INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Integración Aproximada

Patricio Pugarín Díaz, Mgs.

Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE

February 19, 2024

Introducción

Toda función continua es integrable; pero no toda función integrable tiene primitiva.

Además se conoce que:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Teorema de Newton-Leibniz);

Introducción

Toda función continua es integrable; pero no toda función integrable tiene primitiva.

Además se conoce que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(Teorema de Newton-Leibniz);}$$

Es decir:

$$F' = f \qquad (F\text{=prmitiva})$$

Introducción

Toda función continua es integrable; pero no toda función integrable tiene primitiva.

Además se conoce que:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Teorema de Newton-Leibniz);

Es decir:

$$F' = f \qquad (F\text{=prmitiva})$$

Pero, muchas funciones integrables no son acsesibles a conocerlas; como por ejemplo:

Introducción

Toda función continua es integrable; pero no toda función integrable tiene primitiva.

Además se conoce que:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Teorema de Newton-Leibniz);

Es decir:

$F' = f$ (F=prmitiva)

Pero, muchas funciones integrables no son acsesibles a conocerlas; como por ejemplo:

$\int \frac{1-x^2x^2}{(1-x^2)(1-x^2x^2)} \Rightarrow$ No tiene solución analítica

Introducción

Toda función continua es integrable; pero no toda función integrable tiene primitiva.

Además se conoce que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(Teorema de Newton-Leibniz);}$$

Es decir:

$$F' = f \qquad (F\text{=prmitiva})$$

Pero, muchas funciones integrables no son acsesibles a conocerlas; como por ejemplo:

$$\int \frac{1-x^2x^2}{(1-x^2)(1-x^2x^2)} \Rightarrow \quad \text{No tiene solución analítica}$$

Lo que se pretende es aproximar la función f por alguna función g, fácil de integrar, tal que:

$$|f - g| \leq \epsilon$$

Es decir:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \cong \epsilon$$

Lo que se pretende es aproximar la función f por alguna función g, fácil de integrar, tal que:

$$|f - g| \leq \epsilon$$

Es decir:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \cong \epsilon$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b g(x)dx$$

Lo que se pretende es aproximar la función f por alguna función g, fácil de integrar, tal que:

$$|f - g| \leq \epsilon$$

Es decir:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \cong \epsilon$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x) dx \ \simeq \int_a^b g(x) dx$$

NOTA:

- Como candidatos para g se tienen los polinomios.

Lo que se pretende es aproximar la función f por alguna función g, fácil de integrar, tal que:

$$|f - g| \leq \epsilon$$

Es decir:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \cong \epsilon$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b g(x)dx$$

NOTA:

- Como candidatos para g se tienen los polinomios.
- $\int_a^b f(x)dx$ representa el area bajo la curva definida por el grafico de f.

Lo que se pretende es aproximar la función f por alguna función g, fácil de integrar, tal que:

$$|f - g| \leq \epsilon$$

Es decir:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \cong \epsilon$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b g(x) dx$$

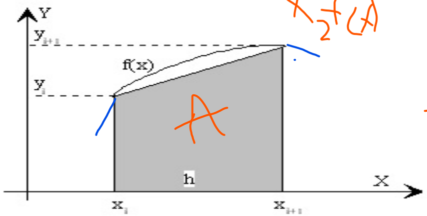
NOTA:

- Como candidatos para g se tienen los polinomios.
- $\int_a^b f(x) dx$ representa el area bajo la curva definida por el grafico de f.

Método del Trapecio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de trapecios (rectas que representan polinomios de grado 1).



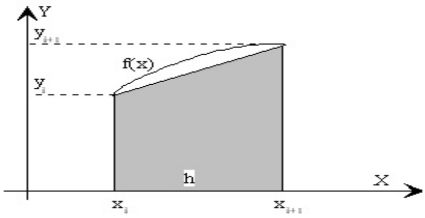
A =

h

Método del Trapecio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de trapecios (rectas que representan polinomios de grado 1).

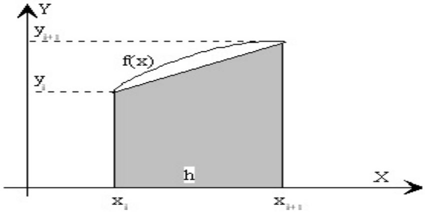


Segun la gráfica, podemos obtener la ecuación para el área:
$A = \frac{B+b}{2}h$; que corresponde a la fórmula del área de un trapecio

Método del Trapecio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de trapecios (rectas que representan polinomios de grado 1).



