USO DE SOFTWARE ESPECIALIZADO

CÁLCULO NUMÉRICO
TEORÍA DEL ERROR
INTRODUCCIÓN

IMPORTANCIA DEL MATLAB, OCTAVE Y SCILAB

COMANDOS BÁSICOS Y PRINCIPALES

TEORÍA DEL ERROR

MÉTODOS NUMÉRICOS
Ing. Patricio Pugarín Díaz, Mgs.
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS - ESPE

CONTENIDO

Título	**Programación para el cálculo numérico y teoría del error**
Duración	**240 minutos**
Información general	**Resaltar la importancia de la programación en los Métodos Numéricos, en Ingeniería, mediante ejercicios de aplicación y conocer sobre la teoría del error.**
Objetivo	**Conocer y aplicar los comandos básicos de Matlab para la programación y la teoría del error en la solución de problemas.**

Ejercicios para la clase.-

4. Hacer un programa que permita elegir dos opciones. La primera es encontrar la suma de los números pares y la segunda encontrar la suma de los números impares, del vector formado por los números del 1 al 500 (Usar el comando *switch case*)

codigo

5. Construir un archivo de funciones que devuelva la gráfica de un círculo de centro (0,0) y radio *r* (Usar las ecuaciones paramétricas del círculo).

codigo

6. Ejercicios.-

Representa en Matlab la superficie 3D la siguiente función:

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Para el caso n=2, usar los siguientes valores de las constantes $\mu = (10{,}10)^T$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. El símbolo $|\Sigma|$ significa el determinante de la matriz Σ.

Ver ejercicio adicional

OPERADORES RELACIONADOS

Relacionan variables para formar proposiciones; y son:

OPERADOR	SIGNIFICADO
$<$	**Menor que**
$<=$	**Menor o igual que**
$==$	**Igual**
$>$	**Mayor que**
$>=$	**Mayor o igual que**
$\sim =$	**No es igual (es diferente)**

OPERADORES LÓGICOS

Permiten relacionar proposiciones.

OPERADOR	SIGNIFICADO
&	**Corresponde al $\wedge$ lógico**
$\vert\vert$	**Corresponde al $\vee$ lógico**
$\sim$	**Es la negación o el $'no'$ lógico**

Nota.-

- Se utilizan con frecuencia con los comandos *for*, *if* y *while.*
- Se pueden utilizar con escalares o matrices.
- Cuando se utilizan con matrices, el operador actúa componente a componente.

