

سؤال ۱.

منظور از یک زیرماتریس اصلی مرتبه i از $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، زیرماتریسی $i \times i$ است که از تقاطع i ستون، i سطر هم‌اندیس تشکیل شده‌است.

فرض کنید $\mathcal{M}_i(A)$ مجموعه همه زیرماتریس‌های اصلی از مرتبه i از A باشد. اگر $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه A باشد، نشان دهید

$$f(x) = \sum_{i=0}^n C_i x^i$$

که در آن

$$(-1)^i C_i = \sum_{B \in \mathcal{M}_i(A)} \det(B).$$

سؤال ۲. فرض کنید داریم

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

الف) چندجمله‌ای مینیمال W را بدست‌آورید و ریشه‌هایش را محاسبه کنید.

ب) برای هر مقدار ویژه، بردار ویژه (یا در صورت لزوم، فضای ویژه) متناظرش را بدست‌آورید.

ج) فرض کنید

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_n & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 & s_1 & \dots & s_1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

مقادیر ویژه ماتریس S را بدست‌آورید.

سؤال ۳. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ و $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$. نشان دهید

$$x^n \det(xI - AA^T) = x^n \det(xI - A^T A)$$

و نتیجه بگیرید ویژه‌مقدارهای ناصفر $A^T A$ و AA^T یکسان هستند و تکرار برابر دارند.

سؤال ۴. فرض کنید $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن باشد و مقادیر ویژه A برابر $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ باشند. اگر $N \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ به گونه‌ای بود که $NN^T = I_m$ و $B = NAN^T$ و $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ مقادیر ویژه B باشند، ثابت کنید:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i.$$

سؤال ۵. ثابت کنید تکرر جبری یک مقدار ویژه از ماتریس A ، از تکرر هندسی آن بیشتر است. منظور از تکرر هندسی مقدار ویژه λ از ماتریس A ، بعد فضای $N(\lambda I - A)$ است.

سؤال ۶. فرض کنید $A, B, C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

- الف) اگر A و B با یکدیگر جابجا شوند، نشان دهید ویژه‌برداری مشترک دارند.
 ب) اگر A, B, C دو به دو با یکدیگر جابجا شوند، نشان دهید هر سه ویژه‌بردار مشترک دارند.

سؤال ۷. فرض کنید $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ و $f \in \mathbb{C}[x]$ یک چندجمله‌ای است. ثابت کنید اگر λ ویژه‌مقداری از A باشد، $f(\lambda)$ ویژه‌مقداری از $f(A)$ است.

سؤال ۸. $T \in \mathcal{L}(F^n)$ را تعریف می‌کنیم:

$$T : (w_1, w_2, w_3, w_4)^T \rightarrow (0, w_2 + w_4, w_3, w_4)^T$$

- الف) چندجمله‌ای مینیمال T را بدست آورید.
 ب) چندجمله‌ای مشخصه T را بدست آورید.
 ج) فرم جردن T را بدست آورید.

موفق باشید.