ECUACIONES NO LINEALES

APROXIMACIÓN NUMÉRICA

INTRODUCCIÓN

IMPORTANCIA DE RESOLVER UNA ECUACIÓN NO LINEAL

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

MÉTODOS NUMÉRICOS
Ing. Patricio Pugarín Díaz, Mgs.
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS - ESPE

CONTENIDO

Título	**Ecuaciones no lineales**
Duración	**240 minutos**
Información general	**Destacar la importancia de resolver ecuaciones no lineales, con programación, aplicando Métodos Numéricos en problemas de Ingeniería.**
Objetivo	**Conocer las técnicas de los métodos numéricos, con programación numérica, para resolver ecuaciones no lineales y obtener resultados confiables.**

ECUACIONES NO LINEALES

Para encontrar las raices debemos igualar a 0.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES. -

El objetivo es determinar raíces de ecuaciones (o ceros de funciones). Su aplicación es frecuente en trabajos científicos como, por ejemplo:

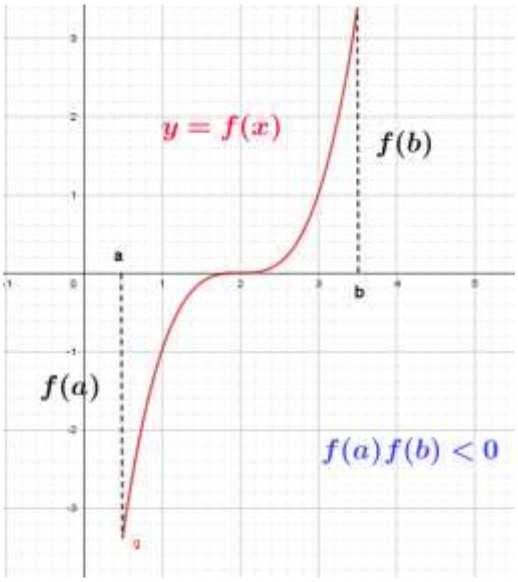
- En la teoría de difracción de la luz, su ecuación gobernante es $x - \tan(x) = 0$.
- El cálculo de las orbitas planetarias, con la ecuación: $x - aSen(x) = b$; para distintos valores de a y b.

.

MÉTODO DE LA BISECCIÓN

continuas

Sea $f \in C([a, b])$ y si $f(a)f(b) < 0$, entonces f debe tener un cero en $]a, b[$



punto medio

$\frac{A+b}{2}$

NOTA

- Dado que $f(a)f(b) < 0$, la función f cambia de signo en $]a, b[$ y por tanto tiene por lo menos un cero en este intervalo.
- Esto es una consecuencia del teorema del valor intermedio o teorema de Bolsano.

EJERCICIO 1 (clase)

Realizar un algoritmo del método, para la programación, aplicando el concepto impartido.

EJERCICIO 2 (Clase)

Encontrar el cero negativo de la función $f(x) = x^2 - 1$, a mano y con calculadora.

<u>Pasos obligados:</u>

- Realizar el gráfico de la función
- Definir un intervalo que contenga al cero de la función que se quiere encontrar.
- Aplicar el método de cálculo.

EJERCICIO 3 (Clase)

Realizar un programa computacional, en Matlab, que resuelva una ecuación lineal o no lineal; aplicando el método de la Bisección.

MÉTODO DE NEWTON

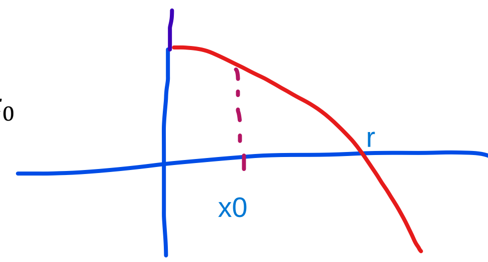
Newton Raphson.-

r = corte

Sea $f \in C([a, b])$ una función cuyos ceros se quiere encontrar. Sea $\boldsymbol{r}$ un cero de f y sea $\boldsymbol{x_0}$ una aproximación a r; es decir:

x0=es la aproximacion a r

$\boldsymbol{r - x_0 = h}$, siendo h muy pequeño.



Si f'' existe y es continua, por el teorema de Taylor, con centro en x_0

$$f = p + Resto$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{(x_0)}^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k + Resto$$

Desarrollando la serie se tiene

$$f(x) = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

Si evaluamos $f(x)$ en r y tomando para p una aproximación lineal, se tiene:

$$f(r) = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(r - x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(r - x_0)^2 + O((r - x_0)^3) = 0$$

Pero $r - x_0 = h$. Por tanto:

$$f(r) = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(h) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(h)^2 + O(h^3) = 0$$

$$f(r) = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(h) + O(h^2) = 0$$

Pero el término $O(h^2)$ converge a cero, por ser h muy pequeño. Entonces de la expresión anterior:

$$h = -\frac{f_{(x_0)}}{f'_{(x_0)}}$$

Si x_0 está próximo a r, entonces $x_0 + h$ está aún más próximo a r; es decir

$$x_0 + h \to r$$

$$x_0 - \frac{f_{(x_0)}}{f'_{(x_0)}} \to r$$

El método de Newton comienza con una estimación x_0 de r. A partir de la cual se define inductivamente una sucesión de aproximaciones

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}}, \quad (n \geq 0)$$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Consiste en la linealización de la función f; es decir, reemplazamos f por su función lineal

$$\boldsymbol{l(x) = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0)}$$

Considerando a l como una buena aproximación de f (en una vecindad x_0). Es decir, la función lineal tiene el mismo valor y la misma pendiente que la función f, en un punto x_0.

solo si es la recta tangente

(La interpretación gráfica se desarrollará en la clase).

NOTA.-

Lo que hace el método de Newton es construir la tangente a la gráfica de f, en un punto cercano a r, y observar en que lugar interseca esta línea con el eje x.

(La interpretación gráfica se realizará en la clase)

EJERCICIO 1

Encontrar el cero negativo de la función $f(x) = e^x - 1.5 - arctan(x)$, a mano y con calculadora, con 10 cifras significativas.

Pasos obligados:

- Realizar el gráfico de la función
- Definir un valor $\boldsymbol{x_0}$ próximo al cero de la función que se quiere encontrar.
- Aplicar el método de cálculo.

(Ejercicio a ser resuelto en la clase con la participación de los estudiantes)

EJERCICIO 2

Realizar un programa computacional, en Matlab, que resuelva una ecuación lineal o no lineal; aplicando el método de Newton.

(Ejercicio a ser resuelto en la clase con la participación de los estudiantes)

MÉTODO DE LA SECANTE

Es similar al método de newton; pero, en lugar de la derivada de la función (que es la pendiente de la recta tangente) se aplica la fórmula de la pendiente de esta recta secante

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Reemplazando la expresión anterior en la fórmula de Newton y simplificando se tiene:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

NOTA.-

Lo que hace el método de la Secante es construir la recta secante a la gráfica de f, tomando dos puntos cercano a r, y observar en que lugar interseca esta línea con el eje x.

(La interpretación gráfica se desarrollará en la clase).

EJERCICIO 3

Realizar un programa computacional, en Matlab, que resuelva una ecuación lineal o no lineal; aplicando el método de ~~Newton~~. secante

(Ejercicio a ser resuelto en la clase con la participación de los estudiantes)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Sánchez Juan Miguel, Problemas de Cálculo Numérico para ingenieros con aplicaciones Matlab, McGraw-Hill, Primera edición, 2005.
2. A. Quarteroni, F. Saleri, Cálculo Científico con Matlab y Octave. Springer-Verlag Italia, milano 2006.