Deber 3P
Interpolación, Derivación, Integración y EDO

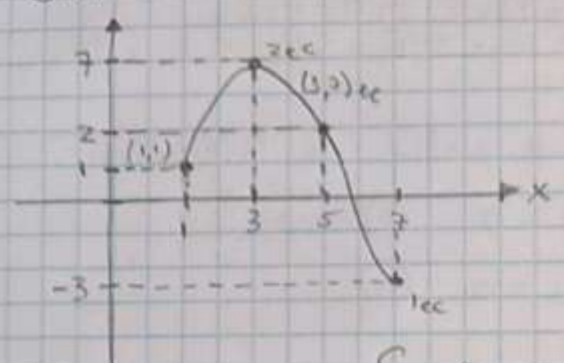
NOMBRE: Clavijo Gutiérrez Alisson Nicole
NRC: 14023

1. **EJERCICIO:** Construir para el siguiente conjunto de nodos el polinomio interpolador a trozos grado 3, a mano y con calculadora no programable.

x_i	$g(x)$
1.0	1
3.0	7
5.0	2

① Polinomio Interpolador a trozos

Gráfica



Encontramos $S(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{en } [1,3] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{en } [3,5] \\ a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 & \text{en } [5,7] \end{cases}$ 12 Incógnitas

1) Los puntos deben verificar las ecuaciones

$(x_0, y_0) = (1,1)$: $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$ (1)

$(x_1, y_1) = (3,7)$: $27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 7$ (2)

$27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 7$ (3)

$(x_2, y_2) = (5,7)$: $125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = 2$ (4)

$125a_3 + 25b_3 + 5c_3 + d_3 = 2$ (5)

$(x_3, y_3) = (7,-3)$: $343a_3 + 49b_3 + 7c_3 + d_3 = -3$ (6)

2) En puntos intermedios las m de las curvas consecutivas son iguales.

$$S'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{en } [1,3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{en } [3,5] \\ 3a_3x^2 + 2b_3x + c_3 & \text{en } [5,7]. \end{cases}$$

$(x_1, y_1) = (3,7)$: $27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$

$= 27a_1 + 6b_1 + c_1 - 27a_2 - 6b_2 - c_2 = 0$ (7)

$(x_2, y_2) = (5,7)$: $75a_2 + 10b_2 + c_2 = 75a_3 + 10b_3 + c_3$

$75a_2 + 10b_2 + c_2 - 75a_3 - 10b_3 - c_3 = 0$ (8)

3) En puntos intermedios sus concavidades son iguales en 2 curvas consecutivas.

$$S''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{en } [1,3] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{en } [3,5] \\ 6a_3x + 2b_3 & \text{en } [5,7] \end{cases}$$

$(x_1, y_1) = (3,7)$: $18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$

$18a_1 + 2b_1 - 18a_2 - 2b_2 = 0$ (9)

$(x_2, y_2) = (5,7)$: $30a_2 + 2b_2 = 30a_3 + 2b_3$

$30a_2 + 2b_2 - 30a_3 - 2b_3 = 0$ (10).

Los puntos extremos son puntos de Inflexión

$(x_0, y_0) = 6a_1 + 2b_1 = 0$ (11)

$(x_3, y_3) = 42a_3 + 2b_3 = 0$ (12)

4) Resolver el sistema lineal.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 343 & 49 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 10 & 1 & 0 & -125 & -10 & -1 & 0 \\
18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 & -30 & 2 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\ 7 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

2. **EJERCICIO:** Construir una tabla de derivadas primeras de la función $g(x)$ definida por la siguiente tabla en los puntos x_i, aplicando solo fórmulas de tres puntos.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.8	0.960398
2.0	0.940678

② Polinomio de Lagrange

$0{,}0239x^4 - 0{,}1279x^3 + 0{,}1904x^2 - 0{,}0943x + 1{,}0079$

Calculo valor que falta

x_i	$g(x_i)$
1	1
1,2	0,997302
1,4	0,990025
1,6	0,977197
1,8	0,960398
2,0	0,940678

