Сборник задач по линейной алгебре

(Практикум)

Задачи для самостоятельного решения.

1.1. Вычислить определитель, используя элементарные преобразования матрицы:

1) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

1.2. Вычислить определитель 3-го порядка, где α, β, γ – вещественные числа:

$$\begin{vmatrix} 2 & \sin^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 2 & \sin^2\beta & -\cos^2\beta \\ 2 & \sin^2\gamma & -\cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

1.3. Доказать, что $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

1.4. Вычислить $\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}$.

1.5. Решить неравенство относительно x: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

1.6. Вычислить определитель 5-го порядка: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 36 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

1.7. Вычислить $\det A$, зная, что в матрице A сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами.

1.8. Найти все комплексные числа, умножение на которые матрицы порядка n не изменит её определителя.

1.9. 1) Найти число всех миноров k-го порядка квадратной матрицы порядка n, содержащихся в фиксированных k строках.

2) Найти число всех миноров k-го порядка квадратной матрицы порядка n.

1.10. Пусть в матрице порядка n какие-либо n элементов равны 1, а остальные равны нулю. Чему может быть равен определитель матрицы A?

1.11. Найти все числа, умножение на которые квадратной матрицы порядка n не меняет её определителя.

1.12. Вычислить определитель n-го порядка:

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad 5)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1.13. Доказать, что для любой вещественной матрицы A выполняется неравенство $\det\left(AA^T\right) \geq 0$.

1.14. Вычислить определитель Вандермонда $W\left(x_1,\dots x_n\right)$, где $x_1,\dots x_n$ – переменные:

$$W\left(x_1,\dots x_n\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1.15. Найти ранг и указать базисный минор матрицы:

$$1)\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \qquad 2)\ \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{Vmatrix} \qquad 3)\ \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{Vmatrix}$$

4) $\begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{Vmatrix}$ 5) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$

1.16. Пусть $\mathbf{a}^T = (a_1, \ldots a_n)$ - строка и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots b_n)^T$ - столбец.

1) Вычислить ранг матрицы $A = \mathbf{b}\mathbf{a}^T$.

2) Пусть $\mathrm{rang} A = 1$. Показать, что A можно представить как произведение некоторого столбца на некоторую строку.

2. Обратная матрица. Матричные уравнения

Для невырожденной квадратной матрицы A можно ввести понятие обратной матрицы A^{-1}, удовлетворяющей равенству $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Элементы обратной матрицы a_{ij}^{-1} находятся по формуле $a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j}\,\overline{M}_{ji} \big/ \det A$. Из определения обратной матрицы следует, что $\det\left(A^{-1}\right) = 1/\det A$. При решении матричных уравнений вида $AX = B$ решение находится в виде $X = A^{-1}B$, где A^{-1} есть обратная матрица к матрице A.

Пример 1. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Решение. Вначале вычисляем определитель матрицы, который в данном случае равен двум. Следовательно, матрица не вырождена и имеет обратную. Далее запишем транспонированную матрицу $A^T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$, затем составим матрицу из алгебраических дополнений матрицы A^T и умножим полученную матрицу на число, равное $1/\det A$. В результате получаем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{Vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, окончательно имеющую вид $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{Vmatrix}$.

Выполним проверку, вычислив произведение AA^{-1}, в результате получив единичную матрицу.

Пример 2. Найти матрицу X из уравнения $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение**.** Уравнение имеет вид $AX = B$, откуда $X = A^{-1}B$. Находим обратную матрицу для матрицы A, для которой имеем $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$. Вычисляя произведение $X = A^{-1}B$, получаем ответ $X = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Выполним проверку, подставив найденную матрицу X в исходное уравнение. После вычисления произведения AX получается матрица, равная матрице B в правой части уравнения.

Задачи для самостоятельного решения**.**

3.1. Найти обратную матрицу для матрицы A поворота в плоскости (xy) на угол , $A = \begin{Vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{Vmatrix}$.

3.2. Найти обратную матрицу для следующих матриц 3-го порядка:

1) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ 2) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$

3.3. Пусть матрица A удовлетворяет уравнению $A^2 + A + E = O$, где E - единичная, а O - нулевая матрицы. Доказать, что A^{-1} существует и найти её.

3.4. Пусть матрицы A и B коммутируют, т.е. $AB = BA$, и имеют обратные. Доказать, что в этом случае выполняется $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.5. Пусть матрицы A и C не вырождены. Решить матричные уравнения и выразить неизвестную матрицу X:

1) $AX = O$ 2) $AX = B$ 3) $XA = B$

4) $AXC = B$ 5) $A(X + C) = B$

3.6. Найти обратную матрицу для матрицы $A = E - \lambda I$, где E – единичная матрица, I – квадратная матрица такая, что $I^2 = E$, λ – число, причём $|\lambda| < 1$.

3.7. Найти матрицу X из уравнения:

1) $X\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$ 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} X = X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ 3) $X^{-1}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$

4) $X\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$ 5) $\begin{Vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$

6) $X\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$

3.8. Показать, что определитель унитарной матрицы U с комплексными элементами, обладающей свойством $U^{-1} = U^{+}$, является комплексным числом, модуль которого равен единице.

Задачи для самостоятельного решения.

6.1. Используя теорему Кронекера-Капелли, проверить совместность системы линейных уравнений и найти общие решения совместных систем:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

6.2. Найти общее решение системы:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$ (a и b - произвольные числа).

6.3. Среди многочленов степени, не превосходящей 2, найти два линейно независимых многочлена $f_1(t)$ и $f_2(t)$ таких, что $f_1(2) = f_2(2) = 3$.

6.4. При каком значении параметра λ система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$ является совместной?