



به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخ نامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نام گذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- این تمرین ۲۲ نمره دارد که معادل ۰,۵۵ نمره از نمره کلی درس است و ۰,۰۵ نمره آن امتیازی است.
- ۵- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

۱- (۴ نمره) توابع جبری زیر را به کمک جبر بول تا جای ممکن ساده کنید.

$$f = ((a + b + c)' \oplus a) \cdot (a'b'c')' \quad \text{الف}$$

$$\begin{aligned} f &= ((a + b + c)' \oplus a) \cdot (a'b'c')' = (a' \cdot b' \cdot c \oplus a) \cdot (a + b + c) \\ &= ((a' \cdot b' \cdot c)' \cdot a + (a' \cdot b' \cdot c) \cdot a') \cdot (a + b + c) \\ &= ((a + b + c') \cdot a + a' \cdot b' \cdot c) \cdot (a + b + c) \\ &= ((a + b + c') \cdot (a + 0) + a' \cdot b' \cdot c) \cdot (a + b + c) = (a + a' \cdot b' \cdot c) \cdot (a + b + c) \\ &= (a + b' \cdot c) \cdot (a + b + c) = (a + b') \cdot (a + c) \cdot (a + b + c) \\ &= (a + b') \cdot (a + c) \cdot (1 + b) = a + b' \cdot c \end{aligned}$$

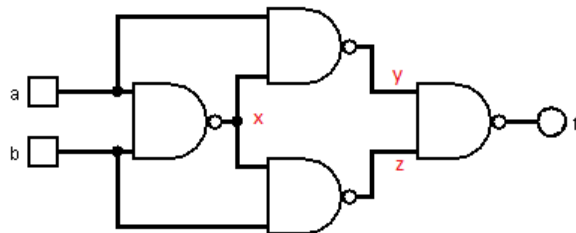
$$g = (x' + z)(x' + z')(x + y + z'w) \quad \text{ب}$$

$$\begin{aligned} g &= (x' + z) \cdot (x' + z') \cdot (x + y + z'w) = (x' + zz')(x + y + z'w) \\ &= x'(x + y + z'w) = x'x + x'y + x'z'w = x'y + x'z'w' \end{aligned}$$

$$h = x \cdot (y' + zw)' + x'y \quad \text{ج}$$

$$\begin{aligned} h &= x \cdot (y' + z \cdot w)' + x' \cdot y = xy \cdot (z' + w') + x' \cdot y = y \cdot (x \cdot (z' + w') + x') \\ &= y \cdot (z' + w' + x') = yz' + yw' + yx' \end{aligned}$$

۲- (۲ نمره) الف- به کمک جدول درستی مقدار تابع f را در شکل زیر به دست آورید.

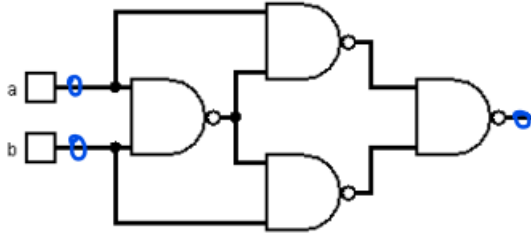


ب- با الهام از نتیجه بند الف تابع XNOR را با حداقل تعداد گیت NOR بسازید.

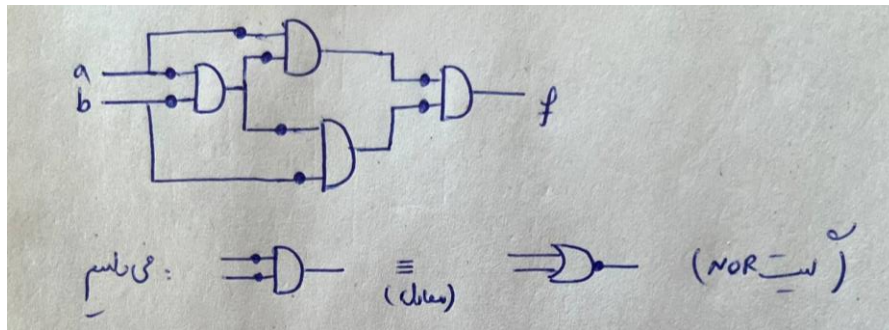
پاسخ: جدول درستی را با توجه به نام هایی که برای نقاط میانی مدار انتخاب کردیم، به این صورت رسم می کنیم:

