Математический анализ

9. Тригонометрические интегралы

Вычислите интеграл ∫0πsin2(x) dx\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx∫0πsin2(x)dx.

Решения

9. Тригонометрические интегралы

∫0πsin2(x) dx=∫0π1−cos(2x)2 dx=x2|0π−sin(2x)4|0π=π2\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \left. \frac{x}{2} \right|_0^{\pi} - \left. \frac{\sin(2x)}{4} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}∫0πsin2(x)dx=∫0π21−cos(2x)dx=2x0π−4sin(2x)0π=2π

объяснение

Для нахождения интеграла ∫0πsin2(x) dx\int_{0}^{\pi} \sin^2(x) \, dx∫0πsin2(x)dx воспользуемся методом преобразования с помощью тригонометрической формулы и последующим интегрированием. Рассмотрим шаги подробнее:

1. Применение тригонометрической тождества

Используем тождество для преобразования sin2(x)\sin^2(x)sin2(x):

sin2(x)=1−cos(2x)2\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}sin2(x)=21−cos(2x)

Это тождество позволяет упростить интегрирование:

∫0πsin2(x) dx=∫0π1−cos(2x)2 dx\int_{0}^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \int_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx∫0πsin2(x)dx=∫0π21−cos(2x)dx

2. Разделение интеграла

Разделим интеграл на два более простых:

∫0π1−cos(2x)2 dx=12∫0π1 dx−12∫0πcos(2x) dx\int_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} 1 \, dx - \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \cos(2x) \, dx∫0π21−cos(2x)dx=21∫0π1dx−21∫0πcos(2x)dx

3. Интегрирование каждого слагаемого

Рассмотрим каждый интеграл отдельно:

Интеграл от постоянной:

12∫0π1 dx=12[x]0π=12(π−0)=π2\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} 1 \, dx = \frac{1}{2} \left[x \right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi - 0) = \frac{\pi}{2}21∫0π1dx=21[x]0π=21(π−0)=2π

Интеграл от cos(2x)\cos(2x)cos(2x):

12∫0πcos(2x) dx\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \cos(2x) \, dx21∫0πcos(2x)dx

Для интегрирования cos(2x)\cos(2x)cos(2x) используем замену переменной. Пусть u=2xu = 2xu=2x, тогда du=2 dxdu = 2 \, dxdu=2dx и dx=du2dx = \frac{du}{2}dx=2du.

Изменим пределы интегрирования:

- При x=0x = 0x=0, u=0u = 0u=0.
- При x=πx = \pix=π, u=2πu = 2\piu=2π.

Перепишем интеграл:

12∫0πcos(2x) dx=12∫02πcos(u)⋅du2=14∫02πcos(u) du\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \cos(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int_{0}^{2\pi} \cos(u) \, du21∫0πcos(2x)dx=21∫02πcos(u)⋅2du=41∫02πcos(u)du

Интеграл от cos(u)\cos(u)cos(u) равен sin(u)\sin(u)sin(u):

14∫02πcos(u) du=14[sin(u)]02π=14(sin(2π)−sin(0))=14(0−0)=0\frac{1}{4} \int_{0}^{2\pi} \cos(u) \, du = \frac{1}{4} \left[\sin(u) \right]_{0}^{2\pi} = \frac{1}{4} (\sin(2\pi) - \sin(0)) = \frac{1}{4} (0 - 0) = 041∫02πcos(u)du=41[sin(u)]02π=41(sin(2π)−sin(0))=41(0−0)=0

4. Суммирование результатов

Теперь сложим полученные результаты:

∫0πsin2(x) dx=π2−0=π2\int_{0}^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}∫0πsin2(x)dx=2π−0=2π

Итог

Интеграл ∫0πsin2(x) dx\int_{0}^{\pi} \sin^2(x) \, dx∫0πsin2(x)dx равен:

∫0πsin2(x) dx=π2\int_{0}^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2}∫0πsin2(x)dx=2π