① به ماتریس مربعی A، یکانی گوییم هرگاه $AA^* = I$. گر هر ماتریس متعامد B، نشان دهید ماتریس پایین مثلثی یکانی مانند M موجود است که درایه‌های روی قطر M های مثبت‌اند و ماتریس MB یکانی است.

② فرض کنید ماتریس‌های $A, B \in M_n(\Phi)$، بهنجار هستند که $A^*A = AA^*$، $B^*B = BB^*$. ثابت کنید اگر $AB = 0$، آنگاه $BA = 0$.

③ فرض کنید $A \in M_n(\Phi)$، $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند. نشان دهید.

الف) $$\sum \lambda_i^2 = \sum_{i,j \in [n]} a_{ij}^2 \quad (\text{با فرض خودالحاقی بودن } A)$$

ب) $$\sum |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j \in [n]} |a_{ij}|^2$$

④ فرض کنید $A, B \in M_n(\Phi)$ خودالحاقی هستند. منظور از $\lambda_{min}(M)$، $\lambda_{max}(M)$ به ترتیب، کمترین و بیشترین ویژه مقدار M است. نشان دهید.

$$\lambda_{min}(A) + \lambda_{min}(B) \leq \lambda_{min}(A+B) \leq \lambda_{max}(A) + \lambda_{max}(B)$$

⑤ تجزیه چولسکی را برای ماتریس زیر بنویسید و چگونگی بدست آوردنش را شرح دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

⑥ فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$.

ثابت کنید A خودالحاق است اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$\langle Ax , x \rangle \in \mathbb{R}$$

موفق و سربلند باشید :)