 = y} \binom{n}{\frac{n-x_1}{2}}\binom{n}{\frac{n+x_2}{2}}$$
$$u_1 \equiv \frac{n-x_1}{2}, u_2 \equiv \frac{n+x_2}{2} \Rightarrow P(Y=y) = (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{u_1+u_2 = n - \frac{y}{2}} \binom{n}{u_1}\binom{n}{u_2}$$
$$= (\frac{1}{2})^{2n} \binom{2n}{n - \frac{y}{2}}$$

تساوی آخر به کمک دوگونه شماری به آسانی اثبات میشود

د) باید احتمال دو حالت $Y = m$ و $Y = -m$ (البته اگر $m = 0$ باشد این دو حالت یکی هستند)را با هم جمع کنیم.

و چون دو متحرک تفاوتی با هم ندارند تابع توزیع احتمال متغییر $X_1 - X_2$ و متغییر $X_2 - X_1$ یکسان است. پس احتمال $Y = m$ و $Y = -m$ برابر است

$$P(Z=m) = \begin{cases} 2p^{n+\frac{m}{2}}(1-p)^{n-\frac{m}{2}} \sum_{-n \le x_2 + m \le n \wedge -n \le x_2 \le n} \binom{n}{\frac{n+m+x_2}{2}}\binom{n}{\frac{n+x_2}{2}}(\frac{p}{1-p})^{x_2} & \text{if} \, m > 0 \\ p^n(1-p)^n \sum_{-n \le x_2 \le n} \binom{n}{\frac{n+x_2}{2}}^2 (\frac{p}{1-p})^{x_2} & \text{if} \, m = 0 \end{cases}$$

با فرض $p = 0.5$ داریم:

$$P(Z=m) = \begin{cases} 2(\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n-\frac{y}{2}} & \text{if} \, m > 0 \\ (\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n} & \text{if} \, m = 0 \end{cases}$$

ه) این حالت معادل این هست که $Z = 0$ باشد:

$$p_a = p^n(1-p)^n \sum_{-n \le x_2 \le n 2 | n - x_2} \binom{n}{\frac{n+x_2}{2}}^2 (\frac{p}{1-p})^{x_2} \text{if}$$

به کمک قسمت ب هم میتوان آن را حساب نمود:

$$\begin{aligned}
p_a &= \sum_{-n\le x_2\le n\wedge 2|n-x_2} P(X_1=-x_2)P(X-2=x_2)\\
&= \sum_{-n\le x_2\le n\wedge 2|n-x_2} \binom{n}{\frac{n-x_2}{2}}\binom{n}{\frac{n+x_2}{2}} p^n(1-p)^n\\
&= p^n(1-p)^n\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

تساوی آخر حالت خاص رابطه ای هست که در قست ج اثبات شد(به ازای $y=0$)

سوال چهارم (۱۰ نمره)

الف) داریم:

$$X\sim Poisson(\lambda)\Rightarrow P(X=i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

$$Y\sim Poisson(\mu)\Rightarrow P(Y=j)=e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!}$$

حال متغیر تصادفی مجموع را تعریف میکنیم:

$$Z:=X+Y$$

اکنون چون XوY مستقل هستند و مقادیر نامفی میگیرند برای توضیع متغیر تصادفی Z خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{i=0}^{n} P(X=i,Y=n-i)\\
&= \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=n-i)\\
&= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\Rightarrow Z\sim Poisson(\lambda+\mu)
\end{aligned}$$

ب) از قانون احتمال شرطی میدانیم:

$$\begin{aligned}
P(X=i|X+Y=n) &= \frac{P(X=i, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=i, Y=n-i)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=i)P(Y=n-i)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^i}{i!}\ e^{-\mu}\ \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!\ i!}\ \frac{\lambda^i\ \mu^{n-i}}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= \binom{n}{i}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-i}
\end{aligned}$$

در نتیجه با اطلاع از حاصل $X+Y$ متغیرتصادفی X توزیع دوجمله ای با پارامتر $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ و n خواهد بود.

