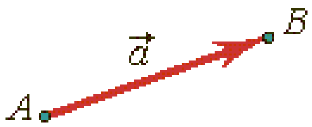
Векторы (основные понятия и определения).

Все величины делятся на *скалярные* и *векторные*.

Скалярные величины характеризуются числовым значением (вес товара, стоимость и т.д.)

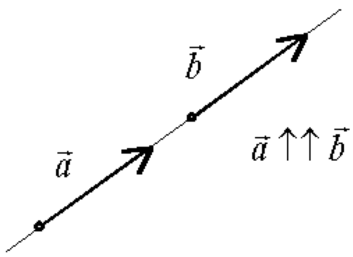
Векторные величины характеризуются числовым значением и направлением.

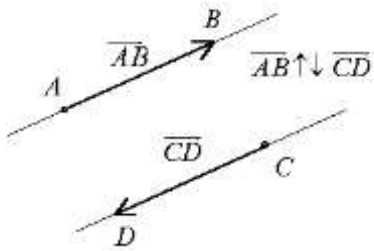
Вектором называется *направленный отрезок*, на котором указаны начало, конец и направления.



Обозначается $\overline{AB}$ или $\bar{a}$, $|\bar{a}|$ – длина вектора.

Векторы называются *коллинеарными*, если их направление совпадает или противоположно.





а) б)

$\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$– коллинеарные.

Теорема. Признак коллинеарности векторов.

Для того чтобы $\bar{a}$ был коллинеарен ненулевому$\bar{b}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, для которого выполнялось бы равенство:

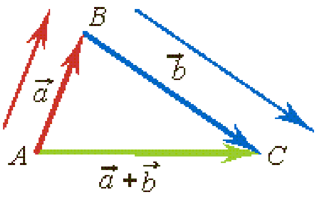
$$\bar{a} = k \cdot \bar{b},$$

где k– коэффициент пропорциональности.

Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называются *компланарными,* если их можно поместить в одну плоскость путем параллельного переноса.

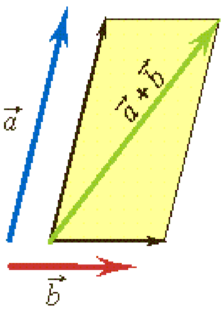
Сложение векторов

Правило треугольника



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Правило параллелограмма



Разность векторов

$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$

Линейные операции над векторами. Направляющие косинусы.

Положение вектора в пространстве задают направляющие *Cos* углов (α, β, j) вектора с осями координат:

$$\text{Cos } \alpha = \frac{x}{|\bar{r}|}; \quad \text{Cos } \beta = \frac{y}{|\bar{r}|}; \quad \text{Cos } j = \frac{z}{|\bar{r}|};$$

Пусть $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$; $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$;

1. Сумма (разность) векторов:

$\boldsymbol{\bar{a}} \pm \boldsymbol{\bar{b}} = (x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath} + z_1\bar{k}) \pm (x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath} + z_2\bar{k}) = (x_1 \pm x_2)\bar{\imath} + (y_1 \pm y_2)\bar{\jmath} +$
$+(z_1 \pm z_2)\bar{k} = \boldsymbol{(x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)}.$

2. Умножение вектора на λ:

$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$.

3. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Скалярным произведением векторов называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\boldsymbol{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \mathrm{Cos}\alpha;}$$

где $\alpha = \angle(\bar{a};\ \bar{b})$;

$0^0 \le \alpha \le 180^0$

Свойства:

1. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$ – скалярный квадрат.
2. Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$; т.к. $Cos 90^0 = 0$;
3. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ – коммутативность
4. $\lambda (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a})\, \bar{b} = \bar{a}\, (\lambda \cdot \bar{b})$ – ассоциативность
5. $(\bar{a} + \bar{b})\, \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ – дистрибутивность

Выведем формулу скалярного произведения через координаты:

$\boldsymbol{\bar{a}} \cdot \boldsymbol{\bar{b}} = (x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath} + z_1\bar{k}) \cdot (x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath} + z_2\bar{k}) = x_1 \cdot x_2 |\bar{\imath}|^2 + x_1 \cdot y_2 \bar{\imath}\bar{\jmath} + x_1 \cdot z_2 \bar{\imath}\bar{k} + y_1 x_2 \bar{\jmath}\bar{\imath} + y_1 y_2 |\bar{\jmath}|^2 + y_1 z_2 \bar{\jmath}\bar{k} + z_1 x_2 \bar{k}\bar{\imath} + z_1 y_2 \bar{k}\bar{\jmath} + z_1 z_2 |\bar{k}|^2 =$
$= \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$

$$\boldsymbol{\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

– формула для нахождения скалярного произведения.

Прямоугольный базис.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве.

Прямоугольные координаты вектора (точки).

Разложение вектора по базису.

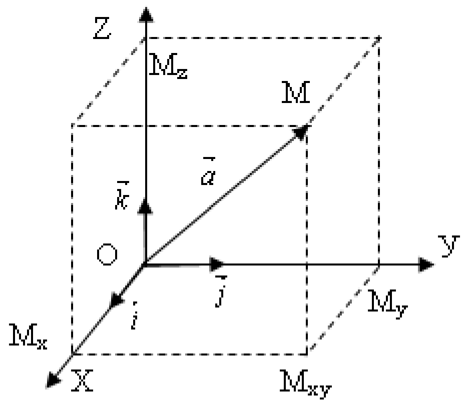
При взаимных перпендикулярных единичных вектора $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, выходящих из одной точки, образуют прямоугольный базис в пространстве.

Прямые проведенные в направлении базисных векторов образуют прямоугольную декартову систему координат:

OX – в направлении – $\bar{\imath}$ – ось абсцисс;

OУ – в направлении – $\bar{\jmath}$ – ось ординат;

OZ – в направлении – $\bar{k}$ – ось аппликат;



$\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$– орты координаты осей, т.е. $\bar{\imath}$– орт оси OX и т.д.

$\bar{r}$ = OM – радиус – вектор точки M.

$\bar{\imath} \perp \bar{\jmath} \perp \bar{k}; |\bar{\imath}| = |\bar{\jmath}| = |\bar{k}| = 1.$

Прямоугольными координатами вектора (точки) называются *проекции этого вектора* (точки) на оси ординат.

$$\bar{r} = (x, y, z).$$

$\bar{r} = \overline{OM} = \text{OM}_{xy} + \text{OM}_z = \text{OM}_x + \text{OM}_y + \text{OM}_z = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}}$$

– разложение вектора $\bar{r}$ по базису $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$.

Формулы для нахождения длины вектора, расстояния между точками и угла между векторами.

По свойству длинны диагонали прямоугольного треугольника, получим:

$$\boldsymbol{\overline{OM}^2 = \bar{r}^2 = OA^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2},$$

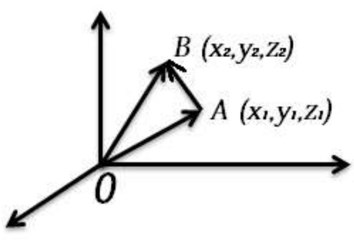
т. е.

$$\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z,$$

следовательно,

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Так как вектор $\bar{r}$ можно свободно перемещать в пространстве, то длина произвольного вектора $|\overline{\text{AB}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



По правилу сложения вектора $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)}$$

Подставив координаты $\overline{AB}$ в формулу длины вектора, получим формулу для нахождения расстояния между точками:

$$|\mathrm{AB}| = |\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^{\,2} + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^{\,2} + (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})^{\,2}}$$

– формула расстояния между точками.

Из формулы $\bar{a} \cdot \bar{\mathrm{b}} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos\ \alpha$ найдем

$$Cos\ \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

Или

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

если

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$; $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\alpha = arccos \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Векторное произведение векторов (геометрический смысл, свойства).

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку векторов (рис. 2), если $\bar{c}$ находится по ту сторону плоскости, содержащей векторы $\bar{a}$ и $\bar{\mathrm{b}}$, откуда кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$к$\bar{b}$ можно совершить против часовой стрелки.

