Subject: .... Date: ....

آزمون میانترم جبرخطی   علی شاه میر   "400105777"

سوال اول - $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$

۱ - الف)

نشان می‌دهیم $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ یعنی سری بالا به یک ماتریس حقیقی $n \times n$ همگرا می‌شود.

در واقع کافی است ثابت کنیم این سری همگرا است. $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$

اثبات) چون ماتریس A دارای اعضای حقیقی است می‌توانیم در آن بزرگترین درایه پیدا کنیم و آن را برابر با m قرار دهیم $m = |a_{ij}|$ = کران بالا

قدر مطلق

در این صورت در ماتریس I بزرگترین درایه 1 خواهد بود. در جمله دوم سری که A داریم بزرگترین جمله m خواهد بود. به همین ترتیب در جمله بعدی که A^2 دارد بزرگترین درایه کمتر یا مساوی $\frac{nm^2}{2!}$ خواهد بود و در عبارت بعدی هم کمتر یا مساوی $\frac{n^2m^3}{3!}$ خواهد بود.

حال یک دنباله به دست آمده است که برابر است با $1, m, \frac{nm^2}{2!}, \frac{n^2m^3}{3!}, \dots, \frac{n^{k-2}m^{k-1}}{(k-1)!}, \dots$ ← به راحتی می‌توان با استقرا نشان داد. *

* ← کران بالای دنباله ما

حال اگر برای این دنباله حاصل از سری صورت سوال تست نسبت را به کار ببریم داریم:

$$\frac{n^{k-1}m^{k}}{k!} \times \frac{(k-1)!}{n^{k-2}m^{k-1}} = \frac{nm}{k}$$

n و m ثابت هستند

$$\lim_{k \to \infty} \frac{nm}{k} = 0$$

پس سری گفته شده همگرای مطلق بوده و e^A به ماتریسی $n \times n$ همگرا می‌شود.

نکته ← تست نسبت ⇐ $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \to L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق می‌شود

Q.E.D

Subject: Date:

۱- ب)

$$e^{A} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^{i}}{i!} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ قطری

برای حل این سوال ابتدا توان های مختلف A را بدست می آوریم . در این صورت داریم ؛

$$A^{0} = I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad A = AI = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{2} = AA = \begin{bmatrix} a_{11}^{2} & & 0 \\ & a_{22}^{2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{2} \end{bmatrix} \quad , \quad A^{3} = AA^{2} = \begin{bmatrix} a_{11}^{3} & & 0 \\ & a_{22}^{3} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{K} = \begin{bmatrix} a_{11}^{K} & & 0 \\ & a_{22}^{K} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{K} \end{bmatrix}$$

و به راحتی می توان با استقرا نشان داد که

پایه استقرا همان A^{0} خواهد بود .

حال داریم ؛

$$e^{A} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^{K}}{K!} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} \begin{bmatrix} a_{11}^{K} & & 0 \\ & a_{22}^{K} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{K} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{a_{11}^{K}}{K!} & & 0 \\ & \sum_{K=0}^{\infty} \frac{a_{22}^{K}}{K!} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sum_{K=0}^{\infty} \frac{a_{nn}^{K}}{K!} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{A} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}} & & 0 \\ & e^{a_{22}} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{a_{nn}} \end{bmatrix}$$ قطری

Q.E.D

Subject: Date:

۱-ج) $P \in M_n(\mathbb{R})$ وارون پذیر است (فرض سوال)

$Pe^A P^{-1}$

طبق تعریف داریم $\longrightarrow Pe^A P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}$

* نکته بسیار مهم * در همگرایی آن تاثیری نمی‌گذارد.

می‌دانیم طبق قسمت الف سری بالا همگرا است پس می‌توانیم P و P^{-1} را وارد سری کنیم.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = e^{PAP^{-1}} \quad \underline{Q.E.D}$$

* دقت کنید برای PA^kP^{-1} داریم:

$$PA\underbrace{P^{-1}P}_{I}A\underbrace{P^{-1} \ldots}_{I}\underbrace{\ldots P}_{I}AP^{-1}$$

$$= (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$$

۱-د) $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $Av = \lambda v$

طبق تعریف داریم $e^A v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k v \quad (*)$

چون سری همگرا است v را وارد آن می‌کنیم.

حال توجه کنید:

$$Av = \lambda v \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A} A(\underbrace{Av}_{\lambda v}) = A^2 v = A\lambda v$$

$$= \lambda Av = \lambda^2 v$$

ضریب حقیقی

$Av = \lambda v$

$$\Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v \quad (I)$$

به عنوان پایه استقرا عبارت (I) را درنظر بگیرید. ادعا می‌کنم تساوی زیر برقرار خواهد بود و آن‌را با استقرا روی n نشان می‌دهم. $A^n v = \lambda^n v$

برای گام استقرا فرض کنیم $A^{n-1}v = \lambda^{n-1}v$ برقرار باشد

در این صورت طبق فرض سوال $Av = \lambda v$ کافی است عبارت را از چپ در A ضرب کنیم.

$$A^{n-1}v \xRightarrow{\times A} A^n v = \lambda^{n-1}\underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda^n v$$

و اثبات این قسمت تمام می‌شود

ادامه صفحه بعد

BIST

Subject: Date:

حال طبق رابطه‌های (*) و (I) صفحه قبل داریم؛

(*)

$$e^{A}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k}v}{k!} \underset{\text{apply (I)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}v}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!}\right)v = e^{\lambda}v$$

و مسئله تمام است Q.E.D

Subject: Date:

۱- هـ) برای $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم ؛ $x(t) = e^{At}$

حال که $x(0) = a$ است ، حدس می‌زنیم جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt} = x(t)$
برابر باشد با $x(t) = x(0)e^{At} \Rightarrow x(t) = ae^{At}$

حال به اثبات حدس خود می‌پردازیم ؛

$$\text{دستگاه ما} \longrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = x_n(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}$$

با توجه به آنکه اثبات کردیم سری همگرا است پس می‌توانیم عملگر مشتق را وارد سری کنیم .

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d}{dt}(A^k t^k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(k t^{k-1} A^k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}A^k$$

$$= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(tA)^{k-1}$$ تغییر متغیر $m = k-1$

$$= A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(tA)^m = Ae^{At}$$

پس نشان داده‌ایم که ؛ if $x(t) = e^{At}$ then $\frac{d}{dt}x = \overbrace{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}}$

دقت کنید که حدس ما در ابتدا طبق دانش معادله دیفرانسیل مرتبه اول بود که بیان می‌دارد؛

$$y' = ry \Rightarrow y = ce^{rt} \;,\; y(0) = ce^0 \Rightarrow y(0) = c$$

پس گفتیم برای $x(t) = ae^{At}$ داریم $x'(t) = Ax(t)$

حال اگر در اثبات بالا مقدار ثابت $x(0) = a$ را $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = a$
قرار دهیم ، چون یک ثابت است هیچ تغییری در هر جمله از سری
ایجاد نمی‌کند و در واقع هر جمله نیز دارای $x(0)$ خواهد بود و می‌توان گفت

$$(x(0)e^{At})' = x(0)Ae^{At} = aAe^{At}$$

BIST

پس کافی است $x(t) = ae^{At}$ را این بار تعریف کنیم و با قرار دادن در روابط به جواب سوال می‌رسیم

Subject: Date:

ادامه ۱-هـ) این بار پس تعریف می‌کنیم $x(t)=ae^{At}$ در این صورت:

$$\frac{d}{dt}\left(ae^{At}\right) \Rightarrow \text{طبق اثبات صفحه قبل} = aA\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(At)^{m} = aAe^{At}$$

و مشاهده می‌کنیم پاسخ در معادله صادق است و کافی است $x(t)=ae^{At}$ را به عنوان پاسخ معادله قبول کنیم.

Q.E.D

$AB=BA \rightarrow e^{A+B}=e^{A}e^{B}$ (۱ - و)

اثبات) طبق تعریف داریم

$$e^{A+B}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(A+B)^{i}}{i!}$$

دقت کنید چون $AB=BA$ می باشد پس
می توانیم بسط نیوتن (دوجمله ای) برای عبارت فوق بنویسیم .