a	b	x	y	z	f
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0

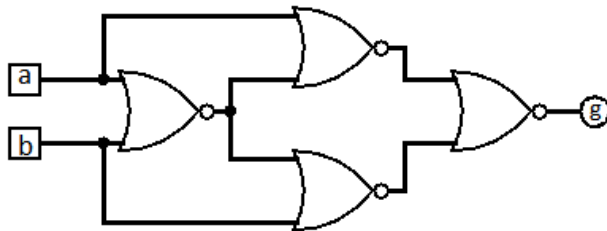
با دقت به جدول درستی بالا درمی‌یابیم که مدار بالا معادل XOR است. حال برای اینکه XNOR را بسازیم می‌توانیم f را NOT کنیم. همچنین بدون ضربه خوردن به مسئله می‌توانیم ورودی‌ها را هم NOT کنیم (چرا؟). حال با اعمال این دو تغییر در مدار به مدار زیر می‌رسیم (دایره‌های آبی در شکل NOT اضافه شده توضیح داده شده هستند):



حال دو NOT موجود در خروجی با هم خنثی می‌شوند و با انتقال NOT را در راستای سیم، به مدار زیر می‌رسیم:



بنابراین مدار نهایی به شکل زیر به دست می‌آید:



۳- (۲ نمره) آیا توابع زیر را می‌توان منطق کامل در نظر گرفت؟ توضیح دهید.

$$f(a, b) = ab + a'b' \quad \text{الف)}$$

پاسخ: این تابع، تابع XNOR است که گیت‌های AND و OR را نمی‌توانیم با آن بسازیم. برای ساخت گیت NOT باید یکی از ورودی‌ها را یک قرار بدهیم:

$$f(a, 0) = a \cdot 0 + a' \cdot 1 = a'$$

اما خود "1" را نمی‌توانیم با XNOR بسازیم. (هر چند "0" را می‌توانیم با یکی گذاشتن هر دو ورودی بسازیم). بنابراین XNOR منطق کامل نیست.

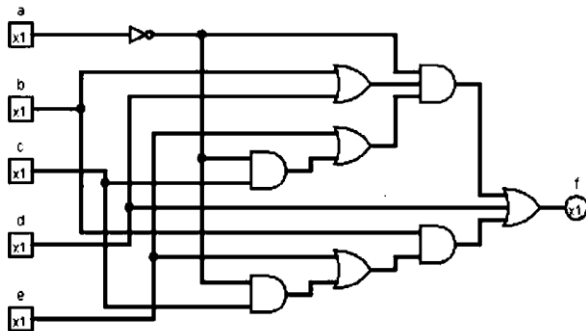
$$f(a, b) = ab' \quad \text{ب)}$$

پاسخ: برای ساختن NOT باید ورودی اول را "1" بدهیم:

$$f(1, b) = b'$$

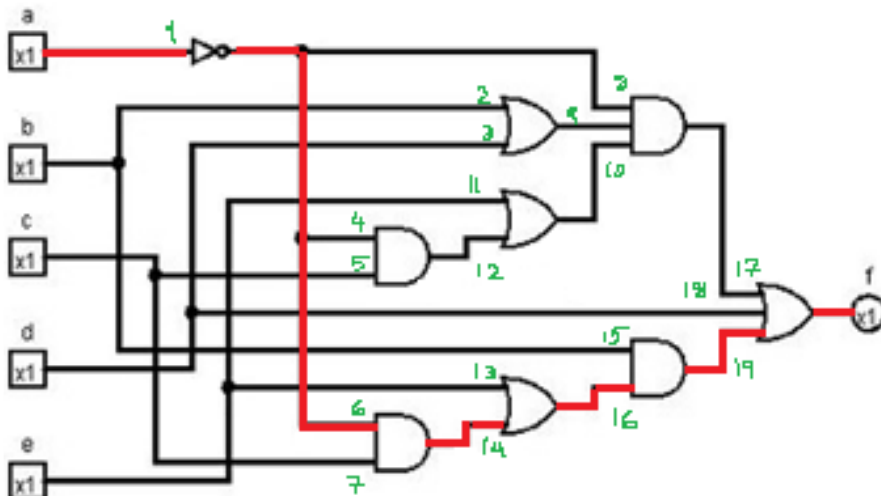
اما خود "1" را نمی‌توانیم با این تابع بسازیم. (هر چند صفر را می‌توانیم)

۴- (۲ نمره) معادله مربوط به مدار زیر را بنویسید و پیچیدگی مدار و تاخیر در مسیر بحرانی را محاسبه کنید. تاخیر گیت‌های منطقی AND، OR و NOT را به ترتیب ۵، ۴ و ۳ نانوثانیه فرض کنید (توجه: نیازی به ساده‌سازی معادله مدار نیست).



