
سؤال ۱. فرض کنید v فضای خطی است (متناهی بعدی) و $T : v \to v$ یک تبدیل خطی است به صورتی که $rank(T) = rank(T^2)$. ثابت کنید:

$$N(T) \cap Im(T) = \{0\}$$

سؤال ۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ و $AB = BA$ ثابت کنید:

$$rank(A+B) + rank(AB) \leq rank(A) + rank(B)$$

سؤال ۳. اگر v یک فضای خطی با نامتناهی عضو باشد، نشان دهید v نمی‌تواند برابر اجتماع تعدادی متناهی زیر فضای خود باشد.

سؤال ۴. اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $B \in M_m(\mathbb{R})$ عملگر $\otimes$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

ماتریس $nm \times nm$ است. ثابت کنید:

$$rank(A \otimes B) = rank(A).rank(B)$$

سؤال ۵. ماتریس $A = [a_{ij}]_{i,j\in[n]}$ به گونه‌ای است که $a_{i,j} = i + j$. بعد ماتریس A را بیابید.

سؤال ۶. ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ به گونه‌ای است که $A^{۲} = -I$.

الف) نشان دهید n زوج است.

ب) ثابت کنید $P \in M_n(\mathbb{R})$ موجود است که

$$P^{-۱}AP = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \\ \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \ddots & \vdots \quad \vdots \\ \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} & \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

سؤال ۷.

الف) فرض کنید $T : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}^{۲}$ تبدیل خطی است با ضابطه‌ی $T(x_۱, x_۲) = (x, ۰)$. پایه استاندارد، E ، پایه‌ی $B = \{(۱, ۱), (۲, ۱)\}$ را برای $\mathbb{R}^{۲}$ در نظر بگیرید، سپس $[T]_B$ و $[T]_E$ را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین این دو ماتریس را پیدا کنید.

ب) تبدیل خطی $T : P_۲(x) \to P_۳(x)$ با ضابطه‌ی $T(f(x)) = xf(x)$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌های $B = \{۱, x, x^{۲}\}$ و $B^* = \{۱ + x, x, ۱ - x^{۲}\}$ پایه‌هایی برای $P_۲(x)$ و $B' = \{۱, x, x^{۲}, x^{۳}\}$ پایه برای $P_۳(x)$ هستند. ماتریس نمایش T در پایه‌های B، B'، $[T]_{B,B'}$ و ماتریس نمایش T در پایه‌های B^*، B'، $[T]_{B^*,B'}$ را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین آنها را بدست آورید.

سؤال ۸. فرض کنید همه بردارهایی مانند x در مربع واحد $۰ \leq x_۱ \leq ۱$ و $۰ \leq x_۲ \leq ۱$ را با تبدیل دو در دو A تصویر کرده‌ایم.

الف) شکل ناحیه‌ی تبدیل شده (یعنی برد A) چیست؟

ب) ناحیه تبدیل شده به ازای چه Aهایی مربع است؟

ج) ناحیه تبدیل شده به ازای چه A هایی خط است؟

د) مساحت ناحیه تبدیل شده را محاسبه کنید.

سؤال ۹. فرض کنید v یک فضای برداری باشد، خانواده‌ای از زیرفضاهای k بعدی v این خاصیت را دارند که اشتراک هر دوتایی از آن‌ها شامل یک زیرفضای $k - ۱$ بعدی است. نشان دهید یا اشتراک همه‌ی زیرفضاها شامل یک زیرفضای $k - ۱$ بعدی است، یا زیرفضای $k + ۱$ بعدی وجود دارد که همه‌ی این‌ها را در بر بگیرد.

موفق باشید.