



## آمار و احتمال مهندسی

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲  
مدرس: الهام منیفی

## تمرین پنجم

زمان تحویل: ۱۳ خرداد

لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در سامانه درس افزار آپلود شوند.

## سوال اول (۲۰ نمره)

متغیرهای مستقل از هم  $X_1, X_2, \dots$  که برای هر  $i = 1, 2, \dots$   $E[X_i] = \mu_i$  و  $Var(X_i) = \sigma_i^2$  است را در نظر بگیرید. فرض کنید که برای تمامی مقادیر  $i$  ها  $0 \leq \sigma_i^2 \leq M$  برقرار است.  $a$  را یک عدد مثبت دلخواه در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از نامساوی چبی شف نشان دهید که:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i\right| \geq a\right) \leq \frac{Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)}{n^2 a^2}$$

که  $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$  است.

ب) با استفاده از نتیجه بخش قبل نشان دهید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i\right| \geq a\right) = 0$$

## سوال دوم (۲۰ نمره)

توالی متغیرهای تصادفی  $U_1, U_2, \dots$  را در نظر بگیرید که همه آنها مستقل از هم هستند و توزیع احتمال آنها  $Uniform(0, 1)$  است. متغیر تصادفی  $N(x)$  را در نظر بگیرید که:

$$N(x) = \min\left\{n : \sum_{i=1}^n U_i \geq x\right\}$$

الف) با کمک استقرا بر  $n$  اثبات کنید که برای  $0 < x \leq 1$  و همه  $n \geq 0$  ها:

$$P\{N(x) \geq n+1\} = \frac{x^n}{n!}$$

ب) باتوجه به بخش قبل نشان دهید:

$$E[N(x)] = e^x$$

### سوال سوم (۲۰ نمره)

در انتخابات شورای صنفی دانشکده ۵۰ درصد از دانشجویان از پرنیان حمایت می کنند، ۲۰ درصد از رضا، و بقیه از فرزاد و باقر و احمد حمایت می کنند. در یک نظرسنجی از ۴۰۰ نفر پرسیده می شود که از چه کسی حمایت می کنند.

الف) با استفاده از قضیه حد مرکزی احتمال آن که حداقل ۵۲.۵ درصد شرکت کنندگان نظرسنجی حامی پرنیان باشند را بدست آورید.

ب) با استفاده از قضیه حد مرکزی احتمال آن که کمتر از ۲۵ درصد شرکت کنندگان از فرزاد، باقر یا احمد حمایت کنند را بدست آورید.

### سوال چهارم (۲۰ نمره)

سه متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  و  $Z$  را در نظر بگیرید.  
الف) ثابت کنید

$$P_{X,Y,Z}(x, y, z) = P_X(x)P_{Y|X}(y|x)P_{Z|X,Y}(z|x, y)$$

ب) با استفاده از استقرا این قانون را به بیشتر از ۳ متغیر تصادفی تعمیم دهید.

### سوال پنجم (۲۰ نمره)

برای جلوگیری از ساختن سکه توسط بانک مرکزی می خواهیم تمام واحد های پولی کمتر از ۵۰ تومان را از لیست قیمت کالا ها حذف کنیم. برای این کار روش گرد کردن را به کار می بریم. فرض کنید در یک روز یک لیست سفارش به تعداد  $n = 1000$  داشته باشیم. به طوری که در قیمت آن ها واحد پولی زیر ۵۰ تومان نداشته باشیم. (برای مثال ۳۵۶۰ تبدیل به ۳۵۵۰ تومان شده و ۳۵۸۰ تومان تبدیل به ۳۶۰۰ تومان می شود.) حال متغیر  $p$  را احتمال آن در نظر بگیرید که قدر مطلق خطای گرد کردن قیمت لیست سفارشات یک روز از  $t = 1000$  تومان بیشتر شود. مقدار متغیر  $p$  را با استفاده از قضیه حد مرکزی تخمین بزنید.

### سوال ششم (۲۵ نمره امتیازی)

متغیرهای تصادفی مستقل از هم  $X_1, X_2, \dots, X_n$  را در نظر بگیرید که همه آنها از توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  هستند.

$$Y_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

الف) تابع چگالی احتمال توزیع توام  $Y_1, \dots, Y_n$  را بدست آورید.

ب) با استفاده از نتیجه بخش قبل تابع چگالی توزیع احتمال را برای متغیر تصادفی  $Y_n$  بدست آورید.