

سؤال ۱. اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد و W_1, W_2 زیرفضای V باشند نشان دهید:

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \quad (\text{الف})$$

$$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp \quad (\text{ب})$$

سؤال ۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و $\alpha, \gamma, \beta \in V$ نشان دهید:

$$\|\alpha + \beta\| + \|\beta + \gamma\| + \|\gamma + \alpha\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| + \|\gamma\| + \|\alpha + \beta + \gamma\|$$

سؤال ۳. فرض کنید $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ بردارهای یکه باشند به طوری که برای هر $i \neq j$ داشته باشیم، $v_i \cdot v_j < -\epsilon$ که $\epsilon > 0$ عددی ثابت است. ثابت کنید:

$$m \leq 1 + \frac{1}{\epsilon}$$

سؤال ۴. فرض کنید $V = W_1 \oplus W_2$ و f_1, f_2 توابع ضرب داخلی روی W_1, W_2 باشند. نشان دهید تابع ضرب داخلی یکتای $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که دو شرط زیر را برقرار کند،

$$W_1^\perp = W_2 \quad (\text{الف})$$

$$f(\alpha, \beta) = f_k(\alpha, \beta) \quad \text{آنگاه } \alpha, \beta \in w_k \text{ اگر } k \in \{1, 2\} \text{ داشته باشیم:} \quad (\text{ب})$$

سؤال ۵. فرض کنید $u, v \in V$ که V فضای ضرب داخلی متناهی بعدی روی \mathbb{R} است. اگر $\|u\|$ و $\|v\|$ حداکثر ۱ باشند، نشان دهید:

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - | \langle u, v \rangle |$$

سؤال ۶. نشان دهید $P \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریس افکنش است، اگر و تنها اگر $P^2 = P$.

سؤال ۷. فرض کنید $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ پایه‌ای متعامد و یکه برای فضای ضرب داخلی V باشد. اگر $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ به گونه‌ای باشند که برای هر $1 \leq i \leq n$:

$$\|e_i - v_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

نشان دهید $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V است.