پاسخ:

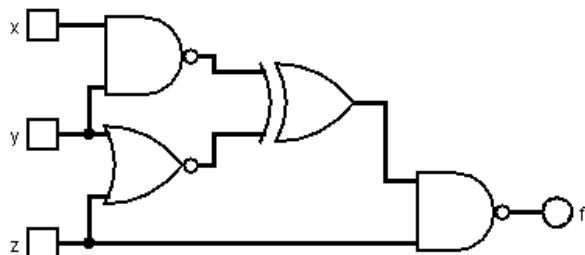
پیچیدگی مدار 19GI است. برای محاسبه تاخیر، باید مسیر بحرانی را پیدا کرده و تاخیر را از روی آن محاسبه کنیم. در شکل زیر، مسیر بحرانی مشخص شده است و از روی آن می‌توان دریافت که تاخیر مسیر بحرانی ۲۱ نانوثانیه است.



معادله مدار را نیز به سادگی تعیین می‌کنیم: (طبق صورت سوال نیازی به ساده‌سازی آن نیست).

$$f = (a' \cdot (b + d) \cdot (e + a \cdot c')) + d + (b \cdot (e + a' \cdot c))$$

۵- (۳ نمره) در شکل زیر به کمک قوانین جبر بول تابع  $f$  را به صورت حاصل جمع ضرب‌ها (SOP) و بار دیگر به صورت حاصل ضرب جمع‌ها (POS) ساده کنید. سپس با استفاده از جدول کارنو شماره ماکسترم‌های آن را به دست آورید.



پاسخ:

$$\begin{aligned}
 f &= \overline{(\overline{xy} \oplus (y+z))z} = \overline{(\overline{xy} \oplus (\overline{y}z))z} = \overline{(xy(\overline{y}z) + (y+z)\overline{xy})z} = \overline{((y+z)\overline{xy})z} \\
 &= \overline{(y+z)(\overline{x} + \overline{y})z} = \overline{(y+z) + (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}} = \overline{y\overline{z} + xy + \overline{z}} = xy + \overline{z} \\
 &= (x + \overline{z})(y + \overline{z})
 \end{aligned}$$

جدول کارنو آن به شکل زیر خواهد بود:

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

$$f(a, b, c) = \prod M(1, 3, 5)$$

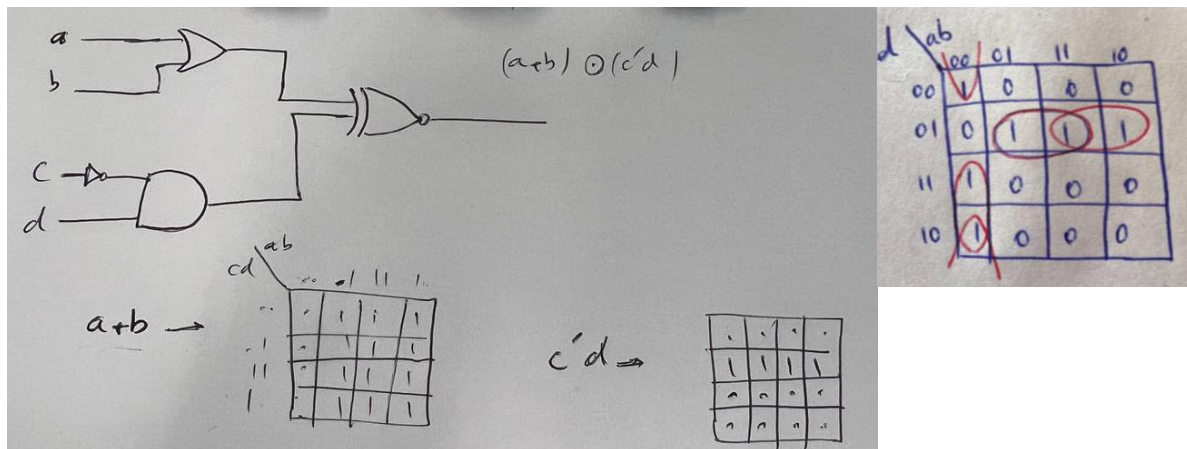
۶- (۳ نمره)

الف- مدار مربوط به عبارت زیر را رسم کنید.

$$f = (a + b) \odot (c' \cdot d)$$

ب- هر یک از دو جمله  $(a + b)$  و  $(c' \cdot d)$  را در جدول کارنوی جداگانه‌ای وارد کنید و سپس تابع  $f$  را از ترکیب دو جدول کارنو بسازید و به صورت SOP ساده کنید.

