



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲
مدرس: الهام منیفی

تمرین سری دوم

زمان تحویل: تا آخر روز ۱۲ فروردین. پس از این روز، تا ۳ روز هم تمرین را با تاخیر می توانید ارسال کنید.
لطفا پاسخ ها به همراه نام و شماره دانشجویی در سامانه درس افزار آپلود شوند.

سوال اول (۱۰ نمره)

یک شرکت تولیدی در هر روز ۵۰۰۰ قطعه از محصولی تولید می کنند.
در پایان هر روز واحد کنترل کیفیت این شرکت محصولات تولید شده را بررسی و در صورت تایید، محصولات به بازار عرضه می شوند. بازرسان واحد کنترل کیفیت از محصولات تولید شده به تصادف ۲۰ عدد از محصولات را انتخاب می کنند و اگر در این نمونه بیش از یک محصول معیوب مشاهده کنند، محصولات را تایید نخواهند کرد.
حال اگر ۵٪ محصولات تولیدی در یک روز معیوب باشند، احتمال رد کیفیت محصولات آن روز تولیدی را محاسبه کنید.

سوال دوم (۱۰ نمره)

دو تیم A و B را در نظر بگیرید که برای کسب قهرمانی رقابت می کنند. برای مشخص شدن قهرمان، این دو تیم، تعدادی بازی انجام می دهند.
هر تیمی که برنده ۳ بازی شود، قهرمان می شود. همچنین در نظر داشته باشید که حداکثر ۵ بازی برگزار می شود.
فرض کنید p احتمال برنده شدن تیم A در هر بازی می باشد و نتایج هر بازی، مستقل از یکدیگر می باشند. احتمال قهرمانی تیم A را بیابید. سپس برای $p = 0.4$ ، مقدار عددی این احتمال را حساب کنید.

سوال سوم (۱۰ نمره)

دو متحرک روی محور x در نظر بگیرید. در هر گام هر یک از متحرک ها به احتمال p به سمت راست یعنی جهت افزایش x و به احتمال $1 - p$ به سمت چپ می رود. هر دو متحرک از مبدا مختصات شروع به حرکت می کنند. فرض کنید که برای هر آزمایش احتمالی این دو متحرک از مبدا شروع به حرکت می کنند و پس از n حرکت می ایستند و ما مکان نهایی این دو متحرک را مشاهده می کنیم.
این دو متحرک مستقل از یکدیگر هستند.
(الف) فضای نمونه این آزمایش را بیابید.
(ب) تابع توزیع احتمال این آزمایش را بیابید.
(ج) متغیر تصادفی Y را مکان متغیر دوم منهای مکان متغیر اول پس از n گام تعریف می کنیم،

تابع احتمال متغیر Y را بیابید. (جواب را به صورت بسته بنویسید و به صورت یک سری رها نکنید!)
 (د) - متغیر تصادفی Z را قدر مطلق متغیر Y تعریف می کنیم. احتمال $P[Y = m]$ را بیابید.
 (ه) - احتمال اینکه این دو متحرک پس از n گام در یک خانه یکسان بایستند را یکبار به کمک قسمت ب و سپس به کمک قسمت د به دست آورید. (برابری دو راه یک اتحاد ترکیباتی جالب هست:)

سوال چهارم (۱۰ نمره)

X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع پواسون با پارامترهای بترتیب λ و μ در نظر بگیرید.
 الف) توزیع $X + Y$ را بدست بیاورید.
 ب) نشان دهید اگر بدانیم $X + Y = n$ آنگاه توزیع متغیر تصادفی X توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و $\lambda/(\lambda + \mu)$ خواهد شد.

سوال پنجم (۱۰ نمره)

می خواهیم رخداد دریافت ایمیل در صندوق پستی الکترونیکی مان را بررسی کنیم.
 الف) - توضیح دهید که چرا تعداد ایمیل هایی که یک فرد در طول روز دریافت می کند از توزیع پواسون پیروی می کند.
 ب) - اگر در طول یک شبانه روز میانگین تعداد ایمیل های دریافتی ما k عدد باشد، توزیع تعداد ایمیل های دریافتی در یک شبانه روز را به دست آورید.
 ج) - فرض کنید که ما به این نتیجه رسیدیم که در بازه ۸ الی ۱۷ (بازه ای به طول T_1) به طور میانگین k_1 ایمیل دریافت می کنیم، در بازه ۱۷ الی ۲۴ (بازه ای به طول T_2) به طور میانگین k_2 ایمیل و در بازه ۲۴ الی ۸ روز فردا (بازه ای به طول T_3) به طور میانگین k_3 ایمیل دریافت می کنیم. احتمال اینکه یک ایمیل در هر یک از بازه های گفته شده قرار بگیرد را حساب کنید، فرض کنید توزیع احتمال زمان دریافت ایمیل در داخل هر یک از سه بازه یک نواخت است.
 د) - بر اساس فرض های گفته شده در قسمت ج احتمال اینکه تعداد ایمیل هایی که در طول روز می آید m ایمیل باشد را بر حسب k_i ها، T_i ها و m بیابید.
 ه) - به جای قسمت ج فرض کنید که به شرطی که یک ایمیل دریافت شده باشد تابع توزیع زمانی آن از رابطه زیر پیروی می کند، مقدار ثابت c را بیابید. (زمان را بر اساس ساعت ورودی می دهیم.)

