دانشکده مهندسی کامپیوتر

مدارهای منطقی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

حل تمرین سه — **مهلت ارسال: ساعت ۲۴ دوشنبه ۲۳ آبان ۱۴۰۱**

به موارد زیر توجه کنید:

۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخنامه بنویسید.

۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.

۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نام‌گذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.

۴- این تمرین ۲۲ نمره دارد که معادل ۰,۵۵ نمره از نمره کلی درس است و ۰,۰۵ نمره آن امتیازی است.

۵- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

۱- (۲ نمره)

الف- آیا یک گیت AND با n ورودی را می‌توانیم با n-1 گیت AND دو ورودی جایگزین کنیم؟ برای گیت NAND چطور؟ چرا؟

پاسخ: درباره گیت AND پاسخ مثبت است. درباره گیت NAND پاسخ منفی است. به این دلیل:

$$NAND(A_1, A_2, \dots A_n) = \overline{(A_1.A_2.\dots.A_n)} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$$
$$NAND(NAND(A_1, A_2, \dots A_{n-1}), A_n) = \overline{\overline{(A_1.A_2.\dots.A_{n-1})}.A_n} = \overline{(\overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}}).A_n}$$
$$= \overline{(\overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}})} + \overline{A_n} = (A_1.A_2.\dots.A_{n-1}) + \overline{A_n}$$
$$\neq NAND(A_1, A_2, \dots A_n)$$

ب- آیا یک گیت OR با n ورودی را می‌توانیم با n-1 گیت OR دو ورودی جایگزین کنیم؟ برای گیت NOR چطور؟ چرا؟

پاسخ: درباره گیت OR پاسخ مثبت است. درباره گیت NOR پاسخ منفی است. به دلیلی مشابه با بند الف.

۲- (۴ نمره) توابع XOR و XNOR با بیش از دو ورودی را به ترتیب توابعِ فرد (odd function) و زوج (even function) می‌نامند. به این معنا که خروجی آنها وقتی یک می‌شود که تعدادِ یک‌های ورودی به ترتیب فرد یا زوج باشد.

الف- با استفاده از دو گیتِ XOR دو ورودی، یک تابعِ فردِ سه ورودی بسازید.

ب- با استفاده از دو گیتِ XOR دو ورودی، یک تابعِ زوجِ سه ورودی بسازید.

ج- با استفاده از دو گیتِ XNOR دو ورودی، یک تابعِ فردِ سه ورودی بسازید.

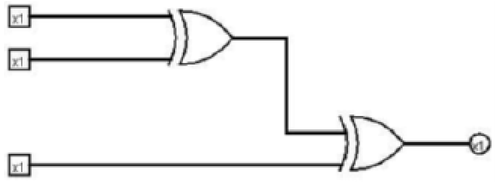
ب- با استفاده از دو گیتِ XNOR دو ورودی، یک تابعِ زوجِ سه ورودی بسازید.

اگر ساختِ هر یک از مدارهای بالا با شرطِ ذکرشده ممکن نیست، مدار را با اضافه کردنِ حداقل تعدادِ گیت بسازید.

پاسخ:

الف) تابع XOR قابلیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی می‌توان نشان داد:

$$\mathrm{Odd}(A,B,C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = ABC + AB'C' + A'BC' + A'B'C$$



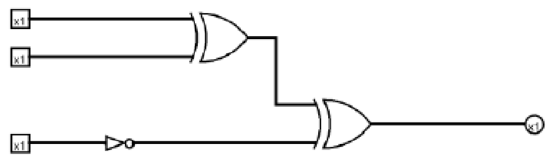
ب)

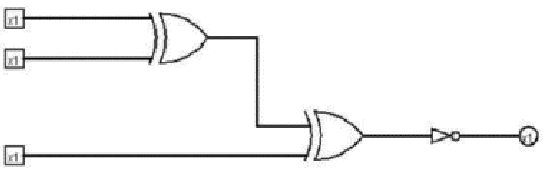
راه اول: اگر تابع زوج سه ورودی را محاسبه کنیم، داریم:

$$Even(A,B,C) = (Odd(A,B,C))' = A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC'$$

و با کمی دقت می‌توان دید که این همان مدار شکل الف است، با این تفاوت که یکی از ورودی‌ها مکمل شده است. فرقی نمی‌کند کدام ورودی را مکمل کنیم، اما برای کاهش تاخیر مسیر بحرانی بهتر است ورودی پایین مکمل شود.

راه دوم : کافی است خروجی نهایی مدار قسمت الف را معکوس کنیم و خروجی دهیم.