<u>Las funciones matemáticas, en una o dos variables, en los $m.files$</u>

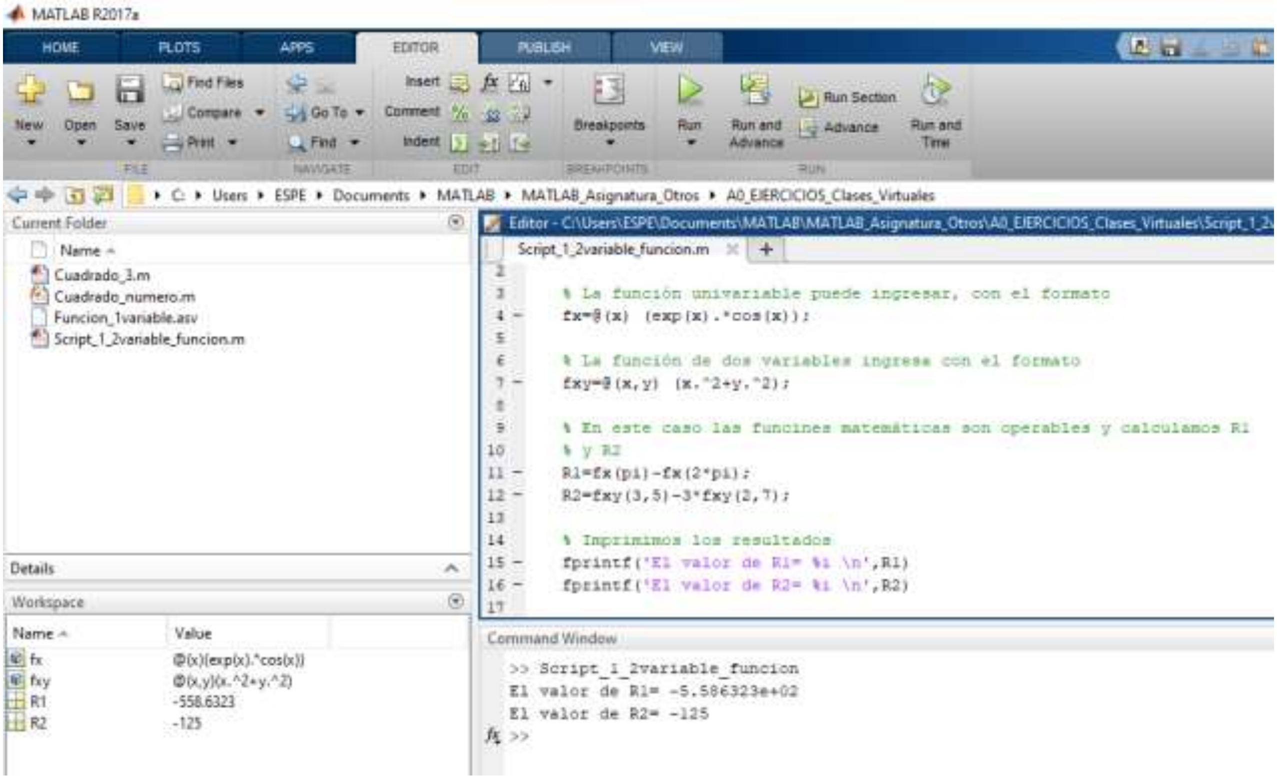
Datos

Dada las funciones $y = e^x \cos x$ y $w = x^2 + y^2$; encontrar los valores:

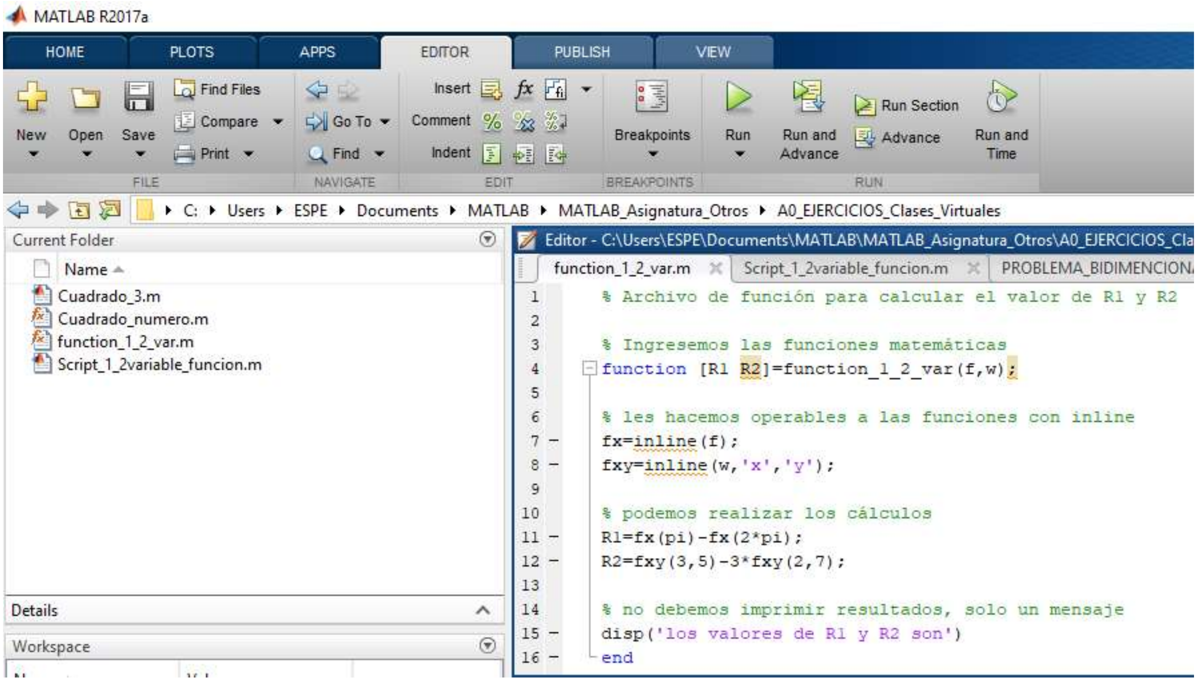
$$R_1 = f(\Pi) - f(2\Pi)$$
$$R_2 = f(3{,}5) - 3f(2{,}7)$$

