Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица вида:

$$A_{\text{в}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1, \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных из уравнений системы, начиная со второго уравнения по m – тое уравнение.

При этом путем элементарных преобразований матрица системы приводится к треугольной (если $m = n$ и определитель системы $\neq 0$) или ступенчатой (если $m < n$) форме.

Затем, начиная с последнего по номеру уравнения, находятся все неизвестные.

Алгоритм метода Гаусса:

1) Составить расширенную матрицу системы, включающую столбец свободных членов.

2) Если $a_{11} \neq 0$, то первую строку делим на a_{11} и умножаем на $(-a_{21})$ и прибавляем вторую строку. Аналогично дойти до m–той строки:

I стр. делим на a_{11} и умножаем на $(-a_{m1})$ и прибавляем m – тую стр.

При этом из уравнений, начиная со второго по m – тое, исключится переменная x_1.

3) На 3 – м шаге вторая строка используется для аналогичных элементарных преобразований строк с 3 – й по m – тую. При этом исключится переменная x_2, начиная с 3 – й строки по m – тую, и т. д.

В результате этих преобразований система приведется к треугольной или ступенчатой форме (в случае треугольной формы под главной диагональю нули).

Приведение системы к треугольной или ступенчатой форме называется *прямым ходом метода Гаусса*, а нахождение неизвестных из полученной системы называется *обратным ходом*.

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Прямой ход. Приведём расширенную матрицу системы

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду. Переставим первую и вторую строки матрицы A_b, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Сложим вторую строку полученной матрицы с первой, умноженной на (–2), а её третью строку – с первой строкой, умноженной на (–7). Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right).$$

К третьей строке полученной матрицы прибавим вторую строку, умноженную на (–3), в результате чего получим ступенчатую матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы привели данную систему уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ \qquad 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ \qquad\qquad -x_3 = -2. \end{cases},$$

Обратный ход. Начиная с последнего уравнения полученной ступенчатой системы уравнений, последовательно найдём значения неизвестных: $x_3 = 2,\ x_2 = 5,\ x_1 = 1.$