Векторное произведение векторов (геометрический смысл, свойства).

Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку векторов (рис. 2), если $\bar{c}$ находится по ту сторону плоскости, содержащей векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, откуда кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$к$\bar{b}$ можно совершить против часовой стрелки.

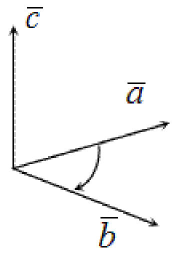


Рис. 1

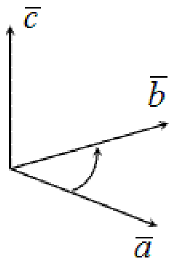


Рис. 2

В противном случае векторы образуют левую тройку векторов (рис. 1).

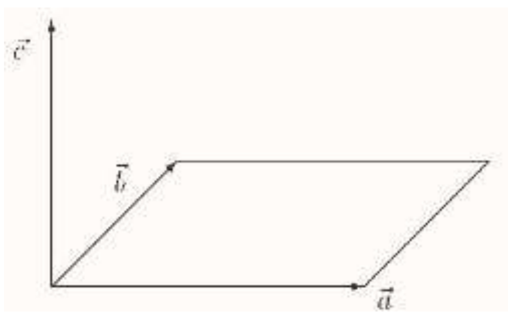
Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\boldsymbol{\bar{c}} = \boldsymbol{\bar{a}} \times \boldsymbol{\bar{b}}$, удовлетворяющей следующим 3–м свойствам:

1. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\alpha$, где$\alpha = \angle(\bar{a}; \bar{b})$.

2. $\bar{c} \perp \bar{a}$; $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку векторов.

Геометрический смысл.



$S_{\text{пароаллелограмма}} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha \Rightarrow |\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}|$,

т.е. $|\boldsymbol{\bar{a}} \times \boldsymbol{\bar{b}}| = \boldsymbol{S}_{\textbf{пароаллелограмма}}$

Модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен *S*параллелограмма, построенного на векторах – множителях.

Свойства векторного произведения.

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ – не коммутативно
2. Если $\bar{a}$ коллинеарен $\bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т. к. $\sin 0^0 = 0$.
3. $\lambda\,(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \cdot \bar{b})$ – ассоциативность
4. $(\bar{a}+\bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ – дистрибутивность

Выражение векторного произведения через координаты.

Пусть $\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$; $\bar{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$;

Разложим ***a*** и ***b*** по базисным векторам:

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}.$$

Используя свойства векторного произведения, получаем

$$\bar{a} \times \bar{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1k) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2k) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + x_1 \cdot y_2 \cdot \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + x_1 \cdot z_2 \cdot \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} +$$

$$+ y_1 \cdot x_2\, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + y_1 \cdot y_2\, \boldsymbol{j};\boldsymbol{j} + y_1 \cdot z_2\, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} +$$

$$+ z_1 \cdot x_2\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + z_1 \cdot y_2\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + z_1 \cdot z_2\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

По определению векторного произведения находим

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}. \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \mathbf{0}.$$

Учитывая эти равенства, формулу (1) можно записать так:

$$\bar{a} \times \bar{b} = x_1y_2\boldsymbol{k} - x_1z_2\,\boldsymbol{j} - y_1x_2\boldsymbol{k} + y_1z_2\,\boldsymbol{i} + z_1x_2\,\boldsymbol{j} - z_1y_2\boldsymbol{i}$$

или

$$\bar{a} \times \bar{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\boldsymbol{k}. \quad (2)$$

Формула (2) дает выражение для векторного произведения двух векторов, заданных своими координатами.

Полученную формулу можно записать в другом более удобном для запоминания виде:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \quad (3)$$

Обычно формулу (3) записывают еще короче:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} (4)$$

– формула для вычисления векторного произведения.

Тогда,

$$\boldsymbol{S}_{\text{пароаллелограмма}} = |\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\boldsymbol{S}_{\text{треугольника}} = \frac{|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}|}{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\mathbf{2}};$$

Пример: найти векторное произведение векторов:

$$\bar{a} = (6; 7; 10) \text{ и } \bar{b} = (8; 5; 9)$$

Решение:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 7 & 10\\ 8 & 5 & 9\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}7 & 10\\ 5 & 9\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}6 & 10\\ 8 & 9\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}6 & 7\\ 8 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}(7\cdot 9-5\cdot 10)-\bar{j}(6\cdot 9-8\cdot 10)+\bar{k}(6\cdot 5-8\cdot 7)=$$

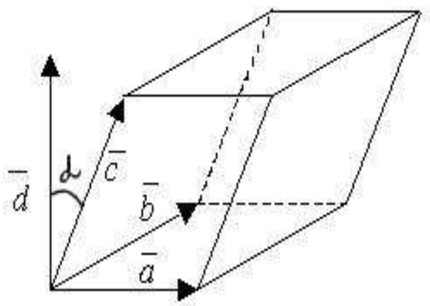
$$=13\bar{i}+26\bar{j}-26\bar{k}=(13;26;-26)$$

Смешанное произведение векторов (геометрический смысл, свойства).