Sabiendo que $h = 0{,}2$ (progresiva)

$$g'(x) = \frac{-3g_i + 4g_{i+1} - g_{i+2}}{2h}$$

$$g'(x) = -3(1) + 4(0{,}997302) - (0{,}99025)$$

$$g'(x) = -{,}000425 \Rightarrow g(1)'$$

Para

$$g'(1{,}2) = \frac{-3(0{,}997302) + 4(0{,}990025) - (0{,}977197)}{2(0{,}2)}$$

$$g'(1{,}2) = -0{,}024008$$

Para

$$g'(1{,}4) = \frac{-3(0{,}990025) + 4(0{,}977197) - (0{,}960398)}{2(0{,}2)}$$

$$g'(1{,}4) = -0{,}054213$$

Para

$$g'(1{,}6) = \frac{-3(0{,}977197) + 4(0{,}960398) - (0{,}940678)}{2(0{,}2)}$$

$$g'(1{,}6) = -0{,}076693$$

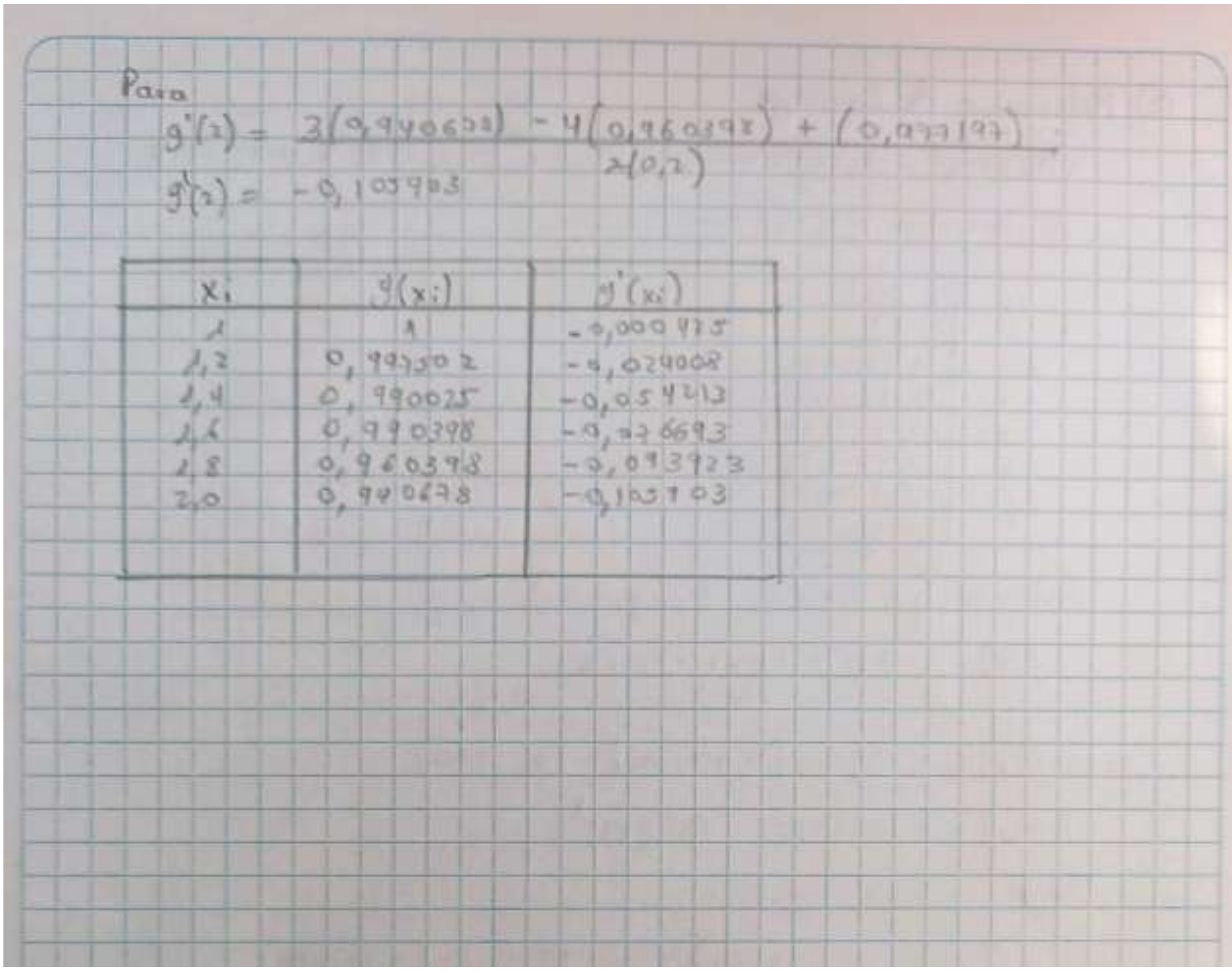
Para $x_5 = 1{,}8 \wedge x_6 = 2{,}0$ se usa la regresiva

