Системы линейных однородных уравнений. Исследование решений. Фундаментальная система решений.

Однородной системой m – линейных уравнений с n – неизвестными называется система *уравнений вида*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Теорема. Система (3) всегда имеет хотя бы одно тривиальное решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При решении однородной системы линейных уравнений возможны следующие случаи:

1) Если $m = n$ и определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$, то $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$. Тогда система (3) имеет единственное тривиальное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ - по формулам Крамера.

2) Если $m = n$, но определитель матрицы системы $\Delta = 0$, то система (3) имеет множество решений.

3) Если $m<n$, то система (3) имеет множество решений.

Определение. Система линейно независимых решений $e_l, e_2, \ldots, e_k$ называется *фундаментальной*, если каждое решение системы (3) является линейной комбинацией решений $e_l, e_2, \ldots, e_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений (3) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы (3) состоит из $n - r$ решений.

Пример:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

m = 3; *n* = 4.

$$A\text{в} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 14x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow$ x_1, x_2, x_3 – базисные, x_4 – свободное.

Пусть $x_4 = C$, тогда

$x_3 = x_4 \Rightarrow x_3 = C$

$x_2 - 7C - 14C = 0$

$x_2 = 21C$

$x_1 - 21C + 2C + 5C = 0$

$x_1 = 14C$

Ответ:

$x_1 = 14C$;

$x_2 = 21C$;

$x_3 = C$;

$x_4 = C$.