DERIVACIÓN NUMÉRICA

APROXIMACIÓN NUMÉRICA

INTRODUCCIÓN

HACER UNA APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE LA DERIVADA

FÓRMULAS DE APROXIMACIÓN

MÉTODOS NUMÉRICOS
Ing. Patricio Pugarín Díaz, Mgs.
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS - ESPE

CONTENIDO

Título	**Aproximación numérica de la derivada**
Duración	**120 minutos**
Información general	**Resaltar la importancia de realizar una aproximación numérica de la derivada, con programación, aplicando Métodos Numéricos, resaltando la importancia en problemas de Ingeniería.**
Objetivo	**Conocer las técnicas de los métodos numéricos, con programación numérica, para hacer una aproximación numérica a la derivada; obteniendo fórmulas de aplicación confiables.**

<u>Clase N° 21</u>

DERIVACIÓN NUMÉRICA

Vamos a afrontar el problema de aproximar numéricamente la derivada de una función $f(x)$ representado por la ecuación:

$$f'(x) = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

METODOLOGÍA.-

Elegimos una sucesión h_k tal que $h_k \to 0$ y calculamos el límite de la sucesión.

$$D_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \qquad k = 1, 2, 3, ..., N, ...n$$

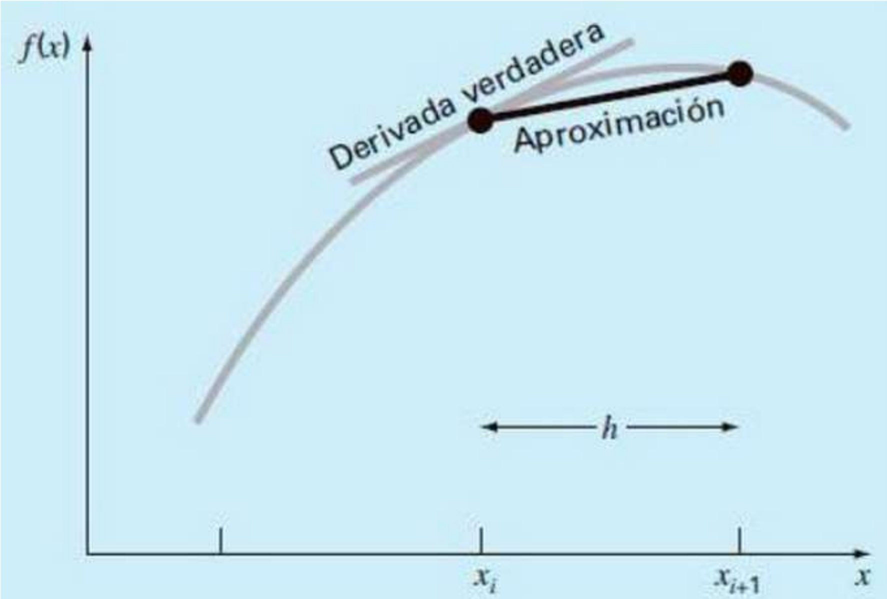
A continuación calcularemos un número finito N de términos

$D_1, D_2, \ldots, D_N$; siendo D_N la respuesta buscada; es decir, debemos encontrar un h_N adecuado de manera que D_N sea una buena aproximación a la derivada $f'(x)$.

Pero la solución no es tan simple de obtener. Veamos el siguiente ejercicio:

EJERCICIO.-

Sea $f(x) = e^x$. Si $h = 1, 1/2, 1/4, 1/8$. Construir las rectas secantes que pasan por los puntos correspondientes:
$P(x_i; y_i) = (1; e)$ y $P(x_{i+1}; y_{i+1}) = (1 + h; f(1 + h))$.



(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

NOTA:

- Conforme h disminuye, la recta secante se aproxima a la recta tangente.
- Una buena aproximación encontramos para una valor $h = 0.0001$; pero gráficamente es difícil de apreciar.
- Debemos, por tanto calcular los cocientes incrementales D_k.

EJERCICIO

Realicemos el ejemplo anterior, numéricamente, es decir, calculando el valor de los cocientes incrementales D_k; para los incrementos $h_k = 10^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots, 10$, $D_k = \dfrac{e^{1+h_k} - e}{h_k}$ siendo $x = 1$.

