

سؤال ۱. فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{R})$  دارای این خاصیت است که مجموع درایه‌های هر سطر  $A$ ، برابر ۱ است. نشان دهید اگر  $A$  وارون‌پذیر باشد، مجموع درایه‌های هر سطر  $A^{-1}$  نیز برابر ۱ است.

سؤال ۲. به ماتریس  $A$  خودتوان گوئیم هرگاه  $A^2 = A$ .

الف) اگر  $A$  خودتوان باشد نشان دهید ماتریس  $B$  خودتوان وجود دارد به طوری که  $AB = BA = 0$ .  
 ب) اگر برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داشته باشیم  $AB = A$  و  $BA = B$ ، ثابت کنید ماتریس  $A$  خودتوان است.

سؤال ۳. فرض کنید  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  ثابت کنید  $AB = AC$  اگر و تنها اگر  $A^T AB = A^T AC$ .

سؤال ۴. دستگاه  $Ax = b$  را با استفاده از تجزیه  $LU$  برای  $A$  حل کنید که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & u_1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & a_2 & u_2 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & l_2 & a_3 & u_3 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & l_{n-2} & a_{n-1} & u_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & l_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

و  $b$  برداری دلخواه در  $\mathbb{R}^n$  باشد.

سؤال ۵. فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

آیا ماتریس  $A$  وجود دارد که برابری زیر برقرار باشد؟

$$A^2 = AB + 2I$$

سؤال ۶. تمام ماتریس‌های  $B \in M_2(\mathbb{R})$  را بیابید به طوری که با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

جاب‌جا شوند یعنی:  $AB = BA$

سؤال ۷. مقدار  $a$  را به گونه‌ای بیابید که ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

با  $I$  هم‌ارز باشد.

---

موفق باشید.