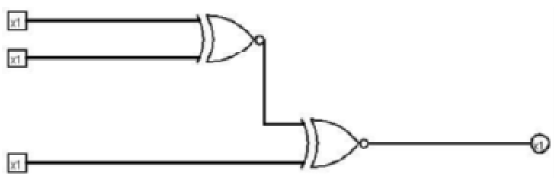




ج) اگر عبارت زیر را محاسبه کنیم :

$$(A \odot B) \odot C = \underbrace{(AB + A'B')}_{D} \odot C = DC + D'C' = \cdots = ABC + AB'C' + A'BC' + A'B'C = Odd(A,B,C)$$

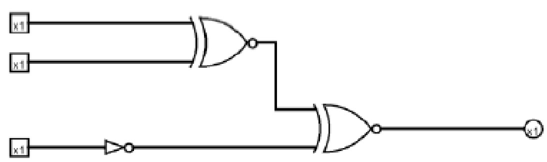
بنابراین

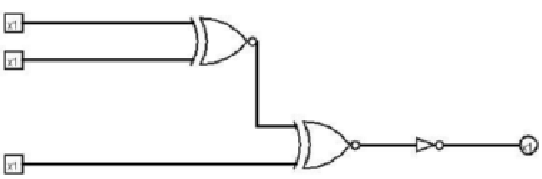


د) همانند قسمت ب، به دو صورت می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

۱. خروجی نهایی مدار را معکوس کنیم.

۲. یکی از ورودی‌های مدار را معکوس کنیم.





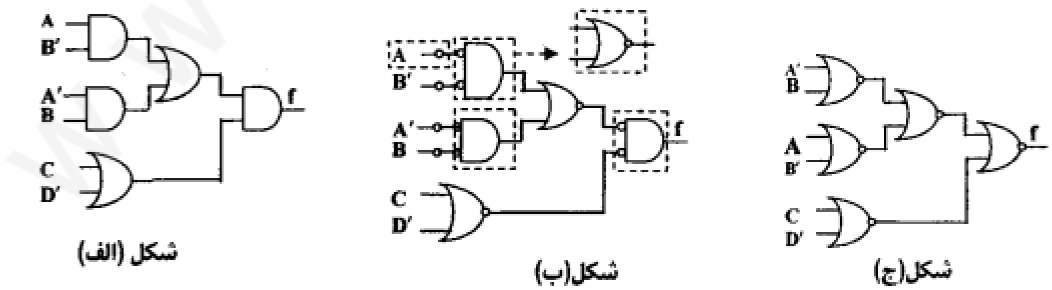
۳- (۴ نمره) مدارهای لازم برای ساخت دو تابع F و G را رسم کنید.

$$F = (AB' + A'B)(C + D')$$
$$G = A'(CD' + B) + BC'$$

الف- مدار تابعِ F را طوری تغییر دهید که برای ساختِ آن فقط از گیت‌های NOR استفاده شود.

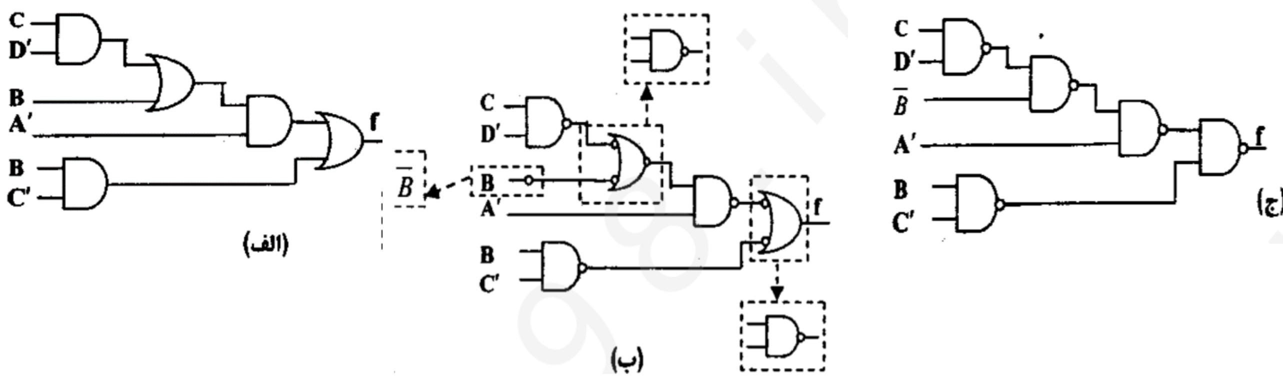
پاسخ: در شکل (الف) تابع F به وسیله گیت‌های AND و OR رسم شده است. در شکل (ب) در هر مسیر لازم دو حباب اضافه شده است (هر حباب به منزله یک گیت NOT است) طبق قضیه دمورگان اگر ورودی‌های گیت AND را متمم کنیم، گیت NOR حاصل خواهد شد زیرا: (A’.B’) = (A + B)’

شکل (ج) از شکل (ب) بدست آمده است:



ب- مدار تابعِ G را طوری تغییر دهید که برای ساختِ آن فقط از گیت‌های NAND استفاده شود.

