

همه مقبضه‌های تجزیه با محدودیتی ساده اما اساسی مواجه اند: همه این مقبضه‌ها کمیتی دربار تبدیل‌های خطی روی یک فضای

خطی تشکیل شده‌اند نه تبدیل خطی از فضای یک فضای دیگر (این مورد ششگانه مفروض است). عادتاً، همه مقبضه‌ها تجزیه‌پذیر

برای ماتریس‌های مربعی ارائه می‌کنند نه ماتریس‌های مستطیلی.

سوال: آیا برای ماتریس‌های دایره (و نه لزوماً مربعی) نمایشی بزرگ قطری پیدا کرد؟

قضیه تجزیه تکینه مقدار (VD) به نوبت بهترین جواب به این سوال را در بر دارد. این قضیه ماتریس دایره A را از دو ماتریس «خوش رفتار»

A^*A و AA^* بازسازی می‌کند، و نوعی از «نمایش» برای آن ارائه می‌کند که حتی اگر A قطری هم هست و به دست آوردن آن

از منظر سبب هم به صرفه است. «باین حال، نباید از یاد ببریم که این نمایش A متشابه نیست، در حقیقت مقبضه‌های تجزیه،

دایره‌های هتروجران نیز مقبضه‌های A نیستند.

۱- تکینه مقدارها و تجزیه تکینه مقدار

فرض کنید $A \in M_{mn}(F)$ ، $F = \mathbb{R}$ یا \mathbb{C} و $r = \text{rank}(A)$. ماتریس‌های A^*A و AA^* مربعی اند و

خودالقائ نیزه‌ها باشند.

تئرم ۱. A^*A و AA^* حقیقی اند. نیزه‌های نامفرشتان بلزیند دایره‌ها را دارند و

$$\text{rank}(AA^*) = \text{rank}(A^*A) = r.$$

فرض کنید $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ همه نیزه‌های نامفرشتک این دو ماتریس (A^*A, AA^*) هستند. ماتریس هر دو

ماتریس را به حسب $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix}$ تقسیم.

تمرین ۲. الف) نشان دهید ماتریس‌های $U \in M_m(F)$ و $V \in M_n(F)$ ماتریس‌های

$$D_1 = \begin{bmatrix} D & \\ & 0_{m-r} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} D & \\ & 0_{n-r} \end{bmatrix}$$

مورد استفاده

$$AA^* = UD_1U^*, \quad A^*A = VD_2V^*.$$

ب) در ادامه $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{D} & \\ & 0_{m-r, n-r} \end{bmatrix}$ در این صورت

$$AA^* = (U\Sigma V^*)(V^*\Sigma^*U^*)$$

$$A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*).$$

$$A = U\Sigma V^*$$

در ادامه نشان دهید نام ماتریس خواصم کرده

فرض کنید $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (برای λ_i های منفی، σ_i ها را به صورت $\sqrt{|\lambda_i|}$ در نظر بگیرید) و μ_1, \dots, μ_m ستون‌های

U ، $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ستون‌های V هستند.

تمرین ۳. الف) برای هر $r \leq \min\{m, n\}$ ، Av_r متغیر بردار AA^* است.

ب) نشان دهید $Av_r = \sigma_r \mu_r$.

ج) نشان دهید $AV = U\Sigma$.

توجه کنید که چون $AA^* = U\Sigma\Sigma^*U^*$ ، $A^*A = V\Sigma^*\Sigma V^*$ ، ماتریس‌های AA^* ، A^*A

ترتیب ماتریس‌های Σ^* ، Σ ، Σ^* هستند و ترتیب درام‌های نامفروضه Σ به ترتیب ماتریس‌های نامفروضه

شماره AA^* ، A^*A هستند؛ یعنی مکتب‌های A همیشه فرض کنیم که درام‌های Σ به ترتیب نزولی قرار گرفته‌اند.

