Математический анализ

8. Числовые ряды

Вычислите сумму ряда ∑n=1∞1n(n+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}∑n=1∞n(n+1)1.

Решения

8. Числовые ряды

∑n=1∞1n(n+1)=∑n=1∞(1n−1n+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)n=1∑∞n(n+1)1=n=1∑∞(n1−n+11)

объяснение

Рассмотрим числовой ряд ∑n=1∞1n(n+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}∑n=1∞n(n+1)1. Чтобы исследовать его на сходимость и вычислить сумму, применим метод разложения в простейшие дроби.

1. Разложение в простейшие дроби

Начнём с разложения дроби 1n(n+1)\frac{1}{n(n+1)}n(n+1)1 на простейшие дроби. Найдём коэффициенты AAA и BBB так, чтобы:

1n(n+1)=An+Bn+1\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}n(n+1)1=nA+n+1B

Для этого объединим дроби в правой части уравнения и приравняем числители:

A(n+1)+Bnn(n+1)=1n(n+1)\frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}n(n+1)A(n+1)+Bn=n(n+1)1

Из этого уравнения следует:

A(n+1)+Bn=1A(n+1) + Bn = 1A(n+1)+Bn=1

Рассмотрим уравнение для всех nnn:

An+A+Bn=1⇒(A+B)n+A=1An + A + Bn = 1 \quad \Rightarrow \quad (A + B)n + A = 1An+A+Bn=1⇒(A+B)n+A=1

Приравняем коэффициенты при nnn и свободный член:

A+B=0иA=1A + B = 0 \quad \text{и} \quad A = 1A+B=0иA=1

Из второго уравнения сразу находим AAA:

A=1A = 1A=1

Подставляем значение AAA в первое уравнение:

1+B=0⇒B=−11 + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -11+B=0⇒B=−1

Таким образом, получили:

1n(n+1)=1n−1n+1\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}n(n+1)1=n1−n+11

2. Запись ряда в новой форме

Теперь можем переписать ряд ∑n=1∞1n(n+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}∑n=1∞n(n+1)1 с использованием найденного разложения:

∑n=1∞1n(n+1)=∑n=1∞(1n−1n+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)n=1∑∞n(n+1)1=n=1∑∞(n1−n+11)

3. Исследование ряда

Рассмотрим частичную сумму SNS_NSN этого ряда:

SN=∑n=1N(1n−1n+1)S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)SN=n=1∑N(n1−n+11)

4. Телескопическая сумма

Этот ряд является телескопическим, то есть при раскрытии скобок и суммировании многие члены взаимно уничтожаются:

SN=(11−12)+(12−13)+(13−14)+…+(1N−1N+1)S_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right)SN=(11−21)+(21−31)+(31−41)+…+(N1−N+11)

Всё сокращается, кроме первого и последнего членов:

SN=1−1N+1S_N = 1 - \frac{1}{N+1}SN=1−N+11

5. Предел частичной суммы

Найдём предел частичной суммы SNS_NSN при N→∞N \to \inftyN→∞:

limN→∞SN=limN→∞(1−1N+1)=1−0=1\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - 0 = 1N→∞limSN=N→∞lim(1−N+11)=1−0=1

Итог

Ряд ∑n=1∞1n(n+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}∑n=1∞n(n+1)1 сходится, и его сумма равна:

∑n=1∞1n(n+1)=1\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1n=1∑∞n(n+1)1=1