Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли, базисные решения.

Теорема 1(Кронекера-Капелли). Система m – линейных уравнений с n – неизвестными *совместна* только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

$$r\ (A) = r\ (A_{в})$$

Пример:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 65 \neq 0,\ r\ (\mathrm{A}) = 3;$$

$$\mathrm{A}_{\text{В}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow r\ (\mathrm{A}_{\text{В}}) \leq 3, \text{ так как}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 45 + 144 - 40 + 72 - 18 = 195 \Rightarrow r\ (\mathrm{A}_{\text{В}}) = 3 \Rightarrow$$

$r(\mathrm{A}) = r\ (\mathrm{A}_{\text{В}})$ => по теореме Кронекера – Капелли система совместна.

Теорема 2. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, т. е. $r(A) = n$, то система имеет единственное решение.

Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r\ (A) < n$, то система имеет множество решений.

Тогда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *базисными*, если минор, составленный из коэффициентов при этих неизвестных ≠ 0, остальные ($n – r$) – неизвестных называются *свободными*.

Пример: найти базисное решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$A\text{в} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right);$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 => r(A) = 3 =>$ *x_1, x_2, x_3* – базисные, x_4 – свободная.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ \quad 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad\quad x_3 \qquad = \ 2 \end{cases}$$

Пусть $x_4 = C = const;$ $x_3 = 2$, тогда

$2\,x_2 + 2 + 2\,C = 0 \mid \cdot 2$

$x_2 = -C - 1$

$x_1 - C - 1 + 2 + C = 2;$

$x_1 = 1$

Ответ:

$x_1 = 1;$

$x_2 = -C - 1;$

$x_3 = 2;$

$x_4 = C.$

Найдем частное решение:

Пусть $C = 1$, тогда

$x_1 = 1;$

$x_2 = -2;$

$x_3 = 2;$

$x_4 = 1.$

Проверка:

Подставим значения x_1, x_2, x_3, и x_4 в систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 = 2 \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} 1 - 2 + 2 + 1 = 2 \\ 2 - 4 - 2 + 2 = -2 \\ 1 + 2 \qquad\quad - 1 = 2 \end{cases}$$