تمرین ۴. فرض کنید $A = U \Sigma V^*$ تجزیه‌ی مقدار A است و رتبه A برابر است با r و U_r ، V_r ، Σ_r به ترتیب ماتریس‌های

هستند که از r ستون اول U ، r ستون اول V و r سطر اول Σ تشکیل شده‌اند. در این صورت

$$A = U_r \Sigma_r V_r^*$$

تمرین ۵. فرض کنید $A = U \Sigma V^*$ تجزیه‌ی مقدار A است و رتبه A برابر است با r و u_1, \dots, u_r ، v_1, \dots, v_r

و $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ به ترتیب ستون‌های U_r ، ستون‌های V_r و درام‌های Σ_r بگیرد. در این صورت

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^* + \dots + \sigma_r u_r v_r^*$$

این تجزیه را تجزیه‌ی رتبه‌ی A می‌گویند.

تمرین ۶. به ازاء هر $1 \leq i \leq r$ فرض کنید $Z_i = u_i v_i^*$. نشان دهید ماتریس‌های Z_1, \dots, Z_r تقارن و مثبت هستند و ترتیب

ماتریس‌های Z_i را مؤلفه‌ی A در «صفت» Z_i به حساب می‌آوریم.

۲. کاربردهای از تجزیه‌ی مکتب‌های مقدار

۱.۲. کاهش رتبه

فرض کنید $A \in M_{mn}(F)$ ، $\text{rank}(A) = r$ و $k < r$. «درجه‌ی k » ماتریس A چیست؟

تمرین ۷. فرض کنید $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = 0$. در این صورت به ازاء هر $B \in M_{mn}(F)$

که $\text{rank}(B) = k$ داریم $\|A - B\|_F \geq \sigma_{k+1}$ که در این

$$\|A - B\|_F^2 = \left(\max_{\|z\|_2=1} \|(A-B)z\|_2 \right)^2.$$

مبارزه، لذا $B = \sigma_1 u_1 v_1^* + \dots + \sigma_k u_k v_k^*$ به نظر است و این راه $A^{(k)}$ نیست به هم.

راحتی. فرض کنید v_{k+1} ماتریس از $k+1$ ستون اول V تشکیل شده است.

$$\text{rank}(B v_{k+1}) \leq \text{rank}(B) = k$$

کماله. فن سه

$$\dim N(B v_{k+1}) = k+1 - \text{rank}(B v_{k+1})$$

کماله:

کماله: صریحاً بگویم $x \in N(B v_{k+1})$ بگویم برای $y = v_{k+1} x$ ، $\|y\|_2 = 1$ و

$$A y = \sigma_1 x_1 u_1 + \dots + \sigma_{k+1} x_{k+1} u_{k+1}$$

۲-۲. ماتریس راه‌های جاری نری

فرض کنید ماتریس حقیقی m سطر و n ستون A دارای راه‌های است که به نری آورده است. ما داریم که

$$A \leq \sigma_1 Z_1 + \dots + \sigma_r Z_r$$

در به در زمارها اگر در نری در A تقاطعی است به این معنی که نری کمترین بزرگترین بین چها تقسیم شده است و نری در

حالت به نری تقریباً به نری در تقاطع کوچک از Z های کمتر به نری است. در نیم انتظار داریم به نری مهم‌های Z که تقریباً

کمی به از نری در داشته باشند. برای نوشتن این انتظار فرض کنید نسبت k به نری (نری به نری)

ویدئو یا صدایی که به نری صدای صریحاً شرط شده است در نری به نری SNR (به نری)

فن سه. باید کمترین

نکته: باید کم رنج

$$SNR(b_1, z_1) \geq SNR(b_2, z_2) \geq \dots \geq SNR(b_r, z_r)$$

نکته ۸ اگر کمبودی مانند b_k نباشد، چرا در فرکانس $A^{(k)}$ بجای A مقدار کمی از b_k اضافه کردیم؟

چرا؟

۳-۲ دیتا مستقیم

فرکانس m عبارت T_1, \dots, T_m و D_1, \dots, D_n داریم. اگر فرکانس مستقیم را

عبارت T در D ها را مرتب می‌کنیم، به طوری که D ها را به ترتیب می‌نویسیم:

یک به ترتیب T در D ها را به ترتیب می‌نویسیم. T ها را به ترتیب می‌نویسیم. D ها را به ترتیب می‌نویسیم.

