بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱
طراحان: امیررضا آذری، غزل طحان

پاسخنامه تمرین چهارم

سوال ۱.(۲۵ نمره)

تابع توزیع توام X, Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 < y < 1, 0 < x < 1-y \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف. مقدار c را بیابید.

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} c(x+y)dxdy = c\int_0^1 (\frac{x^2}{2} + xy)|_0^{1-y}dy$$
$$= c\int_0^1 (\frac{(1-y)^2}{2} + (1-y)y)dy = c\int_0^1 (\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2})dy = c(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = 1$$
$$\Rightarrow c = 3$$

ب.
تابع $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به دست آورید.(تابع چگالی حاشیه ای را برای Y و X پیدا کنید.)

شروط داده شده در تابع را می‌توان به دو صورت نوشت:

$$0 < y < 1, 0 < x < 1-y$$

یا

$$0 < x < 1, 0 < y < 1-x$$

در نتیجه برای بازه ۰<x<۱ داریم:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x}(x+y)dy = (3xy + \frac{3y^2}{2})|_0^{1-x} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2$$

و برای بازه ی ۰<y<۱ داریم:

$$f_Y(y) = \int_{۰}^{۱-y} (x+y)dx = (۳xy + \frac{۳x^{۲}}{۲})|_{۰}^{۱-y} = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}y^{۲}$$

پس در کل بازه ی تعریف:

$$f_{X(}x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}x^{۲} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

$$f_{Y(}y) = \begin{cases} \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}y^{۲} & ۰ < y < ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

ج.
آیا Y و X مستقل هستند؟

XوY مستقل نیستند چون:

$$f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$$

د.
$P(X < Y)$ را بیابید.

با توجه به شرایط داده شده در تابع احتمال، اگر بخواهیم $P(X < Y)$ را بیابیم، خواهیم داشت:

$$P(X<Y) = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \int_{x}^{۱-x} ۳(x+y)dxdy = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} (۳xy + \frac{۳y^{۲}}{۲})|_{x}^{۱-x} dx$$
$$= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} (\frac{۳}{۲} - ۶x^{۲})dx = (\frac{۳}{۲} - ۲x^{۳})|_{۰}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

این نتیجه با توجه به تقارن مسئله نیز قابل حدس بود.

سوال ۲.(۲۰ نمره)

تابع توزیع توام X, Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}\mathrm{e}^{-x} & x \geq ۰, |y| < x \\ ۰, & O.W. \end{cases}$$

الف.
تابع $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را حساب کنید.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{۱}{۲}e^{-x}}{\int_{|y|}^{\infty}\frac{۱}{۲}e^{-x}dx} = e^{-x+|y|}, \qquad x > |y|$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{۱}{۲}e^{-x}}{\int_{-x}^{x}\frac{۱}{۲}e^{-x}dy} = \frac{۱}{۲x}, \qquad y < |x|$$

ب.

مقادیر $E(Y|X=x)$ و $Var(Y|X=x)$ را بیابید.

با توجه به قسمت قبل، با دانستن $X = x, Y$ یک متغیر تصادفی یونیفرم روی بازه ی x- تا x است. پس:

$$E(Y|X=x) = ۰$$
$$Var(Y|X=x) = \frac{[x-(-x)]^۲}{۱۲} = \frac{x^۲}{۳}$$

سوال ۳.(۲۰ نمره)

یک بازیکن بسکتبال روزی $N \sim Poisson(\lambda)$ بار اقدام به پرتاب ۳ امتیازی می کند که هر پرتاب به طور مستقل به احتمال p تبدیل به امتیاز می شود. تعداد پرتاب های منجر به امتیاز را با $X|N \sim Bin(N,p)$ مدل سازی می کنیم.

الف.

تابع جرم احتمال X را به دست آورید.

$$P(X=i) = \sum_{n=i}^{\infty} P(X=i|N=n)P(N=n) = \sum_{n=i}^{\infty}\binom{n}{i}p^i(۱-p)^{n-i}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} =$$
$$\frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!}\sum_{t=۰}^{\infty}\frac{((۱-p)\lambda)^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!}e^{(۱-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}}{i!} \Rightarrow X \sim Poisson(\lambda p)$$

ب.