سوال پنجم (۱۰ نمره)

الف) به این دلیل که میتوان شبانه روز را به تعداد بی شماری باز های زمانی تقسیم کرد که احتمال آمدن ایمیل در هر بازه زمانی خیلی کم هست ولی هر روز تعدادی ایمیل دریافت میشود. (در واقع تعداد بیشماری آزمایش برتولی هست که تعداد موفقیت ها یک مقدار معقول(نه خیلی کم و نه خیلی زیاد) میباشد) ب) داریم :

$$X \sim Poisson(k) \Rightarrow P(X=i) = e^{-k}\frac{k^i}{i!}$$

ج) احتمال اینکه ایمیل دریافتی در بازه iام باشد را p_i فرض میکنیم، اگر در روز n ایمیل دریافت شود:

$$\begin{aligned}
&np_1 = k_1 \\
&np_2 = k_2 \\
&np_3 = k_3 \\
&p_1 + p_2 + P_3 = 1 \\
&\Rightarrow n = k_1 + k_2 + k_3 \\
&\Rightarrow p_i = \frac{k_i}{k_1+k_2+k_3}
\end{aligned}$$

د) میتوان گفت که توزیع ایمیل ها یک برنولی هست با ثابت $k_1+k_2+k_3$ پس داریم:

$$X \sim Poisson(k_1+k_2+k_3) \Rightarrow P(X=m) = e^{-(k_1+k_2+k_3))}\frac{(k_1+k_2+k_3)^m}{m!}$$

ه) انتگرال این تابع باید یک باشد:

$$\int_0^{24} cxe^{-x}\,dx = (cx)(-e^{-x})|_0^{24} - \int_0^{24} -ce^{-x}\,dx = c(-24e^{-24} + 1 - e^{-24})$$
$$\int_0^{24} cxe^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{1-25e^{-24}}$$

و) احتمال این پیشامد را که یک ایمیل در ۱۲ ساعت اول روز آمده باشد را q مینامیم و احتمال خواسته شده را p_a مینامیم:

$$p_a = P_{poisoon-k}(m_1+m_2)q^{m_1}(1-q)^{m_2}$$
$$q = \int_0^{12} cxe^{-x}\,dx = c(1-13e^{-12}) = \frac{1-13e^{-12}}{1-25e^{-24}}$$
$$\Rightarrow p_a = e^{-k}\frac{k^{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)!}\left(\frac{1-13e^{-12}}{1-25e^{-24}}\right)^{m_1}\left(1-\frac{1-13e^{-12}}{1-25e^{-24}}\right)^{m_2}$$

سوال ششم (۱۰ نمره)

الف):

$$P(\Theta=\theta) = \begin{cases} 0 & \text{if}\, \theta \le 40 \\ \frac{1}{20} & \text{if}\, 40 \le \theta \le 60 \\ 0 & \text{if}\, 60 \le \theta \end{cases}$$

ب):

$$R = \frac{v^2\sin(2\Theta)}{g}$$
$$P(R \le r) = P(sin(2\Theta) \le \frac{rg}{v^2})$$
$$= P(\Theta \le \frac{\arcsin\frac{rg}{v^2}}{2} \vee \Theta \ge 90 - \frac{\arcsin\frac{rg}{v^2}}{2})$$
$$P(R \le r) = P(\Theta \le \frac{\arcsin\frac{rg}{v^2}}{2}) + P(\Theta \ge 90 - \frac{\arcsin\frac{rg}{v^2}}{2})$$
$$= F_\Theta(\frac{\arcsin\frac{rg}{v^2}}{2}) + 1 - F_\Theta(90 - \frac{\arcsin\frac{rg}{v^2}}{2})$$

$$F_\Theta(\Theta=\theta) = \begin{cases} 0 & \text{if}\, \theta \le 40 \\ \frac{\theta-40}{20} & \text{if}\, 40 \le \theta \le 60 \\ 1 & \text{if}\, 60 \le \theta \end{cases}$$

$$P(R \leq r) = \begin{cases} 0 & \text{if } \arcsin \frac{rg}{v^2} \leq 60 \\ \frac{\arcsin \frac{rg}{v^2} - 60}{40} & \text{if } 60 \leq \arcsin \frac{rg}{v^2} \leq 80 \\ \frac{\arcsin \frac{rg}{v^2} - 70}{20} & \text{if } 80 \leq \arcsin \frac{rg}{v^2} \end{cases}$$

سوال هفتم (۱۰ نمره)

الف)

رضا نیاز دارد که دقیقاً r بار سکه را پرتاب کند، و احتمال بدست آوردن شیر در هر بار پرتاب p است. متغیر تصادفی X تعداد پرتاب‌های مورد نیاز برای بردن رضا را نشان می‌دهد. این یک مسئله توزیع دوجمله‌ای منفی است، و ما باید احتمال $P(X = x)$ را پیدا کنیم.