$$g'(x) = \frac{3g_i - 4g_{i-1} + g_{i-2}}{2(0{,}2)}$$

Aplicamos

$$g'(1{,}8) = \frac{3(0{,}960898) - 4(0{,}977197) + (0{,}990025)}{2(0{,}2)}$$

$$g'(1{,}8) = -0{,}093923$$



Para

$$g'(2) = \frac{3(0,940678) - 4(0,960398) + (0,977197)}{2(0,2)}$$

$$g'(2) = -0,105903$$

x_i	$g(x_i)$	$g'(x_i)$
1	1	-0,000475
1,2	0,997502	-0,024008
1,4	0,990025	-0,054213
1,6	0,990398	-0,076693
1,8	0,960398	-0,093923
2,0	0,940678	-0,105903

3. **EJERCICIO:** Se conocen los valores de la función de Bessel $J_0(x)$ en los puntos $J_0(0.0) = 1.0000000$, $J_0(0.1) = 0.99750156$, $J_0(0.2) = 0.99002497$, $J_0(0.3) = 0.97762625$, $J_0(0.4) = 0.96039823$, $J_0(0.5) = 0.93846981$.
Calcule a mano y con calculadora no programable la $\int_0^{0,5} J_0'(x)dx$, usando fórmulas de derivación aproximada y aplicando el método del trapecio; para $n = 5$ como número de subintervalos.

3

x_i	$J_0(x)$
0	1
0,1	0,99750156
0,2	0,99002497
0,3	0,97762625
0,4	0,96039873
0,5	0,93846981

Intervalo $[0; 0,5]$

$$h = \frac{0,5-0}{5} = 0,1$$

$$n+1 = 6$$

D. f delante (progresiva) (Derivación Numérica)

$$J'(x) = \frac{J(x+h) - J(x)}{h}$$

$$J'(0) = \frac{J(0,1) - J(0)}{0,1} = \frac{0,99750156 - 1}{0,1}$$

$$J'(0) = -0,024984$$

$$J'(0,1) = \frac{J(0,2) - J(0,1)}{0,1}$$

$$J'(0,1) = \frac{0,99002497 - 0,99750155}{0,1} = -0,074766$$

$$J'(0,2) = \frac{J(0,3) - J(0,2)}{0,1}$$

$$J'(0,2) = \frac{0,97762625 - 0,99002497}{0,1} = -0,123987$$

$$J'(0,3) = \frac{J(0,4) - J(0,3)}{0,1}$$

$$J'(0,3) = \frac{0,96039823 - 0,97762625}{0,1} = -0,172280$$

$$J'(0,4) = \frac{J(0,5) - J(0,4)}{0,1}$$

$$J'(0,4) = \frac{0,93846981 - 0,96039823}{0,1} = -0,219284$$

$$J'(0,5) = -0,219284$$

x_i	$J'(x)$
0	-0,024984
0,1	-0,074766
0,2	-0,123987
0,3	-0,172280
0,4	-0,219284
0,5	-0,219284

Método del Trapecio

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

$$\int f'(x)\,dx = \frac{0,1}{2}\Big(-0,024984 - 2(0,074768) - 2(0,123987) - 2(0,172280) - 2(0,219284) - 2(0,219284)\Big)$$

$$= -0,0822093$$

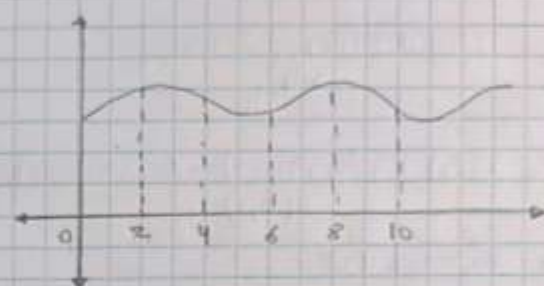
4. **EJERCICIO:** Construir una tabla de derivadas primeras de la función $g(x)$ definida por la siguiente tabla en los puntos x_i.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.6	0.960398
1.8	0.940678