Segun la gráfica, podemos obtener la ecuación para el área:
$A = \frac{B+b}{2}h$; que corresponde a la fórmula del área de un trapecio

Si $x_i = x_1$ y $x_{i+1} = x_2$, espaciados h, se tiene:

$$A = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1)$$

Este proceso se reduce a:

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) \implies$ polinomio interpolador de grado 1 (que une los puntos de f)

Si $x_i = x_1$ y $x_{i+1} = x_2$, espaciados h, se tiene:

$$A = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1)$$

Este proceso se reduce a:

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) \implies$ polinomio interpolador de grado 1 (que une los puntos de f)

Finalmente, como $x_2 - x_1 = h$ se tiene la formulación simple:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

Si $x_i = x_1$ y $x_{i+1} = x_2$, espaciados h, se tiene:

$$A = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1)$$

Este proceso se reduce a:

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) \implies$ polinomio interpolador de grado 1 (que une los puntos de f)

Finalmente, como $x_2 - x_1 = h$ se tiene la formulación simple:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.

FORMULACIÓN COMPUESTA

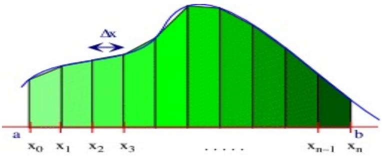
Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

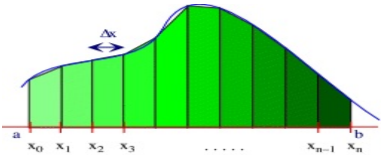
- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$

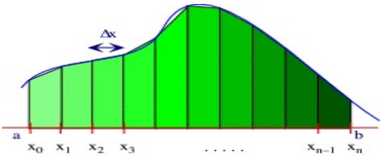


Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area: $A = \int_a^b f(x)dx$

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



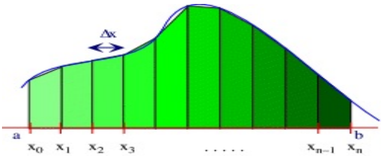
Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:
$A = \int_a^b f(x)dx$

ANALIZAR EN PIZARRA Y PROGRAMAR

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:
$A = \int_a^b f(x)dx$

ANALIZAR EN PIZARRA Y PROGRAMAR

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 x^2 dx$

$R = 9(exacto)$; Si $h = 100 \implies R = 9,00004499$

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 x^2 dx$

$R = 9(exacto)$; Si $h = 100 \implies R = 9,00004499$

EJEMPLO

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 x^2 dx$

$R = 9(exacto)$; Si $h = 100 \implies R = 9,00004499$

EJEMPLO

Encontrar $\int_0^5 e^{-x^2} dx$

$R = 0.9362269254$

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 x^2 dx$

$R = 9(exacto)$; Si $h = 100 \implies R = 9,00004499$

EJEMPLO

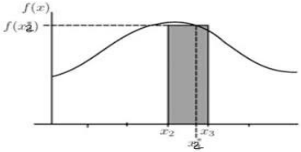
Encontrar $\int_0^5 e^{-x^2} dx$

$R = 0.9362269254$

Método del Punto Medio

FORMULACIÓN SIMPLE

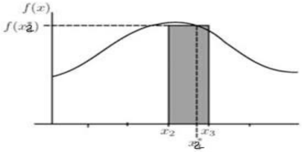
Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de rectángulos .



Método del Punto Medio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de rectángulos .

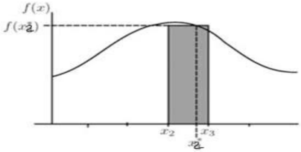


Este proceso se reduce a:

Método del Punto Medio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de rectángulos .



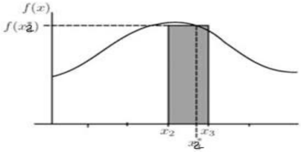
Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \simeq (x_3 - x_2)f(\frac{x_2+x_3}{2})$

Método del Punto Medio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de rectángulos .



Este proceso se reduce a:

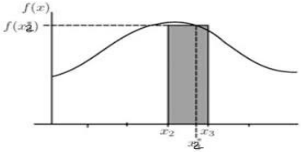
$A = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \simeq (x_3 - x_2)f(\frac{x_2+x_3}{2})$

Pero $x_3 - x_2 = h$; por tanto:

Método del Punto Medio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de rectángulos .