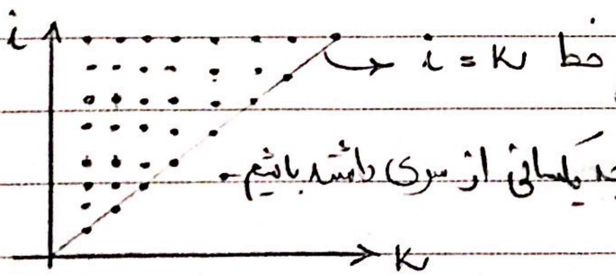
$$e^{A+B}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(A+B)^{i}}{i!}\downarrow=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{i}\frac{\binom{i}{K}A^{K}B^{i-K}}{i!}\quad(*)$$

* کافی است K از صفر تا i برود در واقع بعد از i صفر تولید می شود و نیازی به آن نداریم .

$$\frac{\binom{i}{K}}{i!}=\frac{i!}{i!\,K!\,(i-K)!}=\frac{1}{K!\,(i-K)!}$$

$$(*)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{i}\frac{A^{K}B^{i-K}}{K!\,(i-K)!}\quad(**)$$

*(با توجه به همگرایی سری در قسمت الف و مجموع متناهی های آن)
حال می توانیم از حالت گسسته قضیه فوبینی در درس ریاضی 2 یا ضرب کوشی در ریاضی استفاده کنیم . در واقع i از صفر تا ∞ در حال تغییر می باشد و K هم از صفر تا i ، حال با نمودار نشان می دهیم که چگونه می توان کران های سری بالا را کمی تغییر داد .



اگر K از صفر تا ∞ حرکت کند در این صورت کافی است i از K تا ∞ حرکت کند و نتیجه یکسانی از سری داشته باشیم .

یعنی $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{i}=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{i=K}^{\infty}$

در نهایت داریم :

$$(**)=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{i=K}^{\infty}\frac{A^{K}}{K!}\frac{B^{i-K}}{(i-K)!}$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{A^{K}}{K!}\sum_{i=K}^{\infty}\frac{B^{i-K}}{(i-K)!}\qquad m=i-K \text{ تغییر متغیر } \rightarrow \sum_{i-K=0}^{\infty}\frac{B^{i-K}}{(i-K)!}$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{A^{K}}{K!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^{m}}{m!}=e^{A}e^{B}\quad Q.E.D$$

BIST

Subject: ((اثبات دیگر)) Date:

ادامه سوال ۱ـ و) برعکس اثبات گفته شده را نیز می‌توانیم نشان دهیم.

$$e^A e^B = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^i B^j}{i!\,j!} \quad (*)$$

j \ i	0	1	2	...
0	I	A	$\frac{1}{2}A^2$	✓
1	B	AB	✓	✓
2	$\frac{1}{2}B^2$	✓	✓	✓
⋮	✓	✓	✓	✓

طبق تعریف سوال و خاصیت $AB = BA$ ←

حال گروه بندی می‌کنیم و به هر گروه یک نام اختصاص می‌دهیم.

گروه ها قطرهای جدول بالا هستند

گروه اول I است که متناظر با $k=0$ قرارش می‌دهیم

گروه دوم $A+B$ است و متناظر با $k=1$ است.

گروه سوم $\frac{1}{2}A^2 + AB + \frac{1}{2}B^2$ متناظر با $k=2$ خواهد بود و ...

در واقع k، اوردر توان هر گروه را نشان می‌دهد.

در این صورت داریم:

$$(*) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i B^{i-k}}{i!\,(k-i)!}$$

تغییر متغیر می‌دهیم $j = k - i$

حال داریم: جمع داخلی یک سری متناهی می‌دهد و شبیه بسط دوجمله‌ای است. کافی است صورت و مخرج را در $k!$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{i!\,(i-k)!}}_{\binom{k}{i}} A^i B^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}$$

و $AB = BA$ ← (با توجه به شرط) بسط دوجمله‌ای

$$= e^{(A+B)}$$

Q.E.D

* در واقع این بسط دوجمله‌ای را برای توان با استقرا روی مقادیر k بدست آورد.

BIST

Subject: Date:

ادامه سوال ۱) قسمت و) به طور کلی برای $B, A \in (\mathbb{F})$ که $\mathbb{F}$ می تواند $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد عکس مقصدی که اثبات کردیم درست نیست

ولی در مسئله ما چون $B \in M_n(\mathbb{R})$ است ادعا می کنیم در صورتی که $AB \neq BA$ باشد رابطه گفته شده صحیح نیست.

کافی است در اثبات دوم که کردیم و داشتیم $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}$

و در این قسمت از شرط $AB = BA$ استفاده کردیم
حال فرض کنید $BA \neq AB$ باشد و تنها چند جمله اول
را حساب کنیم طوری که $A^\alpha B^\beta$ تولید شود صرفاً ← "مثلاً"

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$= (A+B)(B+A)$ و این در صورتی همان بسط دو جمله ای را می دهد که
$AB = BA$ شود و اگر نباشد نمی توانیم بگوییم با عبارت $A^2 + 2AB + B^2$
برابر است چون $AB + BA \neq 2AB$ یا $2BA$ می شود.

$\underline{Q.E.D}$ (لزوماً این اتفاق به ازای هر B دلخواه رخ نمی دهد)

سوال ۱) قسمت ز) $A = D + N$, $ND = DN$ و $N^n = 0$

D مشابه با قطری است.

دقت کنید از آنجا که در قسمت ج هم نشان دادیم، ماتریس مانند $P \in M_n(\mathbb{R})$ وارون پذیر وجود دارد که

$$e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1} \quad (*)$$

برقرار شود

از طرفی طبق قسمت (و) هم داریم:

$$e^{A} = e^{D+N} = e^{D}e^{N} \quad (DN = ND)$$

و کافی است $e^{D}e^{N}$ را اثبات کنیم.

در رابطه (*) خواهیم داشت $e^{D} = P^{-1}e^{PDP^{-1}}P$

همچنین برای ماتریس e^{N} با توجه به آنکه $N^n = 0$ می شود اگر بسط تعریف سوال را بنویسیم داریم:

$$e^{N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}$$

و کافی است k تا $n-1$ حرکت کند و بعد از آن جواب صفر تولید می کند و نیازی به آنها نداریم پس

$$e^{N} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

حال دقت کنید از قسمت ب برای e^{S} اگر S قطری بود بدست آوردیم. حال از آنجایی که D مشابه ماتریس قطری است و P طوری یافت می شود که PDP^{-1} قطری می شود، می توانیم همان استدلال و اثبات را بیاوریم و $e^{PDP^{-1}}$ را بدست آوریم که ماتریس قطری می شود پس طبق قسمت ب ←

چون PDP^{-1} قطری است فرض کنید

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{PDP^{-1}} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & e^{\alpha_2} & \\ 0 & & \ddots \ e^{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

Subject: Date:

ادامه قسمت ز) در نهایت برای e^A داریم

$$e^A = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}\right) \times \begin{bmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریسی

α_i ها عناصر روی قطر اصلی ماتریس PDP^{-1} هستند.

و این رویه‌ای برای محاسبه e^A می‌باشد.

Q.E.D

۱ـ ج ۱) نشان می‌دهیم e^A وارون‌پذیر است.

دقت کنید که برای اثبات این بخش از

قسمت (الف) استفاده می‌کنیم $e^{A+B}=e^Ae^B$

ادعا می‌کنیم ماتریس وارون e^{-A} وجود دارد و با توجه به خاصیت

داریم

$$e^Ae^{-A}=e^{A-A}=e^0=I$$

طبق تعریف

$$e^0=I+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(0)^i}{i!}=I$$

همچنین داریم

$$e^{-A}e^{A}=e^{-A+A}=e^0=I$$

Q.E.D

Subject: Date:

۱- ب)
$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
به محاسبه توان های A می پردازیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3-3ab^2 & b^3-3ab^2 \\ 3a^2b-b^3 & a^3-3ab^2 \end{bmatrix}$$

این فرآیند را ادامه می دهیم تا تمام توان های A را به دست آوریم و حال از تعریف e^A داریم:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1+a+\frac{(a^2-b^2)}{2!}+\frac{(a^3-3ab^2)}{3!}+\cdots & -b+\frac{(-2ab)}{2!}+\frac{(b^3-3a^2b)}{3!}+\cdots \\ b+\frac{(2ab)}{2!}+\frac{(3a^2b-b^3)}{3!}+\cdots & 1+a+\frac{(a^2-b^2)}{2!}+\frac{(a^3-3ab^2)}{3!}+\cdots \end{bmatrix}$$

حال توجه کنید که بسط تیلور هر یک از توابع مقابل طبق مطالب درس ریاضی ۱ برابر است با:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \text{ for all } x$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \text{ for all } x$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \text{ for all } x$$

اگر ماتریس بالا داشته باشیم:
$$e^A = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

در این صورت e_{ij} ها را به دست می آوریم. ادامه صفحه بعد

Subject: Date:

$$e_{11} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} - \frac{b^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} - \frac{ab^2}{2!} + \dots$$

تفکیک انجام می‌دهیم

$$= \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots\right)\left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} - \dots\right)$$

سری حاصلضرب

$$= e^a \cos b$$

$$e_{12} = -b - \frac{ab}{1!} + \frac{b^3}{3!} - \frac{a^2 b}{2!} - \dots$$

$$= -\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots\right)\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \dots\right) = -e^a \sin b$$

$$e_{21} = b + \frac{ab}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{a^2 b}{2!} + \dots$$

$$= \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots\right)\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \dots\right) = e^a \sin b$$

$$e_{22} = e_{11} = e^a \cos b$$

$$\Rightarrow e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

Q.E.D

Subject: Date:

سوال دوم

الف) برای نشان دادن آنکه $\Sum = \{ S \subseteq V \mid$ روی F مستقل خطی است $S \}$

با $\subseteq$ مجموعه مرتب جزئی می سازد طبق تعریف باید سه مورد را اثبات کنیم:

الف) هر S در $\Sum$ زیر مجموعه خودش است ($S \subseteq S$) , $S \in \Sum$.

