Основные сведения о матрицах.

Матрицей размерности $m\times n$ называется ***прямоугольная таблица чисел***, состоящая из m– строк и n– столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются ***ее элементами***.

Элемент, стоящий на пересечении строки с номером i(i– той строки),

$i = 1, 2...m$ и столбца с номером j(j– того столбца),

$j = 1, 2\ldots n$ – обозначается a_{ij}.

Матрица обозначается заглавными буквами $A,B,C\ldots$, а их элементы – соответствующими прописными буквами.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = 3$

$A_{21} = -2$

$A_{22} = 5$

$A_{32} = -1$

Виды матриц

1. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей – строкой или вектором – строкой. $B_{1\times n}= (b_{11}\, b_{12}\ldots b_{1n})$.

2. Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей – столбцом или вектором – столбцом. $C_{m\times 1} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{11} \\ c_{m1} \end{pmatrix}$.

3. Матрица называется квадратной n– го порядка, если у нее число строк равно числу столбцов и равно n.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$ – квадратная матрица третьего порядка

Главная диагональ

Элементы квадратной матрицы, у которых совпадает номер строки и столбца, образуют ***главную диагональ***.

Квадратная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, а остальные элементы равны 0, называется ***единичной матрицей***.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Операции над матрицами и их свойства.

1. Произведение матрицы на число.

Произведением матрицы A на число λназывается такая матрица B, каждый элемент которой находится по формуле:

$$\boldsymbol{b_{ij} = \lambda \times a_{ij}}$$

Пример:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

$-3A = \begin{pmatrix} -3 \times (-4) & -3 \times 5 & -3 \times (-3) \\ -3 \times 0 & -3 \times (-2) & -3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 & 9 \\ 0 & 6 & -21 \end{pmatrix}$

2. Сумма матриц.

Суммой матриц A и B одинаковой размерности называется матрица C, каждый элемент которой находится по формуле: ($C_{ij}= A_{ij} +B_{ij}$), т.е. матрицы складываются поэлементно.

Пример: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5 & 2 \\ 4+(-6) & -1+1 \\ 1+(-4) & 0+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

3. Разность матриц.

$A - B = A + (-1) \times B$

Пример: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5 & 2-(-4) \\ 4-(-6) & -1-1 \\ 1-(-4) & 0-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 10 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

4. Произведение матриц.

Произведением матрицы $A_{m\times l}$на матрицу $B_{l\times n}$называется матрица $C_{m\times n}$,каждый элемент которойc_{ij}равен сумме произведений всех элементов i – ой строки матрицы A на соответствующие элементыj – того столбца матрицы B.

Пример:

$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$C_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2\times 3+(-3)\times 4+0\times 1 & 2\times(-2)+(-3)\times(-3)+0\times 0 & 2\times 1+(-3)\times 2+0\times(-1) \\ -1\times 3+4\times 4+3\times 1 & -1\times(-2)+4\times(-3)\times 0 & -1\times 1+4\times 2+3\times(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6-12+0 & -4+9+0 & 2-6+0 \\ -3+16+3 & 2-12+0 & -1+8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -4 \\ 16 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Возведение в степень с натуральным показателем квадратных матриц.

$A^n = \underbrace{A \times A \ldots A}$

n – раз.

Пример:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times (-3) + 4 \times 2 & -3 \times 4 + 4 \times (-5) \\ 2 \times (-3) + (-5) \times 2 & 2 \times 4 + (-5) \times (-5) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9 + 8 & -12 - 20 \\ -6 - 10 & 8 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -32 \\ -16 & 33 \end{pmatrix}$

6. Транспонирование матриц.

Матрица A^T (или A^I) называется транспонированной к матрице A, если строки матрицы A заменены соответствующими столбцами матрицы B, т.е. при транспонировании строки и столбцы меняются местами.

$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

$A^T_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

7. Свойства операций.

1. Коммутативность (переместительный закон)

A + B = B + A; т. е. сумма матриц коммутативна.

A × B≠B × A; т. е. произведение не коммутативно.

2. Ассоциативность (сочетательный закон)

A + (B + C) = (A + B) + C;

A × (B × C) = (A × B) × C;

3. Дистрибутивность (распределительный закон)

(A + B) × C = A×C + B×C;

4. A × E = A.