Calculos

Script



Archivo de función



[R1, R2] = funcionMatematica ('exp(x).*cos(x)','x.^2 + y.^2')

los valores de R1 Y R2 son :
R1 = -558.63
R2 = -125

<u>Ejercicios</u>

Graficas con funciones paramétricas

9. Crear un archivo de función con la que se pueda graficar la siguiente función paramétrica:

$$\begin{cases} x = 5\cos\left(\frac{t}{5}\right) + \cos(2t) \\ y = 5sen\left(\frac{t}{5}\right) + sen(3t) \end{cases}$$

Donde $t \in [a, b]$ y $a,\ b \in \mathbb{R}$. Los parámetros de entrada son los extremos del intervalo y el número de puntos a utilizar.

Ejercicio.-

Crear un archivo de función con la que se pueda graficar la siguiente función paramétrica:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos(t) - r\cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ y = (R+r)\,\mathrm{sen}(t) - r\sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{cases}$$

Donde $t \in [a,b]$ y $a,\ b \in \mathbb{R}$. Los parámetros de entrada son $R,\ r,\ a.\ b$ y el número de puntos *n*.

Deber practicar

POLINOMIOS

Un polinomio de grado n se representa como un vector de dimensión (n+1).

LAB ▸ MATLAB_Asignatura_Otros ▸ A0_EJERCICIOS_Clases_Virtuales

Command Window

```
>> %  El polinomio P(x)=x^3+2x se representa
>> P1=[1 0 2 0];
>>
>> %  Podemos calcular las raíces del polinomio P1
>> R=roots(P1)

R =

   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.4142i
   0.0000 - 1.4142i

>> %  Se puede reconstruir el polinomio P1 a partir de sus raíces
>> P1=poly(R)

P1 =

    1.0000         0    2.0000         0

fx >>
```

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Sean los polinomios $P2 = x^3 - 5x + 2$ y $P3 = x - 1$. Se pueden realizar las operaciones multiplicación y división.

LAB ▸ MATLAB_Asignatura_Otros ▸ A0_EJERCICIOS_Clases_Virtuales

Command Window

```
>> %  Ingresemos los polinomios
>> P2=[1 0 -5 2];                    Grado 3 pero tiene 4 elementos
>> P3=[1 -1];                        Grado 1 tiene 2 elementos
>>
>> %  Para multiplicar los polinomios
>> P4=conv(P2,P3)

P4 =

     1    -1    -5     7    -2          x^4 -x^3 -5x^2 -7x -2

>> %  Para dividir P2 para P3
>> [P5 Rest]=deconv(P2,P3)

P5 =

     1     1    -4                      x^2 +x-4


Rest =

     0     0     0    -2

fx >>
```

VARIABLES SIMBÓLICAS

Conversión a variables y expresiones simbólicas

LAB ▸ MATLAB_Asignatura_Otros ▸ A0_EJERCICIOS_Clases_Virtuales

Command Window

```
>> syms x y   %  Convierte las variables x, y en simbólicas
>>
>> %  Se puede hacer operaciones como:
>> x+x+y-6*y

ans =

2*x - 5*y

>> %  Se puede definir una función f como simbólica
>> f='x^3';
>>
>> %  Se puede ahora evaluar la función para un valor a=2
>> subs(f,2)
```