ب) اگر S و T زیرمجموعه های در $\Sum$ باشند، اگر $T \subseteq S$ و $S \subseteq T$ باشد باید نتیجه دهد: $S = T$.

ج) اگر S و T و U زیرمجموعه های $\Sum$ باشند طوری که $T \subseteq S$ و $T \subseteq U$ باید نتیجه دهد $S \subseteq U$.

برای الف) S را یک مجموعه در $\Sum$ قرار می دهیم. حال چون S یک مجموعه است پس زیر مجموعه خودش می باشد. همچنین هر مجموعه که مستقل خطی بر F است همچنان مستقل خطی باقی می ماند اگر هر زیر مجموعه ای از اعضای آن را حذف کنیم. پس رابطه $S \subseteq S$ برقرار است و بخش اول اثبات می شود □ (متقارن)

برای ب) قرار می دهیم S و T دو مجموعه مستقل خطی در $\Sum$ به طوری که $T \subseteq S$ و $S \subseteq T$.
در این صورت هر عضو از S باید در T باشد و هر عضو از T هم باید در S باشد.
از آنجایی که S و T هردو مستقل خطی اند، باید هردو تعداد اعضای برابری داشته باشند. بنابراین $S = T$ خواهد بود. □ (پادمتقارن)

برای ج) S و T و U را زیرمجموعه های مستقل خطی V بر F (یعنی در $\Sum$) در نظر می گیریم به طوری که $S \subseteq T$ و $T \subseteq U$ باشد. در این صورت هر عضو از S باید در T باشد و هر عضو T باید در U باشد. از آنجایی که S زیر مجموعه مستقل خطی از V بر F است می توانیم آن را برحسب ترکیب خطی از برخی عناصر T بنویسیم. به طور مشابه می توانیم T را نیز برحسب ترکیب خطی برخی عناصر U بنویسیم. در این صورت S را می توان برحسب ترکیب خطی برخی از اعضای U نوشت و S همچنین بر F مستقل خطی است، پس $S \subseteq U$ است. □

(ترایایی) ((Q.E.D))

BIST

Subject: .... Date: ....

2 - ب) برای آنکه نشان دهیم $T \in \Sigma$ باید نشان دهیم T مستقل خطی روی F است

و T نیز زیر مجموعه ای از V تعریف می کنیم .

ابتدا از تعریف زنجیره داریم؛ یک زنجیره زیر مجموعه ای از Σ در نظر می گیریم که

$\{S_i\}_{i\in I}$ ، وجود داشته باشد زوج به طوری که $S_i \subseteq S_j$ یا $S_j \subseteq S_i$ باشد

(یعنی دو عضو قابل مقایسه باشند).

حال $\{S_i\}_{i\in I}$ را یک زنجیره روی Σ در نظر می گیریم به طوری که $T \in S_i$ و این یعنی

T یکی از عناصر حداقل یکی از S_i های باشد .

فرض خلف) فرض می کنیم T وابسته خطی باشد . پس ضرایب $c_1, c_2, \dots, c_n$

در F وجود دارند که تماما باهم صفر نیستند و داریم برای t_i های عضو T؛

$$c_1t_1+c_2t_2+\dots+c_nt_n=0 \qquad t_i\in T \quad \text{for all } i$$

بدون کاستن از کلیت اگر فرض کنیم $c_1 \neq 0$ در این صورت داریم؛

$$t_1 = \left(\frac{-1}{c_1}\right)(c_2t_2+c_3t_3+\dots+c_nt_n) \in \mathrm{Span}(T\setminus\{t_1\})$$

$t_1 \in \mathrm{Span}(T\setminus\{t_1\})$

و این تناقض است پس فرض خلف رد می شود و حکم اثبات می شود . $T\in\Sigma$. □

یعنی T مستقل خطی است .

در واقع تناقض از آنجا آمد که ما گفتیم F زیر مجموعه ای از زنجیره $\{S_i\}_{i\in I}$ است

و می دانیم یک $j \in I$ وجود دارد به طوری که $F \subseteq S_j$.

بنابراین T ترکیب خطی بردارهای S_j می شود که با فرض که S_j مستقل خطی است

در تناقض است پس T باید مستقل خطی باشد و $T\in\Sigma$. Q.E.D

2 - ج) با استفاده از لم زرن نشان می‌دهیم Σ دارای عضو ماکسیمال است.

باید نشان دهیم زیر مجموعه S از V که مستقل خطی است وجود دارد که یک زیر مجموعه مناسب برای دیگر زیر مجموعه‌های مستقل خطی V نیست.

طبق لم زرن اگر مجموعه مرتب جزئی دارای کران بالا باشد، در این صورت مجموعه دارای عضو ماکسیمال است.

ابتدا یک مجموعه مرتب جزئی روی Σ تعریف می‌کنیم. می‌گوییم یک زیر مجموعه مستقل خطی S از V دارای رابطه $\leq$ با زیر مجموعه T مستقل خطی از V دارد اگر S زیرمجموعه T باشد و این تعریف ترتیب جزئی روی Σ است.

حال C را زیر مجموعه تماماً مرتب از Σ تعریف می‌کنیم بدین معنی که برای هر دو زیر مجموعه مستقل خطی T و S در C داشته باشیم $T \subseteq S$ یا $S \subseteq T$

حال به دنبال کران بالایی برای C می‌گردیم.

A را قرار می‌دهیم اجتماع تمام زیرمجموعه‌های در C باشد. ادعا می‌کنیم A مستقل خطی است.
فرض خلف می‌کنیم که اینگونه نباشد و A وابسته خطی باشد، در این صورت بردارهای $a_1, \ldots, a_n$ در A وجود دارند همچنین ضرایب ثابت $c_1, \ldots, c_n$ در F وجود دارند که همگی باهم صفر نیستند به طوری که $c_1a_1 + \ldots + c_na_n = 0$.

بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم a_1 متعلق به یک زیر مجموعه $S_1 \in C$ باشد. در این صورت a_1 متعلق به هر زیر مجموعه از C می‌باشد که شامل S_1 نیز است.

طبق تعریفی که برای C کردیم (زیرمجموعه تماماً مرتب)، داریم، $S \subseteq S_1$ یا $S_1 \subseteq S$ است برای هر S در C.

فرض کنیم $S_1 \subseteq S$ باشد برای هر $S \subseteq C$ داریم $a_1 \in S$ و $S \in C$
بنابراین $a_1 \in A$. می‌توان به طور مشابه حالت $S_1 \subseteq S$ را بررسی کرد.

به طور مشابه وقتی a_2 متعلق به زیرمجموعه S_2 از C باشد داریم a_1 و a_2 متعلق به S_1 برای هر S در C هستند یا a_1 و a_2 متعلق به S_2 برای هر S در C هستند.

در هر دو حالت a_2 متعلق به A خواهد بود.

با ادامه این فرآیند می‌توانیم نشان دهیم همه بردارهای $a_1, \ldots, a_n$ متعلق به A هستند ولی این با فرض ما در تناقض است که A اجتماع زیرمجموعه‌های مستقل خطی از V بود وقتی بردارهای $a_1, \ldots, a_n$ مجموعه وابسته خطی باشند. پس A مستقل خطی است و برای C کران بالا می‌سازد پس دارای عضو ماکسیمال است و اسم آنرا B قرار می‌دهیم Q.E.D

Subject: Date:

2 ـ د) نشان می‌دهیم B پایه‌ای برای V است.

طبق قسمت قبل و با توجه به لم زرن می‌دانیم B عضو ماکسیمال Σ است.

