- همهٔ پاسخ‌هایتان را خوانا، با توضیح دقیق و کامل و مستدل بنویسید.
- پاسخ هر سؤال را در برگهٔ مستقل بنویسید.
- جمع نمره‌ها برابر ۱۲۰ است، و نمرهٔ ۱۰۰ نمرهٔ کامل محسوب می‌شود.

۱. فرض کنید $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. قرار دهید:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

الف. نشان دهید $e^A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (۵ نمره)

ب. فرض کنید A یک ماتریس قطری است. نشان دهید e^A نیز یک ماتریس قطری است. (۲ نمره)

ج. به ازای هر ماتریس وارون‌پذیر $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ نشان دهید:

$$Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}.$$

(۳ نمره)

د. فرض کنید $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$، $\lambda \in R$ و $Av = \lambda v$. نشان دهید:

$$e^Av = e^{\lambda}v.$$

(۳ نمره)

ه. فرض کنید به ازای هر $0 \leq i \leq n$، $x_i(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع حقیقی است و $x_i'(t)$ مشتق آن در نقطه t است. قرار دهید $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ و $x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$. جواب معادله دیفرانسیل $x'(t) = Ax(t)$ با شرط اولیه $x(0) = a$ را حدس بزنید و درستی آن را نشان دهید. (۱۰ نمره)

و. فرض کنید $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ و $AB = BA$. نشان دهید

$$e^{A+B} = e^Ae^B.$$

آیا حکم فوق به ازای هر $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ دلخواه صادق است؟ (۳ نمره)

ز. فرض کنید $A = D + N$، $DN = ND$، $N^n = 0$ و D مشابه با ماتریسی قطری است. رویه‌ای برای محاسبه e^A ارائه کنید. (۸ نمره)

ح. نشان دهید e^A وارون‌پذیر است. (۸ نمره)

ط. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، $a, b \in \mathbb{R}$. نشان دهید:

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

(۳ نمره)

---

۲. اثبات وجود پایه برای هر فضای خطی دلخواه..

برای اثبات حکم فوق چند تعریف و لم زرن نیاز است. در ادامه با این تعاریف و لم زرن آشنا می‌شوید.

تعریف ۱. مجموعه A مجهز به رابطه $\leq$، یک مجموعه جزئی مرتب نامیده می‌شود هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱. به ازای هر $a \in A$، $a \leq a$.

۲. به ازای هر $a, b \in A$، $a \leq b$ و $b \leq a$، نتیجه دهد $a = b$.

۳. به ازای هر $a, b, c \in A$، $a \leq b$ و $b \leq c$، نتیجه دهد $a \leq c$.

تعریف ۲. فرض کنید A یک مجموعه جزئی مرتب است. عنصر $a \in A$ را ماکسیمال می‌گویند هرگاه به ازای هر $b \in A$، اگر داشته‌باشیم $a \leq b$ آنگاه بتوان نتیجه گرفت $a = b$.

تعریف ۳. فرض کنید B زیرمجموعه ناتهی از یک مجموعه جزئی مرتب A باشد. گوییم B دارای کران بالای $a \in A$ است هر گاه به ازای هر $b \in B$ داشته باشیم $b \leq a$.

تعریف ۴. منظور از یک زنجیر در مجموعه جزئی مرتب A، زیرمجموعه ناتهی از A مانند B است به طوری که هر دو عنصر آن قابل مقایسه‌اند. یعنی به ازای هر $a, b \in B$، $a \leq b$ یا $b \leq a$.

لم زرن. اگر A یک مجموعه جزئی مرتب باشد و هر زنجیر A دارای کران بالایی در A باشد، در این صورت A دارای عضو ماکسیمال است.

قضیه: هر فضای خطی $\mathcal{V}$ روی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ درای پایه است.

مراحل اثبات قضیه فوق به شرح زیر است.

الف. قرار دهید:

$$\Sigma = \{S \subseteq \mathcal{V} \mid \text{مستقل خطی است } \mathbb{F} \text{ روی } S\}$$

نشان دهید Σ ناتهی و با رابطه $\subseteq$ مجموعه جزئی مرتب است. (۲ نمره)

ب. فرض کنید $\{S_i\}_{i \in I}$ یک زنجیره در Σ است. قرار دهید $T = \bigcup_{i \in I} S_i$. نشان دهید $T \in \Sigma$. (۳ نمره)

ج. نشان دهید Σ دارای یک عضو ماکسیمال مانند B است. (۳ نمره)

د. نشان دهید B پایه‌ای برای $\mathcal{V}$ است. (۲ نمره)

---

۳. فرض کنید v فضای خطی حقیقی، $\dim \mathcal{V} = n$ و $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ زیرفضای خطی است. رابطه R روی $\mathcal{V}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall a, b \in \mathcal{V} \quad aRb \Longleftrightarrow b - q \in \mathcal{W}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که R یک رابطه هم‌ارزی است. بنابراین به ازای هر $a \in \mathcal{V}$، مجموعه همه $x \in \mathcal{V}$ که aRx را کلاس هم‌ارزی a می‌نامیم و با نماد $[a]$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$[a] = \{x \in \mathcal{V} \mid xRa\} = \{x \in \mathcal{V} \mid a - x \in \mathcal{W}\}$$

قرار دهید:

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{W}} = \{[a] \mid a \in \mathcal{V}\}$$