Operaciones funcionales

AB ▸ MATLAB_Asignatura_Otros ▸ A0_EJERCICIOS_Clases_Virtuales

Command Window

```
>> syms x
>>
>> %  Podemos crear las funciones f, g, h siguientes
>> f=x^2+x+1; g=2*x^2-x^3+cos(x); h=-x+log(x);
>>
>> %  Calculemos ahora:
>> f+g

ans =

x + cos(x) + 3*x^2 - x^3 + 1

>> f*g

ans =

(cos(x) + 2*x^2 - x^3)*(x^2 + x + 1)

>> compose(f,g)   %  es la función compuesta fog

ans =

cos(x) + (cos(x) + 2*x^2 - x^3)^2 + 2*x^2 - x^3 + 1

>>
```

.AB ▸ MATLAB_Asignatura_Otros ▸ A0_EJERCICIOS_Clases_Virtuales

Command Window

```
>> finverse(f)   %  función inversa de f

ans =

(4*x - 3)^(1/2)/2 - 1/2

>> diff(f)  %  La derivada simbólica de f

ans =

2*x + 1

>>
>> %  Para convertir una expresión simbólica a escritura matemática
>> P=f*g;
>> pretty(P)
                    2    3    2
(cos(x) + 2 x  - x ) (x  + x + 1)
```

TEORÍA DEL ERROR

ERROR.-

Cuando se aproxima un número real x mediante otro número x^*, el error que resulta puede ser:

ABSOLUTO.-

$$E = |x - x^*|$$

RELATIVO.-

$$R = \left|\frac{x - x^*}{x}\right|$$

NOTA.-

- En las mediciones científicas es usualmente el error relativo el que resulta relevante
- ¿Un error de un metro podría resultar?

Ejercicios de clase

Determinar el error absoluto y relativo de los siguientes pares de cantidades; haciendo un análisis de la aproximación:

$$x = 3.141592; \quad x^* = 3.14$$

Ex= 0,001592
Rx= 0,000507
x* si es una aproximación a x

$$y = 1'000000; \quad y^* = 999996$$

Ey=4
Ry=0,000004
Y* es una buena aproximación de y

$$z = 0.000012; \quad z^* = 0.000009$$

Ez=0,000003
Rz= 0,25 $\approx$ 25%
Z* No es una aproximación a Z

NOTA.-

- Los análisis realizados en cada uno de los tres ejercicios no dejan de ser subjetivos (buena, mala, no es).
- Cuando se manejan cantidades muy grandes o muy pequeñas el error R resultó más significativo.
- Una manera de no hacer cálculos subjetivos es definiéndolos en función del número de cifras significativas.

Ejercicio

Al medir las longitudes de un puente y de un remache se obtiene las medidas 9999 cm y 9 cm respectivamente, Si los valores verdaderos son 10000 y 10cm, calcule:

a) El error absoluto verdadero:

Ep=10000-9999 = 1 cm
Er=10-9 = 1 cm

b) El error relativo porcentual verdadero:

Rp= 0,0001 $\approx$ 0.01%
Rr=0.1 $\approx$ 10%

Aproximación a un número x

Se dice que un número x^* es una aproximación a x, con d cifras significativas, si d es el mayor número natural tal que:

$$\left|\frac{x - x^*}{x}\right| < \frac{10^{-d}}{2}$$

<u>EJERCICIO.-</u>

Determinar el número de cifras significativas en los tres ejemplos realizados anteriormente.

Rx= 0,000507 $= 0{,}000507 < \frac{10^{-d}}{2}$

$= 0{,}00101 < 10^{-d}$

d=1 -> 0.00101 < 0.1 ✓
d=2 -> 0.00101 < 0.01 ✓
d=3 -> 0.00101 < 0.001 ✗

x* se aproxima a x con 2 cifras significativas

PROPAGACIÓN DEL ERROR

Al resolver un problema utilizando Métodos Numéricos, en general, el error es consecuencia de un cúmulo de errores ocurridos en pasos sucesivos; por lo que se debe estudiar la mecánica de propagación de los mismos, con el fin de evitar obtener resultados catastróficos, en un cálculo determinado.