پاسخ: در شکل (الف) نمودار تابع G به وسیله گیت‌های AND و OR رسم شده است. در شکل (ب) در مسیر های لازم دو حباب قرار گرفته و در شکل (ج) تابع f فقط به وسیله گیت های NAND به صورت چهار سطحی شاخته شده است.

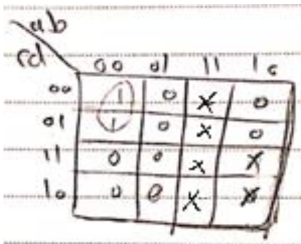


۴- (۴ نمره) با رسم جدول درستی و ساده‌سازی با جدول کارنو یک مدار ترکیبی بسازید که مکمل ۹ یک رقم BCD را تولید کند.

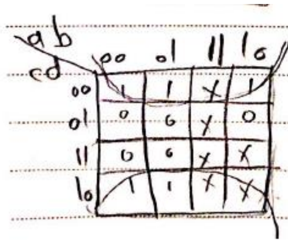
پاسخ: ابتدا جدول درستی را رسم می‌کنیم. (دقت کنید چون ورودیمان BCD است پس ورودی بین ۱۰ تا ۱۶ don’t care) هستند.

a	b	c	d	D_a	D_b	D_c	D_d
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	x	x	x	x
1	0	1	1	x	x	x	x
1	1	0	0	x	x	x	x
1	1	0	1	x	x	x	x
1	1	1	0	x	x	x	x
1	1	1	1	x	x	x	x

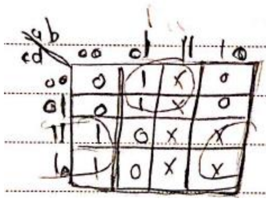
حال با استفاده از جدول کارنو خروجی‌هایمان را ساده می‌کنیم:



$D_a = a'b'c'$

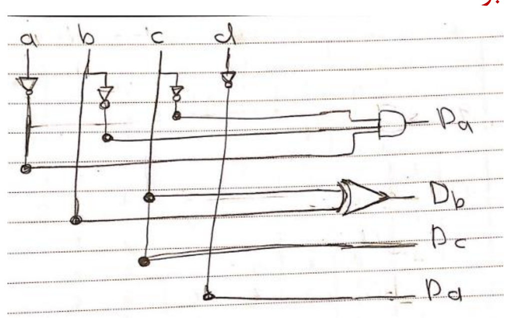


$D_d = d'$



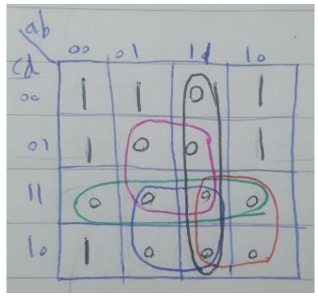
$D_b = b'c + bc' = b \oplus c$

شکل مدار به این صورت خواهد بود:



۵- (۴ نمره) مداری بسازید که عددِ چهار بیتی A=abcd را از ورودی بگیرد و خروجیِ آن در صورتی یک باشد که A یا 2A مربع کامل باشند. تابع را تا حدامکان به صورت <u>POS</u> ساده کنید.

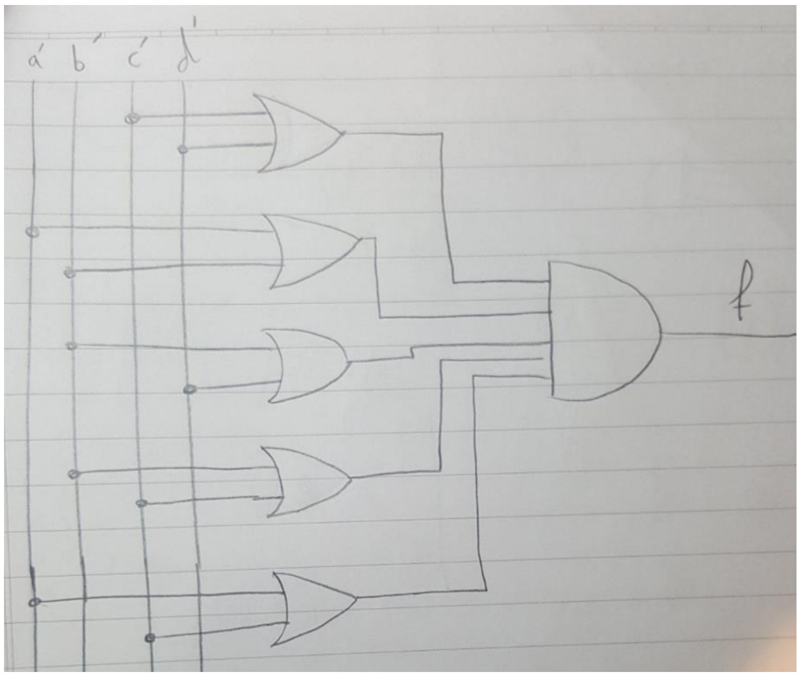
پاسخ: ابتدا جدول درستی را رسم می‌کنیم. (f خروجی مدار است) سپس با توجه به جدول درستی به کشیدن کارنو می‌پردازیم و تا حد امکان f را ساده می‌کنیم. جدول کارنو را می‌توانیم بدون کشیدن جدول درستی هم رسم کنیم:



