



## آمار و احتمال مهندسی

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲  
مدرس: الهام منیفی

## تمرین سوم

زمان تحویل: تا آخر روز دوشنبه ۴ اردیبهشت ماه .  
لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در کونرا آپلود شوند.

سوال ۱. (۳۰ نمره)

الف. اگر متغیر تصادفی  $X$  از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  پیروی کند، اثبات کنید که داریم  

$$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$$

ب. اگر متغیر تصادفی  $X$  از توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  پیروی کند، اثبات کنید که برای  $n \geq 2$  داریم  

$$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

ج. اگر متغیر تصادفی  $X$  از توزیع هندسی با پارامتر  $p$  پیروی کند، اثبات کنید که داریم  

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{-p \ln p}{1-p}$$

سوال ۲. (۱۰ نمره)

فرض کنید داریم  $X \sim Uniform(-\frac{\pi}{4}, -\pi)$  و  $Y = \sin(X)$ ،  $f_Y(y)$  را بدست آورید.

سوال ۳. (۱۵ نمره)

الف. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع  $N(0, 4)$  باشند و  $J$  کمترین مقدار  $j$  را نشان دهد به طوری که  $X_j > 4$  (به عبارت دیگر، اندیس اولین  $X_j$  که بیشتر از ۴ است). با استفاده از  $\Phi$ ،  $E(J)$  را پیدا کنید.

ب. فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع چگالی احتمال باشند به طوری که  $f(x) > 0$  و  $g(x) > 0$  برای همه  $x$  ها برقرار باشد. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی  $f$  باشد. امید ریاضی نسبت زیر را بیابید:

$$R = \frac{g(X)}{f(X)}$$

ج.  $F(x) = e^{-e^{-x}}$  یک تابع توزیع تجمعی پیوسته و اکیدا صعودی است. فرض کنید  $X$  تابع توزیع تجمعی  $F$  را داشته باشد و  $W = F(X)$  را تعریف میکنیم. میانگین و واریانس  $W$  چیست؟

سوال ۴. (۱۵ نمره)

فرض کنید  $X$  متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f = \begin{cases} x^2(2x + \frac{3}{4}) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اگر  $Y = \frac{2}{X} + 1$  باشد،  $Var(Y)$  را بدست آورید.

سوال ۵. (۲۰ نمره)

فرض کنید  $n$  توپ و  $n$  ظرف وجود دارد. توپ‌ها را به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت داخل ظرف‌ها قرار می‌دهیم. فرض کنید  $X_i$  تعداد توپ‌های قرار گرفته در ظرف  $i$  ام باشد و  $X = \max \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  باشد.

الف. نشان دهید  $Pr(X_i \geq t) \leq \frac{1}{t}$

ب. نشان دهید  $Pr(X_i \geq t + 1) \leq \frac{1}{t^2}$

ج. (۵ نمره امتیازی) نشان دهید  $Pr(X \geq 1 + 2\sqrt{n}) \leq \frac{1}{n}$

سوال ۶. (۱۰ نمره)

استاد حواس پرتی را در نظر بگیرید که برای دو دانشجو به صورت همزمان قرار ملاقات می‌گذارد. اما متأسفانه در هر زمان فقط می‌تواند با یک دانشجو ملاقات کند. مدت زمان ملاقات دو دانشجو مستقل از هم و دارای توزیع نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه می‌باشد. امید ریاضی فاصله زمانی بین ورود دانشجوی اول و خروج دانشجوی دوم را در دو حالت زیر بیابید.

الف. دانشجوی اول سر وقت حاضر می‌شود ولی دانشجوی دوم ۵ دقیقه دیرتر می‌رسد.

ب. (۱۰ نمره امتیازی) دانشجوی اول سر وقت حاضر می‌شود ولی دانشجوی دوم  $X$  دقیقه دیر می‌رسد. به طوریکه  $X$  دارای توزیع نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.

---

موفق باشید.