Este proceso se reduce a:

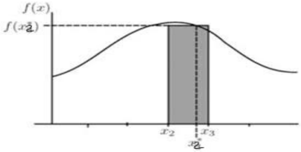
$A = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \simeq (x_3 - x_2)f(\frac{x_2+x_3}{2})$
Pero $x_3 - x_2 = h$; por tanto:

$$A = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = h.f(x_2^*)$$

Método del Punto Medio

FORMULACIÓN SIMPLE

Consiste en aproximar el área bajo la curva por medio de rectángulos .



Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \simeq (x_3 - x_2)f(\frac{x_2+x_3}{2})$
Pero $x_3 - x_2 = h$; por tanto:

$$A = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = h.f(x_2^*)$$

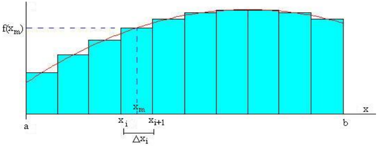
FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

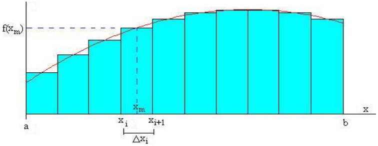
- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$

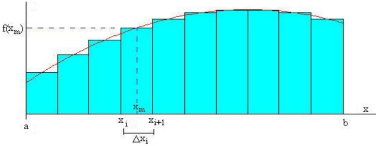


Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



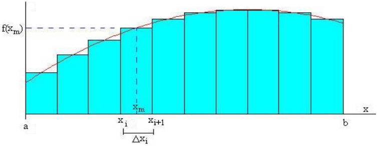
Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

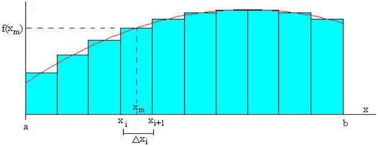
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ANALIZAR EN PIZARRA Y PROGRAMAR

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$
- $h = x_{i+1} - x_i = \triangle x$



Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ANALIZAR EN PIZARRA Y PROGRAMAR

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.999775000$

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.999775000$

EJEMPLO

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.999775000$

EJEMPLO

Encontrar $\int_0^5 (e^{-x^2})dx$

Si $h = 100 \implies R = 0.88622692$

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.999775000$

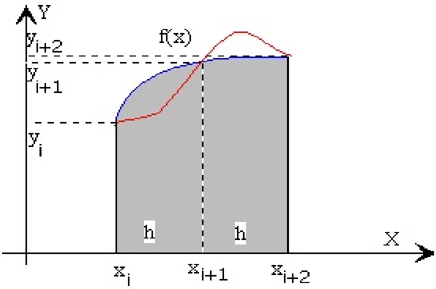
EJEMPLO

Encontrar $\int_0^5 (e^{-x^2})dx$

Si $h = 100 \implies R = 0.88622692$

Método de Simpson

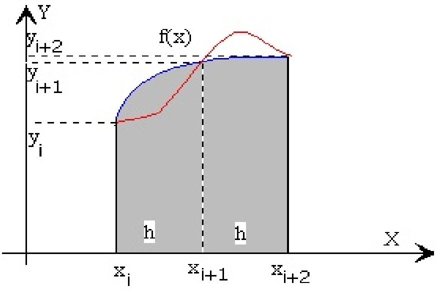
FORMULACIÓN SIMPLE



Consiste en utilizar un polinomio de interpolacion de grado 2 (con 3 puntos) para aproximar la funcion f.

Método de Simpson

FORMULACIÓN SIMPLE



Consiste en utilizar un polinomio de interpolacion de grado 2 (con 3 puntos) para aproximar la funcion f.

Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Este proceso se reduce a:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$$

Este proceso se reduce a:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$$

$$A = \frac{(x_3 - x_1)}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

Este proceso se reduce a:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$$

$$A = \frac{(x_3 - x_1)}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

Pero $(x_3 - x_1) = 2h$

Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$

$A = \frac{(x_3 - x_1)}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Pero $(x_3 - x_1) = 2h$

$A = \frac{2h}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$

$A = \frac{(x_3 - x_1)}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Pero $(x_3 - x_1) = 2h$

$A = \frac{2h}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Por tanto, se tiene como formulación simple:

Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$

$A = \frac{(x_3 - x_1)}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Pero $(x_3 - x_1) = 2h$

$A = \frac{2h}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Por tanto, se tiene como formulación simple:

$$A = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

Este proceso se reduce a:

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

$A \simeq \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_1) + \frac{4(x_3 - x_1)}{6} f(x_2) + \frac{(x_3 - x_1)}{6} f(x_3)$

