Теорема Лапласа

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$\begin{vmatrix} a_{\mathbf{11}} & a_{\mathbf{12}} & a_{\mathbf{13}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{\mathbf{22}} & a_{\mathbf{23}} \\ a_{\mathbf{31}} & a_{\mathbf{32}} & a_{\mathbf{33}} \end{vmatrix}$ по I стр. = $a_{\mathbf{11}} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{\mathbf{22}} & a_{\mathbf{23}} \\ a_{\mathbf{32}} & a_{\mathbf{33}} \end{vmatrix} + a_{\mathbf{12}} \times (-1)^{1+2} \times$

$\times \begin{vmatrix} a_{\mathbf{21}} & a_{\mathbf{23}} \\ a_{\mathbf{31}} & a_{\mathbf{33}} \end{vmatrix} + a_{\mathbf{13}} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{\mathbf{21}} & a_{\mathbf{22}} \\ a_{\mathbf{31}} & a_{\mathbf{32}} \end{vmatrix}$;

Пример:

$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ по II стр. $= -2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times$

$\times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-12+4) + 5 \times (9-12) - 1 \times (-6+24) = 16-15-18 = -49.$

Свойства определителей.

1. Определитель равен нулю, если содержит:

- нулевую строку или нулевой столбец;
- две одинаковые строки (столбца);
- две пропорциональных строки (столбца).

Пример:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ -9 & 12 & -15 \end{vmatrix} = 0$; III = I × (-3).

2. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\times(30+24+4-24+8+15) = 2\times57 = 114.$$

3. Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца) умноженные на одно число.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \; \mathrm{I}\times 5+\mathrm{II};\quad \mathrm{I}\times(-2)+\mathrm{III};\quad \mathrm{I}\times(-4)+\mathrm{IV};$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 17 & -6 & 0 & 23 \\ -5 & 7 & 0 & -4 \\ -14 & 5 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} 17 & -6 & 23 \\ -5 & 7 & -4 \\ -14 & 5 & -11 \end{vmatrix}.$$