

Leyes de las Proposiciones y Reglas de Inferencia

Fundamentos de la lógica proposicional.



Leyes de las Proposiciones: Fundamentos



Ley de doble negación

Negar una proposición dos veces equivale a la afirmación de la misma proposición.

$$\neg(\neg p) \equiv p$$



Ley de idempotencia

Al operar una misma proposición con los conectores de conjunción o disyunción exclusiva equivale a la misma proposición.

$$p \wedge p \equiv p$$



Ley del tercio excluido

Al operar una proposición con su contrario, el resultado es falso con la conjunción y verdadero con la disyunción inclusiva.

$$p \wedge \neg p \equiv F$$

$$p \vee \neg p \equiv V$$

Leyes de las Proposiciones: Distribución y Negación



Ley distributiva

La conjunción y la disyunción se distribuyen entre sí, similar a la multiplicación sobre la suma en álgebra.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$



Ley de Morgan

Al negar una conjunción o disyunción de dos proposiciones se obtiene la negación de cada una, cambiando el conector.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$



Leyes de las Proposiciones: Asociativa y Otras

La ley asociativa establece que el modo en que se agrupan las proposiciones mediante paréntesis no altera el valor de verdad del enunciado, siempre que los operadores lógicos sean los mismos.

Agrupación para Conjunción

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Agrupación para Disyunción

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Agrupación para Bicondicional

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \equiv p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$$

Ley de la Disyunción Exclusiva

La ley de la disyunción exclusiva se define por la siguiente equivalencia:

$$p \Delta q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

Leyes de las Proposiciones: Condicionales y Absorción

Ley condicional

Una proposición condicional de la forma $p \rightarrow q$ puede ser reescrita como una disyunción.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Ley de absorción

Una proposición compuesta puede simplificarse cuando una proposición se "absorbe".

Absorción total:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Absorción parcial:

$$p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$$



Ley bicondicional

Una proposición bicondicional es del tipo «si y solo si». Se escribe como $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Leyes Lógicas Adicionales

Conjunción con Falso

Cualquier proposición en conjunción con Falso resulta en Falso.

$$p \wedge F \equiv F$$

Conjunción con Verdadero

Una proposición en conjunción con Verdadero conserva el valor de verdad de la proposición.

$$p \wedge V \equiv p$$

Disyunción con Falso

Una proposición en disyunción con Falso conserva el valor de verdad de la proposición.

$$p \vee F \equiv p$$

Disyunción con Verdadero

Cualquier proposición en disyunción con Verdadero resulta en Verdadero.

$$p \vee V \equiv V$$

Verdadero y Verdadero

La conjunción de dos valores verdaderos siempre es verdadera.

$$V \wedge V \equiv V$$

Falso y Falso

La conjunción de dos valores falsos siempre es falsa.

$$F \wedge F \equiv F$$

Reglas de Inferencia: Modus Ponens y Modus Tollens

1. Modus Ponens (MP)

Si una proposición implica otra y la primera es verdadera, entonces la segunda también lo es.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

2. Modus Tollens (MT)

Si una proposición implica otra y la segunda es falsa, entonces la primera también es falsa.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Reglas de Inferencia: Silogismos y Adición



3. Silogismo Hipotético

Permite enlazar dos proposiciones condicionales para obtener una nueva relación de implicación.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$



4. Silogismo Disyuntivo

Si una disyunción es verdadera y uno de los términos es falso, el otro debe ser verdadero.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$



5. Adición

De una proposición verdadera se puede deducir una disyunción en la que participa.

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

Reglas de Inferencia: Simplificación, Conjunción y Dilema

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{\therefore p \wedge q}$$

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \wedge r \end{array}}{\therefore q \wedge r}$$

1

2

3

Simplificación

De una conjunción se puede deducir cualquiera de sus componentes.

Conjunción

De dos proposiciones verdaderas se puede deducir su conjunción.

Dilema Constructivo

Si dos proposiciones condicionales son verdaderas y se cumple una disyunción entre sus antecedentes, se deduce una disyunción entre sus consecuentes.

Referencias

Discretas, M., Andrés, O., & Hernandez, R. (2018). *Compilando Conocimiento*.

<https://compilandoconocimiento.github.io/LibroMatematicasDiscretas/LibroMatematicasDiscretas.pdf>

Universidad de las Palmas de Gran Canaria. (s. f.). Capítulo I. Lógica proposicional Capítulo I Lógica proposicional Tema 1.

Proposiciones y operadores Lógicos 1.1 Definiciones básicas. <https://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/46/46531/logica.pdf>