$A = \frac{(x_3 - x_1)}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

Pero $(x_3 - x_1) = 2h$

$A = \frac{2h}{6} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$

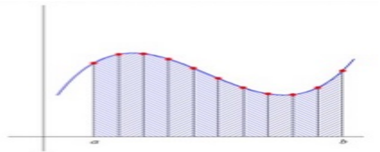
Por tanto, se tiene como formulación simple:

$$A = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

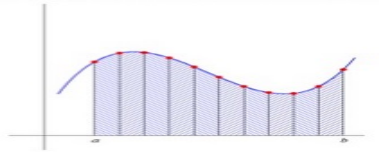
- Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$



FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$

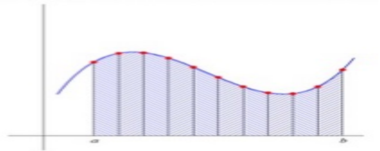


Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$



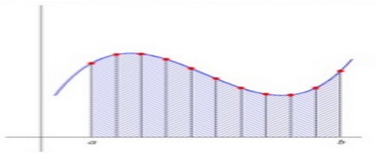
Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$



Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

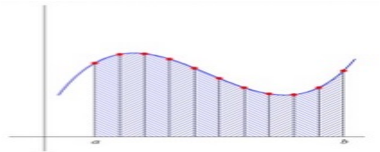
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ANALIZAR EN PIZARRA

FORMULACIÓN COMPUESTA

Algoritmo y análisis para la Programación

- Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales.
- $h = \frac{b-a}{n}$



Con esta gráfica, podemos obtener la fórmula para el area:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ANALIZAR EN PIZARRA

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.9999999973$

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.9999999973$

EJEMPLO

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.9999999973$

EJEMPLO

Encontrar $\int_0^5 (e^{-x^2})dx$

Si $h = 100 \implies R = 0.886226925$

EJEMPLO

Encontrar el valor de $\int_0^3 (x^2)dx$

Si $h = 100 \implies R = 8.9999999973$

EJEMPLO

Encontrar $\int_0^5 (e^{-x^2})dx$

Si $h = 100 \implies R = 0.886226925$

Otros Métodos

- Para el método $\frac{3}{8}$ de Simpson, tomando para la formulación simple 3 subintervalos, se obtiene la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]$$

Otros Métodos

- Para el método $\frac{3}{8}$ de Simpson, tomando para la formulación simple 3 subintervalos, se obtiene la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]$$

- Para el método de Boole, procedemos en forma análoga al de $\frac{3}{8}$ de Simpson y tomando 4 subintervalos para la formulación simple, obteniendo la fórmula:

Otros Métodos

- Para el método $\frac{3}{8}$ de Simpson, tomando para la formulación simple 3 subintervalos, se obtiene la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]$$

- Para el método de Boole, procedemos en forma análoga al de $\frac{3}{8}$ de Simpson y tomando 4 subintervalos para la formulación simple, obteniendo la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_1) + 32f(x_2) + 12f(x_3) + 32f(x_4) + 7f(x_5)]$$

Otros Métodos

- Para el método $\frac{3}{8}$ de Simpson, tomando para la formulación simple 3 subintervalos, se obtiene la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]$$

- Para el método de Boole, procedemos en forma análoga al de $\frac{3}{8}$ de Simpson y tomando 4 subintervalos para la formulación simple, obteniendo la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_1) + 32f(x_2) + 12f(x_3) + 32f(x_4) + 7f(x_5)]$$

EJERCICIO:

Dada la siguiente tabla en los puntos x_i.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.6	0.960398
1.8	0.940678

EJERCICIO:

Dada la siguiente tabla en los puntos x_i.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.6	0.960398
1.8	0.940678

- Construir una tabla de derivadas primeras de la función $g(x)$

EJERCICIO:

Dada la siguiente tabla en los puntos x_i.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.6	0.960398
1.8	0.940678

- Construir una tabla de derivadas primeras de la función $g(x)$
- Calcular aplicando el método del , para n=5 como número de puntos; a mano y con calculadora no programable:

$$\int_1^{1.8} g'(x)dx$$

EJERCICIO:

Dada la siguiente tabla en los puntos x_i.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.6	0.960398
1.8	0.940678

- Construir una tabla de derivadas primeras de la función $g(x)$
- Calcular aplicando el método del , para n=5 como número de puntos; a mano y con calculadora no programable:

$$\int_{1}^{1.8} g'(x)dx$$