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

Del ejercicio anterior se obtiene la siguiente tabla, con los cálculos realizados:

h_k	e^{1+h_k}	$e^{1+h_k} - e$	D_k
$h_1 = 0.1$	3.004166024	0.285884196	$2.858841960 = D_1$
$h_2 = 0.01$	2.745601015	0.027319187	$2.731918700 = D_2$
$h_3 = 0.001$	2.721001470	0.002719642	$2.719642000 = D_3$
$h_4 = 0.0001$	2.718553670	0.000271842	$2.718420000 = D_4$
$h_5 = 0.00001$	2.71830911	0.000027183	$2.718300000 = D_5$
$h_6 = 10^{-6}$	2.718284547	0.000002719	$2.719000000 = D_6$
$h_9 = 10^{-9}$	2.718281831	0.000000003	$2.718342000 = D_9$
$h_{10} = 10^{-10}$	2.718281828	0.000000000	$2.719000000 = D_{10}$

$h_1 = 0.1$ no proporciona una buena aproximación D_1 de $f'(1)$.
$h_9 = 10^{-9}$ proporciona un D_9 menos próximo al exacto.
$h_{10} = 10^{-10}$ proporciona un D_{10} similar al anterior.

Se puede ver que la mejor aproximación a $f'(1) = e$ es $D_5 = 2.7183$; que es cuando cambia la curva de valores.

NOTA:

Una mejor aproximación se da hasta que:

$$|D_{N+1} - D_N| \geq |D_N - D_{N-1}|$$

Para nuestro ejemplo:

$$|D_6 - D_5| > |D_5 - D_4|$$

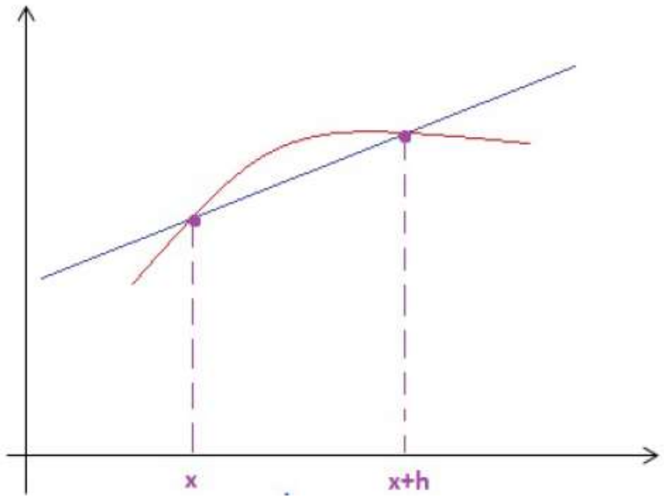
$$0.0007 > 0.00012$$

Por tanto D_5 es una mejor aproximación.

NOTA:

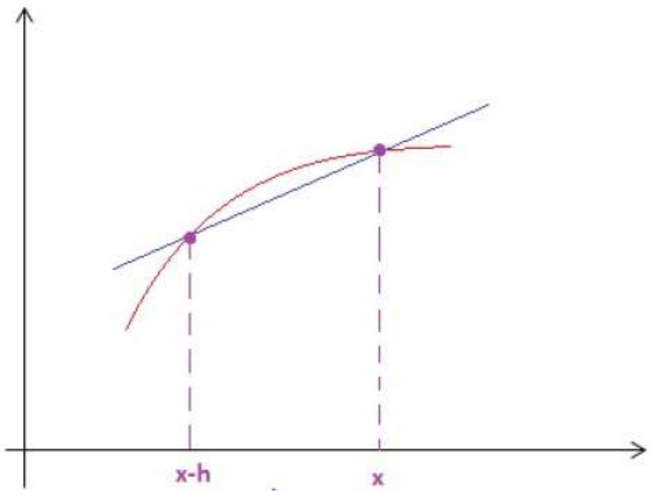
- Valores muy pequeños de h_k, por tanto no son muy recomendables ya que se pierde el grado de precisión.
- Es necesario por tanto desarrollar fórmulas de aproximación que proporcionen un grado de aproximación razonable para valores de h no demasiados pequeños.