باید نشان دهیم $V = Span\{B\}$ می‌باشد

بنابر تناقض فرض کنیم اینگونه نباشد و $V \neq Span\{B\}$. در این صورت یک بردار v از V وجود دارد که در $Span\{B\}$ قرار ندارد. ادعای کنیم مجموعه $B \cup \{v\}$ مستقل خطی است. اگر این طور باشد می‌توانیم با اضافه کردن v به B، زیر مجموعه مستقل خطی بزرگتری از V داشته باشیم و با توجه به آنکه B ماکسیمال است به تناقض می‌خوریم و داریم $V = Span\{B\}$

برای اثبات آنکه $B \cup \{v\}$ مستقل خطی است، فرض می‌کنیم که اینطور نباشد و وابسته خطی باشد. در این صورت ضرایب اسکالر $c_1, \dots, c_n$ در F وجود دارند که همگی باهم همزمان صفر نیستند در رابطه زیر

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n + c_{n+1}v = 0$$

به طوری که u_iها بردارهای متمایزی در B هستند

بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $c_{n+1} \neq 0$ باشد. در این صورت برای v داریم:

$$v = \frac{-1}{c_{n+1}}(c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nv_n) \in Span(B)$$

که نشان می‌دهد v در مجموعه $Span(B)$ قرار دارد و با توجه به تناقض پیش آمده، v در $Span(B)$ قرار ندارد.

پس $B \cup \{v\}$ مستقل خطی است و $V = Span\{B\}$

و این یعنی B یک پایه برای V روی F است. Q.E.D

BIST

سوال سوم ←

الف) کافی است طبق مطالب فصل 2، بسته بودن نسبت به جمع و ضرب اسکالر و چند مورد دیگر از ویژگی ها را نشان دهیم.

1- بسته بودن تحت جمع ← برای $[a],[b]\in\frac{V}{W}$ و طبق فرض که $[a]+[b]=[a+b]$

چون V می‌دانیم فضای خطی است و تحت جمع بسته است پس $\forall a,b\in V$ داریم $a+b\in V$
نتیجه می گیریم طبق فرض ($\frac{V}{W}=\{[a]\mid a\in V\}$) که $[a]+[b]=[a+b]$ یک کلاس هم ارزی صحیح برای $\frac{V}{W}$ است.
پس چون $[a]+[b]=[a+b]\in\frac{V}{W}$ پس تحت جمع بسته است. □

2- جابه‌جایی پذیری تحت جمع ← برای $[a],[b]\in\frac{V}{M}$ داریم
$[a]+[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+[a]$ □

3- شرکت پذیری تحت جمع ← برای $[a],[b],[c]\in\frac{V}{M}$ داریم؛

$$\begin{aligned}([a]+[b])+[c]&=[a+b]+[c]\\&=[(a+b)+c]=[a+(b+c)]=[a]+[b+c]\\&=[a]+([b]+[c])\end{aligned}$$ □

4- عضو خنثی جمعی ← برای $[a]\in\frac{V}{M}$، از آنجا که V فضای خطی است و شامل 0 می شود و بنابر فرض که $\frac{V}{M}=\{[0]\mid 0\in V\}$ پس $\frac{V}{M}$ خود نیز دارای $[0]$ است
★

پس داریم $[a]+[0]=[a+0]=[a]$
$=[0]+[a]=[0+a]$ □

5- وجود وارون جمعی ← این در آن 6 خاصیت نیست ولی باید آن را نشان دهیم.

برای $[a]\in\frac{V}{M}$ و چون V فضای خطی است اگر $a\in V$ پس $-a\in V$ نیز است.
و مشابه قبل $[-a]\in\frac{V}{M}$ برقرار است. پس؛ $[a]+[-a]=[a-a]=[0]$
□

6- بسته بودن تحت ضرب اسکالر ← برای $r\in\mathbb{R}$ و $[a]\in\frac{V}{M}$ داریم
$r.[a]=[ra]$ (طبق فرض). اگر $a\in V$ و چون V فضای خطی است پس $ra\in V$ هم هست.
و مشابه قبل طبق فرض $[ra]\in\frac{V}{M}$ می شود. □
که کلاس هم ارزی ولید است.

ادامه سوال سوم

ادامه الف)

7 - خاصیت پخشی روی ضرب اسکالر ← برای $r \in \mathbb{R}$ و $[a],[b] \in \frac{V}{M}$

و کاملاً مشابه قبل ← طبق فرض

$$r.([a]+[b]) = r[a+b] = [r(a+b)]$$
$$= [ra+rb] = [ra]+[rb]$$
$$= r[a]+r[b] \quad \square$$

8 - ویژگی زیر ☺ ← $r,s \in \mathbb{R}$ و $[a] \in \frac{V}{M}$ داریم $(r+s).[a]$

$$= [(r+s)a] = [ra+sa] = [ra]+[sa] = r.[a]+s.[a] \quad \square$$

9 - ویژگی دیگر زیر ☺ ← $r,s \in \mathbb{R}$ و $[a] \in \frac{V}{M}$ داریم

$$(rs).[a] =$$
$$= [(rs)a] = [(sr)a] = s.[ra] = r[sa] \quad \square$$

10 - ضرب در عضو خنثی ← چون $1 \in V$ و V فضای خطی بود، حال طبق تعریف کلاس $[1]$ نیز در $\frac{V}{M}$ قرار خواهد گرفت پس داریم؛ $[a] \in \frac{V}{M}$

$$1.[a] = [1.a] = [a] \quad \square$$

و این 10 مورد اثبات اینکه $(\frac{V}{M}, +, .)$ یک فضای خطی هستند را به پایان می‌رساند.

توجه کنید کافی بود 6 مورد را علاوه بر بسته بودن نسبت به جمع و ضرب اسکالر نشان ولی برای تکمیل اثبات موارد دیگر را نیز نشان داریم.

<u>Q.E.D</u>

سوال سوم)

قسمت ب) دقت کنید می توانستیم از اول خودمان با توجه به آنکه $\dim V = n$ و $\dim W = m$ است و اگر قرار می دادیم $\{w_1, \dots, w_m\}$ پایه ای برای W باشد آنرا به یک پایه $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ برای V گسترش دهیم.

حال می خواهیم نشان دهیم $\{[v_{m+1}], [v_{m+2}], \dots, [v_n]\}$ پایه ای برای $\frac{V}{W}$ است.

طبق تعریف و فرض سوال $[v]$ یک عضو از $\frac{V}{W}$ است پس v عضوی از V می باشد ← به عبارتی دیگر

$$\frac{V}{W} = \{[v] \mid v \in V\}$$

در این صورت می توانیم بنویسیم ←

$$v = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_mw_m + b_{m+1}v_{m+1} + \dots + b_nv_n$$

چون $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ پایه ای برای V بود پس هر عضو $v \in V$ را می توان به صورت ترکیب خطی از آن عناصر باید نوشت.

حال برای عضو $w \in W$ نیز داریم ؛ $w = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_mw_m$

پس $v \, R \, (v-w)$ طبق تعریف سوال و در این صورت این دو عبارت طرفین R باید در یک کلاس هم ارزی حضور داشته باشند. پس داریم ؛

$$\begin{aligned}
[v] &= [v-w] \\
&= [b_{m+1}v_{m+1} + b_{m+2}v_{m+2} + \dots + b_nv_n] \\
&= b_{m+1}[v_{m+1}] + \dots + b_n[v_n]
\end{aligned}$$

← طبق تعریف سوال که گفته ؛ $[a]+[b] = [a+b]$ و $r.[a] = [ra]$

پس عضو $[v]$ از $\frac{V}{W}$ ترکیب خطی از $\{[v_{m+1}], [v_{m+2}], \dots, [v_n]\}$ می باشد.

یعنی هر عضو $v \in \frac{V}{W}$ از ترکیب خطی اعضای مجموعه آمده تولید می شود ← SPan → (*)

پس این مجموعه $\frac{V}{W}$ را SPan می کند.

* حال کلاس $[0]$ را در نظر بگیرید ؛ عضو $v \in V$ در کلاس هم ارزی $[0]$ است اگر و فقط اگر $vR0$ و این عبارت طبق تعریف برابر آن است که $v - 0 = v \in W$ شود (طبق آنچه در صورت سوال است) . در این صورت نتیجه می شود که کلاس هم ارزی $[0]$ دقیقاً همان W است .

پس تا اینجا می دانیم پایه برای W ، $\{w_1, \dots, w_m\}$ است و کلاس $[0]$ همان W است .