به ترتیب T ، آن را در D ها به ترتیب می‌نویسیم. D ها را به ترتیب می‌نویسیم. T ها را به ترتیب می‌نویسیم.

نویس فرکانس T ها را

$$A_s \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_n \end{bmatrix}$$

در فرکانس

...

اما برای جستجوی «خبر» به ترتیب می‌کنیم؟ خنثی‌سازی به ترتیبی در فراهم جستجو کنیم T_1, \dots, T_{i-1} مستند

جدار مٹوانہ ۱۱

$$q = e_i + \dots + e_l$$

تذوق کنیم؛ در این صدد در شوقهای بنده و این دلجو و دوست من، به صفت دیگر، این را

برادر در خواست می‌ویم، و سئو این است که می‌خواهیم برای «تربیت بزرگ» و بزرگوار از دعا می‌کنیم

یک راه نسبتاً سهولت این است که در لغت «نیز» در باره فارسی و نیز را یک کنیم و در معادله ترتیب
کوچکی این زنده ارائه کنیم.

مسئله ۹ اگر این زنجیره را در یک سیستم جدا $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ که در آن

$$\text{con } Q_j = \frac{q^T D_j}{\|q\|_2 \|D_j\|_2}$$

اعلامی رانہ خود صحتی راہ تہ نہیں شہا لہذا (دارا) دہشت رسد؟

خطری A: برای تشخیص اولی این است: شکل های مختلف بهرت ها، رسم الخط های مختلف، کلمات و جملات مختلف و غیره

هم سنی یا با منای مختلف و قیاسی که درین عبارت ها هم، باید روشن کرد $q^T A$ درین صحن

انطباق در برابر تضاد است و چنین ما را در بست نزدیک

تمرین ۱۵

الف) چرا مقایسه $\phi_j = \frac{q^T A^{(12)} q}{11q11_2 11A^{(12)} q11_2}$ و ϕ_j که به روش دیگر برای پلاستیسیته (نمونه)

اشکال توضیح دارد (نمونه) است ؟

ب) یک بردار ϕ_j به عنوان ضرایب برای اطمینان از درجه اول بودن معادله در اقلیم است. اگر ϕ_j را با $C(A)$ چندین بار A است. هر آنگاه این بردار را توضیح دهید.

۳. شبه طریقی

فرض کنید $A = U \Sigma V^*$ یک ماتریس متناظر A است. شبه طریقی Σ را به

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & \\ & 0_{n-r \times m-r} \end{bmatrix}$$

توضیح دهید.

$$A^+ = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^* + \dots + \frac{1}{\sigma_r} v_r u_r^*$$

تمرین ۱۱. الف) توضیح دهید

جدا کنید

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(AA^T)^* = AA^T$$

$$(A^T A)^* = A^T A.$$

$$C(A^T) = C(A^T)$$

ج. ششم

تمرین ۱۲. اگر $Ax = b$ را بر $A^T x = A^T b$ از دو نویسنده داریم، اگر x^+ جواب $Ax = b$ باشد،

است و اگر x^+ جواب $A^T x = A^T b$ باشد، x^+ جواب $Ax = b$ است. در هر صورت، x^+ کمترین سادار از x

نمایند را دارد، و باین خاصیت کمترین است.

* سوالات تاساتی SVD (مراحل واضح دهید)

① تجزیه SVD ماتریس زیر را به دست آورید (5 نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

