AJUSTE DE CURVAS

APROXIMACIÓN NUMÉRICA

INTRODUCCIÓN

AJUSTE DE CURVAS

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

MÉTODOS NUMÉRICOS
Ing. Patricio Pugarín Díaz, Mgs.
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS - ESPE

CONTENIDO

Título	**Sistemas Lineales y Ajuste de curvas**
Duración	**240 minutos**
Información general	**Resaltar un ajuste de curvas, con programación, aplicando Métodos Numéricos en problemas de Ingeniería.**
Objetivo	**Conocer las técnicas de los métodos numéricos, con programación numérica, para resolver un ajuste de curvas; obteniendo resultados confiables.**

AJUSTE DE CURVAS

Es la representación de una función, ya sea que se conozca pocos puntos o todos los puntos de la misma; mediante un polinomio, una función, etc.

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL: Consiste en buscar un polinomio P, con el menor grado posible, para el cual

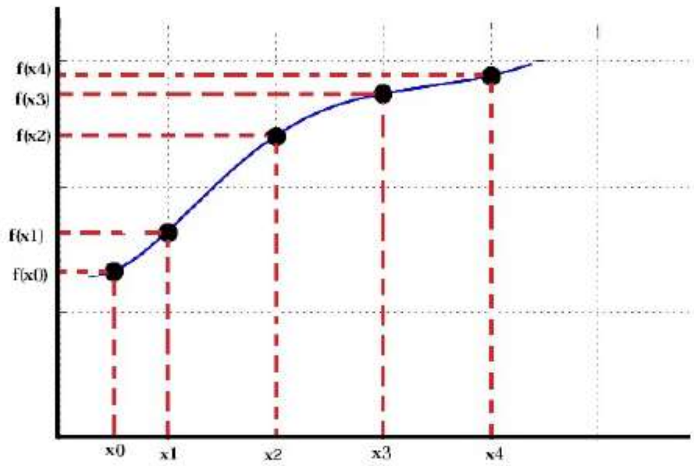
$$P(x_i) = f(x_i) \qquad 0 \leq i \leq n$$

a partir de una tabla $(n+1)$ puntos (x_i, y_i).

Se dice, por tanto, que tal polinomio P hace una interpolación de estos datos.

1. POLINOMIO INTER´POLADOR DE LAGRANGE

Con n puntos se tiene un polinomio de grado $(n-1)$ que pasa por los n puntos.



Se emplea la fórmula:

$$f(x) \approxeq P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) L_{n-1,k}(x) \qquad (1)$$

Siendo

$$L_{n-1,k}(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_k - x_j)} \qquad (2)$$

Los factores en donde $k = j$ no se consideran; es decir, $k \neq j$ debe cumplirse.

EJERCIO

Encontrar el polinomio interpolador de Lagrange, del siguiente conjunto de nodos:

	x	$f(x)$	
$x_0 \rightarrow$	1	5	$\leftarrow f(x_0)$
$x_1 \rightarrow$	2	9	$\leftarrow f(x_1)$
$x_2 \rightarrow$	3	15	$\leftarrow f(x_2)$
$x_3 \rightarrow$	4	14	$\leftarrow f(x_3)$

Si $n = 4$ puntos, entonces el polinomio $P(x)$ es de grado 3.

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

2. POLINOMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Se utiliza para construir varios polinomios de aproximación para una misma función, calculados mediante el siguiente esquema recursivo:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

En forma análoga, continuando se tiene:

$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$

Es decir el polinomio $P_n(x)$ se obtiene a partir de $P_{n-1}(x)$ usando la recurrencia:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + +a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

NOTA:
Se conocen como centros a los valores: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$; y como coeficientes a: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Como ejemplo se tiene:

Dados los centros $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4.5$ y los coeficientes $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = -0.1$, $a_4 = 0.003$, calcular: $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$. Adicionalmente evaluar estos polinomios para x =2.5

$P_1(x) = 5 - 2(x - 1)$

$P_2(x) = 5 - 2(x - 1) + 0.5(x - 1)(x - 3)$

$P_3(x) = P_2(x) - 0.1(x - 1)(x - 3)(x - 4)$

$P_4(x) = P_3(x) + 0.003(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 4.5)$

Evaluando estos polinomios en $x = 2.5$ se tiene:

$P_1(2.5) = 5 - 2(1.5) = 2$
$P_2(2.5) = 1.625$
$P_3(2.5) = 1.5125$
$P_4(2.5) = 1.50575$

DIFERENCIAS DIVIDIDAS.-

Las diferencias divididas de una función $f(x)$ se definen como:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$$

$$f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}$$

Las diferencias divididas de orden superior se forman de acuerdo con la siguiente regla recursiva:

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, \ldots, x_k] - f[x_{k-j}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}$$

Los coeficientes a_k de los polinomios $P_n(x)$ se pueden calcular usando las diferencias divididas de $f(x)$, mediante la ecuación:

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Como ejemplo se tiene:

$$a_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - a_1}{x_2 - x_0}$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

EJERCICIO

Se tiene el siguiente conjunto de nodos:

x	f
$x_0 \to 1$	-3
$x_1 \to 2$	0
$x_2 \to 3$	15
$x_3 \to 4$	48
$x_4 \to 5$	105
$x_5 \to 6$	192

Grado del polinomio = $n - 1 = 6 - 1 = 5$

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

NOTA:

Se puede construir la siguiente tabla de diferencias divididas.

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_5	$f[x_5]$	$f[x_4,x_5]$	$f[x_3,x_4,x_5]$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$

Con los datos del problema anterior, se puede calcular la matriz:

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$	$f[,,,,,]$
1	-3					
2	0	3				
3	15	15	6			
4	48	33	9	1		
5	105	57	12	1	0	
6	192	87	15	1	0	0

La manera de calcular los elementos de la matriz es la siguiente:

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$	$f[,,,,,]$
1	-3					
2	0	3				
3	15	15	6			
4	48	33	9	1		
5	105	57	12	1	0	
6	192	87	15	1	0	0

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

Ejercicio

Realizar un programa computacional aplicando el método de Lagrange

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

Ejercicio

Realizar un programa computacional aplicando el método de Newton.

(Ejercicio a ser resuelto en clase con la participación de los alumnos)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Sánchez Juan Miguel, Problemas de Cálculo Numérico para ingenieros con aplicaciones Matlab, McGraw-Hill, Primera edición, 2005.
2. A. Quarteroni, F. Saleri, Cálculo Científico con Matlab y Octave. Springer-Verlag Italia, milano 2006