Правило Крамера решения систем *n* – линейных уравнений с *n* – неизвестными.

Рассмотрим систему 2 – х линейных уравнений с 2 – мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Решим эту систему методом подстановки:

Из первого уравнения следует:

$$x_2 = \frac{b_1 - a_{11}x_1}{a_{12}};$$

Подставив во второе уравнение, получим:

$$a_{21} \cdot x_1 + \frac{a_{22} \cdot (b_1 - a_{11}x_1)}{a_{12}} = b_2;$$

$$a_{21} \cdot x_1 + \frac{a_{22} \cdot b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1}{a_{12}} = b_2; \ \Big| \cdot a_{12}$$

$$a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot b_1 - a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 = b_2 \cdot a_{12};$$

$$x_1 \cdot (a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) = b_2 \cdot a_{12} - a_{22} \cdot b_1 \Big| \cdot (-1)$$

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$$

Подставляем значение x_1в формулу для x_2, получим:

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_1 - a_{11} \cdot b_1 \cdot a_{22} + a_{11} \cdot b_2 \cdot a_{12}}{a_{12} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{a_{11}\cdot b_2 - a_{21}\cdot b_1}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta};$$

Определитель Δ — определитель матрицы системы;

Δx_1 — определитель переменной x_1;

Δx_2 — определитель переменной x_2;

Формулы:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta};\ldots,\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta};\ \Delta \neq 0;$$

– называются *формулами Крамера.*

При нахождении определителей неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заменяется столбец коэффициентов при той переменной, определитель которой находят, на столбец свободных членов.

Пример: Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Составим и вычислим сначала главный определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\times3\times3 + (-1)\times(-4)\times1 + 2\times2\times2 - 1\times3\times2 - 2(-1)\times3 - 2(-4)\times5 =$$

$$= 45 + 4 + 8 - 6 + 6 + 40 = 97$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta};$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из определителя Δ путем замены 1– го, 2 – го или 3 – го столбца, соответственно, на столбец свободных членов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 19 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=97,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 19 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=291,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 19 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-194$$

Таким образом:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{97}{97}=1;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{293}{97}=3;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-\frac{194}{97}=-2$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -2$.