Математический анализ

6. Экстремумы функций

Найдите точки экстремума функции f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10.

Решения

6. Экстремумы функций

f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10f′(x)=4x3−12x2+12x−24f′(x)=4(x−3)(x2+x−2)=4(x−3)(x−1)(x+2)f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10 \\ f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 24 \\ f'(x) = 4(x-3)(x^2 + x - 2) = 4(x-3)(x-1)(x+2)f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10f′(x)=4x3−12x2+12x−24f′(x)=4(x−3)(x2+x−2)=4(x−3)(x−1)(x+2)

Экстремумы в точках x=3x = 3x=3, x=1x = 1x=1, x=−2x = -2x=−2.

объяснение

Для нахождения экстремумов функции f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10 нужно найти точки, в которых её производная равна нулю, и определить знаки производной до и после этих точек. Рассмотрим шаги подробнее:

1. Найдём производную функции f(x)f(x)f(x)

f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10

Применяем правила дифференцирования для многочленов:

f′(x)=ddx(x4)−ddx(4x3)+ddx(6x2)−ddx(24x)+ddx(10)f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(4x^3) + \frac{d}{dx}(6x^2) - \frac{d}{dx}(24x) + \frac{d}{dx}(10)f′(x)=dxd(x4)−dxd(4x3)+dxd(6x2)−dxd(24x)+dxd(10) f′(x)=4x3−12x2+12x−24f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 24f′(x)=4x3−12x2+12x−24

2. Найдём критические точки

Для нахождения критических точек нужно решить уравнение f′(x)=0f'(x) = 0f′(x)=0:

4x3−12x2+12x−24=04x^3 - 12x^2 + 12x - 24 = 04x3−12x2+12x−24=0

Вынесем общий множитель:

4(x3−3x2+3x−6)=0⇒x3−3x2+3x−6=04(x^3 - 3x^2 + 3x - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 6 = 04(x3−3x2+3x−6)=0⇒x3−3x2+3x−6=0

3. Разложим на множители

Попробуем найти корни уравнения x3−3x2+3x−6=0x^3 - 3x^2 + 3x - 6 = 0x3−3x2+3x−6=0 методом подбора. Один из корней этого уравнения — x=3x = 3x=3. Используем метод деления многочлена на x−3x - 3x−3:

x3−3x2+3x−6=(x−3)(x2+x−2)x^3 - 3x^2 + 3x - 6 = (x - 3)(x^2 + x - 2)x3−3x2+3x−6=(x−3)(x2+x−2)

Теперь разложим квадратный трёхчлен x2+x−2x^2 + x - 2x2+x−2:

x2+x−2=(x−1)(x+2)x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)x2+x−2=(x−1)(x+2)

Таким образом, производная разложится следующим образом:

4(x−3)(x−1)(x+2)=04(x - 3)(x - 1)(x + 2) = 04(x−3)(x−1)(x+2)=0

4. Найдём корни уравнения

Теперь решим уравнение:

4(x−3)(x−1)(x+2)=04(x - 3)(x - 1)(x + 2) = 04(x−3)(x−1)(x+2)=0

Получим критические точки:

x=3,x=1,x=−2x = 3, \quad x = 1, \quad x = -2x=3,x=1,x=−2

5. Определим экстремумы

Проверим знаки производной f′(x)f'(x)f′(x) на промежутках, разделённых найденными критическими точками: (−∞,−2)(-\infty, -2)(−∞,−2), (−2,1)(-2, 1)(−2,1), (1,3)(1, 3)(1,3), (3,∞)(3, \infty)(3,∞).

- **Для x∈(−∞,−2)x \in (-\infty, -2)x∈(−∞,−2):
f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=−3)f'(x) = 4(x - 3)(x - 1)(x + 2) \quad (\text{выбираем, например, } x = -3)f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=−3)
f′(−3)=4(−3−3)(−3−1)(−3+2)=4(−6)(−4)(−1)=−96(отрицательно)f'(-3) = 4(-3 - 3)(-3 - 1)(-3 + 2) = 4(-6)(-4)(-1) = -96 \quad (\text{отрицательно})f′(−3)=4(−3−3)(−3−1)(−3+2)=4(−6)(−4)(−1)=−96(отрицательно)**
- **Для x∈(−2,1)x \in (-2, 1)x∈(−2,1):
f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=0)f'(x) = 4(x - 3)(x - 1)(x + 2) \quad (\text{выбираем, например, } x = 0)f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=0)
f′(0)=4(0−3)(0−1)(0+2)=4(−3)(−1)(2)=24(положительно)f'(0) = 4(0 - 3)(0 - 1)(0 + 2) = 4(-3)(-1)(2) = 24 \quad (\text{положительно})f′(0)=4(0−3)(0−1)(0+2)=4(−3)(−1)(2)=24(положительно)**
- **Для x∈(1,3)x \in (1, 3)x∈(1,3):
f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=2)f'(x) = 4(x - 3)(x - 1)(x + 2) \quad**

(\text{выбираем, например, } x = 2)f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=2) f′(2)=4(2−3)(2−1)(2+2)=4(−1)(1)(4)=−16(отрицательно)f'(2) = 4(2 - 3)(2 - 1)(2 + 2) = 4(-1)(1)(4) = -16 \quad (\text{отрицательно})f′(2)=4(2−3)(2−1)(2+2)=4(−1)(1)(4)=−16(отрицательно)

- Для x∈(3,∞)x \in (3, \infty)x∈(3,∞):
  f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=4)f'(x) = 4(x - 3)(x - 1)(x + 2) \quad (\text{выбираем, например, } x = 4)f′(x)=4(x−3)(x−1)(x+2)(выбираем, например, x=4) f′(4)=4(4−3)(4−1)(4+2)=4(1)(3)(6)=72(положительно)f'(4) = 4(4 - 3)(4 - 1)(4 + 2) = 4(1)(3)(6) = 72 \quad (\text{положительно})f′(4)=4(4−3)(4−1)(4+2)=4(1)(3)(6)=72(положительно)

6. Выводим экстремумы

Исходя из знаков производной, можем определить экстремумы функции:

- x=−2x = -2x=−2 — локальный минимум (так как f′f'f′ меняется с отрицательного на положительное).
- x=1x = 1x=1 — локальный максимум (так как f′f'f′ меняется с положительного на отрицательное).
- x=3x = 3x=3 — локальный минимум (так как f′f'f′ меняется с отрицательного на положительное).

Итог

Экстремумы функции f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10f(x)=x4−4x3+6x2−24x+10 находятся в точках x=3x = 3x=3, x=1x = 1x=1 и x=−2x = -2x=−2.