Математический анализ

5. Дифференциальные уравнения

Решите дифференциальное уравнение
dydx=y⋅cos(x)\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos(x)dxdy=y⋅cos(x).

Решения

5. Дифференциальные уравнения

dydx=ycos(x)⇒dyy=cos(x) dx⇒ln|y|=sin(x)+C⇒y=Cesin(x)\frac{dy}{dx} = y \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \cos(x) \, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \sin(x) + C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{\sin(x)}dxdy=ycos(x)⇒ydy=cos(x)dx⇒ln∣y∣=sin(x)+C⇒y=Cesin(x)

объяснение

Рассмотрим дифференциальное уравнение dydx=ycos(x)\frac{dy}{dx} = y \cos(x)dxdy=ycos(x) и решим его, используя метод разделения переменных.

1. **Разделение переменных:**

Перепишем уравнение в форме, позволяющей отделить переменные yyy и xxx:

dydx=ycos(x)\frac{dy}{dx} = y \cos(x)dxdy=ycos(x)

Разделим обе части на yyy и умножим на dxdxdx:

1y dy=cos(x) dx\frac{1}{y} \, dy = \cos(x) \, dxy1dy=cos(x)dx

2. **Интегрирование обеих частей:**

Теперь интегрируем обе части уравнения:

∫1y dy=∫cos(x) dx\int \frac{1}{y} \, dy = \int \cos(x) \, dx∫y1dy=∫cos(x)dx

Интеграл от 1y\frac{1}{y}y1 по yyy равен ln|y|\ln|y|ln|y|, а интеграл от cos(x)\cos(x)cos(x) по xxx равен sin(x)\sin(x)sin(x):

ln|y|=sin(x)+C\ln|y| = \sin(x) + Cln∣y∣=sin(x)+C

где CCC — константа интегрирования.

3. **Решение для yyy:**

Экспоненцируем обе части уравнения, чтобы выразить yyy:

eln|y|=esin(x)+Ce^{\ln|y|} = e^{\sin(x) + C}eln∣y∣=esin(x)+C

Поскольку eln|y|=|y|e^{\ln|y|} = |y|eln∣y∣=∣y∣ и esin(x)+C=esin(x)⋅eCe^{\sin(x) + C} = e^{\sin(x)} \cdot e^Cesin(x)+C=esin(x)⋅eC, обозначим eCe^CeC новой константой C′C'C′ (где C′>0C' > 0C′>0):

∣y∣=C′esin(x)|y| = C' e^{\sin(x)}∣y∣=C′esin(x)

Учитывая, что yyy может быть как положительным, так и отрицательным, запишем общее решение:

y=±C′esin(x)y = \pm C' e^{\sin(x)}y=±C′esin(x)

Для простоты обозначим C=±C′C = \pm C'C=±C′ как произвольную константу, которая может быть положительной или отрицательной:

y=Cesin(x)y = C e^{\sin(x)}y=Cesin(x)

Итог:

Решение дифференциального уравнения dydx=ycos(x)\frac{dy}{dx} = y \cos(x)dxdy=ycos(x) имеет вид:

y=Cesin(x)y = C e^{\sin(x)}y=Cesin(x)

где CCC — произвольная константа.