Системы линейных алгебраических уравнений СЛУ (Основные понятия и определения).

1. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется *система уравнений вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

2. *Решением* системы уравнений (1) называется совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающая каждое уравнение системы в тождество.

3. Система уравнений (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

4. Система уравнений (1) называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если у нее более одного решения.

5. В результате элементарных преобразований система (1) преобразуется к равносильной ей системе (т.е. имеющей то же множество решений).

К элементарным преобразованиям систем линейных уравнений относятся:

1. Отбрасывание нулевых строк.
2. Изменение порядка строк.
3. Прибавление к элементам любой строки элементов другой строки, умноженных на одно число.

Методы решения систем линейных уравнений.

1) Метод обратной матрицы (матричный метод) решения систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Системой n линейных уравнений с n неизвестными называется *система уравнений вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases} \quad (2)$$

Запишем систему (2) в матричном виде, для этого введем обозначения.

Матрица коэффициентов перед переменными:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица переменных.

B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов.

Тогда система (2) примет вид:

A×**X = B** – матричное уравнение.

Решив уравнение, получим:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{B}$$

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2\,x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

1) $|A| = 15 + 8 - 18 - 9 - 12 + 20 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ матрица A^{-1} существует.

2) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $A_{11}^T = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3;$

$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(10 + 4) = -14;$

$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9;$

$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(-10 + 9) = 1;$

$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2;$

$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 2) = 1;$

$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1;$

$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10;$

$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

4) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{14}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{10}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$;

$X = A^{-1} \times B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{14}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{10}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24+70-90}{4} \\ \frac{8-10+10}{4} \\ \frac{-8-50+70}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$