$$f(x) = cxe^{-x}; 0 \leq x < 24$$

و) - حالا احتمال اینکه در طول ۱۲ ساعت اولیه روز m_1 ایمیل و در طول ۱۲ ساعت دوم روز m_2 ایمیل دریافت کنیم را حساب کنید.

سوال ششم (۱۰ نمره)

یک توپ جنگی داریم که گلوله های توپ را با سرعت v و تحت زوایای مختلف پرتاب می کند. فرض کنید که زاویه توپ از ۴۰ درجه تا ۶۰ درجه میتواند تغییر کند. توزیع احتمال زاویه توپ را یکنواخت فرض کنید. برد توپ بر حسب زاویه پرتاب از رابطه زیر به دست می آید:

$$R(\theta) = \frac{v^2 * \sin(2\theta)}{g}$$

- الف) - تابع توزیع احتمال زاویه پرتاب توپ را به ازای زوایای ۰ تا ۹۰ درجه بیابید. (برای بازه هایی از زاویه ها مقدار این تابع صفر هست)
- ب) - تابع توزیع احتمال تجمیعی برد توپ را بیابید.

سوال هفتم (۱۰ نمره)

- رضا اخیراً با یک مسابقه پرتاب سکه آشنا شده است که در آن باید یک سکه با احتمال شیر آمدن p را آنقدر بیندازد تا دقیقاً r بار شیر بیاید. متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب های لازم برای برنده شدن رضا در نظر بگیرید.
- الف) احتمال $P(X = x)$ را محاسبه نمایید.
- ب) امید ریاضی متغیر تصادفی X را به ازای X های بزرگ تر مساوی r (که یک عدد ثابت است) به دست آورید.
- ج) فرض کنید جایزه ای که به برنده داده می شود از فرمول روبه رو به دست می آید:

$$Prize = 1000 - 100X$$

واضح است که مقدار X باید بزرگ تر از r باشد. مقدار مورد انتظار جایزه را به دست آورید.

سوال هشتم (۱۴ نمره)

- انتشارات دانشگاه کتاب آمار و احتمال مهندسی پاپولیس را توسط دستگاه چاپی برای دانشجویان تکثیر کرده است. اگر در یک کتاب تهیه شده تعداد اشتباهات چاپی در هر صفحه یک متغیر پواسون با پارامتر λ باشد و تعداد این اشتباهات برای صفحات مختلف، مستقل از یک دیگر باشند.
- الف) احتمال پیشامد اینکه دومین اشتباه در صفحه r رخ داده باشد را محاسبه کنید.
- ب) فرض کنید ویراستار مجموعه هر کدام از این اشتباهات چاپی را به احتمال p و مستقل از دیگر اشتباهات بیاید. اگر X تعداد اشتباهاتی باشد که او متوجه آنها شده است و Y تعداد اشتباهات باقی مانده باشد، انگاه توزیع این دو متغیر تصادفی را بیابد و نشان دهید که آنها مستقل هستند.

سوال نهم (۶ نمره)

- برای متغیر تصادفی X که توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۲ دارد، مقادیر زیر را بیابید.

الف) $P(11 \leq x \leq 15)$

ب) $p(11 \leq x \leq 15 | 9 \leq x)$

ج) $f(x | (x - 10)^2 \leq 16)$

سوال امتیازی (۱۰ نمره)

- یک دستگاه سکه زنی سکه های متفاوتی تولید می کند، اگر P متغیر تصادفی احتمال شیر آمدن سکه های تولید شده توسط این دستگاه باشد با تابع چگالی احتمال

$$f_P(p) = \begin{cases} pe^p & \text{if } 1 \geq p \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- یک سکه که توسط این دستگاه تولید شده است را انتخاب می کنیم، به شرط آنکه پیشامد شیر آمدن در هر پرتاب مستقل از پرتاب های دیگر باشد:

الف) احتمال شیر آمدن این سکه در پرتاب اول را محاسبه کنید.
ب) تابع چگالی متغیر تصادفی P تحت شرط شیر آمدن پرتاب اول را بیابید.
اگر نتیجه پرتاب اول شیر باشد، احتمال شیر آمدن پرتاب دوم را محاسبه کنید.