Intervalo $[0, 10]$ $\quad n = 5$

$h = \frac{10-0}{5} = 2 \quad n+1 = 6$

t	$f(t)$
0	0
2	-0,756802
4	-0,287903
6	-0,991779
8	0,920026
10	-0,506366



$$\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{2}{2}\left(0 - 2(0{,}756802) - 2(0{,}287903) - 2(0{,}991779) + 2(0{,}920026) - (0{,}506366)\right)$$

$$= 1(-2{,}739282)$$

$$= -2{,}739282$$

Metodo 2

$h = \frac{10-0}{5} = 2$

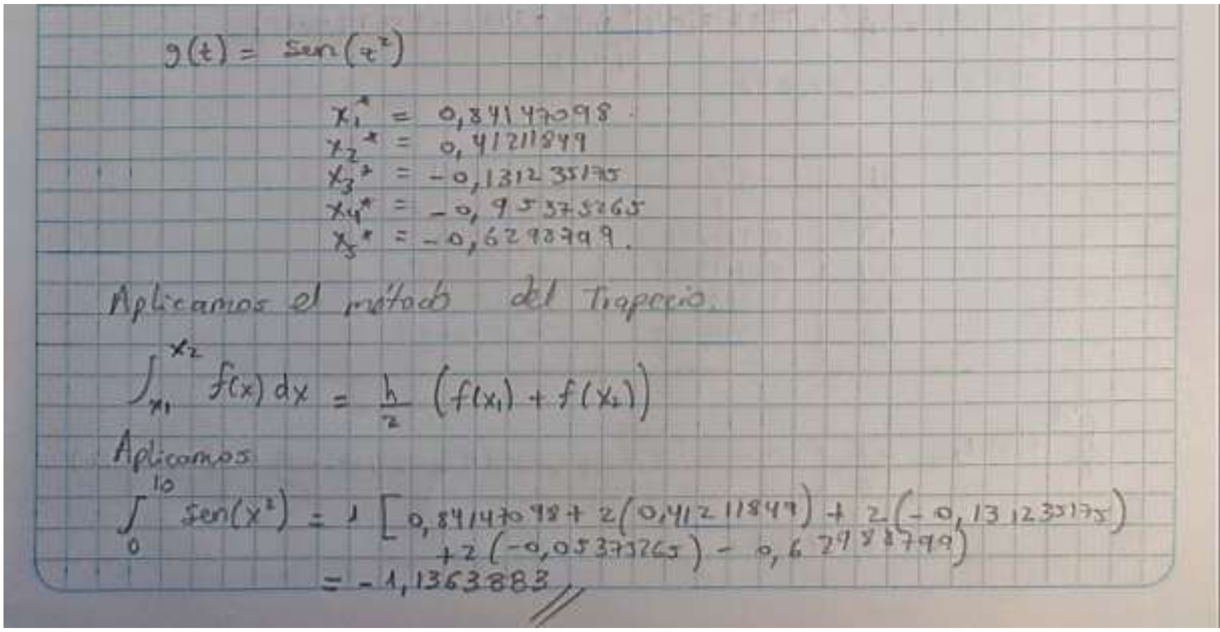
$x_1^* = \frac{0+2}{2} = 1$

$x_2^* = \frac{0+(3\cdot 2)}{2} = 3$

$x_3^* = \frac{0+(5\cdot 2)}{2} = 5$

$x_4^* = \frac{0+(7\cdot 2)}{2} = 7$

$x_5^* = \frac{0+(9\cdot 2)}{2} = 9$



$g(t) = sen(t^2)$

$x_1^* = 0,84147098$
$x_2^* = 0,41211849$
$x_3^* = -0,131235175$
$x_4^* = -0,95375265$
$x_5^* = -0,62987799$

Aplicamos el método del Trapecio.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

Aplicamos

$$\int_0^{10} sen(x^2) = 1\left[0,84147098 + 2(0,41211849) + 2(-0,13123175) + 2(-0,05373265) - 0,62987799\right]$$
$$= -1,1363883$$

5. **EJERCICIO:** Considere la siguiente función:

a) $f(x) = x^3 e^{-x} Sen(x)$ para $0 \leq x \leq 2$

Teniendo presente que:

- Longitud de una curva. La longitud de una curva $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$ es

$$longitud = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

- Área de una superficie de revolución. El área de la superficie del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje OX la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el intervalo $[a, b]$, viene dada por:

$$area = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Calcular la longitud de curva y la superficie de revolución de la curva dada, a mano y con calculadora no programable; aplicando el método $\frac{3}{8}$ de Simpson, para $n = 9$ como el número de subintervalos.

