Математический анализ

4. Ряды

Исследуйте на сходимость ряд ∑n=1∞(−1)nn\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}∑n=1∞n(−1)n.

Решения

4. Ряды

Ряд ∑n=1∞(−1)nn\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}∑n=1∞n(−1)n сходится по признаку Лейбница (чередующийся ряд с убывающими по модулю членами).

объяснение

Для исследования на сходимость ряда ∑n=1∞(−1)nn\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}∑n=1∞n(−1)n применим признак Лейбница. Признак Лейбница гласит, что чередующийся ряд ∑(−1)nan\sum (-1)^n a_n∑(−1)nan (где an>0a_n > 0an>0) сходится, если выполняются следующие условия:

1. **Последовательность {an}\{a_n\}{an} монотонно убывает, то есть an+1≤ana_{n+1} \leq a_nan+1≤an для всех nnn.**
2. **limn→∞an=0\lim_{n \to \infty} a_n = 0limn→∞an=0.**

В нашем случае an=1na_n = \frac{1}{n}an=n1. Проверим эти условия:

1. Убывание последовательности {an}\{a_n\}{an}

Последовательность an=1na_n = \frac{1}{n}an=n1 является убывающей. Действительно, 1n+1<1n\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}n+11<n1 для всех n≥1n \geq 1n≥1. Это очевидно, поскольку при увеличении nnn знаменатель увеличивается, а дробь уменьшается.

2. Предел последовательности {an}\{a_n\}{an}

Рассмотрим предел limn→∞1n\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}limn→∞n1:

limn→∞1n=0\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0n→∞limn1=0

Так как оба условия признака Лейбница выполнены, ряд ∑n=1∞(−1)nn\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}∑n=1∞n(−1)n сходится.

Итог

Ряд ∑n=1∞(−1)nn\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}∑n=1∞n(−1)n сходится по признаку Лейбница, так как последовательность 1n\frac{1}{n}n1 является убывающей и стремится к нулю при n→∞n \to \inftyn→∞.