ادامه صفحه بعد

ادامه سوال سوم)

ادامه قسمت ب) پس $a_1, \ldots, a_m$ وجود دارند به طوری که

$$a_1w_1 + \cdots + a_mw_m = b_{m+1}v_{m+1} + \cdots + b_nv_n$$

و این برابر است با آنکه بگوییم $-a_1w_1 - \cdots - a_mw_m + b_{m+1}v_{m+1} + \cdots + b_nv_n = 0$

ولی $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V است. پس هر a_i و b_i باید برابر صفر شوند.

در واقع نشان دادیم اگر $b_{m+1}[v_{m+1}] + \cdots + b_n[v_n] = [0]$ باشد

هر b_i برابر صفر خواهد بود و این بدان معنا است که مجموعه $\{[v_{m+1}], \ldots, [v_n]\}$ مستقل خطی است.

$(**)$

حال طبق $(*)$ و $(**)$ چون مجموعه گفته شده اولاً مستقل خطی است و ثانیاً $\frac{V}{W}$ را span می‌کند پس پایه‌ای برای فضای خطی $\frac{V}{W}$ است.

Q.E.D

حال دقت کنید که با $n-m$ بردار مستقل خطی می‌توانیم این پایه را بسازیم، پس

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = n-m$$

$$n-m = \overbrace{\dim(V)}^{n} - \overbrace{\dim(W)}^{m}$$

$$\Rightarrow \dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim(V) - \dim(W)$$

---

* نکته اضافه: معادلاً می‌توان تعریف دیگری ارائه داد: زیر مجموعه آفینی از V به فرم $v+W$ برای $v \in V$ و یک $W \subseteq V$ می‌باشد و این $v+W$ را موازی W می‌گوییم.

تعریف می‌شود $\frac{V}{W}$ مجموعه تمام زیر مجموعه‌های آفینی از V و موازی W است، یا $\frac{V}{W} = \{v+W : v \in V\}$

در نهایت می‌توان نشان داد $\{v_1+W, \ldots, v_m+W\}$ یک پایه برای $\frac{V}{W}$ است.

طبق کتاب Axler, Done right

سوال سوم)

ج)

$T: V \to W$ و $T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i$

برای نشان دادن آنکه T خطی است باید نشان دهیم

1. $T(cu) = cT(u)$
2. $T(u+v) = T(u) + T(v)$

برای مورد اول داریم:

$$u = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i$$

$$\Rightarrow T(\alpha u) = T\left(\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n}\right)\right)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{m} (\alpha c_i) w_i + \sum_{i=m+1}^{n} (\alpha d_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha c_i) w_i$$

طبق فرض سوال و ضابطه داده شده

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} c_i w_i = \alpha T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i\right) \quad \square$$

باز هم طبق فرض

برای مورد دوم هم داریم:

$$T(u+v) = T\left(\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} b_i v_i\right)\right)$$

تعریف می‌کنیم

$$\Leftarrow \begin{cases} v := \sum_{i=1}^{m} a_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} b_i v_i \\ u := \sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i \end{cases}$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{m} (c_i + a_i) w_i + \sum_{i=m+1}^{n} (d_i + b_i) v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (c_i + a_i) w_i = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=1}^{m} a_i w_i$$

طبق فرض سوال و ضابطه

$$= T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{m} a_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} b_i v_i\right)$$

$$= T(u) + T(v) \quad \square$$

Q.E.D $\rightarrow$ T خطی است

حال به یافتن $N(T)$ می‌پردازیم. برای یافتن $N(T)$ یا فضای پوچ T، باید بُعد آنرا بیابیم که همان مجموعه تمام بردارها در V است توسط T به بردار صفر در $Im(T)$ فرستاده می‌شود.

$$N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

هر بردار V را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه V مانند $v = \sum c_i w_i + \sum d_i v_i$ بنویسیم که $\{w_1, \dots, w_m\}$ یک پایه برای زیرفضای تشکیل شده توسط $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ $\underbrace{\text{زیرفضای}}_{W}$ است.

ادامه سوال سوم ج) برای فضای پوچ T باید مجموعه بردارهایی که در V هستند و به بردار صفر در W مپ می‌شوند را درنظر بگیریم. دقت کنید می‌دانیم بعد فضای V برابر n است و W زیرفضایی از آن با بعد m می‌باشد.

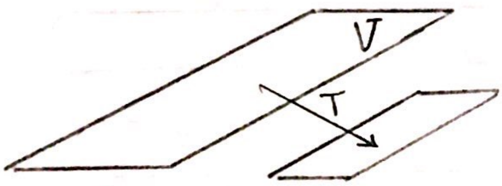
Definition: $N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$

طبق قضیه ((rank-nullity Theorem)) می‌دانیم $\underbrace{\dim V}_{\text{که دقیقا با بعد } n} = \dim N(T) + \dim Im(T)$

از طرفی طبق ضابطه T می‌دانیم هر برداری را از V (هر بردار $v \in V$ که به صورت ترکیب خطی پایه $\{w_1, \dots, v_n\}$ نوشته می‌شود) را به بردار صفر در W مپ می‌کند و چون $T(v) = \sum c_i w_i$ پس می‌توانیم بگوییم تصویر یا $Im(T)$ زیرفضایی از W خواهد بود و بعد حداکثر m دارد. (هر بردار از W را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی اعضای مجموعه پایه $\{w_1, \dots, w_m\}$ بنویسیم).

$$\dim N(T) = \dim V - \dim Im(T) \geq n - m$$

درحالت خاص سوال ما که هر بردار از V دقیقاً به W مپ می‌شود پس $m = \dim Im(T)$ خواهد بود پس $\dim N(T) = n - m$ می‌شود



W و $W \subseteq V$ □

* حال طبق مطالب بخش ب و توضیحات کلی و آمده از کتاب DoneRight، $\frac{V}{W}$ همان فضای شامل کلاس های هم ارزی از بردارهای در V است و دو بردار هم ارز هستند و باهم رابطه هم ارزی $\tilde{R}$ می‌سازند اگر حاصل تفریق آنها در W قرار گیرد و اثبات کردیم $\frac{V}{W}$ فضای خطی است. همچنین نشان دادیم $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$

حال ویژگی‌های دیگر آنرا می‌گوییم. اگر T تبدیل خطی از V به U باشد و $W \subseteq V$ در فضای پوچ T باشد در این صورت تبدیل خطی یکتایی مانند T' از V/W به U وجود دارد که برای هر v در V داریم $T(v) = T'(v + \underbrace{W}_{\text{همان کلاس ها}})$

* اگر $\{w_1, \dots, w_m\}$ پایه‌ای برای W و $\{v_{m+1} + W, \dots, v_n + W\}$ (آنگاه) پایه ای برای زیرفضایی از V/W باشد که توسط $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ تولید شده و این بردارهای مستقل خطی از V/W هستند.

تقریباً تمام توضیحات در مورد فضای $\frac{V}{W}$ در این قسمت و قسمت های الف و ب آمدند.

Q.E.D

سوال چهارم)

الف) برای آنکه نشان دهیم B^* پایه‌ای برای V^* است باید نشان دهیم B^* دارای اعضای مستقل خطی است و $V^* = span\{B^*\}$ می‌شود .

ابتدا نشان می‌دهیم B^* مستقل خطی است . یک ترکیب خطی از آن را در نظر بگیرید که به فرم زیر است ؛

$$(*) \quad c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

طوری که $c_i \in \mathbb{R}$ باشند . حال کافی است نشان دهیم برای تمام nهای ممکن c_iها همزمان با هم صفر شوند .
دقت کنید برای هر v_i در B داریم ؛ $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ یعنی f_i این v_iها را برابر 1 می‌کند و اعضای دیگر B را به صفر می‌برد (در واقع مانند یک ماتریس عناصر قطر اصلی ($i = j$) را 1 و بقیه ($i \neq j$) را صفر قرار می‌دهد) .

از این ویژگی استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم B^* مستقل خطی است . داریم ؛ $0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

اعمال تابع روی v_iها ، f_i تابع خطی است .

$$0 = c_1 f_1(v_1) + c_2 f_2(v_1) + \dots + c_n f_n(v_1) = c_1(1) + 0 + \dots + 0 = c_1$$

$$0 = c_1 f_1(v_1) + c_2 f_2(v_2) + \dots + c_n f_n(v_2) = 0 + c_2(1) + 0 + \dots + 0 = c_2$$

$$\vdots$$

* دقت کنید چون طبق فرض $0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ است برطرفین کافی است تابع $f_i(v_j)$ را اعمال کنیم .

$$0 = c_1 f_1(v_n) + c_2 f_2(v_n) + \dots + c_n f_n(v_n) = 0 + \dots + 0 + c_n(1) = c_n$$

حال طبق رابطه $(*)$ بالا و آنکه می‌خواستیم نشان دهیم ترکیب خطی گفته شده برابر صفر باید باشد ، داریم ؛

$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$\vdots$
$c_n = 0$

$\Rightarrow$ یک دستگاه که نشان می‌دهد ضرایب c_iها صفر هستند . $\Leftarrow$ * $\Rightarrow$ B^* مستقل خطی است . $\square$

حال نشان می‌دهیم $V^* = span\{B^*\}$ است . برای هر $f: V \to \mathbb{R}$ ادعا می‌کنیم که وجود دارد ؛

$$f = b_1 f_1 + \dots + b_n f_n \quad (*)$$

برای هر i قرار می‌دهیم $b_i = f(v_i)$ یک اسکالر باشد .