Смешанным произведением векторов$(\bar{a}\ \times\ \bar{b})\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора$(\bar{a}\times\bar{b})$ на вектор$\bar{c}$.

Геометрический смысл

Построим на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$ параллелепипед и найдем его объем V.



$$V_{\text{параллелепипеда}} = S_{\text{осн.}}\cdot H = \left|\bar{a}\ \times\ \bar{b}\right|\cdot\left|\bar{d}\right| = \left|\bar{a}\ \times\ \bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot \mathrm{Cos}\alpha = \left|\bar{a}\ \cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|.$$

$$\left|\boldsymbol{\bar{a}}\ \cdot\boldsymbol{\bar{b}}\cdot\boldsymbol{\bar{c}}\right| = \mathbf{V}_{\textbf{параллелепипеда}}$$

Модуль смешанного произведениятрех векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах – множителях.

$$\mathbf{V}_{\textbf{тетраэдра}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{V}_{\textbf{параллелепипеда}}$$

Выражение векторного и смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов.

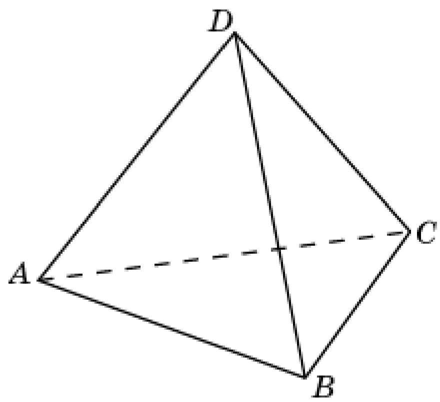
Пусть $\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$; $\bar{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$;

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{x_3} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{y_3} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{z_3} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} & \boldsymbol{z_2} \\ \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{y_3} & \boldsymbol{z_3} \end{vmatrix}$$

– формула для вычисления смешанного произведения.

Пример:



Дано:

ABCD – тетраэдр.

A (– 2; 3; – 4)

B (3; – 1; 5)

C (4; – 4; 2)

D (5; 7; 1)

Найти:

1) $S_{\text{грани}}$ABC

2) Уравнение BCD

3) V_{ABCD}

Решение:

1) $S_{\Delta}ABC = \frac{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$

$\overline{AB} = (3+2;\ -1-3; 5+4) = (5; -4; 9)$

$\overline{AC} = (4+2; -4-3; 2+4) = (6; -7; 6)$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 5 & -4 & 9 \\ 6 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 9 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}\bar{k} =$$

$$= (-24+63)\bar{\imath} - (30-54)\bar{\jmath} + (-35+24)\bar{k} = 39\bar{\imath} - 24\bar{\jmath} + 11\bar{k}.$$

$$S_{\Delta}ABC = \frac{|\overline{AB}\ \times\ \overline{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} = \frac{\sqrt{39^2+24^2+11^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1521+576+121}}{2} = \frac{\sqrt{2018}}{2}.$$

2) $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-5 \\ 4-3 & -4+1 & 2-5 \\ 5-3 & 7+1 & 1-5 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-5 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}(x-3) - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}(y+1) + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}(z-5) = 0$

$36(x-3) - 2(y+1) + 14(z-5) = 0$

$36x - 108 - 2y - 2 + 14z - 70 = 0$

$36x - 2y + 14z - 180 = 0 \ \Big| : 2$

$18x - y + 7z - 90 = 0$ – уравнение BCD.

3) $\overline{AB} = (5; -4; 9)$

$\overline{AC} = (6; -7; 6)$

$\overline{AD} = (7; 4; 5)$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 9 \\ 6 & -7 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -175 + 216 - 168 + 441 - 120 + 120 = 314.$

$V_{ABCD} = \frac{|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|}{6} = \frac{314}{6} = \frac{157}{3} = 52\frac{1}{3}$ кубических единиц.