تابع جرم احتمال (PMF) توزیع دوجمله‌ای منفی به صورت زیر است:

$$P(X = x) = C(x - 1, r - 1) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{x-r}$$

که در آن x تعداد آزمایش‌ها، r تعداد موفقیت‌های مورد نیاز، و p احتمال موفقیت در هر آزمایش است.

$C(x - 1, r - 1)$ تعداد ترکیب‌هاست و می‌توان آن را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$C(x - 1, r - 1) = \frac{(x - 1)!}{(r - 1)! \cdot (x - r)!}$$

ب)

برای به دست آوردن امید ریاضی متغییر تصادفی X به ازای X های بزرگ‌تر مساوی r، می‌توانیم از فرمول امید ریاضی برای توزیع هندسی استفاده کنیم:

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

در این فرمول، p احتمال شیر آمدن سکه و r تعداد شیرهای مورد نیاز است.

ج)

برای به دست آوردن امیدریاضی جایزه، ابتدا باید متغییر تصادفی جدیدی را تعریف کنیم که برابر با ارزش جایزه باشد. متغییر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = 1000 - 100X$$

حالا برای به دست آوردن امیدریاضی جایزه یعنی $E[Y]$، از فرمول امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E[Y] = E[1000 - 100X] = 1000 - 100E[X]$$

از بخش (ب) می‌دانیم که $E[X] = \frac{r}{p}$، بنابراین:

$$E[Y] = 1000 - 100 \cdot \frac{r}{p} = 1000 - \frac{100r}{p}$$

بنابراین امیدریاضی جایزه برابر است با $1000 - \frac{100r}{p}$.

سوال هشتم (۱۴ نمره)

الف) پیشآمد A را بگیرید، پیشامدی که دومین اشتباه در صفحه r باشد. و همچنین پیشامد B را پشامد رخ دادن اشتباه اول در $r-1$ صفحه اول باشد، انگاه از قانون احتمال کل خواهیم داشت:

$$P(A) = P(A|B) + P(A|B^c) \tag{۱}$$

برای محاسبه $P(A|B)$ توجه کنید که در $r-1$صفحه اول، باید دقیقا در یک صفحه، یک اشتباه رخ داده باشد بعلاوه در صفحه r-ام بیش از یک خطا رخ دهد (مکمل پیشامد رخ ندادن هیج خطا)، که از مستقل بودن خطا ها در صفحه های متفاوت خواهیم داشت:

$$P(A|B) = \binom{r-1}{1}(\lambda\frac{e^{\lambda}}{1!})\,(\frac{e^{\lambda}}{0!})^{r-2}\,(1-\frac{e^{\lambda}}{0!}) = r\lambda e^{(r-1)\lambda}(1-e^{\lambda}) = r\lambda e^{(r-1)\lambda} - r\lambda e^{r\lambda}$$

برای محاسبه $P(A|B^c)$ نیز باید خطای اول و دوم در صفحه r رخ داده باشند، یا بعبارت دیگر در هیچ یک از $r-1$ صفحه اول خطایی رخ نداده باشد و در صفحه r-ام بیش از دو خطا رخ دهد:

$$P(A|B^c) = (\frac{e^{\lambda}}{0!})^{r-1}(1-\frac{e^{\lambda}}{0!}-\lambda\frac{e^{\lambda}}{1!}) = e^{(r-1)\lambda} - (1+\lambda)e^{r\lambda}$$

حال از (1) خواهیم داشت:

$$P(A) = r\lambda e^{(r-1)\lambda} - r\lambda e^{r\lambda} + e^{(r-1)\lambda} - (1+\lambda)e^{r\lambda} = (r\lambda+1)e^{(r-1)\lambda} - (1+\lambda+r\lambda)e^{r\lambda}$$

ب) متغیر تصادفی N را تعداد کل اشتباهات میگیریم، یعنی:

$$N \sim Poisson(\lambda)$$

در این صورت توزیع متغیر تصادفی X به شرط $N=n$ توزیع دوجمله ای با پارامتر های (n,p) است،یعنی:

$$P(X=k|N=n) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & k \leq n \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{۲}$$

حال از قانون احتمال کل میدانم:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=k, N=n) \\ &= P(N=n)P(X=k|N=n) \end{aligned}$$

که مقدار $P(X=k|N=n)$ برای مقادیر $n<k$ صفر است. ذر ادامه با استفاده از (1) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\,p^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\,p^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+l}}{(l)!}(1-p)^l \quad (l:=n-k) \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^l}{(l)!} \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}\ e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