(5)

- Hallamos h teniendo lo dado.

$$\underset{b}{0} \le x \le \underset{a}{1} \qquad h = \frac{a-b}{n}$$

$$n = 12 \qquad h = \frac{1-0}{12} = \frac{1}{12}$$

Se sabe que:

$$\text{Longitud} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx \quad (1)$$

$$y\ f(x) = x^3 e^{-x}$$

Sabemos que $f'(x) = -x^3e^{-x} + 3x^2e^{-x}$

formula de Simpson $\frac{3}{8}$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right).$$

Reemplazo en (1)

$$g(x) = \sqrt{1+(3x^2e^{-x} - x^3e^{-x})^2}$$

Evaluamos

x	$g(x)$
0	1
1/12	1,000174
1/6	1,002217
1/4	1,008917
1/3	1,022288
5/12	1,042294
1/2	1,069440
7/12	1,100265
2/3	1,132909
3/4	1,165097
5/6	1,194821
11/12	1,220637
1	1,241507

$$\int_0^1 f(x) = \frac{3\left(\frac{1}{12}\right)}{8}\Big(1 + 3(1{,}000144) + 3(1{,}002217) + 3(1{,}008919) + 3(1{,}022288) + 3(1{,}047994) + 3(1{,}069440) + 3(1{,}100765) + 3(1{,}132909) + 3(1{,}165074) + 3(1{,}194821) + 3(1{,}220637) + 1{,}241107\Big)$$

$$= 1{,}191254 \; u$$

Ahora con el area:

$$\text{area} = 2\pi \int_a^b x^3 e^{-x} \sqrt{1 + \left(3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}\right)^2}\, dx$$

Sabemos que $f(x) = x^3 e^{-x} \sqrt{1 + \left(3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}\right)^2}$

X	f(x)
0	0
1/12	0,000535
1/6	0,003927
1/4	0,012177
1/3	0,027120
5/12	0,049728
1/2	0,081081
7/12	0,121873
2/3	0,172342
3/4	0,232177
5/6	0,300302
11/12	0,373939
1	0,456725

Aplico:

$$2\pi \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{32}\Big(0 + 3(0{,}000535 + 0{,}003927 + 0{,}012177 + 0{,}027120 + 0{,}049728 + 0{,}081081 + 0{,}121873 + 0{,}172342 + 0{,}232177 + 0{,}300302 + 0{,}373939) + 0{,}456725\Big)$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{32}\right)(4{,}589228)$$

$$= 0{,}901092 \; u^2$$

6. **EJERCICIO:** Dada la siguiente tabla en los puntos x_i.

x_i	$g(x)$
1.0	1.000000
1.2	0.997502
1.4	0.990025
1.6	0.960398
1.8	0.940678

a) Calcular aplicando el método del punto medio, para n=5 como número de puntos; a mano y con calculadora no programable:

$$\int_1^{1,8} g'(x)dx$$

Sabemos $n=5$
$n+1=6$
$h=0,2$
$x=1$

$$g'(x)=\frac{-3g_i+4g_{i+1}-g_{i+2}}{2h}$$

$$g'(1)=\frac{-3(1)+4(0,997502)-(0,990025)}{2(0,2)}$$

$$g'(1)=-0,0000425$$

- $x=1,2$

$$g'(1,2)=\frac{-3(0,997502)+4(0,990025)-0,960398}{2(0,2)}$$

$$g'(1,2)=0,01799$$

- $x=1,4$

$$g'(1,4)=\frac{-3(0,990025)+4(0,960398)-(0,940678)}{2(0,2)}$$

$$g'(1,4)=-0,172903$$

- $x=1,6$

$$g'(1,6)=\frac{3(0,960398)-4(0,990025)+(0,997502)}{2(0,2)}$$

$$g'(1,6)=-0,20351$$

- $x=1,8$

$$g'(1,8)=\frac{3(0,940678)-4(0,960398)+(0,990025)}{2(0,2)}$$

$$g'(1,8)=-0,073833$$

x_i	$g(x)$	$g'(x)$
1,0	1	-0,0000425
1,2	0,997502	0,01799
1,4	0,990025	-0,172903
1,6	0,960398	-0,20351
1,8	0,940678	-0,073833