یعنی f را می‌توانیم برحسب ترکیب خطی از اعضای پایه V^* بنویسیم .
رابطه $(*)$ یعنی وقتی f را بر $v \in V$ اعمال کنیم باید در دو طرف رابطه صادق باشد .
و حال با توجه به خطی بودن آن کافی است نشان دهیم روی پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ درست باشد .

در واقع برای هر i داریم ؛ $(b_1 f_1 + \dots + b_n f_n)(v_i) =$
$= b_1 f_1(v_i) + \dots + b_n f_n(v_i) = b_i = f(v_i)$
(طبق تعریف f_i و b_i)

بنابراین f و $b_1 f_1 + \dots + b_n f_n$ در پایه با هم برابر هستند پس نتیجه می‌گیریم
f را که در V^* است می‌توان برحسب پایه $\{f_1, \dots, f_n\}$ ساخته شود پس $V^* = span\{f_1, \dots, f_n\}$

« Q . E . D »

* به جز این اثبات، اثبات دیگری هم از این مسئله دیدم که بسیار پیچیده و طولانی بود و از دانش مورد نیاز سوال چهارم و ارائه شده در فرضیات سوال فراتر بود و از استقرا بر n استفاده کرده بود.

قسمت ب) می خواهیم نشان دهیم $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ پایه‌ای برای V است اگر بدانیم $\{f_1,\dots,f_n\}$ پایه‌ای برای V^* باشد و برای هر i، $f_i(v_j)=\delta_{ij}$

اولاً می دانیم چون $\{f_1,\dots,f_n\}$ پایه V^* است یعنی هر یک از f_i ها یک تابع خطی به صورت $f_i: V\to R$ می باشند. طبق قضایایی که خوانده ایم اگر $\{f_1,\dots,f_n\}$ پایه برای V^* باشند یک پایه یکتا مانند $\{v_1,\dots,v_n\}$ از V وجود دارد که $f_i(v_j)=\delta_{ij}$ برای هر i,j.

برای این ادعا نشان می دهیم.

الف) مجموعه $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ فضای V را span می کند (یعنی با ترکیب خطی این مجموعه بردارهای B می توانیم هر برداری مانند $v\in V$ را بسازیم).

ب) مجموعه B مستقل خطی است.

← برای الف) v را یک بردار در V اختیار کنیم، چون $\{f_1,\dots,f_n\}$ یک پایه برای V^* است، می توانیم بگوییم $f_i(v)=c_i$ که c_i یک اسکالر است.

حال تعریف می کنیم $v_i := \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$. حال از آنجایی که v_i ترکیب خطی از f_i ها است، می توانیم v_j را به صورت ترکیب خطی بردارهای $\{v_i\}$ ($\equiv$ هر نقطه $\{v_1,\dots,v_n\}$)؛ یعنی هر دفعه هر v_j را بر حسب $\{v_1,\dots,v_n\}$ بیان کنیم). پس می توانیم بگوییم:

$$v_j=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad (a_1,\dots,a_n \to \text{اسکالر})$$

در نتیجه با جایگذاری کردن این روابط گفته شده داریم

$$v_j=\sum_{i=1}^{n} a_i c_i f_i$$

دقت کنید $f_i(v_j)=\delta_{ij}$ یک مقدار اسکالر 1 یا صفر به خود می گیرد و اگر تابع f_i را به رابطه بالا اعمال کنیم داریم $f_i(v_j)=\sum_{i=1}^{n} a_i c_i f_i(v_i)$ و $f_i(v_j)$ برای $i\neq j$ صفر می شود و از رابطه می توانیم آنها را خارج کنیم و در نهایت می توانیم بگوییم $f_i(v_j)=a_i$ برای هر i و j.

و این نشان می دهد $V=\text{Span}(B)$ □

برای ب) استقلال خطی را نشان می دهیم؛ فرض کنیم اسکالرهای $c_1,\dots,c_n$ وجود دارند طوری که

$\sum c_i v_i = 0$ * ضرب در v_j تغییری ایجاد نمی کند.

در این صورت داریم $0=(\sum c_i v_i)(v_j) = \sum c_i f_i(v_j) = c_i \to$ پس تمام c_i ها صفر هستند و این یعنی استقلال خطی

Q.E.D

* چون هر v_i از ترکیب خطی f_i ها ساخته می شود و نشان داریم هر بردار $v\in V$ از ترکیب خطی v_i ها ساخته می شود.

سوال پنجم) اثبات را با استقرا روی n پیش می بریم . برای حالت پایه اگر $n=1$ باشد
یعنی ماتریس 1×1 ، A که فقط شامل یک اسکالر است و زیرماتریس اصلی آن خودش است .
همچنین دارای رتبه 1 است و طبیعتاً متقارن نیز است .

گام استقرا ← فرض می کنیم برای ماتریس A که $(n-1)\times(n-1)$ است حکم درست باشد
حال A را ماتریسی $n\times n$ با رتبه r در نظر می گیریم .
حال که رتبه آن r است پس r تا سطر و ستون مستقل خطی در A وجود دارد .
تعریف می کنیم I مجموعه این سطرها و ستون های مستقل خطی باشد و کاردینالیتی آن نیز برابر است با r .
($|I|=r$) . حال ترتیب این سطرها و ستون ها را تغییر دهیم طوری که r سطر و ستون اول A
مستقل خطی باشند . (دقت کنید شرط های وارده بر A تغییری نمی کند . در واقع از ابتدا می توانستیم A را به اینگونه انتخاب کنیم) .

حال ماتریسی که دارای r سطر و ستون اول A است را B می نامیم (می تواند مرتبه بزرگتر از r داشته باشد)
در این صورت چون شامل r سطر و ستون A است حتماً رتبه r دارد . ← $K\times K$
$r\le K\le n$

طبق فرض استقرا زیرماتریس اصلی خود B را اگر C بنامیم و رتبه و مرتبه r داشته باشد متقارن هم می باشد
پس C زیرماتریس اصلی B است .

ادعا می کنیم C زیرماتریس اصلی A نیز است که دارای رتبه و مرتبه r است . دقت کنید C از برخورد
سطرها و ستون های A که در I قرار دارند پدید آمده است پس C خود زیرماتریس اصلی با مرتبه و رتبه r از A است .
C متقارن نیز است و شروط فرض استقرا را نیز دارد .
در نتیجه A متقارن زیرماتریس اصلی مانند C از رتبه و مرتبه r دارد وقتی رتبه A ، r می باشد .
((Q.E.D))
دقت کنید در حالتی که $r=n$ باشد ، A یک ماتریس Full rank خواهد بود و هر زیرماتریس از آن
نیز Full rank می شود ، پس یک زیرماتریس اصلی از رتبه و مرتبه $r=n$ دارد .

سوال ششم)

ابتدا تعریف می کنیم $A := \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k$, D به طوری که (*) $\langle A, D \rangle = 0$

همچنین $\beta = A + D$

$$A = \frac{\langle \beta, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 + \cdots + \frac{\langle \beta, \alpha_n \rangle}{\|\alpha_n\|^2} \alpha_n$$

از طرفی برای β داریم :

$$\|\beta\|^2 = \langle A+D, A+D \rangle =$$

طبق دو خطی بودن ضرب داخلی داریم $\Rightarrow$ $= \langle A, A \rangle + 2\underbrace{\langle A, D \rangle}_{} + \langle D, D \rangle$

طبق تعریفی که کردیم $= 0$

$\langle A, D \rangle = 0$, $A \perp D$

$$\Rightarrow \|\beta\|^2 = \|A\|^2 + \|D\|^2$$

الآن کافی است نشان دهیم $\|A\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_k \rangle|^2}{\|\alpha_k\|^2}$ می شود

و چون $\|D\|^2 \geq 0$ می باشد اثبات این بخش پایان می یابد .

$$\Rightarrow \|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \left\langle \sum_i \frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \alpha_i , \sum_j \frac{\langle \beta, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j \right\rangle$$

حال از آنجایی که مجموعه $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ متعامد است . داریم $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$
if $i \neq j$

و $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = |\alpha_i|^2$

در این صورت ضرب داخلی بالا برابر می شود با :

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \right)^2 \|\alpha_i\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_i \rangle|^2}{\|\alpha_i\|^2} \quad \square$$

و آنچه خواستیم را نشان داریم

حال چون $\|D\|^2 \geq 0$ پس

$$\|\beta\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_k \rangle|^2}{\|\alpha_k\|^2} \qquad \text{Q.E.D}$$

* D را تعریف کردم که صرفاً بتوانم نامعادله بسازم .