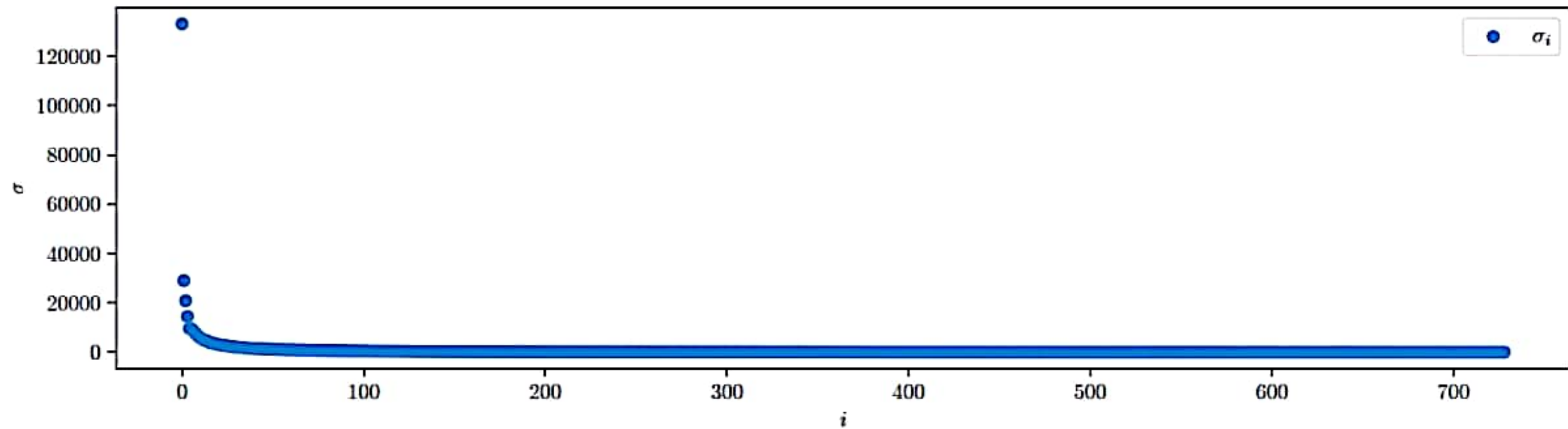
② تجزیه SVD ماتریس زیر را به دست آورید (5 نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* از سوالات بعدی فقط یک کدام را به دلخواه حل کنید

③ **! عملی!** برنامه‌ای بنویسید که یک تصویر با ابعاد حدودی 729×999 را به یک

ماتریس تبدیل کند و سپس غودار کمانه مقدار این ماتریس را plot کنید. تصویر می‌تواند دلخواه باشد. همچنین بازسازی تصاویر را با استفاده از تجزیه ناقص (A^k) را به ازای k مختلف (حداقل ۵ مقدار) که از غودار رسم شده خوبی دهید و مقایسه کنید که لازم k تصویر خوبی می‌دهد که کاهش کیفیت این قابل اغماض است. لازم است یک گزارش کیفی از نتیجه و نحوه عملکرد آن بدهید؛ اما لازم نیست که شما کاملاً مانند یک برنامه‌نویس گزارش دهید. صرفاً یک تصویر دلخواه را انتخاب کنید و عملیات گفته شده را انجام دهید.



(الف) نمودار تکینه مقدارها



$$k = 50 \text{ (a)}$$



$$k = 10 \text{ (c)}$$



$$k = 150 \text{ (e)}$$



$$k = 100 \text{ (d)}$$



$$k = 729 \text{ (b)}$$



$$k = 500 \text{ (f)}$$



$$k = 200 \text{ (g)}$$

بام سوالات بخش دوم

۱- 5
۲- 5
۳- 15 ← عملی

قطره ای
بملواه

بام سوالات بخش دوم

۱- 7
۲- 7

بام سوالات بخش اول

۱- 5	۲- 10
۳- 2 (الف) 3	۴- 10 (الف) 5
۵- 3 (ب)	۶- 5 (ب)
۷- 3 (الف) 2	۸- 11 (الف) 2
۹- 2 (ب)	۱۰- 5 (ب)
۱۱- 2 (ج)	۱۲- 3 (ج)
۱۳- 4	۱۴- 10
۱۵- 3	
۱۶- 3	
۱۷- 5	
۱۸- 8	

مجموع نمرات: 120

* برای کسب نمره کامل از این امتحان، باید نمره کامل
گیرید! یعنی 119 نمره کامل است...

توجه داشته باشید پاسخ های شما باید کامل و خوانا باشند.

موفق باشید :