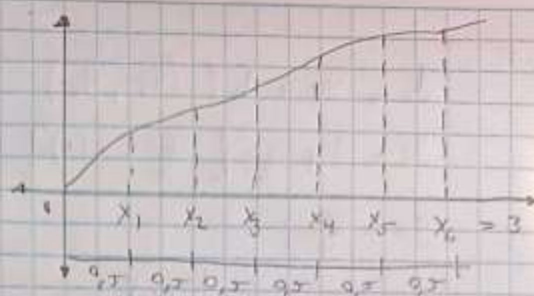
$$\int_1^{1,8} g'(x)\,dx=\frac{0,2}{2}\left[-0,0000425+2(0,01799)-2(0,172903)+2(-0,20351)-0,073833\right]$$

$$=-0,079072$$

7. **EJERCICIO:** Aplicando el método de Euler resolver el sigiente PVI, a mano y con calculadora no programable.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= x - 2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy = x - 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Intervalo $[0, 3]$

$n = 6 \Rightarrow n + 1 = 7$

$h = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \approx 0,5$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Iteraciones:

$k = 0$

$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ $\quad t_0 = 0$

$y_1 = 1 + \frac{1}{2}[-2(1)]$ $\quad y_0 = 1$

$y_1 = 1 - 1$

$y_1 = 0$

$k = 1$

$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$ $\quad t_1 = \frac{1}{2}$

$y_2 = 0 + hf(1/2, 0)$ $\quad y_1 = 0$

$y_2 = 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - 2(0)\right]$

$y_2 = \frac{1}{4}$

$k = 2$

$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2)$ $\quad t_2 = 1$

$y_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f(1, \frac{1}{4})$ $\quad y_2 = 1/4$

$y_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

$y_3 = \frac{1}{2}$

$k = 3$

$$y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) \qquad t_3 = 3/2$$
$$y_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad y_3 = 1/2$$
$$y_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$y_4 = \frac{3}{4}$$

$k = 4$

$$y_5 = y_4 + hf(t_4, y_4) \qquad t_4 = 2$$
$$y_5 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left[2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)\right] \qquad y_4 = 3/4$$
$$y_5 = 1$$

$k = 5$

$$y_6 = y_5 + hf(t_5, y_5) \qquad t_5 = 5/2, \quad y_5 = 1$$
$$y_6 = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2} - 2(1)\right]$$
$$y_6 = \frac{5}{4}$$

x	$f(x)$
0	1
1/2	0
1	1/4
3/2	1/2
2	3/4
5/2	1
3	5/4

8. **EJERCICIO:** Aplicando el método de Heun resolver el sigiente PVI, a mano y con calculadora no programable; para $0 \leq x \leq 3$.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & x - 2y \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$N = 6$

$N+1 = 7$ # puntos

$h = \dfrac{3-0}{6} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$K=0$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, P_{k+1})\right)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, P_1)\right)$$

$$f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0 - 2(1) = -2$$

$$f(x_1, P_1) = f(0,5,\ 0) = 0,5$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= y_k + hf(t_0, y_0) \\ &= y_0 + hf(0,1) \\ &= 1 + 0,5(-2) \end{aligned}$$

$$P_1 = 0$$

$$y_1 = 1 + \frac{0,5}{2}\left(-2 + 0,5(0,0)\right)$$

$$y_1 = 0,625$$

$K=1$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_2, P_2)\right)$$

$$y_2 = 0,625 + \frac{0,5}{2}\left(-0,75 + 0,5\right)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f(0,5,\ 0,625) \\ &= 0,5 - 2(0,625) \\ &= -0,75 \end{aligned}$$

$P_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$

$P_2 = 0,625 + 0,5\, f(0,5\ ,\ 0,625)$
$= 0,625 + 0,5\,(0,5 - 2(0,625))$
$= 0,25$

$f(x_2, P_2) = f(1,\ 0,25)$
$= 1 - 2(0,25)$
$= 0,5$

$y_2 = 0,5625$

$K=2$

$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}\left(f(x_2, y_2) + f(x_3, P_3)\right)$

$f(x_2, y_2) = 1 - 2(0,5625)$
$= -0,125$

$P_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0,5$

$f(x_3, P_3) = (1,5\ ;\ 0,5)$
$= 0,5$

$y_3 = 0,5625 + \frac{0,5}{2}\left[-0,125 + 0,5\right]$

$y_3 = 0,65625$

$K=3$

$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}\left(f(x_3, y_3) + f(x_4, P_4)\right)$