به ازای هر $[a], [b] \in \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{W}}$ و $r \in \mathbb{R}$ تعریف کنید:

$$[a] + [b] = [a + b], \quad r.[a] = [ra]$$

الف. نشان دهید $(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{W}}, +, .)$ یک فضای خطی است. (۲ نمره)

ب. فرض کنید $\dim \mathcal{W} = m$ و $B = \{w_1, \cdots, w_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{V}$ به طوریکه $\{w_1, \cdots, w_m\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{W}$ است. پایه‌ای برای فضای خطی $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{W}}$ معرفی کنید. (۵ نمره)

ج. نگاشت $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ با ضابطه

$$T(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i)$$

را در نظر بگیرید. نشان دهی T یک تبدیل خطی است و سپس رابطه $N(T)$ و فضای خطی $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{W}}$ را تشریح کنید. (۳ نمره)

---

۴. فرض کنید $\mathcal{V}$ فضای خطی حقیقی باشد. مجموعه $\mathcal{V}^*$ مجموعه همه تابع‌های خطی از $\mathcal{V}$ به $\mathbb{R}$ است.
به راحتی می‌توان دید که $\mathcal{V}^*$ فضای خطی حقیقی است.

الف. فرض کنید $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{V}$ است. قرار دهید $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ بطوریکه:

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

نشان دهید B^* پایه‌ای برای $\mathcal{V}^*$ است. (۴ نمره)

ب. فرض کنید $\{f_1, \cdots, f_n\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{V}^*$ است. ثابت کنید وجود دارد مجموعه بردارهای $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ بطوریکه $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ و B پایه‌ای برای $\mathcal{V}$ است. (۴ نمره)

ج. فرض کنید $\mathcal{V}$ فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه ۲ روی اعداد حقیقی است و t_1, t_2, t_3 اعداد حقیقی متمایزاند. تابع $l_i : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $l_i(p(x)) = p(t_i)$ به ازای هر $1 \leq i \leq 3$ را درنظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید که l_i تابع خطی است.

ج–۱ نشان دهید $B^* = \{l_1, l_2, l_3\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{V}^*$ است. (۴ نمره)

ج–۲ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ را به گونه‌ای بیابید که B پایه‌ای برای $\mathcal{V}$ و $l_i(v_i) = p_{ij}$ به ازای هر $1 \leq i, j \leq 3$ (۴ نمره)

ج–۳ به ازای هر چندجمله‌ای حداکثر درجه ۲ مانند $p(x)$ نشان دهید

$$p(x) = l_1(p)v_1 + l_2(p)v_2 + l_3(p)v_3$$

(۴ نمره)

توجه کنید $l_i(p)$ها در روش تقریب توابع با چندجمله‌ای حداکثر درجه ۲ به ضرایب لگرانژ معروف‌اند.

د. برای فضای خطی $\mathcal{V}$، $\mathcal{V}^*$ را تعریف کردیم. حال برای فضای خطی $\mathcal{V}^*$، $(\mathcal{V}^*)^*$ را در نظر بگیرید. برای راحتی آن را با $\mathcal{V}^{**}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $v \in \mathcal{V}$ و تعریف می‌کنیم $L_v : \mathcal{V}^* \to \mathbb{R}$ با ضابطه $L_v(f) = f(v)$.
به راحتی می‌توان دید L_v یک تابع خطی است. پس $L_v \in \mathcal{V}^{**}$. نگاشت $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{**}$ با ضابطه $\Phi(v) = L_v$ را در نظر بگیرید.
نشان دهید Φ یک تابع خطی، یک به یک و پوشا است.

(۵ نمره)

---

۵. فرض کنید $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. منظور از زیرماتریس اصلی مرتبه k از A، ماتریسی است که ازتقاطع k سطر با شماره‌های $i_1, i_2, \cdots, i_k$ و k ستون با شماره‌های $i_1, i_2, \cdots, i_k$ بوجود می‌آید. نشان دهید اگر $\text{rank}(A) = r$ و A ماتریسی متقارن باشد، A دارای زیرماتریسی اصلی از مرتبه r با رتبه r است.

(۱۰ نمره)

---

۶. $\mathcal{V}$ یک فضای ضرب داخلی است و فرض کنید $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ مجموعه متعامدی از بردارهای ناصفر $\mathcal{V}$ باشد. اگر β برداری از $\mathcal{V}$ باشد، نشان دهید

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle \beta, \alpha_k \rangle|^2}{|\alpha_k|^2} \leq |\beta|^2$$

و حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{|\alpha_k|^2} \alpha_k$$

(۱۰ نمره)

---

۷. الف. نشان دهید مجموعه $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ که $v_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$، $v_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $v_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است.
(۲ نمره)

ب. تابع خطی $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^T$ را با ضابطه $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. ماتریس نمایش T در پایه B را بیابید.

(۳ نمره)

---

۸. داده‌های جدول زیر را با چندجمله‌ای درجه ۲ با روش حداقل مربعات، برازش کنید. نتایج برازش و همچنین داده‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

i	1	2	3	4	5
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

برای حل این سوال آزادید با استفاده از برنامه‌نویسی یا ابزارهایی مانند اکسل، نمودار را رسم کنید و خط حاصل از برازش را به دست آورید. ولی توضیح چگونگی و تئوری انجام این فرایند الزامی است.

(۵ نمره)

موفق باشید.