Ry=0,000004 $=0{,}000004 < \frac{10^{-d}}{2}$

$= 0{,}000008 < 10^{-d}$

d=6 -> 0,000008 < 0,000006 ✗

Y* se aproxima a y con 5 cifras significativas

REGLAS DE PROPAGACIÓN

SUMA.-

$$|E_{x+y}| \approx |E_x| + |E_y|$$

PRODUCTO Y COCIENTE.-

$$|R_{xy}| \leq |R_x| + |R_y|$$

$$|R_{x/y}| \leq |R_x| + |R_y|$$

POTENCIA.-

$$|R_{x^n}| \approx |n||R_x|$$

FUNCIÓN $y = f(x)$.-

$$|E_y| \approx |f'(x)||E_x|$$

ARITMÉTICA DE PUNTO FLOTANTE.-

La representación de **punto flotante** (en inglés floating point) es una forma de notación científica usada en los computadores con la cual se pueden representar números reales extremadamente grandes y pequeños de una manera muy eficiente y compacta, y con la que se pueden realizar operaciones **aritméticas**.

TIPOS DE ERRORES.- que ocasiona el computador.

1. **Error de redondeo.-** Es el obtenido al redondear un número real (por exceso o defecto) en su representación por números punto flotante (o de máquina).

2. **Error significativo.-** Ocurre con frecuencia cuando restamos dos números casi iguales o al dividir para un divisor relativamente pequeño.

EJERCICIO.-

Calcular el valor de la función $y = \sqrt{x^2+1} - 1$, si $x = 10^{-10}$

ERROR DE TRUNCAMIENTO.- comete el operador

Es aquel que se produce cuando una expresión matemática complicada se reemplaza por una fórmula más simple.

EJERCICIO DE APLICACIÓN DEL ERROR.-

Calcular aproximadamente $I^* = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx$ y determinar el número de cifras significativas de la aproximación si se conoce el valor exacto $I = 0.544987104184$

NOTA.-

El error de truncamiento se puede propagar si I^* se emplea en otras operaciones de cálculos matemáticos.

EL ERROR EN LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS

Suponga que la función $p(h)$ es una aproximación a otra $f(h)$. Entonces se dice que $p(h)$ aproxima a $f(h)$, con un orden de aproximación $O(h^n)$; es decir:

$$\boldsymbol{f(h) = p(h) + O(h^n)}$$

NOTA.-

$O(h^n)$, que se conoce como el orden de la aproximación corresponde a la sumatoria de los términos omitidos.

Por ejemplo, en el ejercicio anterior, para el error de truncamiento, se puede concluir:

$$f(x) = p(x) + O(x^n)$$

Es decir:

$$e^{x^2} = (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}) + O(x^{10})$$

TEOREMA

Supongamos que $f(h) = p(h) + O(h^n)$ y $g(h) = q(h) + O(h^m)$. Además $r = \min\{n, m\}$.

Entonces:

1. $f(h) + g(h) = p(h) + q(h) + O(h^r)$
2. $f(h).g(h) = p(h).q(h) + O(h^r)$
3. $\frac{f(h)}{g(h)} = \frac{p(h)}{q(h)} + O(h^r)$; $g(h) \neq 0$, $q(h) \neq 0$
4. $O(h^n) + O(h^m) = O(h^r)$

   $O(h^n).O(h^m) = O(h^{n+m})$

NOTA.-

Si $p(h)$ es la n_esima aproximación de Taylor de $f(h)$; entonces, el resto de la fórmula de Taylor se designa por $O(h^{n+1})$ y sustituye a todos los términos omitidos, a partir de la potencia $O(h^{n+1})$ en adelante.

$O(h^{n+1})$ Converge a cero con la misma rapidez que $h^{n+1} \to 0$, cuando $h \to 0$; es decir:

$$O(h^{n+1}) \approx \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.h^{n+1}; \quad si \ \ h \to 0$$

Que corresponde a la fórmula del Error en las series de potencia infinitas.

EJERCICIO.-

Considerando los desarrollos de Taylor siguientes:

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + O(h^4)$$

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6)$$

Determinar el orden de aproximación para:

a) $e^h + \cos(h)$

b) $e^h \cos(h)$

Foto

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Sánchez Juan Miguel, Problemas de Cálculo Numérico para ingenieros con aplicaciones Matlab, McGraw-Hill, Primera edición, 2005.
2. A. Quarteroni, F. Saleri, Cálculo Científico con Matlab y Octave. Springer-Verlag Italia, milano 2006.