

سؤال ۱. فرض کنید  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  و  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ . فرض کنید  $Q$  مجموعه‌ای باشد که اعضایش، زیر مجموعه‌های  $m$  عضوی از  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  هستند. به عبارت دیگر،

$$Q = \{S \subset [n] \mid |S| = m\}$$

برای هر  $S \in Q$ ،  $A_S$  ماتریسی  $m \times m$  است که ستون‌هایش، ستون‌هایی از  $A$  هستند که اندیششان در  $S$  است (با همان ترتیب). به طریق مشابه،  $B_S$  ماتریسی  $m \times m$  است که سطرهایش، سطری از  $B$  است که اندیششان در  $S$  است. نشان دهید:

$$\det(AB) = \sum_{S \in Q} \det(A_S) \det(B_S)$$

سؤال ۲. دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید:

$$A_{m,m} = \begin{pmatrix} \lambda & t & \cdots & t \\ t & \lambda & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & t & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

سؤال ۳. فرض کنید  $G$  یک گراف باشد و  $X$  ماتریس وقوع آن باشد. اگر  $B$  یک زیر ماتریس مربعی از  $X$  باشد، نشان دهید:

$$\det(B) \in \{\pm 2^i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{0\}$$

سؤال ۴. فرض کنید  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  به گونه‌ای است که  $a_{ij} = \frac{1}{\min\{i,j\}}$ . دترمینان ماتریس  $A$  را بیابید.

سؤال ۵. فرض کنید  $x, y \in \mathbb{R}^n$  بردارهایی دلخواه باشند. نشان دهید:

$$\text{adj}(I - xy^T) = xy^T + (1 - y^T x)I$$

سؤال ۶. می‌دانیم  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ماتریسی است که مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر ۰ است. اگر  $A_{i,j}$  ماتریسی باشد که از حذف سطر  $i$  و ستون  $j$  از ماتریس  $A$  بدست می‌آید، نشان دهید:

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : |\det(A_{i,j})| = |\det(A_{i,k})|$$

سؤال ۷. فرض کنید  $A = [a_{ij}] \in M_n(\{0, 1\})$ ،  $n \in \mathbb{N}$  و به ازای هر  $1 \leq i, j \leq n$ ،

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{اگر } i+j \text{ عدد اول باشد} \\ 0, & \text{اگر } i+j \text{ عدد اول نباشد} \end{cases}$$

نشان دهید  $|det(A)|$  مربع کامل است.

---

موفق باشید.