Diferencias Finitas hacia adelante (Progresiva).-



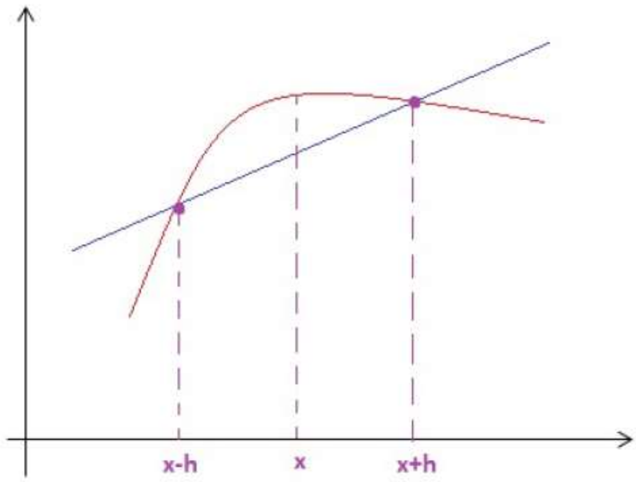
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad Si \quad h \to 0 \qquad (1)$$

Diferencias Finitas hacia atrás (Regresiva).-



$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad Si \quad h \to 0 \qquad (2)$$

Diferencias Finitas centradas.-



$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad Si \quad h \to 0 \qquad (3)$$

EJERCICIO

Calcular la derivada de la función $f(x) = sen(x)$, en el punto de abscisa x =0.6, tomando para h un valor pequeño; aplicando las fórmulas anteriores para derivación numérica.

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

Análisis matemático de la fórmulas (1), (2) y (3).-

Sean los desarrollos de Taylor, de cuarto orden, alrededor de x (centro en x):

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2) \qquad (4)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{IV}(x) + O(h^5)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + O(h^2) \qquad (5)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{IV}(x) + O(h^5)$$

Partiendo de estos desarrollos y comparando las fórmulas (1), (2) y (3) con $f'(x)$ se tiene el análisis correspondiente siguiente:

(Análisis a ser realizado en clase con la participación de los alumnos)

NOTA:

Del análisis realizado se puede concluir que las diferencias finitas centradas son más optimas.

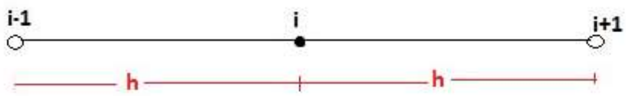
Con fines de programación, para aplicar las fórmulas de derivación numérica, se emplea la notación:

$$f(x+h) = f_{i+1}$$

$$f(x-2h) = f_{i-2}$$

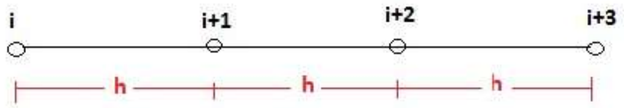
Fórmulas de derivación numérica de orden $O(h^2)$.-

<u>CENTRADAS:</u>



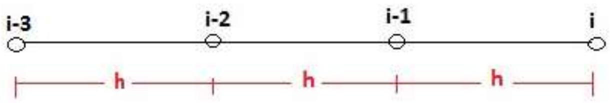
$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$
$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$
$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$

PROGRESIVAS.-



$$f_i' = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$$
$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{h^2}$$
$$f_i''' = \frac{-5f_i + 18f_{i+1} - 24f_{i+2} + 14f_{i+3} - 3f_{i+4}}{2h^3}$$

REGRESIVAS.-



$$f_i' = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h}$$
$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2}$$
$$f_i''' = \frac{5f_i - 18f_{i-1} + 24f_{i-2} - 14f_{i-3} + 3f_{i-4}}{2h^3}$$

NOTA:

Usando la fórmula de Taylor de cuarto órden de f alrededor de x, para $f(x+h)$ y $f(x-h)$, podemos encontrar la fórmula centrada de órden $O(h^4)$ siguiente:

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

EJERCICIO

Demostrar la fórmula de la nota anterior, para la derivada de orden $O(h^4)$.

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

EJERCICIO

Calcular la derivada de la función $f(x) = sen(x)$, en el punto de abscisa x =0.6, tomando para h un valor pequeño; aplicando la fórmula anterior, para derivación numérica, de orden $O(h^4)$.

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

EJERCICIO

Demostrar la siguiente fórmula de derivación numérica, de orden $O(h^2)$, para la segunda derivada:

$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{h^2}$$

(Ejercicio a ser resuelto en la clase con la participación de los alumnos)

EJERCICIO

Construir una tabla de derivadas primeras de la función $g(x)$, definida por la siguiente tabla en los puntos x_i, usando solo fórmulas de tres puntos.

x	$g(x)$
1	1
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.8	0.960398
2	0.940678

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Sánchez Juan Miguel, Problemas de Cálculo Numérico para ingenieros con aplicaciones Matlab, McGraw-Hill, Primera edición, 2005.
2. A. Quarteroni, F. Saleri, Cálculo Científico con Matlab y Octave. Springer-Verlag Italia, milano 2006