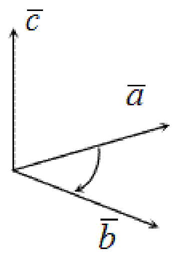


Рис. 1

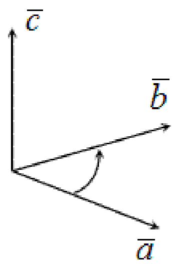


Рис. 2

В противном случае векторы образуют левую тройку векторов (рис. 1).

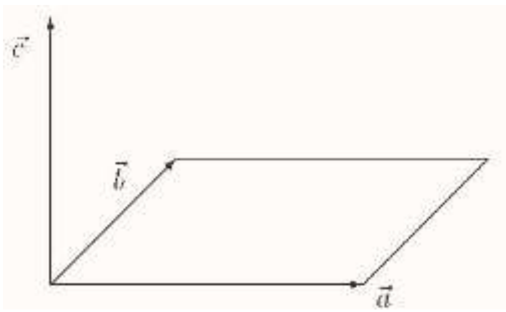
Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ **=** $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$, удовлетворяющей следующим 3–м свойствам:

1. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\alpha$, где$\alpha = \angle(\bar{a}; \bar{b})$.

2. $\bar{c}\perp\bar{a}$; $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку векторов.

Геометрический смысл.



$S_{\text{пароаллелограмма}} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha \Rightarrow |\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}|$,

т.е. $|\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}| = \boldsymbol{S}_{\textbf{пароаллелограмма}}$

Модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен Sпараллелограмма, построенного на векторах – множителях.

Свойства векторного произведения.

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ – не коммутативно

2. Если $\bar{a}$ коллинеарен $\bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т. к. $\sin 0^0 = 0$.

3. $\lambda (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \cdot \bar{b})$ – ассоциативность

4. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$ – дистрибутивность

Выражение векторного произведения через координаты.

Пусть $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$; $\bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$;

Разложим ***a*** и ***b*** по базисным векторам:

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

Используя свойства векторного произведения, получаем

$$\bar{a}\times\bar{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+\mathrm{z}_1k)\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2k)=$$

$$=x_1\cdot x_2\cdot\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+x_1\cdot y_2\cdot\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+x_1\cdot z_2\cdot\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+$$

$$+y_1\cdot x_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+y_1\cdot y_2\,\boldsymbol{j};\boldsymbol{j}+y_1\cdot z_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+$$

$$+z_1\cdot x_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+z_1\cdot y_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z_1\cdot z_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\qquad(1)$$

По определению векторного произведения находим

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}.\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

Учитывая эти равенства, формулу (1) можно записать так:

$$\bar{a}\times\bar{b}=x_1y_2\boldsymbol{k}-x_1z_2\,\boldsymbol{j}-y_1x_2\boldsymbol{k}+y_1z_2\,\boldsymbol{i}+z_1x_2\,\boldsymbol{j}-z_1y_2\boldsymbol{i}$$

или

$$\bar{a}\times\bar{b}=(y_1z_2-z_1y_2)\,\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\,\boldsymbol{k}.\qquad(2)$$

Формула (2) дает выражение для векторного произведения двух векторов, заданных своими координатами.

Полученную формулу можно записать в другом более удобном для запоминания виде:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \qquad (3)$$

Обычно формулу (3) записывают еще короче:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} (4)$$

– формула для вычисления векторного произведения.

Тогда,

$$\boldsymbol{S}_{\text{пароаллелограмма}} = |\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\boldsymbol{S}_{\text{треугольника}} = \frac{|\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}|}{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\mathbf{2}};$$

Пример: найти векторное произведение векторов:

$$\bar{a} = (6; 7; 10) \text{ и } \bar{b} = (8; 5; 9)$$

Решение:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(7 \cdot 9 - 5 \cdot 10) - \bar{j}(6 \cdot 9 - 8 \cdot 10) + \bar{k}(6 \cdot 5 - 8 \cdot 7) =$$

$$= 13\bar{i} + 26\bar{j} - 26\bar{k} = (13; 26; -26)$$