بنابراین ساده‌ترین عبارت برای f به شکل زیر است:

f=(c’+d’)(a’+b’)(b’+d’)(b’+c’)(a’+c’)

حال مدار را رسم می‌کنیم:



۶- (۴ نمره) یک عدد چهار بیتی A=abcd را پالیندروم (palindrome) می‌نامند اگر abcd=dcba و آن را زیبا می‌نامند اگر abcd=cdab باشد. مداری با حداکثر ۷ گیت و هر گیت با حداکثر دو ورودی بسازید که ورودی A=abcd را بگیرد و خروجی آن در صورتی یک باشد که A یک عدد پالیندروم یا زیبا باشد. سپس شکل مدار را رسم کنید.

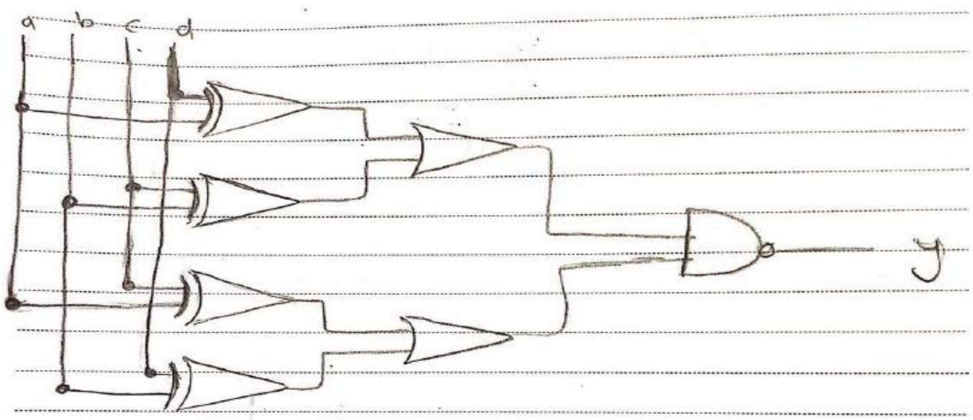
راه‌حل اول:

می‌دانیم اگر دو بیت x و y برابر باشند، $x⨁y$=0 پس A یک عدد پالیندریم است اگر $a⨁d$=0 و $b⨁c$=0 که معادل است با $(a⨁d)$+$(b⨁c)$=0 و یک عدد زیبا است اگر $a⨁c$=0 و $b⨁d$=0 که معادل است با $(a⨁c)$+$(b⨁d)$=0

پس در کل مدار ترکیبی برابر می شود با:

f=(($a⨁d$)+($b⨁c$)) $NAND$ (($a⨁c$)+($b⨁d$))

زیرا f زمانی ۱ می‌شود که یکی از (a⨁c)+(b⨁d) یا 0 (a⨁d)+(b ⨁c) باشد.



راه‌حل دوم:

این سوال را می‌توانیم به شیوه معمول و با رسم جدول درستی و جدول کارنو هم حل کنیم. منتها در ساده کردن جدول کارنو به محدودیت‌های سوال توجه کنیم.

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01		1		1
11				
10		1		1

+

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11			1	
10				1

$$f1 = a'b(c'd + cd') + ab'(c'd + cd') = (a'b + ab')(c'd + cd') = (a \oplus b)(c \oplus d)$$
$$f2 = a'b'c'd' + a'bc'd + abcd + ab'cd' = a'c'(b'd' + bd) + ac(bd + b'd') = (a \odot c)(b \odot d)$$
$$f = f1 + f2 = (a \oplus b)(c \oplus d) + (a \odot c)(b \odot d)$$

می‌بینیم که این تابع را هم می‌توان با ۷ گیت دو ورودی ساخت.