پاسخ:



$$f = bc'd + ac'd + a'b'd' + a'b'c$$

۷- (۲ نمره) تابع زیر را با جدول کارنو به صورت SOP ساده کرده و عامل‌های اولیه (PI) و عامل‌های اولیه ضروری (EPI) آن را مشخص کنید.

$$f(a, b, c, d) = \prod M(1, 4, 6, 12, 14)$$

پاسخ: ابتدا با توجه به ماکسترم‌های داده‌شده جدول کارنو را رسم می‌کنیم:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

عامل‌های اولیه (PI)های زیر را داریم:

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	1	1	0
$AB$	1	1	1	1

$$PI = BD, \bar{B}\bar{D}, \bar{B}C, A\bar{B}, CD, AD$$

که دو عامل آن اصلی (EPI) هستند:  $EPI = BD, \bar{B}\bar{D}$

حال سعی می‌کنیم جدول داده‌شده را ساده کنیم. یک پاسخ می‌تواند این باشد:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$C\bar{D}$	$CD$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$C\bar{D}$	$CD$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

$$PI = BD + \bar{B}\bar{D} + \bar{B}C + A\bar{B}$$

۸- (۴ نمره) تابع زیر را یک بار به صورت SOP و بار دیگر به صورت POS ساده کنید.

$$f(a, b, c, d, e) = \sum m(1,3,4,5,6,11,14,15,18,19,20,21,22,24,26,27,28,30,31) + d(2,7,13,23)$$

پاسخ: ابتدا با توجه به داده‌ها، جدول کارنو را رسم می‌کنیم و SOP را به دست می‌آوریم.

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x
$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1
$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1
$\bar{A}BC$	0	0	1	0
$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1
$A\bar{B}C$	1	1	x	1
$AB\bar{C}$	1	0	1	1
$ABC$	1	0	1	1

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x
$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1
$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1
$\bar{A}BC$	0	0	1	0
$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1
$A\bar{B}C$	1	1	x	1
$AB\bar{C}$	1	0	1	1
$ABC$	1	0	1	1

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x
$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1
$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1
$\bar{A}BC$	0	0	1	0
$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1
$A\bar{B}C$	1	1	x	1
$AB\bar{C}$	1	0	1	1
$ABC$	1	0	1	1

$$SOP = \bar{B}D + DE + \bar{B}C + CD + AB\bar{E} + \bar{A}\bar{B}E$$

این پاسخ هم درست است:

$$SOP = AD + DE + \bar{B}C + CD + AB\bar{E} + \bar{A}\bar{B}E$$

حالا به صورت POS ساده می کنیم:

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$		$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x
$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1	$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1
$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1	$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1
$\bar{A}BC$	0	0	1	0	$\bar{A}BC$	0	0	1	0
$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1	$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1
$A\bar{B}C$	1	1	x	1	$A\bar{B}C$	1	1	x	1
$AB\bar{C}$	1	0	1	1	$AB\bar{C}$	1	0	1	1
$ABC$	1	0	1	1	$ABC$	1	0	1	1

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$		$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	$DE$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	1	x
$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1	$\bar{A}\bar{B}C$	1	1	x	1
$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1	$\bar{A}B\bar{C}$	0	x	1	1
$\bar{A}BC$	0	0	1	0	$\bar{A}BC$	0	0	1	0
$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1	$A\bar{B}\bar{C}$	0	0	1	1
$A\bar{B}C$	1	1	x	1	$A\bar{B}C$	1	1	x	1
$AB\bar{C}$	1	0	1	1	$AB\bar{C}$	1	0	1	1
$ABC$	1	0	1	1	$ABC$	1	0	1	1

$$POS = (A + C + E)(A + \bar{B} + D)(\bar{B} + D + \bar{E})(\bar{A} + B + C + D)$$