حال به حالت تساوی می پردازیم

$\Leftarrow$) این قسمت آلد برانیم $\leftarrow$ $\|\beta\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_k \rangle|^2}{\|\alpha_k\|^2}$

باید نشان دهیم که $\beta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k$ می شود .

ادامه صفحه بعد

ادامه سوال ششم)

حال اگر از تعریفی که استفاده کردیم دوباره استفاده کنیم داریم:

$\beta = A + D \quad , \quad \langle A, D \rangle = 0$

و حال در رابطه $\|\beta\|^2 = \|A\|^2 + \|D\|^2$ کافی است نشان دهیم $D = 0$ باشد

A که در صفحه اول اثبات شد

از فرض استفاده می کنیم:

$$\|\beta\|^2 = \sum_{K=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_K \rangle|^2}{\|\alpha_K\|^2} \xrightarrow[\|\alpha_K\|^2 \neq 0]{\times \frac{\|\alpha_K\|^2}{\|\alpha_K\|^2}} = \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{\langle \beta, \alpha_K \rangle}{\|\alpha_K\|^2} \right)^2 \|\alpha_K\|^2$$

طبق فرض

$\|\alpha_K\|^2 = \langle \alpha_K, \alpha_K \rangle$

* دقت کنید $|\langle \beta, \alpha_K \rangle|^2 = (\langle \beta, \alpha_K \rangle)^2 = \langle \beta, \alpha_K \rangle \langle \beta, \alpha_K \rangle$

یعنی $\Rightarrow \underbrace{\|\beta\|^2}_{\geq 0} = \|A\|^2 \Rightarrow \|D\|^2 = 0 \Rightarrow D = 0$

پس $\beta = A + \underbrace{D}_{=0} \Rightarrow \beta = A \Rightarrow \beta = \sum_{K=1}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_K \rangle}{\|\alpha_K\|^2} \alpha_K$

$\square$

حال طرف دیگر را نشان می دهیم

$\Rightarrow)$ اگر داشته باشیم $\beta = \sum_{K=1}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_K \rangle}{\|\alpha_K\|^2} \alpha_K$

نشان می دهیم $\|\beta\|^2 = \sum_{K=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_K \rangle|^2}{\|\alpha_K\|^2}$

تعریف کرده بودیم $\langle A, D \rangle = 0$ و $A = \sum_{K=1}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_K \rangle}{\|\alpha_K\|^2} \alpha_K$

و طبق رابطه $\beta = A + D$

وچون $\beta = A$ می شود طبق فرض پس برای رابطه $\|\beta\|^2 = \|A\|^2 + \|D\|^2$

وچون $D = 0$ داریم $\|D\|^2 = 0$ بنابراست پس

$$\|\beta\|^2 = \|A\|^2 = \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{\langle \beta, \alpha_K \rangle}{\|\alpha_K\|^2} \right)^2 \|\alpha_K\|^2 = \sum_{K=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_K \rangle|^2}{\|\alpha_K\|^2}$$

و اثبات این مسئله به پایان می رسد . $\underline{Q.E.D}$

دقت کنید → $\|\beta\|^2 = \langle \beta, \beta \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \alpha_i \,,\, \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j \right\rangle =$

در صفحه اول هم نشان دادیم

$$\left.\begin{array}{l} \text{if } i \neq j \Rightarrow \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0 \\ \text{if } i = j \Rightarrow \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = |\alpha_i|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \right)^2 \times \underbrace{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}_{= \|\alpha_i\|^2}$$

$$(\langle \beta, \alpha_i \rangle)^2 = \langle \beta, \alpha_i \rangle \langle \beta, \alpha_i \rangle = |\langle \beta, \alpha_i \rangle|^2 \rightarrow = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_i \rangle|^2}{\|\alpha_i\|^2} \quad \underline{Q.E.D}$$

سوال هفتم)

الف) کافی است اولاً نشان دهیم v_1 و v_2 ، v_3 مستقل خطی اند و

ثانیاً با فضای تشکیل شده توسط این سه بردار کل $\mathbb{R}^3$ را می توان تشکیل داد ← ترجمه span شدن است.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow v_1 \quad \downarrow v_2 \quad \downarrow v_3$

$$\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$$

برای نشان دادن اینکه مستقل خطی اند کافی است بتوانیم ماتریس مثلثی با Pivot های مخالف صفر تولید کنیم ←

$$\begin{matrix} R_1 \to \\ R_2 \to \\ R_3 \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R_2 - R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

* اگر ماتریس مربعی نبود کافی است Pivot های ماتریس تحویل شده سطری پلکانی را بررسی کنیم.

$$\longrightarrow R_3 + R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Pivots} \neq 0 \quad \square$$

→ می توان تجزیه LDU ارائه داد.

در واقع ترکیب خطی مقابل

• یعنی هیچ ستونی از B از ترکیب خطی ستون های دیگر ساخته نمی شود.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \\ c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

تنها جواب قابل قبول $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ است پس استقلال خطی ثابت می شود. Q.E.D

حال نشان می دهیم $\mathbb{R}^3$ از فضای تشکیل شده توسط فضای ستونی B ($C(B)$) ساخته می شود. به عبارت دیگر باید بگوییم هر برداری در $\mathbb{R}^3$ از ترکیب خطی v_1 و v_2 و v_3 ساخته می شود.

فرض کنید بردار $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ در $\mathbb{R}^3$ داده شده است. باید بتوانیم بنویسیم

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = v \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = a_1 + a_3 \\ x_3 = a_2 + a_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{x_2 - x_3 + x_1}{2} \\ a_2 = \dfrac{x_3 + x_1 - x_2}{2} \\ a_3 = \dfrac{-x_1 + x_2 + x_3}{2} \end{cases}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله می توانیم بگوییم

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Q.E.D

B مستقل خطی است و با span فضای ستونی B به $\mathbb{R}^3$ می رسیم.

ادامه سوال هفتم

قسمت ب) برای به دست آوردن ماتریس نمایش T در پایه B باید تصویر (Im) بردارهای پایه B یعنی v_1 و v_2 و v_3 را تحت تبدیل T به دست آوریم. و آنها را به صورت ترکیب خطی ای از ماتریس A که ضابطه تابع T را نشان می‌دهد بنویسیم و ضریب های این ترکیب خطی را در ستون های ماتریس نمایش $[T]_B$ قرار دهیم.

در این صورت داریم:

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + (-1) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1/2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1/2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (1/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1/2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (1/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Q.E.D

ادامه سوال هشتم)

در نهایت اگر $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ را ستون های متعامد بگیریم
و با روابط گفته شده در درس درنهایت داریم ؛

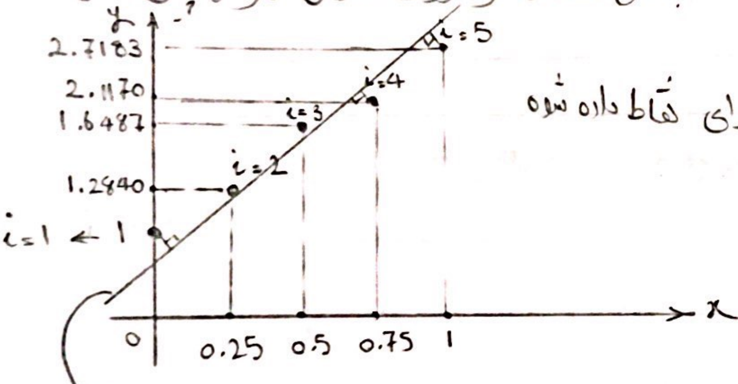
$$b_{c(A)} = \frac{\langle b,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \dots + \frac{\langle b,u_m\rangle}{\|u_m\|^2}u_m$$

$$= A\begin{bmatrix} \frac{\langle b,u_1\rangle}{\|u_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle b,u_m\rangle}{\|u_m\|^2} \end{bmatrix}$$

و سرانجام برای x در رابطه $Ax=b$ داریم ؛

$$\hat{x} = \left(\frac{\langle b,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}, \dots, \frac{\langle b,u_m\rangle}{\|u_m\|^2}\right)^T$$

حال می خواهیم بهترین خط را به نقاط فیت کنیم . با مثال گفته شده در صورت سوال کار را پیش می بریم .