که از تساوی بالا نتیجه میشود متغیر X، توزیع پواسون با پارمتر (λp) است. همینطور بصورت مشابه نتیجه می شود Y توزیع پواسون با پارامتر $(\lambda(1-p))$ دارد. اکنون برای نشان دادن مستقل بودن آن دو کافی است نشان دهیم:

$$P(X=k, Y=l) = P(X=k)P(Y=l)$$

برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} P(X=k, Y=l) &= P(X=k, N=k+l) \\ &= P(N=k+l)P(X=k|N=k+l) \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\binom{k+l}{k}p^k(1-p)^l \\ &= e^{-k\lambda}\ e^{-l\lambda}\frac{\lambda^k\lambda^l}{k!l!}p^k(1-p)^l \\ &= e^{-k\lambda}\ \frac{(p\lambda)^k}{k!}\ e^{-l\lambda}\ \frac{[(1-p)\lambda]^l}{l!} \\ &= P_X(k)P_Y(l) \end{aligned}$$

سوال نهم (۶ نمره)

میدانیم برای هر متغیر تصادفی $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ داریم:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

پس با استفاده از جدول مقادیر نرمال استاندارد خواهیم داشت:

الف)

$$\begin{aligned} P(11 \leq x \leq 15) &= P(\frac{11-10}{2} \leq \frac{X-10}{2}) \leq \frac{15-10}{2}) \\ &= P(0.5 \leq Z \leq 2.5) \\ &= P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq 0.5) \\ &= 0.9938 - 0.6915 = 0.3023 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} p(11 \leq x \leq 15 \mid 9 \leq x) &= \frac{p(11 \leq x \leq 15, 9 \leq x)}{p(9 \leq x)} \\ &= \frac{p(11 \leq x \leq 15)}{p(9 \leq x)} \\ &= \frac{P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq 0.5)}{p(-0.5 \leq Z)} \\ &= \frac{P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq 0.5)}{p(Z \leq 0.5)} \\ &= \frac{0.3023}{0.6915} \approx 0.4372 \end{aligned}$$

ج)

$$
\begin{aligned}
f(x \mid (x-10)^2 \leq 16) &= f(x \mid -4 \leq x-10 \leq 4) \\
&= \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(-4 \leq x-10 \leq 4)} & 6 \leq x \leq 14 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(-2 \leq \frac{x-10}{2} \leq 2)} & 6 \leq x \leq 14 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(-2 \leq Z \leq 2)} & 6 \leq x \leq 14 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{0.95}\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\ exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-10}{2})^2) & 6 \leq x \leq 14 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1.9\sqrt{\pi}}\ exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-10}{2})^2) & 6 \leq x \leq 14 \\ 0 & otherwise. \end{cases}
\end{aligned}
$$

سوال امتیازی (۱۰ نمره)

$$
f_P(p) = \begin{cases} pe^p & \text{if} \, 0 \leq p \leq 1 \\ 0 & otherwise. \end{cases}
$$

الف) A را پیشامدی که نتیجه پرتاب اول سکه شیر بیابد بگیرید، اکنون از نسخه پیوسته قانون احتمال کل میدانیم:

$$
P(A) = \int_0^1 P(A|P=p) f_P(p) dp = \int_0^1 p^2 e^p dp
$$

بعد از محاسبه انتگرال مشخص بالا خواهیم داشت:

$$
P(A) = e - 2 \tag{۳}
$$

ب) هدف محاسبه مقدار $f_P|A(p)$ است، با استفاده از قانون بیز داریم:

$$
\begin{aligned}
f_{P|A}(p) &= \frac{P(A|P=p) f_P(p)}{P(A)} \\
&= \begin{cases} \frac{p^2 e^p}{e-2} & 0 \leq p \leq 1 \\ 0 & otherwise. \end{cases}
\end{aligned} \tag{۴}
$$

ج)B را پیشامد شیر آمدن دومین پرتال بگیرید، اکنون از (3) و (4) و قانون احتمال کل پیوسته، مشابه قیسمت الف خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \int_0^1 P(B|P=p, A) f_{P|A}(p) dp \\ &= \int_0^1 P(B|P=p) f_{P|A}(p) dp \\ &= \frac{1}{e-2} \int_0^1 p^3 e^p dp \end{aligned}$$

دقت کنید که به شرط اطلاع از P از مستقل بودن نتیجه پرتاب های مختلف در رسیدن به خط دوم استفاده کردیم، اکنون پس از محاسبه انتگرال به جواب زیر خواهم رسید:

$$P(B|A) = \frac{1}{e-2}(6-2e) \approx 0.784.$$