$f(x_4, P_4) = (2\ ;\ 0,75)$
$= (2 - 2(0,75))$
$= 0,5$

$y_4 = 0,828125$

$K=4$ $\quad y_5 = y_4 + \frac{h}{2}\left(f(x_4, y_4) + f(x_5, P_5)\right)$

$f(x_4, y_4) = (2\ ;\ 0,828125) = 2 - 2(0,828125) = 0,34375$

$P_5 = 0$

$f(x_5, y_5) = f(2,5\ ;\ 1) = 2,5 - 2 = 0,5$

$y_5 = 0,828125 + \frac{0,5}{2}(0,34375 + 0,5) = 1,0390625$

$K=5$ $\quad y_6 = y_5 + \frac{h}{2}\left(f(x_5, y_5) + f(x_6, P_6)\right)$

$f(x_5, y_5) = f(2,5\ ;\ 1,0390625) = 0,421875$

$P_6 = 1,25$

$f(x_6, y_6) = f(3\ ;\ 1,25) = 0,5$

$y_6 = 1,0390625 + \frac{0,5}{2}(0,421875 + 0,5) = 1,26453125$

9. **EJERCICIO:** Use el método de las diferencias finitas para aproximar la solución del siguiente PVF; tomando un paso $h = 0{,}5$.

$$\begin{cases} x'' + (1/t)x' + (1 - 1/(4t^2))x = 0 \\ x(1) = 1 \\ x(6) = 0 \end{cases}$$

a) Grafique la solución aproximada encontrada y compare con la gráfica de la solución exacta dada por la ecuación:

$$x(t) = \frac{0{,}2913843206\, cos(t) + 1{,}001299385\, sen(t)}{\sqrt{t}}$$

b) Comente su respuesta.

(10) Sabemos:

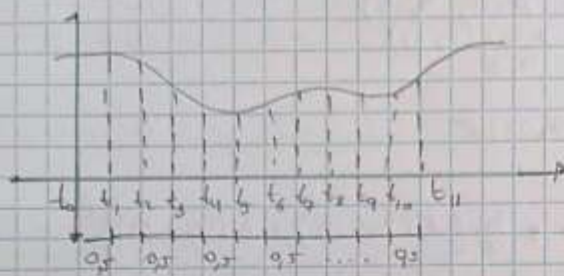
$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)x = 0$$

Intervalo $[1, 6]$

$x(1) = 1$

$x(6) = 0$

1) Discretizamos



Teniendo $h = 0,5$

$$0,5 = \frac{6-1}{n} \Rightarrow n = \frac{6-1}{0,5} = 10$$

Intervalos en t

$t_1 = 1$	$t_6 = 3,5$	$t_n = 6$
$t_2 = 1,5$	$t_7 = 4$	
$t_3 = 2$	$t_8 = 4,5$	
$t_4 = 2,5$	$t_9 = 5$	
$t_5 = 3$	$t_{10} = 5,5$	

Utilizamos las formulas

$$x_k'' = \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2} \quad ; \quad x_k' = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h}$$

$k = 1, 2, \dots 10$

EDO Discretizada

$$x_k'' + \frac{1}{t_k}x_k' + \left(1 - \frac{1}{4t_k^2}\right)x_k = 0$$

Reemplazo

$$4t_k^2\left(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} + 2ht_k\left(x_{k+1} - x_{k-1}\right) + h^2\left(4t_k^2 - 1\right)x_k = 0\right.$$

$$\left[4t_k^2 + 2ht_k\right]x_{k+1} + \left[-8t_k^2 + h^2\left(4t_k^2 - 1\right)\right]x_k + \left[4t_k^2 - 2ht_k\right]x_{k-1} = 0$$

Empezamos evaluando

$K = 2$

$$10,5x_3 - 16x_2 + 7,5 = 0$$

$K = 3$

$$18x_4 - 28,25x_3 + 14x_2 = 0$$

K=4

$$27{,}5\, X_5 - 49\, X_4 + 22{,}5\, X_3 = 0$$

K=5

$$39\, X_6 - 63{,}25\, X_5 + 33\, X_4 = 0$$

K=6

$$52{,}5\, X_7 - 86\, X_6 + 45{,}5\, X_6 = 0$$

K=7

$$68\, X_8 - 112{,}25\, X_7 + 60\, X_6 = 0$$

K=8

$$85{,}5\, X_9 - 142\, X_8 + 76{,}5\, X_7 = 0$$

K=9

$$105\, X_{10} - 175{,}25\, X_9 + 105\, X_8 = 0$$

K=10

$$-212\, X_{10} + 115{,}5\, X_9 = 0 .$$

Matriz

$$\begin{pmatrix} -16 & 10{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -76{,}75 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22{,}5 & -44 & 27{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & -63{,}25 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45{,}5 & -86 & 52{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & -112{,}25 & 68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 76{,}5 & -142 & 85{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 95 & -123{,}25 & 105 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 115{,}5 & -212 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Valores