اگر Y متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد پرتاب‌های ناموفق باشد، تابع توزیع توام Y و X را بیابید.
آیا Y و X از یکدیگر مستقل هستند؟

طبق توضیحات سوال: $N = X + Y$ پس یکی از روش های محاسبه تابع توزیع توام این دو به این شکل است:

$$P(X=i, Y=j) = \Sigma P(X=i, Y=j|N=n)P(N=n) =$$
$$P(X=i, Y=j|N=i+j)P(N=i+j)$$

میدانیم که اگر $X=i$ و $N=i+j$ پس به طور خودکار $Y=j$. پس اگر احتمال موفقیت آمیز نبودن پرتاب را $q=1-p$ درنظر بگیریم داریم:

$$P(X=i,Y=j|N=i+j)P(N=i+j)=P(X=i|N=i+j)P(N=i+j)$$
$$=\binom{i+j}{i}p^iq^i\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}}{(i+j)!}=\frac{(i+j)!}{i!j!}p^iq^j\frac{e^{-\lambda(p+q)}\lambda(i+j)}{(i+j)!}$$
$$=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^j}{j!}$$

بنابراین توزیع توام X و Y به شکل زیر خواهد بود:

$$P(X=i,Y=j)=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^j}{j!}$$

به شکل مشابه میتوان نشان داد: $Y\sim Poisson(\lambda q)$

$$P(X=i,Y=j)=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^j}{j!}=P(X=i)P(Y=j)$$

پس X و Y مستقل اند!

ج.
(۵ نمره امتیازی) همبستگی بین N و X را بیابید.

$$Cov(X,N)=Cov(X,X+Y)=Cov(X,X)+Cov(X,Y)=Var(X)=\lambda p$$
$$Corr(X,N)=\frac{Cov(X,N)}{\sqrt{\sigma_X\sigma_N}}=\frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda\lambda p}}=\sqrt{p}$$

سوال ۴.(۲۰ نمره)

دو آشپز به طور مستقل مشغول پخت یک غذا هستند. آشپز اول در $Y_1\sim Exp(\lambda_1)$ و آشپز دوم در $Y_2\sim Exp(\lambda_2)$ این غذا را می پزند.

الف.
تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_1}{Y_2}$ را بیابید.

$$Z=\frac{Y_1}{Y_2}$$
$$F_Z(z)=P(Z<z)=P(\frac{Y_1}{Y_2}<z)=P(Y_1<Y_2z)$$

$$\Rightarrow = \int_0^\infty \int_{\frac{y_1}{z}}^\infty f_{Y1}(y_1) f_{Y2}(y_2) dy_2 dy_1$$
$$= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} \int_{\frac{y_1}{z}}^\infty \lambda_2 e^{\lambda_2 y_2} dy_2 dy_1$$
$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{z}}$$

حال که تابع توزیع تجمعی را به دست آوردیم، با مشتق گرفتن از آن میتوانیم به تابع چگالی احتمال برسیم:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 + \lambda_1 z)^2}$$

ب.
به چه احتمالی آشپز اول زودتر از آشپز دوم غذا را آماده می‌کند؟

$$P(Y_1 < Y_2) = \int_0^\infty \int_0^{y_2} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) dy_1 dy_2$$
$$= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2} \int_0^{y_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} dy_1 dy_2$$
$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

سوال ۵.(۱۵ نمره)

اگر بدانیم $V, W, Z \sim Poisson(\lambda)$ که مستقل باشند و داشته باشیم:

$$X = V + W$$
$$Y = V + Z$$

الف. $Cov(X, Y)$ را به دست آورید. آیا این دو متغیر مستقل هستند؟

$$Cov(X, Y) = Cov(V + W, V + Z) =$$
$$Cov(V, V) + Cov(V, Z) + Cov(W, V) + Cov(W, Z) =$$
$$Var(V) = \lambda$$

چون $Cov(X, Y) \neq 0$ بنابراین مستقل نمی‌باشند.

ب.

آیا Y و X به شرط V مستقل‌اند؟

نشان می‌دهیم این دو متغیر به شرط V مستقل هستند:

$$P(X=x,Y=y|V=v)=P(W=x-v,Z=y-v|V=v)$$
$$=P(W=x-v,Z=y-v)=P(W=x-v)P(Z=x-v)$$
$$=P(X=x|V=v)P(Y=y|V=v)$$

ج.

(۱۰ نمره امتیازی) توزیع توام Y و X را محاسبه کنید.

$$P(X=x,Y=y)=\sum_{v=۰}^{\infty}P(X=x,Y=y|V=v)P(V=v)$$
$$=\sum_{v=۰}^{min(x,y)}P(X=x|V=v)P(Y=y|V=v)P(V=v)$$
$$=\sum_{v=۰}^{min(x,y)}P(W=x-v)P(Z=x-v)P(V=v)$$
$$=\sum_{v=۰}^{min(x,y)}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x-v}}{(x-v)!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{y-v}}{(y-v)!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{v}}{(v)!}$$
$$=e^{-۳\lambda}\lambda^{x+y}\sum_{v=۰}^{min(x,y)}\frac{\lambda^{-v}}{(x-v)!(y-v)!v!}$$

موفق باشید.