

Определители квадратных матриц и способы их вычисления.

Определителем квадратной матрицы называется *число*, характеризующее эту матрицу.

Определители обозначаются двумя вертикальными чертами:

$|A|$ или Δ (дельта).

Определителем первого порядка квадратной матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ называется *число*, равное элементу этой матрицы.

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем второго порядка квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *число*, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

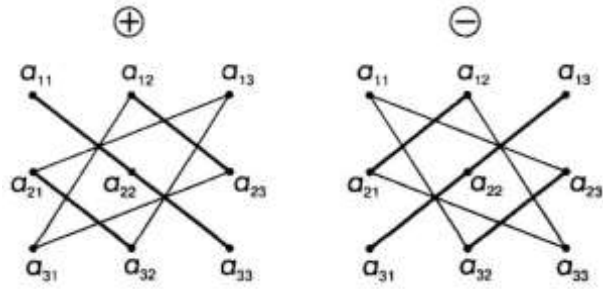
Пример:

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3 \times 7 - 6 \times (-5) = -21 + 30 = 9.$$

Определителем третьего порядка квадратной матрицы третьего порядка называется *число*, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило Саррюса (правило треугольника).



Пример 1:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -2 \times 1 \times (-5) + 5 \times 4 \times (-4) + 3 \times 2 \times (-3) - (-3) \times 1 \times (-4) - 4 \times 2 \times (-2) - 5 \times 3 \times (-5) = 10 - 80 - 18 - 12 + 16 + 75 = -9.$$

Пример 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 8 - 24 - 60 + 6 - 24 = -49.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n – го порядка называется *определитель* $(n - 1)$ – го порядка, полученный из данной матрицы вычеркиванием i – й строки и j – го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12; \text{ и т. д. всего 9 миноров.}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы называется его *минор*, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \times M_{11} = 17.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \times M_{12} = -1 \times M_{12} = 12.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 30 = -26; \text{ и т.д.}$$

Теорема Лапласа

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ по I стр.} = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \\ \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} \text{ по II стр.} = -2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \\ \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-12 + 4) + 5 \times (9 - 12) - 1 \times (-6 + 24) = 16 - 15 - 18 = -49.$$

Свойства определителей.

1. Определитель равен нулю, если содержит:

- нулевую строку или нулевой столбец;
- две одинаковые строки (столбца);
- две пропорциональных строки (столбца).

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ -9 & 12 & -15 \end{vmatrix} = 0; \text{III} = \text{I} \times (-3).$$

2. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (30 + 24 + 4 - 24 + 8 + 15) = 2 \times 57 = 114.$$

3. Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца) умноженные на одно число.