$X_2 = 0{,}8377$

$X_3 = 0{,}5760$

$X_4 = 0{,}2524$

$X_5 = -0{,}0674$

$X_6 = -0{,}3229$

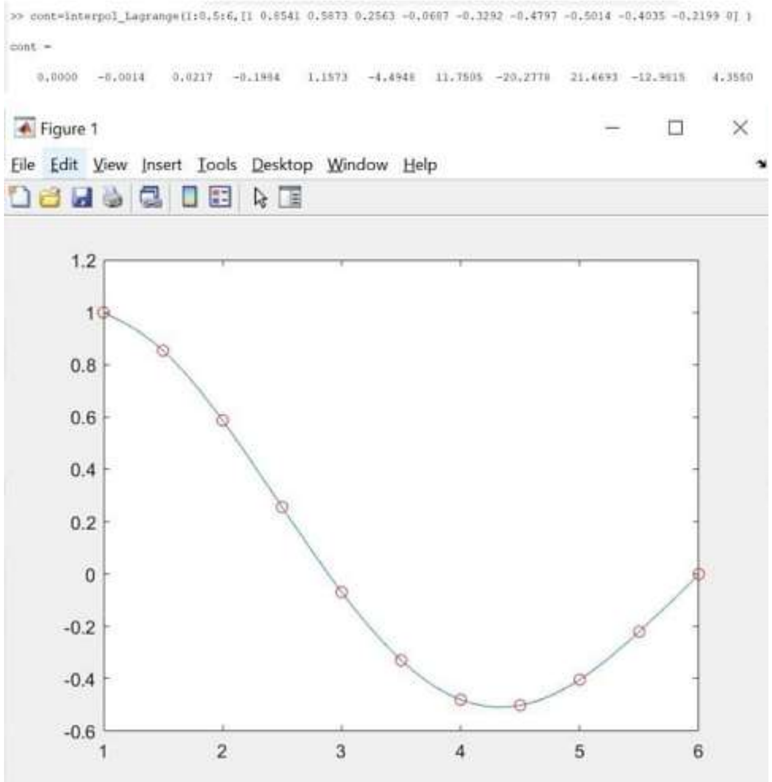
$X_7 = -0{,}4705$

$X_8 = -0{,}4918$

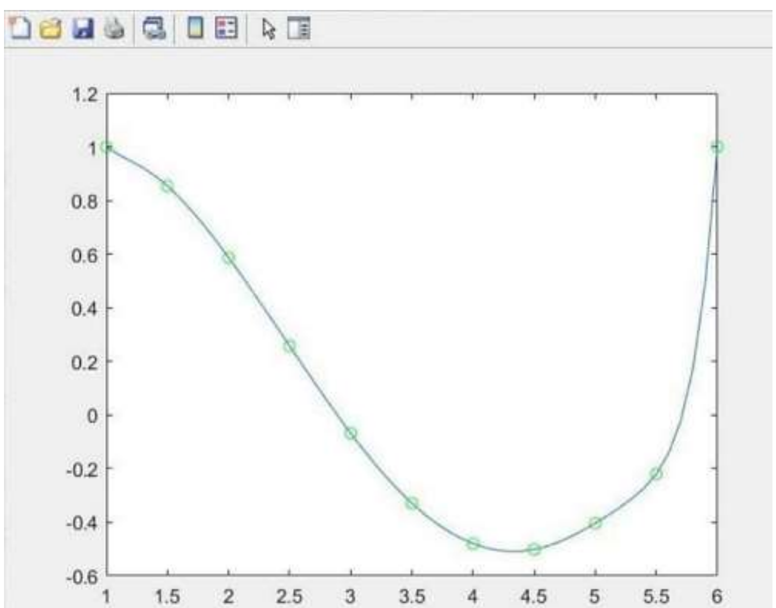
$X_9 = -0{,}3958$

$X_{10} = -0{,}2156$ //

Graficas



Grafica de la solución exacta de la EDO



Comentario

Se puede observar claramente que las dos graficas son muy semejantes, por lo tanto, podemos concluir que tanto el método de diferencias finitas como la resolución de la EDO propuesta son óptimas y soluciones válidas.