فرض کنید بهترین خط است

معادله کلی خط برابر است با $y = mx+b$. برای نقاط داده شده داریم ؛

$$2.7183 = m + B$$
$$2.1170 = 0.75m + B$$
$$1.6487 = 0.5m + B$$
$$1.2840 = 0.25m + B$$
$$1 = B$$

در این صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.75 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 0.25 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} m \\ B \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.7183 \\ 2.1170 \\ 1.6487 \\ 1.2840 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت با محاسبه مقادیر در $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$ به معادله خط مورد نیاز خود می رسیم

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.75 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 0.25 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} m \\ B \end{bmatrix}$$

حال m و B به دست می آید و بهترین خط $y = mx + B$ مورد نیاز یافت می شود .

Weighted Least Square

همچنین اگر به طور مثال یکی از داده ها برای ما اهمیت بیشتری داشته باشد به صورت

$$E^2 = w_1(x-b_1)^2 + w_2(x-b_2)^2 \rightarrow \hat{x} = \frac{w_1^2 b_1 + w_2^2 b_2}{w_1^2 + w_2^2}$$

عمل می کنیم

Generally $\rightarrow \underbrace{(A^TW^TWA)\hat{x}_W = A^TW^TWb}$ Q.E.D

★ اثبات در صفحه بعد آمده

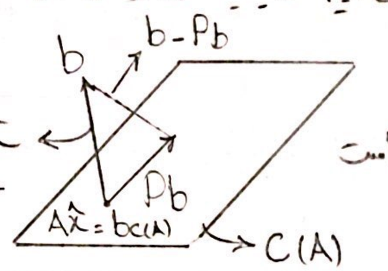
Least square method

سوال هشتم) ابتدا به توضیح و چگونگی و بیان تئوری روش کمترین مربعات یا Least square method می پردازیم و در نهایت به کمک Excel نمودار را رسم می کنیم .

• فرض کنید قرار است $Ax = b$ که جواب ندارد حل کنیم ، حال باید به بهترین تقریب از جواب خود برسیم . اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد و b برداری در $\mathbb{R}^m$ باشد این جواب تقریبی را با بردار $\hat{x}$ نمایش می دهیم و باید طوری باشد که فاصله b تا $A\hat{x}$ کمتر یا مساوی فاصله b تا Ax شود به طور دقیق تر :

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad dist(a,b) = \|a-b\|$ و $dist(b, A\hat{x}) \le dist(b, Ax)$

فرض کنید $Ax = b$ دستگاه ناسازگاری داشته باشد . فضای ستونی A مجموعه تمام بردارهای c است طوری که $Ax = c$ سازگار باشد . در این صورت می گوییم نزدیکترین بردار از فرم Ax به b همان تصویر عمود b بر $C(A)$ است .



$b - A\hat{x} = b_{C(A)^\perp}$ ← این باید کمینه شود .

جواب کمترین مربعات $Ax = b$ همان $\hat{x}$ است که سازگار در معادله $Ax = b_{C(A)}$ می باشد .

دقت کنید اگر $Ax = b$ سازگار باشد $\Rightarrow$ $b_{C(A)} = b$ می شود و جواب کمترین مربعات همان جواب اصلی معادله خواهد بود .

حال طبق مطالبی که در درس بیان شد اگر A ماتریس $m \times n$ و b برداری در $\mathbb{R}^m$ باشد جواب کمترین مربعات برای $Ax = b$ همان جوابی است که از رابطه زیر بدست می آید

$A^TAx = A^Tb$ که ثابت هم شد ...

* حال روشی که برای جواب کمترین مربعات می تواند ارائه شود را می توان به صورت زیر ارائه کرد .

۱- یافتن ماتریس A^TA و بردار A^Tb

۲- با اعمال سطری مقدماتی و تشکیل ساختار LDU به حل رابطه $A^TAx = A^Tb$ بپردازیم

۳- این رابطه همواره سازگار خواهد بود و جواب دارد .

در نهایت چون A^TA وارون پذیر باشد $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

از طرفی دقت کنید A^TA یک سری ویژگی دارد که همگی در کلاس مورد بررسی قرار گرفتند .

۱- متقارن است

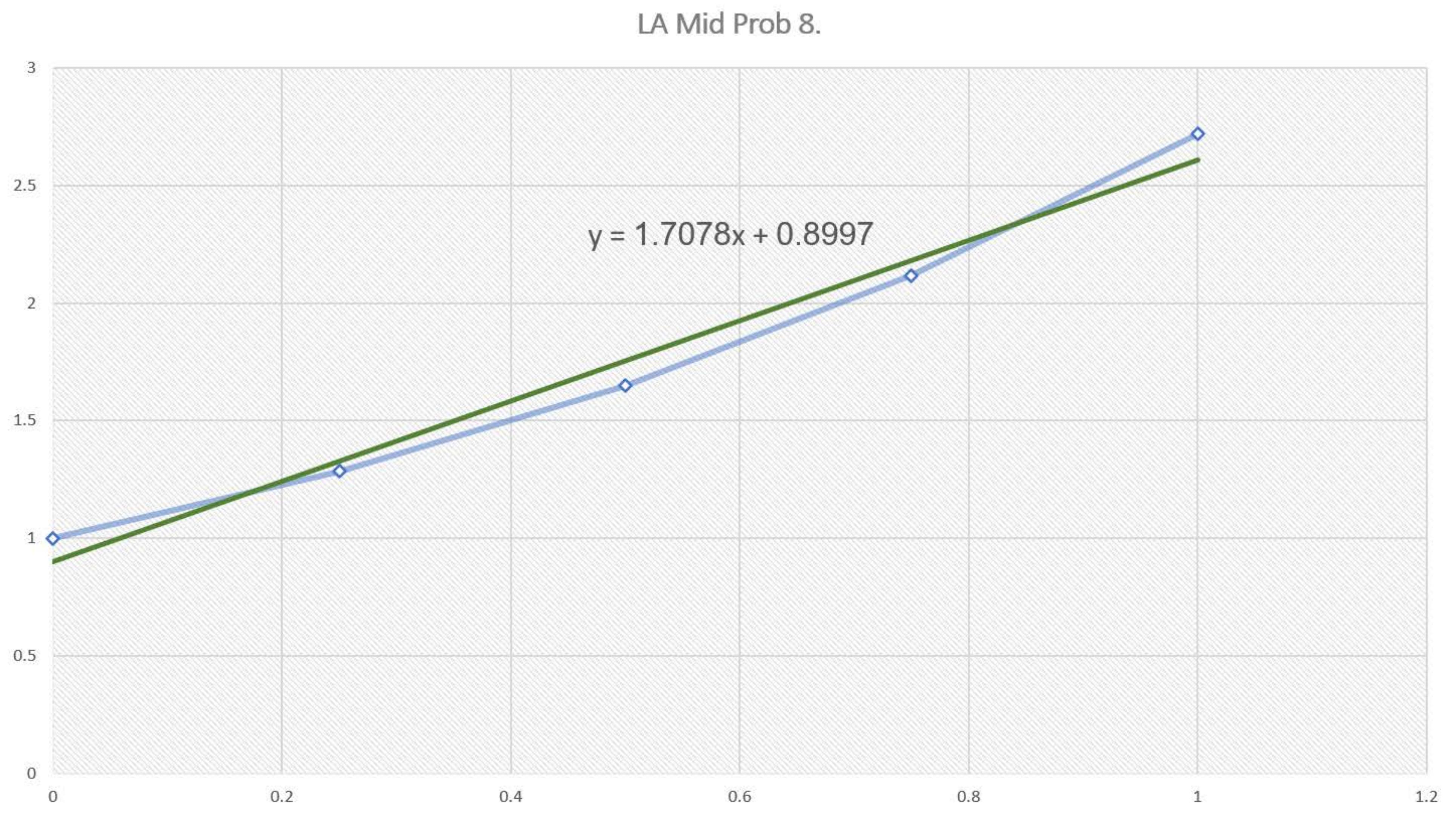
۲- $N(A^TA) = N(A)$

۳- اگر A دارای ستون های مستقل خطی باشد A^TA وارون پذیر خواهد شد .

۴- گفتیم $A\hat{x}$ نزدیک ترین بردار به b است و نزدیک ترین نقطه از فضای ستونی A به b برابر است با

$p = A(A^TA)^{-1}A^Tb$

۵- ماتریسی که نقطه p را ارائه می دهد یک ماتریس افکنش است و با $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ نمایش می دهیم .


LA Mid Prob 8.
y = 1.7078x + 0.8997
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2